arXiv:2601.02159v1 [math.DG] 5 Jan 2026

具有非平行 Benentitensors 的射影等价超伪凯勒度量与超伪凯勒-爱因斯坦度量及其四维标准形

Gianni Manno，Filippo Salis

2026年1月6日

摘要

射影等价度量的研究，即研究具有相同无参数测地线的度量，是一个经典且成熟的研究领域。在凯勒背景下，这一研究分支称为 *c-projective geometry*：其主要研究 *c-projectively equivalent metrics*，即具有相同曲线的凯勒度量；这些曲线是测地线的复数类比，称为 *J-planar*，其中 J 是复结构。本文通过研究具有相同 *$\mathcal{T}$-planar curves* 的超伪凯勒度量，发展了超伪凯勒背景下射影等价的理论，其中 $\mathcal{T}$ 是超复结构：我们称这类度量为 *pc-projectively equivalent*。在建立任意维数下的一些一般性结果后，我们重点讨论四维情形。本文的一项主要成果是对四维 pc-射影等价（但非仿射等价）度量作出局部描述；作为该结果的应用，我们刻画了其中哪些度量属于爱因斯坦型。

MSC 2020：53A20, 53C15, 53C25, 32Q15, 32Q20

关键词：射影等价、pc-射影几何、超K¨ahler 度量、超K¨ahler-爱因斯坦度量、Benenti 张量。

1 引言

首先，有必要解释*pc*-射影几何 这一名称的由来：它代表超复射影几何，其基本定义将在下文第 1.1 节给出。这个名称借鉴了*c*-射影几何一词，后者代表复射影几何，这是一个广为人知的研究领域 [10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 24, 26] ，其主要研究对象是具有相同*J*-平面曲线的 K¨ahler 度量，其中 J 是复结构；这些曲线是（伪）黎曼度量的测地线的复数类比。

1.1 pc-射影几何的基本定义

几乎超复流形是一个 $2n$维流形 M ，配备了一个端同态场$\mathcal{T}$，满足 $\mathcal{T}^2 = \mathrm{Id}$，其特征值为 1 和 -1，其对应的特征分布

$$T^{\pm} := \ker(\mathcal{T} \mp \mathrm{Id})$$

为 n维。分布 $T^{\pm}$ 可积的几乎超复流形称为超复流形：这等价于要求 $\mathcal{T}$的 Nijenhuis 张量消失。拟 K ¨ ahler 流形是一个配备了拟厄米度量 g的超复流形 M ，也就是说，该度量是一个伪黎曼度量，并满足

$$g\big(\mathcal{T}(\cdot)\,,\mathcal{T}(\cdot)\big) = -g(\cdot\,,\cdot)\,,$$

其对应的基本2-形式

$$\omega(\cdot\,,\cdot) = g\big(\mathcal{T}(\cdot)\,,\cdot\big) \tag{1}$$

是辛的。下文中，我们用三元组 (M、 g、 $\mathcal{T}$) 表示这样的超复 K¨ahler 流形。事实证明，g具有中性号差，即 (n、n)，此外，分布 $T^{\pm}$是 g-各向同性的，也就是说， g满足

$g(T^+, T^+) = g(T^-, T^-) = 0$。鉴于此，在一个 n 维超复 K¨ahler 流形上，自然的局部坐标选择是零坐标：由于 $\mathcal{T}$的特征分布 T^+和 T^-是可积的，因此可以在局部选取适配于 T^+和 T^-的适配坐标 $(x^1, \ldots\ldots, x^{2n})$，即满足以下条件的坐标：对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$， ∂_{x^i}和 $\partial_{x^{n+i}}$分别属于 T^+和 T^-。在这些坐标下，超复结构 $\mathcal{T}$ 的分量矩阵呈现简单的分块形式

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0_n \\ 0_n & -\mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

而超复度量¨具有 g 非对角分块形式。

正则曲线 γ ： $I \subseteq \mathbb{R} \to M$ 称为 $\mathcal{T}$-平面曲线，如果存在光滑函数 α， $\beta \in C^\infty(I)$，使得

$$\nabla^g_{\dot\gamma}\dot\gamma = \alpha\,\dot\gamma + \beta\,\mathcal{T}(\dot\gamma), \tag{3}$$

其中 ∇^g 在此处以及下文中表示 g的列维-奇维塔联络。我们强调， $\mathcal{T}$-平面曲线的定义实际上可以不依赖任何度量来表述。事实上，给定一个几乎超复流形（M， $\mathcal{T}$），可以考虑一个超复联络，即 ∇ 上的无挠线性联络， TM 使得 $\mathcal{T}$是平行的，也就是说，对于任意这样的联络，都有 $\nabla\mathcal{T} = 0$：对于任意此类联络，曲线 γ 的 $\mathcal{T}$-平面性都可以完全按照上述方式定义[1]。

X 上的向量场称为（无穷小）*pc*-射影对称性，如果其局部流将 $\mathcal{T}$-平面曲线映射为 $\mathcal{T}$-平面曲线。

于是可以考虑共享相同 $\mathcal{T}$-平面曲线的超复联络族。我们将$\widehat{\ }$此类族称为*pc*-射影类，并称两个超复联络 ∇ 和 ∇ 为*pc*-射影等价，如果它们属于同一个pc-射影类，记作 $[\nabla]$。相应地，若两个超双曲凯勒度量 g 和$\hat{}g$ 的列维-奇维塔联络pc-射影等价，则称这两个度量*pc*-射影等价。我们用 $[g]$ 表示与 $g$pc-射影等价的度量集合。若两个超双曲凯勒度量共享同一个列维-奇维塔联络，则称它们仿射等价。显然，两个仿射等价的超双曲凯勒度量也pc-射影等价。

pc-射影等价度量最重要的性质之一是：如果已知其中两个不成比例的度量，就可以构造出一个由此类度量组成的二参数族。更准确地说，如果 g和$\hat{}g$ 属于同一个pc-射影类，那么以下族中的度量

$$\frac{\left(\alpha\det(g)^{\frac{1}{2(n+1)}}g^{-1} + \beta\det(\hat g)^{\frac{1}{2(n+1)}}\hat g^{-1}\right)^{-1}}{\det\left(\alpha\det(g)^{\frac{1}{2(n+1)}}g^{-1} + \beta\det(\hat g)^{\frac{1}{2(n+1)}}\hat g^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

也属于同一个 pc-射影类。当然，如果已知任意多个 pc-射影等价的 para-K¨ahler 度量，就可以反复应用公式（4）。这一结果并非显然，我们将在第2节中证明并讨论它，尤其是推论 8。

1.2 研究动机

超-K¨ahler 流形也可以用双拉格朗日结构来等价描述。事实上，若 $(M, g, \mathcal{T})$ 是一个超-K¨ahler 流形，那么 $\mathcal{T}$ 的特征分布 $T^\pm$ 构成两个互补的可积拉格朗日分布，它们相对于由 (1) 给出的 ω 而言是拉格朗日的。反过来，给定一个辛流形 (M, ω)，并赋予其两个互补的可积拉格朗日分布 $T^\pm$，则可通过令 $\mathcal{T}$ 满足 $\mathcal{T}|_{T^\pm} = \pm\mathrm{Id}$ 来定义一个端同态。于是， $\mathcal{T}$ 是一个超复结构，且 $(M, g, \mathcal{T})$ 成为一个超-K¨ahler 流形，其中$g = \omega(\mathcal{T}(\cdot)\ \cdot)$。正是这些重要方面，使超-K¨ahler 几何，更一般地说，超复几何成为一个相当活跃的研究领域，这一点从该领域的大量论文中可见一斑。在这方面，综述 [16] 展示了这一几何的广泛应用，主要聚焦于李群在上述流形上的作用，并附有历史介绍。还可以参阅

[1] $\mathcal{T}$-平面曲线的概念与 K¨ahler 流形情形下的 J-平面曲线概念十分相近，其中 J 是复结构；更多细节和研究动机见 [10] 。 $\mathcal{T}$-平面曲线和 J-平面曲线这两个概念都是更一般定义的特例，即 F-*planar curve*，其中 F 是一个一般的端同态场。关于这一主题的基础知识，可参阅 [27, 28, 29] 。

[1, 2, 3] 以作进一步研究，并查阅其中的参考文献以了解更多阅读资料。关于其他应用，可参见[20] 及其中的参考文献；该文还展示了超-K¨ahler 流形的拉格朗日子流形与蒙日-康托罗维奇质量输运问题之间存在直接关系。

在 pc-射影几何中，会出现许多自然问题，它们在实几何和 c-射影几何中都有直接的类比（见 [10, 12, 13, 21, 25] 及其中的参考文献）。

首先，一个经典问题是所谓的度量化问题，其表述如下：给定一个 pc-射影类 $[\nabla]$，它是否包含某个 para-K¨ahler 度量的列维-奇维塔联络？如果一个 pc-射影类 $[\nabla]$ 是可度量化的，即 $[\nabla] = [\nabla^g]$ 对于某个 para-K¨ahler 度量 g成立，那么下一个自然问题便是理解该类 $[g]$ 中与 $g$pc-射影等价的度量的维数“有多大”，也就是其移动度。还可以研究在一个 pc-射影类中是否存在具有某些特殊性质的度量，例如爱因斯坦度量，或者研究容许 pc-射影向量场的 para-K¨ahler 曲面，即 para-K¨ahler 背景下的李问题[2]。

超凯勒度量的局部几何显然在上述问题中发挥着基础性作用。全文中，我们在超凯勒框架内建立了若干结果，以阐明这些问题的不同方面。然而，本文工作的核心是对超凯勒曲面上射影等价的超凯勒度量进行详尽的局部描述，并特别关注爱因斯坦度量这一子类。尽管原则上该问题可以在任意偶数维中表述，但即使在实四维中，情形也已比凯勒情形丰富得多，见第 1.3.3 节。

记号与约定

关于超复数、超全纯函数、超全纯图册和超全纯截面曲率的定义，请参见 [1, 2, 3, 16, 19, 20, 22, 23]。

我们采用爱因斯坦求和约定，即重复出现的指标默认进行求和。此外，记

- f_{x^i} f 关于 x^i 变量的导数；- $\partial_i := \partial_{x^i}$ 与坐标系（x^1，……，x^{2n}）相关联的第 i个坐标向量场，若不存在歧义；- $dx^i dx^j$ dx^i 与 dx^j之间的对称积，即，

$$dx^i dx^j := \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)\,;$$

- $\mathcal{L}_X$ 沿向量场 X的李导数；- $\Gamma(E)$丛 E的局部截面模；- ∇^g 度量 g的列维-奇维塔联络。

1.3 主要结果概述

1.3.1 初步结果：para-K¨ahler背景下的Benenti张量

尽管仿射等价度量本身仍值得独立研究，但遵循 [10], 本文从射影几何的视角聚焦于最自然的情形：pc-射影等价但非仿射等价的度量。研究这类度量时，以下(1，1)型张量场 A 至关重要：设 g，$\hat{}g$ 是两个pc-射影等价度量，则定义

$$A := \left(\frac{\det \hat{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}} \hat{g}^{-1} g. \tag{5}$$

[2]在原始论文中， [21], S. Lie针对实二维流形提出了这一问题，尽管该问题可以轻易推广到任意维数。另请参阅 [12, 25]。例如，可以在[10]中找到K¨ahler对应结果。

（注意，由于超双曲K¨ahler度量具有中性号差，前述量的定义是良好的。于是，我们也有$\det \hat{}_g^{\,g} > 0$ $\det A > 0$。） A 的一个重要性质是：它关于$\hat{}g$ 的列维-奇维塔联络 $\nabla^{\hat{g}}$ （等价地，关于 ∇^g）平行，当且仅当 g 与$\hat{}g$ 仿射等价。事实上，由(5)可得 $g = (\det A)^{1/2}\, \hat{}gA$。对 $\nabla^{\hat{g}}$ 求导，得到

$$\nabla^{\hat{g}} g = (\det A)^{1/2}\, \hat{g} \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(A^{-1}\nabla^{\hat{g}} A)\, A + \nabla^{\hat{g}} A \right).$$

因此，

$$\nabla^{\hat{g}} g = 0 \iff \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(A^{-1}\nabla^{\hat{g}} A)\, \mathrm{Id} + A^{-1}\nabla^{\hat{g}} A = 0.$$

对后一个关系取迹可得 $\operatorname{tr}(A^{-1}\nabla^{\hat{g}} A) = 0$，代回后得到 $\nabla^{\hat{g}} A = 0$。特别地， $\nabla^{\hat{g}} g$ 的消失等价于 $\nabla^{\hat{g}} A = 0$，这恰好意味着 g 与 $\hat{}g$ 的列维-奇维塔联络重合。

为了解决求解 pc-射影等价的拟 K¨ahler 度量标准形的问题，如第2节所示，研究空间至关重要

$$\mathcal{A}(g, \mathcal{T}) = \{ A \in \Gamma(\mathrm{End}(TM)) \mid A \text{ is } g\text{-symmetric}, [A, \mathcal{T}] = 0, \ A \text{ satisfies (7) below } \forall \text{ vector fields } X \}, \quad (6)$$

$$\nabla^g_X A = X^\flat \otimes \Lambda + \Lambda^\flat \otimes X - (\mathcal{T}X)^\flat \otimes \mathcal{T}\Lambda - (\mathcal{T}\Lambda)^\flat \otimes \mathcal{T}X, \quad (7)$$

其中

$$\Lambda = \tfrac{1}{4} \operatorname{grad} \operatorname{tr} A\,, \quad (8)$$

其中 $^\flat$： $TM \to T^*M$是与 g相关联的音乐同构。我们注意到，(7) 是支配 c-射影等价的 K¨ahler 度量的方程的拟复类比（参见 [10, 方程 (2.4)]）。

事实上，论文中证明的张量（5）的一项重要性质是它们属于 $\mathcal{A}(g, \mathcal{T})$。此外，任意非退化的 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 都属于类型（5）（见下文推论 10）。特别地，鉴于 para-K¨ahler 度量具有中性号差，其行列式大于零。因此，利用（5），度量

$$\hat{g} = (\det A)^{-\frac{1}{2}} g A^{-1} \quad (9)$$

与 g pc-射影等价。类比实情形 [9], 中给出的定义，我们将 $\mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 的非退化张量所构成的子集称为 para-K¨ahler 度量 $(g, \mathcal{T})$ 的*Benenti* 张量空间：

$$\textit{Benenti tensors of } (g, \mathcal{T}) := \{ A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T}) \mid \det(A) \neq 0 \}.$$

事实上，与实情形相同，鉴于上文所述，知道 $(g, \mathcal{T})$ 的 Benenti 张量空间，就能构造出与 g pc-射影等价的度量的整个类 $[g]$。实际上，若 A 是一个 Benenti 张量，则由（9）给出的度量 $\hat{}g$ 属于 $[g]$，而公式（4）给出了一族与 g pc-射影等价的度量。

另一方面，从辛观点来看，若记 $\phi = g(A\mathcal{T}\cdot, \cdot)$，其中 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$，通过直接计算可知，(7) 等价于

$$2\nabla^g_X \phi = d \operatorname{tr}_\omega \phi \wedge (\mathcal{T}X)^\flat - \mathcal{T} d \operatorname{tr}_\omega \phi \wedge X^\flat\,. \quad (10)$$

我们注意到，这恰好是哈密顿 2-形式的方程；这一方程已在 K¨ahler 框架下得到广泛研究（例如参见 [4, 5, 6, 7, 8]）。

1.3.2 主要定理

第一个主要结果适用于任意维数，见下文定理；它讨论的是 pc-射影等价的 para-K¨ahler-爱因斯坦度量。

定理1。 设 g 和$\hat{}g$ 是同一流形上的 *pc*-射影等价的 *para-K¨ahler*-爱因斯坦度量。那么，度量(4)是属于 g 的同一 *pc*-射影等价类的 *para-K¨ahler*-爱因斯坦度量。

利用该定理以及即将给出的定理 2 中所包含的结果，我们将在第 7 节对所有具有非平行 Benenti 张量的四维 para-K¨ahler- 爱因斯坦度量进行分类。
综合考虑截至目前所述内容，在此背景下，研究 para-K¨ahler 度量及其 Benenti 张量，即三元组（g， $\mathcal{T}$， A），其中 $A \in \mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 非退化，并研究其局部等价性，显然十分重要。更确切地说，我们称两个三元组（g， $\mathcal{T}$， A）和（g'， $\mathcal{T}'$， A'）局部等价，当且仅当存在一个局部微分同胚 ϕ，使得

$$\phi^*(g') = g, \quad \phi^*(\mathcal{T}') = \mathcal{T}, \quad \phi^*(A') = A.$$

这可以通过考虑 A 的标量不变量来实现。特别地，在四维情形下，我们考虑 $\mathcal{T}$-不变分布

$$D = \operatorname{span}\left\{ \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\operatorname{tr} A\,,\ \operatorname{grad}\sqrt{\det A}\,,\ \tfrac{1}{2}\mathcal{T}\operatorname{grad}\operatorname{tr} A\,,\ \mathcal{T}\operatorname{grad}\sqrt{\det A}\right\}, \tag{11}$$

其秩是区分（g， $\mathcal{T}$， A）的不同局部模型的工具之一。
事实上，下面定理中包含的第二个主要结果，是根据 dim D 给出 para-K¨ahler 曲面的标准形列表，即在上述等价关系下三元组（g， $\mathcal{T}$， A）的列表。区分这些标准形的更精确标准见表 1，第 20 页。

在陈述这一结果之前，有必要作一些说明。在四维情形下，Beneneti 张量至多有两个不同特征值。这一点可以通过将此类张量写成零坐标下的形式看出：它们呈现为含有 2 个相同分块的分块对角形式（更多细节见注 11）。

定理 2. 设 $(M, g, \mathcal{T})$ 为一个 ***para-K¨ahler*** 曲面， $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 为其上的一个非平行（相对于 g的列维-奇维塔联络 ∇^g）***Beneneti*** 张量。设 ρ 和 σ 为 A的特征值。那么，在 M中几乎每一点的某个邻域内，都存在一个坐标系 (x^1, x^2, x^3, x^4)，使得三元组 $(g, \mathcal{T}, A)$具有以下形式之一：

- 非退化情形：维数 $D = 4$。
  - 实李乌维尔度量：

$$\begin{aligned} g &= (\rho-\sigma)\,(dx^1dx^1 + \varepsilon\, dx^2dx^2) - \frac{1}{\rho-\sigma}\Big(\rho_{x^1}^2\,(dx^3 + \sigma\, dx^4)^2 + \varepsilon\,\sigma_{x^2}^2\,(dx^3 + \rho\, dx^4)^2\Big), \\ \mathcal{T} &= g^{-1}\omega\,, \quad \text{with} \quad \omega = \rho_{x^1}\, dx^1 \wedge (dx^3 + \sigma\, dx^4) + \sigma_{x^2}\, dx^2 \wedge (dx^3 + \rho\, dx^4)\,, \\ A &= \rho\,\partial_1 \otimes dx^1 + \sigma\,\partial_2 \otimes dx^2 + (\rho+\sigma)\,\partial_3 \otimes dx^3 - \partial_4 \otimes dx^3 + \rho\sigma\,\partial_3 \otimes dx^4 \end{aligned}$$

    其中 $\varepsilon = \pm 1$, $\rho = \rho(x^1)$ 和 $\sigma = \sigma(x^2)$ 是任意函数，满足 $\rho \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\rho_{x^1} \neq 0$,$\sigma_{x^2} \neq 0$。

  - 复刘维尔度量：

$$\begin{aligned} g &= \tfrac{1}{4}(\bar\rho-\rho)\left(dz^2 - d\bar z^2\right) - \frac{4}{\rho-\bar\rho}\left(\bar\rho_{\bar z}^2\big(dx^3 + \rho\, dx^4\big)^2 - \rho_z^2\big(dx^3 + \bar\rho\, dx^4\big)^2\right), \\ \mathcal{T} &= g^{-1}\omega\,, \quad \text{with} \quad \omega = \rho_z\; dz \wedge (dx^3 + \bar\rho\, dx^4) + \bar\rho_{\bar z}\; d\bar z \wedge (dx^3 + \rho\, dx^4), \\ A &= \rho\,\partial_z \otimes dz + \bar\rho\,\partial_{\bar z} \otimes d\bar z + (\rho+\bar\rho)\,\partial_{x^3} \otimes dx^3 - \partial_{x^4} \otimes dx^3 + |\rho|^2\,\partial_{x^3} \otimes dx^4, \end{aligned}$$

    其中 $z = x^1 + i\,x^2$, $\rho = \rho(z)$ 是任意函数，满足 $\rho \neq 0$ 和 $\rho_z \neq 0$。

- 退化情形：维数 $D < 4$。

  –维数 $D = 3$：没有满足该定理假设的 $(g$、 $\mathcal{T}$、 $A)$。– 维数 $D = 2$:

∗ $g = \frac{\rho_{x^2}}{\mu}\, dx^1dx^1 - 2\frac{\nu\rho_{x^2}}{\mu}\, dx^1dx^3 - \mu\rho_{x^2}\, dx^2dx^2 + \frac{\nu^2\rho_{x^2}}{\mu}\, dx^3dx^3 + 2(c-\rho)\nu_{x^4}\, dx^3dx^4$,
$\mathcal{T} = -\mu\,\partial_1 \otimes dx^2 + \nu\,\partial_1 \otimes dx^3 - \frac{1}{\mu}\,\partial_2 \otimes dx^1 + \frac{\nu}{\mu}\,\partial_2 \otimes dx^3 + \partial_3 \otimes \partial_3 - \partial_4 \otimes dx^4$,
$A = \rho\,(\partial_1 \otimes dx^1 + \partial_2 \otimes dx^2) + c(\partial_3 \otimes dx^3 + \partial_4 \otimes dx^4) + (c-\rho)\nu\,\partial_1 \otimes dx^3$,

其中 $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\rho = \rho(x^2)$, $\mu = \mu(x^2)$ 和 $\nu = \nu(x^3, x^4)$ 是任意函数，满足$\mu \neq 0$, $\rho_{x^2} \neq 0$, $\nu_{x^4} \neq 0$。这里 $\sigma = c$。

∗ $g = 2\rho_{x^3}\, dx^1dx^3 + 2\sigma_{x^4}\, dx^1dx^4 + 2\sigma\rho_{x^3}\, dx^2dx^3 + 2\rho\sigma_{x^4}\, dx^2dx^4$,$\mathcal{T}$由(2) 给出，其中 $n = 2$, $A = (\rho+\sigma)\,\partial_1 \otimes dx^1 + \rho\sigma\,\partial_1 \otimes dx^2 - \partial_2 \otimes dx^1 + \rho\,\partial_3 \otimes dx^3 + \sigma\,\partial_4 \otimes dx^4$，其中 $\rho = \rho(x^3)$ 和 $\sigma = \sigma(x^4)$ 是任意函数，满足 $\rho \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\rho_{x^3} \neq 0$,$\sigma_{x^4} \neq 0$。

∗（g、$-\mathcal{T}$、A），其中 g、$\mathcal{T}$、A与上面的点相同。

∗ $g = 2\rho_{x^3}\, dx^1dx^3 - 2\sigma_{x^4}\, dx^1dx^4 + 2\sigma\rho_{x^3}\, 2dx^2dx^3 - 2\rho\sigma_{x^4}\, dx^2dx^4$、
$\mathcal{T} = \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}\,\partial_1 \underline{\otimes d}x^1 + \frac{2\rho\sigma}{\rho-\sigma}\,\partial_1 \underline{\otimes d}x^2 - \frac{2}{\rho-\sigma}\,\partial_2 \underline{\otimes d}x^1 - \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}\,\partial_2 \underline{\otimes d}x^2 - \partial_3 \otimes dx^3 + \partial_4 \otimes dx^4$、$A = (\rho+\sigma)\,\partial_1 \otimes dx^1 + \rho\sigma\,\partial_1 \otimes dx^2 - \frac{k\sigma\rho_{x^3}}{\rho-\sigma}\,\partial_1 \otimes dx^3 - \frac{k\rho\sigma_{x^4}}{\rho-\sigma}\,\partial_1 \otimes dx^4 - \partial_2 \otimes dx^1 + \frac{k\rho_{x^3}}{\rho-\sigma}\,\partial_2 \otimes dx^3 + \frac{k\sigma_{x^4}}{\rho-\sigma}\,\partial_2 \otimes dx^4 + \rho\,\partial_3 \otimes dx^3 + \sigma\,\partial_4 \otimes dx^4$，其中 $k \in \mathbb{R}$、$\overline{\rho = \rho}\,(x^3)$ 和 $\sigma = \sigma\,(x^4)$ 是满足 $\rho \neq 0$、$\sigma \neq \overline{0}$、$\rho_{x^3} \neq 0$、$\sigma_{x^4} \neq 0$ 的任意函数。− 维数 $D = 1$.

∗ $g = 2\rho_{x^3}\, dx^1dx^3 + 2\big((\rho-c)F\big)_{x^3}\, dx^2dx^3 + 2(\rho-c)F_{x^4}\, dx^2dx^4$,$\mathcal{T}$由(2) 给出，其中 $n = 2$, $A = \rho\,\partial_1 \otimes dx^1 + (\rho-c)F\,\partial_1 \otimes dx^2 + c\,\partial_2 \otimes dx^2 + \rho\,\partial_3 \otimes dx^3 + (c-\rho)\frac{F_{x^3}}{F_{x^4}}\,\partial_4 \otimes dx^3 + c\,\partial_4 \otimes dx^4$, 这里 $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\rho = \rho(x^3)$ 和 $F = F(x^2, \varphi(x^3, x^4))$ 是满足 $\rho \neq 0$,$\rho_{x^3} \neq 0$, $F_{x^4} \neq 0$ 的任意函数。这里 $\sigma = c$。

∗（g、$-\mathcal{T}$、A）其中 g、$\mathcal{T}$、A与上述点相同。

推论 3。 设 g 和$\hat{}g$ 是同一个 *para-K¨ahler* 曲面上的两个 *pc*-射影等价度量。那么，要么存在一个坐标系（x^1、x^2、x^3、x^4），使得 g 取定理 *2* 中所列形式之一，而$\hat{}g$ 取形式（9）；要么二者仿射等价。

推论 4。 作为一个副产品，定理 *2* 的结果直接给出了 *para-K¨ahler* 情形下 *Hamilton- nian* 2-形式的标准形，参见公式（10）附近的讨论。

注 5。 值得注意的是，定理 *2* 中列出的若干退化标准形式，在局部等距变换意义下会导出相同的度量。例如，在维数 $D = 2$ 的情形中，第二、第三和第四族都局部等距于中性号差的标准平坦度量。它们的出现并非偶然。事实上，我们分类的是三元组$(g, \mathcal{T}, A)$，而不是度量 g本身。

1.3.3 与 K¨ahler 情形的差异及新策略

与 K¨ähler 情形相比，para-K¨ähler 情形下出现的标准形更加丰富。事实上，非退化情形 dim $D = 4$ 以及 dim $D = 2$ 情形下的第一族，在 K¨ähler 分类中都有直接对应形式（参见 [10, 定理 3.1]）；然而，定理 2 中出现的其他退化构型，在 K¨ähler 情形下都没有对应形式。这种差异反映了 para-复结构与复结构之间内在的代数差别。具体而言，Benenti 张量特征值的各向同性梯度，以及分布 D出现奇数维秩等现象，在 K¨ähler 情形中都没有对应形式。注记26中对此进行了更详细的讨论；这些结构性原因解释了为何 para-K¨ähler 理论自然呈现出更广泛的局部模型。因此，不能依赖 K¨ähler 情形中已有的知识来指导 para-K¨ähler 情形下的分析。例如，在退化情形中构造适配于 D 的局部标架，就是一个尤为典型的例子，说明 K¨ähler 情形中的技术无法直接移用。尽管分析的某些方面仍可借鉴概念上的类比，但这并不意味着分析会因此变得简单；而且，这些类比仍不足以充分刻画 para-K¨ähler 情形中出现的现象。归根结底，后者需要专门针对其自身结构特征提出额外论证。

1.4 论文结构

在第2节中，我们证明了第1.2节提出的度量化问题虽然表面上是非线性的，但实际上可归结为一个 pc-射影不变线性偏微分方程组的可解性问题。因此，由于其解空间是一个向量空间，我们可以有意义地讨论其维数（称为移动度，参见第1.2节）。通过用 Benenti 张量表示上述方程组，我们得到方程（7）。这一观点为本文中发展的若干结果提供了概念基础。

在第3节中，我们构造了与张量 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$自然相关的典范Killing向量场。这些向量场由 A 的标量不变量获得，构造能够表达定理 2 的标准形的坐标系是其第一步。本节的一个关键结果是一个描述两个 pc-射影等价度量的里奇张量之差的公式；这一恒等式也将在定理1的证明中发挥核心作用。

在第4节中，我们将全部精力用于证明定理1。

在第5、6和7节中，我们讨论超K¨ahler曲面特有的结果；与此相对，前几节的结果适用于任意维数。

在第5节中，我们描述定理2成立的稠密开子集，并确立区分各种标准形类型的精确判据，这些判据汇总于第20页的表 1。我们还从辛观点研究第3节中构造的典范Killing向量场及其在超复结构下的像，并证明这些像也是超全纯的。这项分析对于构造第6节中使用的局部坐标至关重要。

事实上，在第 6 节中，我们主要致力于证明定理 2。导出定理 2 的标准形的不同情形将在不同的小节中分别分析。对于每种情形，我们都构造一组由四个对易向量场组成的特殊集合，从而得到合适的局部坐标，在这些坐标下对方程（7）进行明确研究。有些向量场选自第3节中引入的典范Killing向量场及其在超K¨ahler结构下的像；在某些情况下，还需要用其他向量场补充这一选择，相关讨论将在相应小节中逐一进行。

最后，在第 7 节中，我们确定了定理 2 中出现的度量 g 何时为爱因斯坦度量，以及由式 (9) 给出的相关度量 $\hat{}g$ 何时与 g 同时为爱因斯坦度量。由此，作为定理1的一个推论，我们得到一个二参数族的 para-K¨ähler–爱因斯坦度量，它们具有非平行 Benenti 张量。

2 pc-射影不变方程、度量化问题与 Benenti张量

在第2.1节中，我们证明，可度量性问题，即在给定的联络 pc-射影类 $[\nabla]$ 中寻找列维-奇维塔联络∇^g 的问题，可以表述为求解的存在性问题

一个 pc-射影不变线性偏微分方程组，即方程 (16)；该方程组的未知量为一个 (2，0) 加权张量场，我们将其记为 σ。

在第2.2节中，假设 pc-射影类具有可度量性，我们用某些 (1，1)-张量场来重新表述上述线性方程组，最终得到方程（7）；我们将证明该方程构成集合 $\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$。

2.1 加权$(2,\ 0)$ 张量中的 pc-射影不变方程

设 ∇ 和 ∇ 是超复流形 $(M,\ \mathcal{T})$ 上两个 pc-射影等价联络。通过比较相应的协变导数，可以直接发现，它们的差可以用一个适当的 1-形式 Ψ 表示为

$$\widehat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Psi(X)Y + \Psi(Y)X + \Psi(\mathcal{T}X)\mathcal{T}Y + \Psi(\mathcal{T}Y)\mathcal{T}X\,. \tag{12}$$

在局部坐标中，前述方程可写为

$$\widehat{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \Psi_i\delta^k_j + \Psi_j\delta^k_i + \Psi_p\mathcal{T}^p_i\mathcal{T}^k_j + \Psi_p\mathcal{T}^p_j\mathcal{T}^k_i\,, \tag{13}$$

其中，Γ^k_{ij} 和 $\widehat{\Gamma}^k_{ij}$ 分别表示 ∇和 $\widehat{\nabla}$的克里斯托费尔符号，而 Ψ_i 是1-形式 Ψ的局部分量。反过来，若 (12) 成立，则 ∇和 ∇ 是 pc-射影等价的；这一事实的详细论证见下文命题7的证明。

我们将

$$\mathcal{S}^2_{\mathcal{T}}TM = \{\eta \in \Gamma(S^2TM)\ :\ (\mathcal{T}\otimes\mathcal{T})\,\eta = -\eta\}$$

记为拟厄米对称 (2，0) 张量丛的截面集合。在局部坐标中，$\eta \in \mathcal{S}^2_{\mathcal{T}}TM$ 当且仅当

$$\mathcal{T}^j_p\eta^{pk} = -\eta^{jp}\mathcal{T}^k_p. \tag{14}$$

接下来，我们考虑一个属于 σ 的截面

$$\mathcal{S}^2_{\mathcal{T}}TM \otimes \Gamma\left(\mathrm{Vol}^{\frac{1}{n+1}}\right),$$

其中，$\mathrm{Vol}^{\frac{1}{n+1}}$ 表示权重为 $\frac{1}{n+1}$ 的张量场 $\Lambda^{2n}T^*M$ 所构成的空间。在局部坐标中，

$$\sigma = \sigma^{jk}(\partial_j\otimes\partial_k)\otimes \mathrm{vol}^{\frac{1}{n+1}},\quad \mathrm{vol} := dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{2n}.$$

根据加权张量的定义，我们回顾一下：若进行坐标变换 $x \to y(x)$，并以 J 表示其雅可比矩阵，则 σ 的新分量为

$$\tilde{\sigma}^{km} = |\det J|^{-\frac{1}{n+1}}\sigma^{ij}J^k_iJ^m_j.$$

此外，协变导数 $\nabla\sigma$ 在局部坐标中的表达式为

$$\nabla_i\sigma^{jk} = \sigma^{jk}_{,i} + \Gamma^j_{im}\sigma^{mk} + \Gamma^k_{im}\sigma^{mj} - \tfrac{1}{n+1}\Gamma^p_{ip}\sigma^{jk}. \tag{15}$$

命题 6。设$(M$、$\mathcal{T})$ 为一个超复流形，且 ∇ 为 M上的超复联络。则方程

$$\nabla_X\sigma - X\otimes L - L\otimes X + \mathcal{T}X\otimes\mathcal{T}L + \mathcal{T}L\otimes\mathcal{T}X = 0, \tag{16}$$

其中 $L = \frac{1}{2n}\nabla_l\sigma^{lk}\,\partial_k\otimes$(体积形式) $^{\frac{1}{n+1}}$ 是pc-射影不变的，即它不依赖于在其 *pc*-射影类 $[\nabla]$ 中选择 ∇ 。

证明。设 ∇ 和 ∇ 是两个 pc-射影等价联络。公式 (13) 和 (15) 可用于比较 σ 相对于这两个 pc-射影等价联络的协变导数，从而得到局部方程

$$\left(\widehat{\nabla}_i - \nabla_i\right)\sigma^{jk} = \Psi_p\delta^j_i\sigma^{pk} + \Psi_p\delta^k_i\sigma^{jp} + \Psi_l\left(\mathcal{T}^l_p\mathcal{T}^j_i\sigma^{pk} + \mathcal{T}^l_p\mathcal{T}^k_i\sigma^{jp}\right).$$

注意到 σ 是拟厄米的，参见 (14)，我们得到

$$\left(\widehat{\nabla}_i - \nabla_i\right)\,\sigma^{jk} = \Psi_p\delta^j_i\sigma^{pk} + \Psi_p\delta^k_i\sigma^{jp} - \mathcal{T}^j_i\mathcal{T}^k_p\Psi_l\sigma^{lp} - \mathcal{T}^k_i\mathcal{T}^j_p\Psi_l\sigma^{lp}, \tag{17}$$

这进而意味着

$$\widehat{\nabla}_l\sigma^{lj} = \nabla_l\sigma^{lj} + 2n\,\Psi_p\sigma^{pj}\,. \tag{18}$$

利用公式（17）中刚刚推导出的关系，我们得到

$$\nabla_i\sigma^{jk} - \frac{1}{2n}\left(\delta^j_i\,\nabla_l\sigma^{lk} + \delta^k_i\,\nabla_l\sigma^{lj} - \mathcal{T}^j_i\mathcal{T}^k_p\,\nabla_l\sigma^{lp} - \mathcal{T}^k_i\mathcal{T}^j_p\,\nabla_l\sigma^{lp}\right) \tag{19}$$

不依赖于 pc-射影类 $[\nabla]$ 中 ∇ 的选取。这正是方程（16）左端的坐标表达式。

□

为检验给定 pc-射影类中是否存在超复 K¨ahler 度量，我们可以寻找方程（16）的一个非退化解 σ 。超复 K¨ahler 度量与这类解之间的精确对应关系将在下面的命题中更明确地表述。

命题7. 设$(M,\mathcal{T})$ 为一个超复流形，且 $[\nabla]$ 是 M 上超复联络的一个 *pc*-射影类。那么，存在一个超复 *K¨ahler* 度量 g ，使其列维-奇维塔联络 ∇^g 属于 $[\nabla]$ ，当且仅当 *pc*-射影不变方程 (16)存在一个解，且其矩阵(σ^{ij})在每一点都非退化。此时， g 与 σ 满足关系

$$g^{ij} = |\det\sigma|^{\frac{1}{2}}\,\sigma^{ij}, \qquad \sigma^{ij} = |\det g|^{\frac{1}{2(n+1)}}\,g^{ij}. \tag{20}$$

证明。 我们首先证明充分性。设 σ 是方程（16）的一个非退化解，并根据（20）中的第一个等式定义张量场 g^{ij} 。其逆 g_{ij} 定义了一个伪黎曼度量g ，满足

$$g(\mathcal{T}X,\mathcal{T}Y) = -\,g(X,Y),$$

从而（M， g， $\mathcal{T}$）是一个拟厄米流形。

现在我们构造一个联络 ∇ ，事实证明它将是 g 的列维-奇维塔联络 ∇^g ，并且 $\widehat{\ }$ 属于 pc-射影类 $[\nabla]$。设 ∇ 为这样一个联络，其克里斯托费尔符号与 ∇ 的克里斯托费尔符号通过（13）相关，其中

$$\Psi_i = -\frac{1}{2n}\,\sigma_{im}\,\nabla_l\sigma^{ml}. \tag{21}$$

由公式（12）可知，只要 ∇ 无挠， ∇ 也是无挠的。此外，同一关系表明$\mathcal{T}$是 ∇-平行的：事实上，对于任意向量场 X， Y，

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_X(\mathcal{T}Y) &= \nabla_X(\mathcal{T}Y) + \Psi(X)\mathcal{T}Y + \Psi(Y)\mathcal{T}X + \Psi(\mathcal{T}X)Y + \Psi(\mathcal{T}Y)X\\ &= \mathcal{T}\big(\nabla_XY + \Psi(X)Y + \Psi(Y)X + \Psi(\mathcal{T}X)\mathcal{T}Y + \Psi(\mathcal{T}Y)\mathcal{T}X\big) = \mathcal{T}\big(\widehat{\nabla}_XY\big),\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此 $\nabla\mathcal{T}=0$。于是， ∇ 是一个与 ∇ 具有 pc-射影关系的超复联络。

由于方程 (16) 是 pc-射影不变的，我们可以选取类 $[\nabla]$ 中的任意一个代表元进行计算。利用 (16) 的局部表达式 (19)，并考虑到 (18) 中的 Ψ 由 (21) 给出，可以很容易地验证

$$\widehat{\nabla}_k\sigma^{ij} = 0.$$

因此,

$$\widehat{\nabla}_k\Big(\sigma^{ij}\,|\det\sigma|^{\frac{1}{2}}\Big) = 0\,.$$

由 (20) 可知，这表明 $\widehat{\nabla}g^{ij}=0$，即 $\widehat{\nabla}$ 是 g 的列维-奇维塔联络。因此 $\widehat{\nabla}=\nabla^g$，充分性得证。

现在，我们证明必要条件。设 g 是一个拟 K¨ahler 度量，其 Levi-Civita 联络 ∇^g 属于 pc-射影类 $[\nabla]$。根据式 (20) 中的第二个等式定义 σ 。由于 $\nabla^g\,g^{ij}=0$，可得 $\nabla^g\,\sigma^{ij}=0$。因此， σ 是方程 (16) 的非退化拟厄米解，其中 $\nabla=\nabla^g$，从而证明了必要条件。

□

推论 8. 若 σ 和 $\hat{}\sigma$ 是方程 (16) 的解，则 $\alpha\sigma+\beta\hat{}\sigma$、 α、 $\beta\in\mathbb{R}$ 也是解，因为 (16) 是一个线性偏微分方程组。若 σ 和 $\hat{}\sigma$ 均非退化，则通过公式 (20) 与 $\alpha\sigma+\beta\hat{}\sigma$ 对应的度量恰为 (4)，而这些度量最终证明彼此射影等价。

2.2 控制 pc-射影等价的超双曲凯勒度量的方程 cs

这里我们将上一节的结果专门应用于度量化问题有肯定答案的情形，因此从一个超双曲凯勒流形 $(M,g,\mathcal{T})$ 出发。下文中， σ 由 (20) 给出。

命题 9. 设 $(M,g,\mathcal{T})$ 是一个超双曲凯勒流形。设 $\hat{}\sigma$ 是 *pc*-射影不变方程 (16) 的任意解（可能是退化的），且满足 $\nabla=\nabla^g$。那么，张量场

$$A=\hat{\sigma}\,\sigma^{-1}=|\det g|^{-\frac{1}{2(n+1)}}\,\hat{\sigma}\,g \tag{22}$$

是 g-对称的，与 $\mathcal{T}$ 对易，并满足方程 (7)。此类张量恰好构成集合 $\mathcal{A}(g,\mathcal{T})$。

证明。 由定义 (22) 可直接看出， A 关于 g 对称，并且与 $\mathcal{T}$ 对易。现在，我们证明 A 满足 (7)。由于 g，从而 σ，关于列维-奇维塔联络 ∇^g 是平行的，因此有 $\nabla^g\sigma^{-1}=0$。所以，对于任意向量场 X，有

$$\nabla^g_X A=(\nabla^g_X\hat{\sigma})\,\sigma^{-1}.$$

根据假设，$\hat{}\sigma$ 满足 pc-射影不变方程 (16)。将该表达式代入前一个等式，得到

$$\nabla^g_X A=\left(X^\flat\otimes L+L^\flat\otimes X-(\mathcal{T}X)^\flat\otimes\mathcal{T}L-(\mathcal{T}L)^\flat\otimes\mathcal{T}X\right)\sigma^{-1}.$$

因此，存在一个 向量场 Λ （依赖于 L 和 σ^{-1}），使得上述等式可以写成 s

$$\nabla^g_X A=X^\flat\otimes\Lambda+\Lambda^\flat\otimes X-(\mathcal{T}X)^\flat\otimes\mathcal{T}\Lambda-(\mathcal{T}\Lambda)^\flat\otimes\mathcal{T}X.$$

剩下需要确定 Λ。对最后一个等式取迹，得到

$$X(\operatorname{tr}A)=4\,g(\Lambda,X)\quad\text{for any } X.$$

因此， $\Lambda=\frac{1}{4}$ 梯度 tr A，命题得证。 □

总之，若 $\hat{}\sigma$ 是 pc-射影不变方程（16）的超伪厄米解，则由（22）定义的张量 A 满足方程（7）。因此，如命题 9 所证明的，以这种方式得到的任意张量都属于 $\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$。反过来，每个 $A\in\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 都可以写成某个 pc-射影不变方程（16）的超伪厄米解 $\hat{}\sigma$ 对应的 $A=\hat{}\sigma\,\sigma^{-1}$。事实上，给定 $A\in\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$，令 $\hat{}\sigma:=A\sigma$，我们便得到一个满足该方程的超伪厄米张量，因为 $\nabla^g\sigma=0$ ，且 A 的定义关系（7）直接推出了 $\nabla^g\hat{}\sigma$ 所需的形式。此外，命题7进一步揭示了 pc-射影不变方程（16）的可逆解与拟 K¨ahler 度量之间的关系，这些度量的列维-奇维塔联络属于给定的 pc-射影类。由于本工作的最终目标是研究与固定度量 g pc- 射影等价的拟 K¨ahler 度量，我们因此将注意力集中在 pc- 射影不变方程（ 16 ）的非退化解上，即 $\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 中的非退化元素，也就是 Benenti 张量。

推论 10. *Benenti*张量恰好是(5)所示形式，其中$\hat{}g$ 是与 g*pc*-射影等价的一个 *para-K¨ahler* 度量。

证明. 这一结论可直接由(22)中 A 的定义以及命题7推出，特别是由(20)中的第二个等式推出。

□

注 11。 如果我们固定一个局部零坐标系，即适配于 $\mathcal{T}$ 的特征分布的坐标$T^{\pm}$ （见第 *1.1* 节），那么作为推论 *10* 的结果， A 的分量矩阵取分块对角形式，

$$A=\begin{pmatrix}A' & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix},$$

其中 A' 是一个 $n\times n$ 矩阵。事实上，拟凯勒结构 $\mathcal{T}$ 如 (2) 所示，而拟凯勒度量作为拟厄米度量，在这些坐标下具有非对角分块形式。特别地，有 $\det A>0$，并且

$$\det A' =: \sqrt{\det A} = \left(\frac{\det \hat{g}}{\det g}\right)^{-\frac{1}{2(n+1)}},$$

其中$\hat{}g$ 是与 g*pc*-射影等价的*para-K¨ahler*度量。最后一个等式直接由 A的定义(5) 得出。此外，值得注意的是，函数$\det A'$ 与(12)中出现的*1*-形式Ψ 直接相关。事实上，只要该关系成立，对其取迹便可得到

$$\Psi_i = \frac{1}{2(n+1)}\big(\widehat{\Gamma}^j_{ij} - \Gamma^j_{ij}\big).$$

因此， Ψ是恰当的，可以写成

$$\Psi = d\psi, \qquad with \quad \psi = \frac{1}{4(n+1)}\log\left(\frac{\det \hat{g}}{\det g}\right) = -\frac{1}{4}\log\det A\,. \tag{23}$$

由于列维-奇维塔联络 $\nabla^{\hat{g}}$ 和 ∇^g 满足(12)，因此可得

$$\det A' = e^{-2\psi}. \tag{24}$$

3 pc-射影等价para-K¨ahler度量的典范Killing向量场和Ricci张量

本节研究与 $A\in\mathcal{A}(g,\mathcal{T})$的标量不变量自然相关的向量场；这些标量不变量是其特征多项式的系数。它们的几何意义将在第 6 节变得尤为清晰：届时，它们将作为构造坐标系的基本要素，用于表达定理 2 中的局部标准形。在分析这些向量场时，我们还将得到一个关于pc-射影等价para-K¨ahler度量的里奇张量之差的一般恒等式。该公式见(27)，将在定理1的证明中发挥核心作用。

命题 12. 设 $(M, g, \mathcal{T})$ 是一个 *para-K¨ahler* 流形，且 $A\in\mathcal{A}(g,\mathcal{T})$。那么向量场

$$\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\sqrt{\det A}$$

是 g的 *Killing* 向量场。

证明. 为证明 p roposition，只需在局部验证向量场 $\mathcal{T}$grad $\sqrt{\det}\ A$ 是 Killing 的，即 也就是说，

$$\nabla^g_i(\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\sqrt{\det A})_j + \nabla^g_j(\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\sqrt{\det A})_i = 0 \quad \text{for all } i,j. \tag{25}$$

回顾一下，para-K¨ahler 流形的辛形式 ω 由 (1) 给出。由于根据定义，$\mathcal{T}$grad $\sqrt{\det}\ A=\omega^{-1}\,d(\sqrt{\det}\ A)$，由注 11，特别是公式 (23) 和 (24)，可得

$$\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\sqrt{\det A} = -2\,e^{-2\psi}\,\omega^{-1}(\Psi).$$

回顾一下， ∇^g 保持不变 $\mathcal{T}$，即 $\nabla^g\mathcal{T}=0$，直接计算可得

$$\nabla^g_i\,(\mathcal{T}\text{ 梯度}\sqrt[k]{\det A})_j + \nabla^g_j(\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\sqrt{\det A})_i = -2\big(-2\Psi_i\Psi_k + \nabla^g_i\Psi_k\big)\,\mathcal{T}^k_j - 2\big(-2\Psi_j\Psi_k + \nabla^g_j\Psi_k\big)\,\mathcal{T}_i$$

因此，Killing条件 (25) 等价于要求 (0，2)-张量

$$S := 2\,\Psi\otimes\Psi - \nabla^g\Psi$$

是拟厄米的，即，

$$S(\mathcal{T}\cdot,\mathcal{T}\cdot) = -S(\cdot,\cdot)\,.$$

下面我们将证明这一点。
为此，我们现在考虑一个与 g pc-射影等价的拟凯勒度量 $\hat{}g$ on M。特别地，我们利用公式 (12) 和 (13)，研究 g 与 $\hat{}g$ 的里奇张量之间的关系。回顾曲率张量 R of g 的分量由下式给出：

$$R^k_{lij} = \partial_i\Gamma^k_{lj} - \partial_j\Gamma^k_{li} + \Gamma^k_{ir}\Gamma^r_{lj} - \Gamma^k_{jr}\Gamma^r_{li}$$

$\widehat{\ }$（曲率张量 R of $\hat{}g$ 的分量也类似），由此可得

$$\widehat{R}^k_{lij} - R^k_{lij} = \nabla^g_i\big(\widehat{\Gamma}^k_{lj} - \Gamma^k_{lj}\big) - \nabla^g_j\big(\widehat{\Gamma}^k_{li} - \Gamma^k_{li}\big) + \big(\widehat{\Gamma}^k_{ir} - \Gamma^k_{ir}\big)\big(\widehat{\Gamma}^r_{lj} - \Gamma^r_{lj}\big) - \big(\widehat{\Gamma}^k_{jr} - \Gamma^k_{jr}\big)\big(\widehat{\Gamma}^r_{li} - \Gamma^r_{li}\big).$$

分别关于 k 和 i 取迹，利用 $\nabla^g\mathcal{T} = 0$ 这一事实并考虑 (13)，经过繁琐计算可得 g 与 $\hat{}g$ 的里奇张量之间的以下关系：

$$\widehat{\mathrm{Ric}}_{lj} - \mathrm{Ric}_{lj} = \nabla^g_l\Psi_j - (2n+1)\nabla^g_j\Psi_l + \mathcal{T}^r_l\mathcal{T}^k_j\nabla^g_k\Psi_r + \mathcal{T}^r_j\mathcal{T}^k_l\nabla^g_k\Psi_r + 2(n-1)\Psi_l\Psi_j + 2(n-1)\Psi_r\mathcal{T}^r_l\,\Psi_s\mathcal{T}^s_j.$$

由于 Ψ 是一个恰当的 1-形式，其协变导数 $\nabla\Psi$ 是对称的。因此，前述关系可以方便地改写为

$$\widehat{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric} = -2n\big(\nabla^g\Psi - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big) + 2\big(\nabla^g\Psi(\mathcal{T}\cdot,\mathcal{T}\cdot) - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big). \quad (26)$$

众所周知，任意拟凯勒度量的里奇张量都是拟厄米的（例如参见 [2, 命题 5.4]）；因此，(26) 的右侧也必须是拟厄米的。应用拟厄米 (0，2) 张量的定义性质，我们得到

$$\begin{aligned}&-2n\big(\nabla^g\Psi - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big) + 2\big(\nabla^g\Psi(\mathcal{T}\cdot,\mathcal{T}\cdot) - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big)\\ &\qquad = 2\big(\nabla^g\Psi - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big) - 2n\big(\nabla^g\Psi(\mathcal{T}\cdot,\mathcal{T}\cdot) - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big),\end{aligned}$$

这意味着

$$\nabla^g\Psi - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T}) = \nabla^g\Psi(\mathcal{T}\cdot,\mathcal{T}\cdot) - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T}).$$

因此，里奇张量 (26) 的差可以写成更简洁的形式：

$$\widehat{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric} = -2(n-1)\big(\nabla^g\Psi - \Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big). \quad (27)$$

最后，注意到

$$\widehat{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric} + 2(n-1)\big(\Psi\otimes\Psi - (\Psi\circ\mathcal{T})\otimes(\Psi\circ\mathcal{T})\big) = 2(n-1)\big(2\,\Psi\otimes\Psi - \nabla^g\Psi\big),$$

是拟厄米的，我们得出

$$2\,\Psi\otimes\Psi - \nabla^g\Psi$$

也同样是拟厄米的。证明至此完成。 □

前一个命题指出，与任意张量 $A \in \mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 相关联的一个 Killing 向量场。现在，我们将此构造推广，以关联一组 Killing 向量场。

作为方程（7）线性的直接推论，对于任意 $A \in \mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 以及任意 $t \in \mathbb{R}$，张量$A - t\,\mathrm{Id}_{2n}$ 也属于 $\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$。此外，注 11 中讨论的 A 的行列式的性质表明，$\det(A - t\mathrm{Id}_{2n})$ 是一个完全平方，因此函数 $\sqrt{\det(A - t\,\mathrm{Id}_{2n})}$ 是关于 t 的多项式。将其展开为

$$\sqrt{\det(A - t\,\mathrm{Id}_{2n})} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\,\mu_i\,t^{n-i}, \quad (28)$$

我们得到一族与 A 自然相关的特殊光滑函数 $\mu_i \in C^\infty(M)$。此外，我们定义以下梯度向量场

$$V_i := \mathrm{grad}\,\mu_i, \qquad \text{for } i = 1,\dots,n. \quad (29)$$

推论 13. 设$(M, g, \mathcal{T})$ 为一个 *para-K¨ahler* 流形，且 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$。那么，对每个 i，向量场 $\mathcal{T}V_i$ 关于 g 是 *Killing*。

证明。 由于对所有 $t \in \mathrm{R}$， $A - t\,\mathrm{Id}_{2n} \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$，命题 12 推出

$$X(t) := \mathcal{T}\,\mathrm{grad}\,\sqrt{\det(A - t\,\mathrm{Id}_{2n})}$$

对每个 t， $\mathcal{L}_{X(t)}g = 0$都是 g 的 Killing 向量场。因此 $\mathcal{L}_{X(t)}g = 0$。

由（28）可知，每个系数 μ_i 都可写为

$$\mu_i = \frac{1}{(n-i)!}\,\frac{d^{\,n-i}}{dt^{\,n-i}}\Big|_{t=0}\sqrt{\det(A - t\,\mathrm{Id}_{2n})}.$$

由于映射 $F\colon \mathrm{R} \times M \to \mathrm{R}$，定义为 $F(t, p) = \sqrt{\det(A(p) - t\,\mathrm{Id}_{2n})}$，是光滑的，因此关于 t 的微分与作用于 p的所有微分算子交换，例如梯度和李导数。因此，由于其与 t 无关，我们有

$$\mathcal{T}V_i = \mathcal{T}\,\mathrm{grad}\,\mu_i = \frac{1}{(n-i)!}\,\frac{d^{\,n-i}}{dt^{\,n-i}}\Big|_{t=0}X(t),$$

因此

$$\mathcal{L}_{\frac{d^{\,n-i}}{dt^{\,n-i}}\big|_{t=0}X(t)}g = \tfrac{d^{\,n-i}}{dt^{\,n-i}}\big|_{t=0}\,\mathcal{L}_{X(t)}g = 0.$$

由此可知， $\mathcal{T}V_i$ 是一个 Killing 向量场。 □

特别地，对于每个 $(g,\ \mathcal{T})$ 的 Benenti 张量，都可以规范地关联一族 g 的 Killing 向量场。如下述命题所示，这些向量场具有辛解释，并且是超全纯的。构造定理 2 退化情形的坐标向量场时，将反复利用后一性质，参见第 6.2–6.4 节。

命题 14。 对于任意 i，向量场 $\mathcal{T}V_i$ 和 V_i（其中 V_i 由(29)给出）都是超全纯的 .

证明。 推论 13 中讨论的向量场 $\mathcal{T}V_i$ 实际上是相对于由 (1) 给出的 para-K¨ahler 辛形式 ω，与函数 μ_i关联的哈密顿向量场，即

$$\omega(\mathcal{T}V_i, \cdot) = d\mu_i.$$

哈密顿向量场保持 ω 不变，即

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\omega = 0,$$

因此它们是辛的。根据推论 13，这些向量场相对于 g 也是 Killing 的，也就是说，$\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}g = 0$。由于 g 和 ω 通过关系 (1) 确定端同态 $\mathcal{T}$，因此

$$g\big((\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\mathcal{T})(\cdot), \cdot\big) = (\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\omega)(\cdot, \cdot) = 0,$$

因此 $\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\mathcal{T} = 0$。换言之，向量场 $\mathcal{T}V_i$ 是超全纯的。此外， $\mathcal{T}$的 Nijenhuis 张量消失意味着

$$\mathcal{L}_{V_i}\mathcal{T} = \mathcal{T}\,\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\mathcal{T},$$

也就是说，每个 V_i 也是超全纯的。 □

4 定理1的证明

为了证明定理1，我们需要一些辅助性的技术引理和一个推论，下面将予以确立。更具体地说，从方程（27）出发，我们的首要目标是利用引理 15 和˜推论 16，证明形式为（4）的度量 $\tilde{g}$ 的里奇张量与 $\tilde{g}$ 成比例，比例因子为 λ （引理

˜17），前提是 g 和 ˆg 都是爱因斯坦度量。最后，我们证明这个比例因子 λ 实际上是实常数。

由 (23) 可知， $\Psi = -\frac{1}{4}\, d\log\det A$。此外，我们回顾一下， $\Lambda = \frac{1}{4}\mathrm{grad}\,\mathrm{tr}\, A$,– 见 (8)。由于对于任意向量场 X，我们有

$$(d\,\mathrm{tr}\,A)(X) = \mathrm{tr}(\nabla^g_X A) \overset{(7)}{=} 4\,g(\Lambda, X)\,, \quad (d\log\det A)(X) = \mathrm{tr}\left(A^{-1}\nabla^g_X A\right) \overset{(7)}{=} 4\,g(A^{-1}\Lambda, X), \tag{30}$$

我们得到以下等式，该等式将在本节中多次使用：

$$\Psi(X) = -g(\Lambda, A^{-1}X). \tag{31}$$

引理 15. 设 g 且 ˆg 是 *pc*-射影等价度量， A 由 (5) 给出。那么，由 (27) 可得，w e 得到

$$\tfrac{1}{2(n-1)}\Big(\widehat{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric}\Big)(X,Y) = g(A^{-1}Y, \nabla^g_X\Lambda) - g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\,g(Y, A^{-1}X). \tag{32}$$

证明。 考虑到

$$(\nabla^g_X A^{-1})(Y) = -A^{-1}(\nabla^g_X A)(A^{-1}Y) \overset{(7)}{=}$$
$$= -(A^{-1}X)^\flat(Y)\otimes A^{-1}\Lambda - (A^{-1}\Lambda)^\flat(Y)\otimes A^{-1}X + (\mathcal{T}A^{-1}X)^\flat(Y)\otimes \mathcal{T}A^{-1}\Lambda + (\mathcal{T}A^{-1}\Lambda)^\flat(Y)\otimes \mathcal{T}A^{-1}X,$$

我们有

$$\begin{aligned}(\nabla^g\Psi)(X,Y) = X\big(\Psi(Y)\big) - \Psi\big(\nabla^g_X Y\big) &\overset{(31)}{=}\\ - X\big(g(\Lambda, A^{-1}Y)\big) + g\big(\Lambda, A^{-1}\nabla^g_X Y\big) &= -g\big(\nabla^g_X\Lambda, A^{-1}Y\big) - g\big(\Lambda, (\nabla^g_X A^{-1})Y\big) =\\ - g\big(\nabla^g_X\Lambda, A^{-1}Y\big) + (A^{-1}X)^\flat(Y)\,g\big(\Lambda, A^{-1}\Lambda\big) &+ (A^{-1}\Lambda)^\flat(Y)\,g\big(\Lambda, A^{-1}X\big)\\ - (\mathcal{T}A^{-1}X)^\flat(Y)\,g\big(\Lambda, \mathcal{T}A^{-1}\Lambda\big) &- (\mathcal{T}A^{-1}\Lambda)^\flat(Y)\,g\big(\Lambda, \mathcal{T}A^{-1}X\big)\,,\end{aligned}$$

由此可将（27）写成如下形式：

$$\tfrac{1}{2(n-1)}\Big(\widehat{\mathrm{Ric}} - \mathrm{Ric}\Big)(X,Y) = g(A^{-1}Y, \nabla^g_X\Lambda) - g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\,g(Y, A^{-1}X) - g(\mathcal{T}A^{-1}\Lambda,\Lambda)\,g(\mathcal{T}X, A^{-1}Y). \tag{33}$$

回想一下， $[A^{-1}, \mathcal{T}] = 0$， A 是 g-对称的，并且拟 K¨ahler 度量也是拟厄米的，因此

$$g(\mathcal{T}A^{-1}\Lambda,\Lambda) = -g(A^{-1}\Lambda, \mathcal{T}\Lambda) = -g(\Lambda, A^{-1}\mathcal{T}\Lambda) = -g(\Lambda, \mathcal{T}A^{-1}\Lambda) \quad \Rightarrow \quad g(\mathcal{T}A^{-1}\Lambda,\Lambda) = 0\,, \tag{34}$$

将其代入（33），即可得到（32）。 □

推论 16。 设 g 和ˆg 是 *pc*-射影等价的，且 A由（5）给出。若 g 和ˆg 是爱因斯坦度量ˆ，其爱因斯坦常数分别等于 λ 和 λ，则

$$\nabla^g\Lambda = \left(\frac{\hat\lambda}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2} + g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)\mathrm{Id} - \frac{\lambda}{2(n-1)}\,A. \tag{35}$$

证明。 考虑到 g 和 ˆg 均为爱因斯坦度量，该结论可由公式 (32) 直接得出。 □

设 g 和 ˆg 为 pc-射影等价度量。设 σ 和 ˆσ分别为由 (20) 关联的加权张量。回顾 $A = \hat\sigma\sigma^{-1}$，见 (22)，我们有

$$\tilde A_{[\alpha,\beta]} := (\alpha\hat\sigma + \beta\sigma)\sigma^{-1} = \alpha\,A + \beta\,\mathrm{Id}\,, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,. \tag{36}$$

˜对于使 $A_{[\alpha,\beta]}$ 非退化的所有 (α,β) 取值，它们定义了 g的 Benenti 张量。特别地，对于这些参数，相应的 para-K¨ahler 度量（参见 (9)）

$$\tilde g_{[\alpha,\beta]} = \Big(\det\tilde A_{[\alpha,\beta]}\Big)^{-\frac{1}{2}}\; g\,\tilde A^{-1}_{[\alpha,\beta]}$$

构成一个光滑二参数族，其度量与 g （因而也与 ˆg）pc-射影等价。综合以上讨论，我们得到以下引理。

引理 17 g g λ. 设 和 ˆ是 *pc*-射影等价的爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数分别等于 和 λ。记 $\tilde{g}=\tilde{g}_{[\alpha,\beta]}$ 和 $\widetilde{A}=\tilde{A}_{[\alpha,\beta]}$。则有 Ric $=\lambda\tilde{g}$, 其中

$$\tilde{\lambda}=\tilde{\lambda}_{[\alpha,\beta]}:=2(n-1)(\det\tilde{A})^{1/2}\left(\frac{\hat{\lambda}\alpha}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+\alpha\,g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)-\alpha^2\,g(\tilde{A}^{-1}\Lambda,\Lambda)+\frac{\lambda\beta}{2(n-1)}\right). \quad (37)$$

证明。令

$$\tilde{\Lambda}:=\frac{1}{4}\operatorname{grad}_g\operatorname{tr}\tilde{A}=\frac{1}{4}\operatorname{grad}_g(\alpha\operatorname{tr}A+2\beta n)=\alpha\Lambda\,.$$

于是，我们有

$$\nabla^g\tilde{\Lambda}=\alpha\,\nabla^g\Lambda\overset{(35)}{=}\alpha\left(\tfrac{\hat{\lambda}}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)\mathrm{Id}-\tfrac{\lambda}{2(n-1)}\,\alpha A=$$
$$\alpha\left(\tfrac{\hat{\lambda}}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)+\tfrac{\lambda\beta}{2\alpha(n-1)}\right)\mathrm{Id}-\tfrac{\lambda}{2(n-1)}\,\tilde{A}. \quad (38)$$

$\widetilde{\ }$因此，我们得到 Ric 与 Ric 之间的如下关系:

$$\tfrac{2}{n-1}\left(\widetilde{\mathrm{Ric}}-\mathrm{Ric}\right)(X,Y)\overset{(32)}{=}4\,g(\tilde{A}^{-1}\nabla^g_X\tilde{\Lambda},Y)-4\,g(\tilde{A}^{-1}\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda})\,g(\tilde{A}^{-1}X,Y)\overset{(38)}{=}$$
$$4\,g\left(\alpha\left(\tfrac{\hat{\lambda}}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)+\tfrac{\lambda\beta}{2\alpha(n-1)}\right)\tilde{A}^{-1}X-\tfrac{\lambda}{2(n-1)}\,X,\,Y\right)-4\,g(\tilde{A}^{-1}\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda})\,g(\tilde{A}^{-1}X,Y)$$

由于我们假设 Ric $=\lambda g$, 因此得到

$$\frac{1}{2(n-1)}\widetilde{\mathrm{Ric}}=(\det\tilde{A})^{1/2}\left(\frac{\hat{\lambda}\alpha}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+\alpha\,g(A^{-1}\Lambda-\tilde{A}^{-1}\tilde{\Lambda},\Lambda)+\frac{\lambda\beta}{2(n-1)}\right)\tilde{g},$$

从而证明了该命题。 □

定理1的证明

˜鉴于引理17，只要证明 $\lambda_{[\alpha,\beta]}$ 在（37）中定义的量对于˜每个 α 和 β实际上都是常数，定理便得证；这意味着 $\tilde{g}_{[\alpha,\beta]}$ 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 $\lambda_{[\alpha,\beta]}$。为此，˜只需证明 $d\lambda=0$。证明这一点需要用到下面建立的若干等式:

- $$\left(d\,(\det\tilde{A})^{1/2}\right)(X)=\tfrac{1}{2}(\det\tilde{A})^{1/2}d(\log\det\tilde{A})\,(X)=\tfrac{1}{2}(\det\tilde{A})^{1/2}\,\operatorname{tr}(\tilde{A}^{-1}\,\nabla^g_X\tilde{A})\overset{(36)}{=}$$
$$\tfrac{1}{2}(\det\tilde{A})^{1/2}\alpha\,\operatorname{tr}(\tilde{A}^{-1}\,\nabla^g_X A)\overset{(7)}{=}2\alpha\,(\det\tilde{A})^{1/2}\,g(\tilde{A}^{-1}\Lambda,X)\,, \quad (39)$$

- $$\left(d\,(\det A)^{-1/2}\right)(X)=-\tfrac{1}{2}(\det A)^{-1/2}d(\log\det A)\,(X)\overset{(30)}{=}-2(\det A)^{-1/2}\,g(A^{-1}\Lambda,X)\,, \quad (40)$$

- $$\left(d\left(g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)\right)(X)\overset{\substack{\mathrm{A^{-1}is}\\ \mathrm{g-symmetric}}}{=}g\big((\nabla^g_X A^{-1})\Lambda,\Lambda\big)+2\,g\big(A^{-1}\Lambda,\nabla^g_X\Lambda\big)\overset{(35)}{=}$$
$$-\,g\big((\nabla^g_X A)A^{-1}\Lambda,\,A^{-1}\Lambda\big)+2\left(\tfrac{\hat{\lambda}}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)g(A^{-1}\Lambda,X)-\tfrac{\lambda}{n-1}\,g(\Lambda,X)\overset{(7)+(34)}{=}$$
$$\frac{\hat{\lambda}}{n-1}(\det A)^{-1/2}\,g(A^{-1}\Lambda,X)-\frac{\lambda}{n-1}\,g(\Lambda,X)\,, \quad (41)$$

- $$\left(d\left(g(\tilde{A}^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)\right)(X)\overset{\substack{\tilde{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{is}\\ \mathrm{g-symmetric}}}{=}g\big((\nabla^g_X\tilde{A}^{-1})\Lambda,\Lambda\big)+2\,g\big(\tilde{A}^{-1}\Lambda,\nabla^g_X\Lambda\big)\overset{(*)}{=}$$
$$-\,2\alpha\,g(\Lambda,\tilde{A}^{-1}\Lambda)\,g(\tilde{A}^{-1}\Lambda,X)+2\left(\tfrac{\hat{\lambda}}{2(n-1)}(\det A)^{-1/2}+g(A^{-1}\Lambda,\Lambda)\right)g(\tilde{A}^{-1}\Lambda,X)-\frac{\lambda}{n-1}\,g(A\tilde{A}^{-1}\Lambda,X)\,. \quad (42)$$

（∗）这一步我们用了 $\nabla^g \tilde{A}^{-1} = -\alpha\,\tilde{A}^{-1}\,(\nabla^g A)\,\tilde{A}^{-1}$。

最后，根据（39）—（42），结合（36），我们可以轻松计算得出

$$\tfrac{1}{2(n-1)} d\tilde{\lambda}\,(X) = \frac{\lambda\alpha}{n-1}\,(\det\tilde{A})^{1/2}\left(\beta\,g(\tilde{A}^{-1}\Lambda, X) - g(\Lambda, X) + \alpha\,g(A\tilde{A}^{-1}\Lambda, X)\right) = \frac{\lambda\alpha}{n-1}\,(\det\tilde{A})^{1/2}\,g\left(\big((\alpha\,A + \beta\,\mathrm{Id})\tilde{A}^{-1} - \mathrm{Id}\big)\Lambda, X\right) = 0.$$

¯由此得到 $d\lambda = 0$，正如我们所希望的那样。

5 定理 2 证明所需的预备结果

在前几节中，我们得到了适用于任意维数的结果。从现在起，我们将注意力限制在*para-K¨ahler* 曲面上，即 para-K¨ahler 流形，其 para-复维数 n等于 2。

如定理 2 所述，我们的局部分类“在 M 的几乎每一点的某个邻域内”成立；⌢具体而言，这意味着“在第 5.2 节中构造的稠密开子集 $M^\circ \subseteq M$ 上 ”。在第 5.1 节中，我们通过定义预备稠密开集 $M^\circ \subseteq M$ 为这一构造做准备。此外，第 5.2 节阐明了定理 2 中各种标准形之间区别所依据的几何判据（另见表 1）。

虽然定理 2 涉及 Benenti 张量，但下面发展的论证适用于$\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$中的任意元素。

5.1 para-K¨ähler 曲面的特征值划分：开稠密子集的构造

设 $(M,\ g,\ \mathcal{T})$ 是一个 para-K¨ähler 曲面，并设 $A \in \mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$。根据注 11，(1，1) 张量场 A至多有两个不同特征值。

记号： 下文中，除非另有说明，我们将 A 的特征值记为 ρ 和 σ。

A 的特征值结构根据 A 在每个点 $p \in M$处的谱类型，对 M 诱导出一个自然划分。更准确地说，我们定义 M 的以下三个子集：

- $p \in M_{\mathrm{r}}$ 如果 $A(p)$ 的特征值 $\rho(p)$ 和 $\sigma(p)$ 为实数且不同，并且各自的代数重数均为 2，
- $p \in M_{\mathrm{c}}$ 如果 $A(p)$ 的特征值 $\rho(p)$ 和 $\sigma(p)$ 互为共轭复数，且各自的代数重数均为 2，
- $p \in M_{\mathrm{sing}}$ 如果 $A(p)$ 只有一个实特征值，且其代数重数为 4。

由此可知，M_{r}和 M_{c}是开子集，而 M^{sing} 是闭集。事实上，

$$M^{\mathrm{r}} = \Delta^{-1}\big((0,\infty)\big), \qquad M^{\mathrm{c}} = \Delta^{-1}\big((-\infty,0)\big), \qquad M^{\mathrm{sing}} = \Delta^{-1}(0),$$

其中

$$\Delta := \mu_1^2 - 4\mu_2$$

是 A 的特征多项式的判别式，函数 μ_i 由式 (28) 定义。因此，特征值 ρ 和 σ 可由以下函数给出

$$\frac{-\mu_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

结果表明，它们在 M 上连续，但仅在 $M_{\mathrm{r}} \cup M^{\mathrm{c}}$ 上光滑。接下来，若 ρ 和 σ 在整个 M 上都不是常数，我们引入开子集

$$M^\circ := \{p \in M \mid \rho(p) \neq \sigma(p),\ d\rho(p) \neq 0,\ d\sigma(p) \neq 0\}.$$

在 σ 在 M 上为常数的特殊情形下，我们改为设

$$M^\circ := \{p \in M \mid \rho(p) \neq \sigma,\ d\rho(p) \neq 0\}\,.$$

在第 5.2 节中，我们将进一步把该集合限制为一个（可能不连通的）开稠密子集 $M^\circ \subseteq M^\circ$，其中由（11）定义的分布 D 在每个连通分支上具有常数秩。本节的目标是证明 M° 在 M 中稠密。

引理18。 设 $(M, g, \mathcal{T})$ 是一个连通的 *para-Kähler* 曲面，且 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 是非平行的。则开集 $M_{\mathrm{r}} \cup M_{\mathrm{c}}$ 在 M 中稠密。

证明。 反设 M^{sing} 包含一个非空开子集 $U \subseteq M$。那么，在 U 上，张量 A 仅有一个代数重数为 4 的实特征值 ρ。根据命题 14 和推论 13， ρ 和 ρ^2 都是 U 上 Killing 向量场的哈密顿函数。特别地，直接计算表明， $d\rho \circ \mathcal{T}$ 和 $d(\rho^2) \circ \mathcal{T}$ 沿任意测地线均为常数。这意味着 ρ 本身在 U 上为常数。因此，利用注 11 中引入的 A 的分块形式，Killing 向量场 $\mathcal{T}\operatorname{grad}\operatorname{tr} A'$（与 $\frac{1}{2}\mathcal{T}\operatorname{grad}\operatorname{tr} A$ 重合）在 U 上消失；由 Killing 向量场的唯一延拓性质，由于 U 是一个开集，它随后在整个 M 上消失。方程（7）继而表明 A 是平行的，这与假设矛盾。因此， M_{sing} 的内部为空，且 $M^{\mathrm{r}} \cup M_{\mathrm{c}}$ 在 M 中稠密。

□

如果 A 是非平行的，那么不可能存在一个非空开子集，使得 A 的两个特征值都为常数。事实上，在这样的开集上，Killing 向量场 $\mathcal{T}\operatorname{grad}\operatorname{tr} A$ 将恒等于零；正如我们上文所说，它随后将在整个 M 上恒等于零，因此方程（7）将推出 A 是平行的：这与假设矛盾。因此，在本文余下部分中，我们将采用以下

假设： 不失一般性，我们假设 ρ 是 A 在整个 M 上非常数的一个特征值。

命题19. 设 $(M, g, \mathcal{T})$ 为一个 *para-Kähler* 曲面，且 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 是非平行的。那么 M° 在 M 中稠密。

证明. 设 $U \subseteq M$ 是一个开集，且微分 $d\rho$ 在该集上消失。

首先假设 $U \cap M^{\mathrm{r}} \neq \emptyset$。考虑以下 Killing 向量场（对每个 t）

$$\mathcal{T}\operatorname{grad}\mu(t)\,, \qquad \text{where} \quad \mu(t) := t^2 - \mu_1 t + \mu_2.$$

由于 ρ 在 U 上为常数，因此 $\mu(\rho)$ 在其上消失。因此，相应的向量场 $\mathcal{T}\operatorname{grad}\mu(\rho)$ 在 U 上恒等于零。由于它是一个 Killing 向量场，根据上文所述的唯一延拓性质，它必定在整个 M 上处处为零。因此， ρ 在整个 M 上为常数，这与上述假设矛盾。

现在假设 $U \cap M_{\mathrm{c}} \neq \emptyset$。由于它在 U 上为 ρ 常数，其复共轭特征值 $\sigma = \bar{\rho}$ 在该处也为常数。这与非平行张量场 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 的两个特征值不可能在 M 的同一个开子集上均为常数这一事实矛盾；我们将在引理18的证明后强调这一点。

由于根据引理18， $M_{\mathrm{r}} \cup M^{\mathrm{c}}$ 在 M 中稠密，因此 $U = \emptyset$。 □

注20。 前述命题给出了非平行 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 的特征值的以下全局图景。以下几种情况恰有一种成立：

1. 两个特征值在 M 上都不是常数

   or

2. 其中恰有一个在 M 上为常数，而另一个不是常数。

特别地，不可能某个特征值仅在 M 的一个非空真开子集上为常数。

至此，稠密开子集 M° 的构造完成。

5.2 超全纯梯度场与分布 D

本节将建立定理 2 中局部描述所需的几何框架。除了第3节中引入的 Killing 向量场外，我们还找到了与 $\mathcal{A}$ $(g,\mathcal{T})$ 中的张量场自然相关联的其他向量场；这些向量场将在第 6 节中构造便捷坐标时发挥关键作用。

略微滥用记号，我们使用同一符号 A 表示张量场 $A\in\mathcal{A}(g,\ \mathcal{T})$ 到复化切丛 $T\mathbb{C}M$ 的 C-线性延拓。同样，超K¨ahler 度量 g、Levi-Civita 连接 ∇^g 以及超复结构 $\mathcal{T}$，在必要时均理解为 C-线性延拓至$T^{\mathbb{C}}M$ 。

引理 21。 设 （M、 g、 $\mathcal{T}$） 为超*K¨ahler* 曲面，且 $A\in\mathcal{A}$（g、 $\mathcal{T}$） 为非平行的。则 A 的特征值函数 ρ 和 σ 的梯度满足

$$A\operatorname{grad}\rho=\rho\ \operatorname{grad}\rho,\qquad A\operatorname{grad}\sigma=\sigma\ \operatorname{grad}\sigma.$$

此外， A 关于 ρ和 σ 的特征子空间彼此 g-正交。

证明。 该计算可在稠密开子集 $M^{\mathrm{r}}\cup M_{\mathrm{c}}$ 上进行，在此处特征值是光滑且互异的（见引理18）。

令 $Y\in\Gamma(T\mathbb{C}M)$ 为对应于特征值 σ 的 A 的特征向量，即

$$AY=\sigma Y\,. \tag{43}$$

那么，对于任意 $X\in\Gamma(T\mathbb{C}M)$，沿 X 对（43）求协变导数，方程（7）给出 s

$$(A-\sigma\,\mathrm{Id})\,\nabla^g_X Y=X(\sigma)\,Y-g(Y,X)\,\Lambda-g(Y,\Lambda)\,X+g(Y,\mathcal{T}X)\,\mathcal{T}\Lambda+g(Y,\mathcal{T}\Lambda)\,\mathcal{T}X. \tag{44}$$

现在，取 X 为 A 的特征向量，其特征值为 ρ。由于 A 是 g-对称的，且与 $\mathcal{T}$ 可交换，我们得到

$$g(X,Y)=0,\qquad g(\mathcal{T}X,Y)=0\quad\text{on } M^{\mathrm{r}}\cup M^{\mathrm{c}}. \tag{45}$$

由于 M_{r} 在 M 中稠密（见引理18），由连续性，恒等式（45）可扩展到整个 M，因此我们得到，相对于 ρ 和 σ 的特征子空间在整个 M 上彼此 g-正交。

此外，根据（45），方程（44）可简化为

$$(A-\sigma\,\mathrm{Id})\,\nabla^g_X Y=X(\sigma)\,Y-g(Y,\Lambda)\,X+g(Y,\mathcal{T}\Lambda)\,\mathcal{T}X.$$

与 Y 取内积，得到

$$g\big((A-\sigma\,\mathrm{Id})\nabla^g_X Y,\,Y\big)=X(\sigma)\,g(Y,Y).$$

若 Y 是非各向同性的，则左侧由 A 的 g-对称性而消失，因此 $X(\sigma)=0$。等价地，

$$g(\operatorname{grad}\sigma,X)=0\quad\text{for all } X \text{ in the } \rho\text{-eigenspace of } A. \tag{46}$$

由注 11 中描述的 A 的分块形式可知， A 的每个特征子空间都由 T^+ 中的一个向量和 T^- 中的一个向量生成。由于 para-K¨ahler 度量在 $T^+\times T^-$ 上非退化，它在 A 的每个特征子空间上的限制也非退化。此外，由于 A 的两个特征分布彼此 g-正交且互补，由（46）可得

$$A\operatorname{grad}\sigma=\sigma\ \operatorname{grad}\sigma\quad\text{on } M^{\mathrm{r}}\cup M^{\mathrm{c}}.$$

交换 ρ和 σ的角色可得 A梯度 $\rho=\rho$梯度 ρ。由 $M^{\mathrm{r}}\cup M_{\mathrm{c}}$在 M中稠密性可知，这些恒等式可延拓至整个 M，证明完毕。

□

考虑到引理 21，我们现在考察由（29）定义的梯度向量场 V_i、 $i = 1,2$。 A 的标量不变量 μ_1 和 μ_2 可用其特征值表示，而这些特征值本质上就是注 11 中出现的 2×2 矩阵 A' 的迹和行列式：

$$\mu_1 = \rho + \sigma, \qquad \mu_2 = \rho\,\sigma\,. \tag{47}$$

因此，根据注20和引理 21，该分布

$$\mathcal{D} := \operatorname{span}\{V_1, V_2\} = \operatorname{span}\{\operatorname{grad}(\rho+\sigma), \operatorname{grad}(\rho\sigma)\} \tag{48}$$

在第 5.1 节中定义的开稠密子集 $M^\circ \subseteq M_{\mathrm{r}} \cup M^{\mathrm{c}}$ 上具有常数秩。因此，分布$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ 在 M° 上具有相等的常数秩，该秩为 2 或 1，具体取决于 A 的某个特征值是否为常数。此外，由 (11) 定义的分布 D 为

$$D = \mathcal{D} + \mathcal{T}\mathcal{D}\,. \tag{49}$$

这些分布对于描述和区分 $(g, \mathcal{T}, A)$ 的局部形式至关重要，参见表 1。

推论 22。 作为引理 *21* 的直接推论，分布 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ 彼此 g-正交。

命题 23。 设 $(M, g, \mathcal{T})$ 为一个超双-*K¨ahler* 曲面，且 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 非平行。则向量场

$$V_1\,, \quad V_2\,, \quad \mathcal{T}V_1\,, \quad \mathcal{T}V_2 \tag{50}$$

彼此对易。特别地，两个分布 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ 均可积。

证明。 回顾辛形式 (1)、推论 22 以及 (47)-(48)， μ_1 和 μ_2 的泊松括号满足

$$\{\mu_1, \mu_2\} = \omega(\mathcal{T}V_1, \mathcal{T}V_2) = g(\mathcal{T}^2 V_1, \mathcal{T}V_2) = 0.$$

考虑到 $\mathcal{T}V_1$ 和 $\mathcal{T}V_2$ 是哈密顿的（见命题 14），它们彼此对易，因为 $[\mathcal{T}V_1, \mathcal{T}V_2]$与 $\{\mu_1, \mu_2\}$所对应的哈密顿向量场重合。

再次利用命题 14 可知，每个向量场 $\mathcal{T}V_i$ 也是超全纯的。因此，

$$[\mathcal{T}V_i, V_j] = \mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}(V_j) = \mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}(\mathcal{T}^2 V_j) = (\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\mathcal{T})(\mathcal{T}V_j) + \mathcal{T}(\mathcal{L}_{\mathcal{T}V_i}\mathcal{T}V_j) = 0,$$

这表明，对于所有 i, j， $\mathcal{T}V_i$ 与 V_j 对易。

此外，由于每个 V_i 都是超全纯的，因此有

$$[V_i, V_j] = \mathcal{L}_{V_i}V_j = \mathcal{L}_{V_i}(\mathcal{T}^2 V_j) = (\mathcal{L}_{V_i}\mathcal{T})(\mathcal{T}V_j) + \mathcal{T}(\mathcal{L}_{V_i}\mathcal{T}V_j) = 0.$$

因此，所有向量场（50）彼此对易。 □

考虑 $\mathcal{D}$的生成元的显式表达式，通过直接计算可以立即验证，下述命题成立。

命题 24。 当且仅当梯度 梯度 ρ 和 梯度 σ 中至少有一个关于 g 是各向同性的时， $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}\mathcal{D}$ 的维数大于0。

根据命题 24，我们必须进一步限制开稠密集 M°。更确切地说，我们将考虑 M° 的以下开子集：

$$\frown M^\circ = \{\, M^\circ \text{的最大开子集，使得在每个连通分支上，（49）的秩为常数}\}\,.$$

通过标准的半连续性论证，可以证明它是稠密的。

从现在起，我们将用 $\overset{\frown}{M^\circ}$ 替换 M°。

在交换 ρ 和 σ 的意义下， ρ 和 σ 的梯度可能出现的构型以及 (49) 对应的秩列于表 1。这些情形将在第 6 节中分别分析。

秩（$D = \mathcal{D} + \mathcal{TD}$）	梯度 ρ	梯度 σ
4	与 ρ实数非各向同性 非各向同性，带有 ρ复数	与 σ 实数非各向同性 非各向同性，带有 $\sigma = \bar{\rho}$
3	$\in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$	非各向同性 非各向同性
2	非各向同性 $\in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$	0（即 σ 常数） $\in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$
1	$\in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$ $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$	0（即 σ 常数） 0（即 σ 常数）

表 1：grad ρ与 grad σ的可能配置，其中 ρ和 σ是 A的特征值，而$\widehat{\ }$是稠密子集 $M^\circ \subseteq M$的一个连通分支上 $D = \mathcal{D} + \mathcal{TD}$对应的秩。

注25。 一个自然的问题是，同一个 *para-K¨ahler* 曲面上不同的局部构型是否可能共存；本文不讨论这一问题。具体而言，我们可以问表 *1* 中的哪些情形可能同时出现在 M 的不同区域上。注*20*已经表明，某些组合是不可能的；例如， D 的秩不可能在同一流形上从 4 降至 1 。

注记26。 值得强调的是，上述大多数情形都是 *para-K¨ahler* 情形所特有的，在经典的 *K¨ahler* 情形中并无对应情形（参见 *[10]*）。事实上，对于 *K¨ahler* 曲面(M, g, J) 以及任意非平行的 $A \in \mathcal{A}(g, J)$，有两个结构特征阻止此类现象发生。

首先，由于 $J^2 = -\mathrm{Id}$，分布 $\mathcal{D}$ 总是满足

$$\mathrm{rank}(\mathcal{D} \cap J\mathcal{D}) = 0 \quad and \quad \mathrm{rank}(\mathcal{D} + J\mathcal{D}) = 2\,\mathrm{rank}(\mathcal{D})$$

e在 M上处处成立，这尤其排除了奇数维秩的出现 $s.$
其次，在 *K¨ahler* 情形下，度量 g 在 A 的每个特征子空间上的限制都是定号型（正定或负定），因此 A 的特征值的梯度不可能是各向同性的。相比之下，在 *para-K¨ahler* 情形下，直接由注 *11* 中所述的 A 的分块形式可知， g在 A 的每个特征子空间上的限制具有(1,1)符号，从而特征值的梯度可以变为各向同性，导致上述额外的退化情形，并列于表 *1* 中。

6 定理 2 的证明

$\widehat{\ }$根据命题 23，在 M° 的每个连通分支上，凡是 $D = \mathcal{D} + \mathcal{TD}$ （参见（48）–（49））具有最大秩的地方，也就是说，在定理 2 的非退化情形下，四个超全纯向量场（50）构成一个局部标架。我们将在第 6.1节讨论这种情形。在所有其他（退化）情形下（将在第 6.2–6.4 节讨论），我们将根据 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{TD}$ 的秩及各向同性性质，分别在所考虑的 M° 连通分支中任意一点的（充分$\widehat{\ }$小）邻域上构造局部特选坐标标架。

事实上，每个小节对应于 rank(D) 的一个固定取值，而每个小小节则讨论表 1 中列出的某一种特定构型。

证明中所需的一些代数计算相当复杂。因此，这里只列出关键的几何步骤和由此得到的表达式。

从现在起，由于定理 2 涉及 Benenti张量，除非另有说明，我们假设A 是一个 Benenti 张量，即使本节的部分结果对退化张量也成立。

6.1 情形 维数 $D = 4$：非退化情形

在这种情况下，正如我们刚才所说，向量场 (50) 构成一个局部标架，a nd

$$D = \operatorname{span}\{V_1, V_2, \mathcal{T}V_1, \mathcal{T}V_2\}.$$

在这种情况下，定理 2 中的标准形可通过考察附录 [25, 中所述的曲面上实的非成比例射影等价度量对的标准形得到。下面简要说明具体做法。

分布 $\mathcal{D}$ 的叶（回顾一下，这种分布是可积的，见命题 23）是 (M, g) 的全测地子流形，下一条引理将证明这一点。因此，若两个 para-K¨ahler 度量是 pc-射影等价的，那么它们在 $\mathcal{D}$ 的每个叶上的限制（实）射影等价。由此，这些限制的标准形可直接从附录 [25, 中给出的标准形得到。

引理 27. 设$(M, g, \mathcal{T})$ 是一个 *para-K¨ahler* 曲面，且 $A \in \mathcal{A}(g, \mathcal{T})$ 是一个非平行 *Benenti* 张量。在 M 的任意开子集上，若秩$(\mathcal{D} \oplus \mathcal{T}\mathcal{D}) = 4$，则 $\mathcal{D}$ 的叶是(M, g)的全测地子流形。

证明。 根据推论 22，我们有

$$g(V_j, \mathcal{T}V_h) = 0.$$

沿着 V_i 对上述方程作协变微分，得到

$$g(\nabla^g_{V_i} V_j, \mathcal{T}V_h) + g(V_j, \nabla^g_{V_i} \mathcal{T}V_h) = 0, \tag{51}$$

由于每个 $\mathcal{T}V_h$ 都是 Killing 向量场（见推论 13），我们有

$$g(V_j, \nabla^g_{V_i} \mathcal{T}V_h) + g(V_i, \nabla^g_{V_j} \mathcal{T}V_h) = 0,$$

将其代入（51），可得

$$g(\nabla^g_{V_i} V_j, \mathcal{T}V_h) - g(V_i, \nabla^g_{V_j} \mathcal{T}V_h) = 0.$$

由于向量场 s V_i 彼此对易（见命题 23），我们可以交换 i 和 j，从而得到

$$g(\nabla^g_{V_j} V_i, \mathcal{T}V_h) - g(V_i, \nabla^g_{V_j} \mathcal{T}V_h) = 0. \tag{52}$$

另一方面，再对正交关系 $g(V_i, \mathcal{T}V_h) = 0$ 沿着 V_j求导一次，可得

$$g(\nabla^g_{V_j} V_i, \mathcal{T}V_h) + g(V_i, \nabla^g_{V_j} \mathcal{T}V_h) = 0. \tag{53}$$

将 (52) 和 (53) 相加，得到

$$g(\nabla^g_{V_j} V_i, \mathcal{T}V_h) = 0. \tag{54}$$

由于分布 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ 是 g-正交补（见推论 22），(54) 意味着 $\nabla^g_{V_j} V_i$在 $\mathcal{T}\mathcal{D}$方向上没有分量，即对所有 i, j，都有 $\nabla^g_{V_j} V_i \in \Gamma(\mathcal{D})$。因此， $\mathcal{D}$的叶是全测地的。 □

设 L 是分布 $\mathcal{D}$的一片任意叶。由引理 27，它是 (M, g) 中的全测地曲面。我们将 L 上由 g诱导的度量记为 g_L 。Benenti 张量 A 保持 L的切丛，即分布 $\mathcal{D}$。事实上，由于 grad ρ和 grad σ 分别是对应于特征值 ρ 和 σ的 A 的特征向量（见引理 21），容易计算得

$$AV_1 = (\rho + \sigma) V_1 - V_2, \qquad AV_2 = \rho\sigma V_1. \tag{55}$$

因此， A 在 TL上诱导出一个定义良好的 Benenti 张量 A_L 。此外，由于每个叶 L 都是全测地的，且$\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{T}\mathcal{D}$ 关于 g正交（见推论 22），由式 (7) 可知， A 在 TL 上的限制 A_L 满足

$$\nabla^{g_L}_X A_L = \tfrac{1}{2}\big(X^\flat \otimes \operatorname{grad}_{g_L} \operatorname{tr} A_L + d \operatorname{tr} A_L \otimes X\big), \qquad \forall\, X \in \Gamma(TL), \tag{56}$$

其中，音乐同构是相对于 g_L而言的。特别地，式 (56) 的每个解 A_L 都对应于 L 上的一个伪黎曼度量，该度量与 g_L 具有相同的无参数测地线[3]。

由 (56) 可知， A_L 不可能平行于 ∇^{g_L}，因为这将意味着 $d(\operatorname{tr} A_L) = 0$，进而导致 $\operatorname{rank}(\mathcal{D}\oplus\mathcal{T}\mathcal{D}) < 4$。因此，我们可以使用 [25], 附录中给出的非成比例且射影等价的二维伪黎曼度量对的局部标准形；在此情形下，该结果给出了曲面 L上 (g_L, A_L) 的局部表达式。为了将此描述推广到整个四维流形 $(M, g, \mathcal{T}, A)$，现在我们引入与标架 $\{V_1, V_2, \mathcal{T}V_1, \mathcal{T}V_2\}$相适应的局部坐标。

由于向量场 V_1， V_2， $\mathcal{T}V_1$， $\mathcal{T}V_2$ 彼此对易（见命题 23），且在 M 的一个秩满足 $\operatorname{rank}(\mathcal{D} \oplus \mathcal{T}\mathcal{D}) = 4$ 的开子集上线性无关，因此存在局部坐标 (y^1, y^2, y^3, y^4)，使得

$$V_1 = \partial_{y^1}, \qquad V_2 = \partial_{y^2}, \qquad \mathcal{T}V_1 = \partial_{y^3}, \qquad \mathcal{T}V_2 = \partial_{y^4}.$$

由推论 22 中建立的正交分解 $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{T}\mathcal{D}$，以及 g 是 para-Hermitian 且 A 与 $\mathcal{T}$ 对易这一事实，可直接得出 g 和 A 具有分块对角形式

$$g(y) = \begin{pmatrix} g_L(y) & 0 \\ 0 & -g_L(y) \end{pmatrix}, \qquad A(y) = \begin{pmatrix} A_L(y) & 0 \\ 0 & A_L(y) \end{pmatrix}.$$

记号 $g_L(y)$ 和 A_L({v4) 是合理的，因为它们分别是坐标 (y^1, y^2, y^3, y^4) 下 g_L 和 A_L 的分量矩阵。事实上， $g_L(y)$ 的分量仅依赖于坐标 y^1 和 y^2，因为 ∂_{y^3} 和 ∂_{y^4} 是 Killing 向量场（见推论 13），且 L 是全测地的。此外，由 (55)，我们有

$$A_L(y) = \begin{pmatrix} \rho + \sigma & \rho\sigma \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

根据 [25, 附录], ，根据 A_L 的特征值的性质，数对 (g_L, A_L) 局部微分同胚于其中列出的若干标准形之一。由于我们将分析限制在第 5.2 节中定义的开稠密子集 $\frown M^\circ \subseteq M$ 上，其中的特征值互异，因此只可能出现以下两种情形:

- 当特征值 征值 ρ 和 σ 为实数且互不相同时，(g_L, A_L) 对应于一个实李乌维尔度量 ;
- 当c。 eigenvalues are complex conjugate, (g_L, A_L) corresponds to a *complex Liouville metri*

在接下来的小节中，我们将分别分析这两种情况，并推导相应的 para-K¨ahler 度量局部标准形。

6.1.1 A 的特征值 ρ 和 σ 为实数时的情形：实李乌维尔度量

在 [25, 附录], 中已证明，对于 A 的实且互异特征值 ρ 和 σ，存在坐标变换 $(y^1, y^2) \mapsto (x^1, x^2)$，后者称为刘维尔坐标，使得

$$g_L(x) = (\rho - \sigma)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A_L(x) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{58}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, $\rho = \rho(x^1)$ 和 $\sigma = \sigma(x^2)$。

在这些坐标下，梯度场 $V_1 := \operatorname{grad}_{g_L} \operatorname{tr} A_L$ 和 $V_2 := \operatorname{grad}_{g_L} \det A_L$ 可明确写为

$$\partial_{y^1} = V_1 = \operatorname{grad}_{g_L} \operatorname{tr} A_L = \frac{1}{\rho - \sigma}\big(\rho_{x^1}\,\partial_{x^1} + \varepsilon\,\sigma_{x^2}\,\partial_{x^2}\big),$$

$$\partial_{y^2} = V_2 = \operatorname{grad}_{g_L} \det A_L = \frac{1}{\rho - \sigma}\big(\sigma\rho_{x^1}\,\partial_{x^1} + \varepsilon\,\rho\,\sigma_{x^2}\,\partial_{x^2}\big).$$

[3]容易看出，对于无参数测地线，即满足（3）且 $\mathcal{T} = 0$ 的曲线，考虑到我们讨论的是曲面，即 $n = 2$，方程（7）可化简为（56）。

因此，坐标变换 $(y^1, y^2) \mapsto (x^1, x^2)$ 的雅可比矩阵为

$$J = \frac{1}{\rho - \sigma} \begin{pmatrix} \rho_{x^1} & \sigma\rho_{x^1} \\ \varepsilon\,\sigma_{x^2} & \varepsilon\,\rho\,\sigma_{x^2} \end{pmatrix}.$$

利用这一表达式，可计算出 $g_L(y)$:

$$g_L(y) = J^t\, g_L(x)\, J = \frac{1}{\rho - \sigma} \begin{pmatrix} \rho_{x^1}^2 + \varepsilon\,\sigma_{x^2}^2 & \sigma\rho_{x^1}^2 + \varepsilon\,\rho\,\sigma_{x^2}^2 \\ \sigma\rho_{x^1}^2 + \varepsilon\,\rho\,\sigma_{x^2}^2 & \sigma^2\rho_{x^1}^2 + \varepsilon\,\rho^2\,\sigma_{x^2}^2 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

现在，我们通过令下式成立，将刘维尔坐标 $(x^1,\ x^2)$ 扩展为环境四维流形上的坐标系

$$x^3 := y^3, \qquad x^4 := y^4.$$

结合 (57)、(58) 和 (59)，在坐标 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 下，我们得到定理 2 的实刘维尔情形中度量 g 和 Benenti 张量 A 的显式表达式。关于辛形式，由于超复结构 $\mathcal{T}$ 在坐标 $(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4)$ 下的分量矩阵为

$$\mathcal{T}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

相对于坐标 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$，其分量的矩阵 $\mathcal{T}(x)$ 结果为

$$\mathcal{T}(x) = (J \oplus \mathrm{Id})\ \mathcal{T}(y)\ (J \oplus \mathrm{Id})^{-1}$$

根据定义 (1)，辛形式 ω 的形式可直接得到。

6.1.2 特征值 ρ 和 σ 为复共轭的情形：复刘维尔度量

Set

$$R = \tfrac{1}{2}(\rho + \sigma), \qquad I = \tfrac{1}{2i}(\rho - \sigma),$$

因此 $\rho = R + i\,I$ 和 $\sigma = \bar{\rho} = R - i\,I$。在 [25, 附录], 中证明了，存在坐标变换 $(y^1,\ y^2) \mapsto (x^1,\ x^2)$，后者称为复刘维尔坐标，使得

$$g_L(x) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_L(x) = \begin{pmatrix} R & -I \\ I & R \end{pmatrix}, \tag{61}$$

其中 $\rho(z) = R(z) + i\,I(z)$ 是复变量 $z = x^1 + i\,x^2$ 的全纯函数。

在这些坐标下，梯度场 $V_1 := \mathrm{grad}_{g_L}\,\mathrm{tr}\,A_L$ 和 $V_2 := \mathrm{grad}_{g_L}\,\det A_L$ 为

$$\partial_{y^1} = V_1 = \mathrm{grad}_{g_L}\,\mathrm{tr}\,A_L = \frac{2}{I}\big(R_{x^2}\,\partial_{x^1} + R_{x^1}\,\partial_{x^2}\big),$$
$$\partial_{y^2} = V_2 = \mathrm{grad}_{g_L}\,\det A_L = \frac{2}{I}\Big((RR_{x^2} + I\,I_{x^2})\,\partial_{x^1} + (RR_{x^1} + I\,I_{x^1})\,\partial_{x^2}\Big).$$

因此，$(y^1,\ y^2) \mapsto (x^1,\ x^2)$ 的雅可比矩阵为

$$J = \frac{2}{I} \begin{pmatrix} R_{x^2} & RR_{x^2} + I\,I_{x^2} \\ R_{x^1} & RR_{x^1} + I\,I_{x^1} \end{pmatrix}.$$

直接计算可得 $g_L(y)$ 在 $(y^1,\ y^2)$ 坐标中的分量:

$$g_L(y) = J^t\, g_L(x)\, J = \frac{4}{I} \begin{pmatrix} 2R_{x^1}R_{x^2} & I(R_{x^1}I_{x^2} + R_{x^2}I_{x^1}) + 2RR_{x^1}R_{x^2} \\ I(R_{x^1}I_{x^2} + R_{x^2}I_{x^1}) + 2RR_{x^1}R_{x^2} & 2(RR_{x^1} + I\,I_{x^1})(RR_{x^2} + I\,I_{x^2}) \end{pmatrix}. \tag{62}$$

与前一种情形一样，我们通过令……将复刘维尔坐标 $(x^1,\ x^2)$ 扩展为环境四维流形上的一个坐标系

$$x^3 := y^3, \qquad x^4 := y^4.$$

利用柯西-黎曼方程 $R_{x^1} = I_{x^2}$ 和 $R_{x^2} = -I_{x^1}$，并结合 (57)、(61) 和 (62)，可在坐标 $(z = x^1 + ix^2,\ x^3,\ x^4)$ 下，得到定理 2 中复刘维尔度量的度量 g 和 Benenti 张量 A 的显式表达式。关于辛形式，回顾超复结构 $\mathcal{T}$ 在坐标 $(y^1,\ y^2,\ y^3,\ y^4)$ 下的分量由 (60) 给出，其相对于 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 的分量矩阵为

$$\mathcal{T}(x) = (J \oplus \mathrm{Id})\ \mathcal{T}(y)\ (J \oplus \mathrm{Id})^{-1}$$

并且，与实刘维尔情形一样，辛形式 ω 的形式可直接由定义 (1) 得出。

6.2 情形 维数 $D = 3$

6.2.1 梯度 $\rho \in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$ 和 梯度 σ 为非各向同性的情形

在这种情况下，

$$D = \mathrm{span}\{\mathcal{T}V_1\,,\ \mathcal{T}V_2\,,\ V_1 - \mathcal{T}V_1\}\,. \tag{63}$$

选择张成 D 的向量场，是因为前两个是 Killing 向量场（见推论 13），而第三个属于 $\Gamma(T^-) \setminus \{0\}$。

引理 28. 存在一个局部横截向量场 Y，它横截于 D 且属于 $\in \Gamma(T^-) \setminus \{0\}$，并与式(63)中包含的 D 的生成元对易。

证明. 注意，对每个 $p \in M$，$\dim(D_p \cap T_p^-) = 1$。因此，存在 $w \in T_p^-$ 使得 $w \notin D_p$。接下来考虑一条曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathrm{R} \to M$，它适配于 w，即满足 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = w$，使得对于每个 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，$\gamma'(t) \in T^-_{\gamma\ (t)}$。考虑沿着 $\gamma(t)$ 的向量场 $W(t) := \gamma'(t) \in T^-_{\gamma\ (t)}$。

定义 p 的邻域 U 如下：

$$U = \bigcup_{|s_i|<\delta,\ |t|<\varepsilon} (\varphi^1_{s_1} \circ \varphi^2_{s_2} \circ \varphi^3_{s_3})(\gamma(t)),$$

其中 $\varphi^1_{s_1}\ \varphi^2_{s_2}, \varphi^3_{s_3}$ 分别是方程组 (63) 的生成元的局部流，且 δ 充分小 l.

我们可以在 U 上定义向量场 Y，如下所示。若 $q \in U$，则对于局部流 $\varphi^i_{s_i}$ 的某种组合 φ_s 以及某个 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，有 $q = \varphi_s(\gamma(t))$。于是我们定义

$$Y(q) = \varphi_{s*}(W(t)).$$

由于 $W(t) \in T^-$，且任意局部流 φ_s 都保持 T^-（因为方程组 (63) 的生成元是超全纯的，见命题 14），因此 $Y(q) \in T^-_q$。通过适当缩小邻域 U，我们得到 $Y(q) \notin D_q$，因为 $w \notin D_p$。结果表明，$Y \in \Gamma(T^-)$ 与 D 横截。 □

命题 29. 存在一个局部坐标系 (x^1, x^2, x^3, x^4)，相对于该坐标系，向量场

$$\mathcal{T}V_1\,,\ \mathcal{T}V_2\,,\ V_1 - \mathcal{T}V_1\,,\ Y$$

是坐标向量场。

证明。这些向量场按构造彼此独立。此外，根据命题 23，前三个向量场彼此对易；而根据引理 28，Y 与其他向量场对易。 □

在命题 29 的坐标中， g 的度量系数矩阵（g_{ij}）为

$$g = \begin{pmatrix} -\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & -\rho\,\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & \|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & \rho_{x^4}+\sigma_{x^4} \\ -\rho\,\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & -\rho^2\,\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & \rho\,\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & \rho\,\sigma_{x^4}+\sigma\rho_{x^4} \\ \|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & \rho\,\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 & 0 & 0 \\ \rho_{x^4}+\sigma_{x^4} & \rho\,\sigma_{x^4}+\sigma\rho_{x^4} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

回想起 $\partial_i = \mathcal{T}V_i$, $i = 1,2$ 是 Killing 向量场（见推论 13），上述矩阵的各项均与 x^1 和 x^2无关。容易看出，实际上

$$\rho = \rho(x^3, x^4)\,, \quad \sigma = \sigma(x^3, x^4)\,.$$

矩阵　　在上述局部坐标方程组中表示超复结构 $\mathcal{T}$，i　　s

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

直接计算可得， $\mathcal{T}$梯度 $\rho =$梯度ρ蕴含

$$\rho = \rho(x^4)\,.$$

根据式 (64) 中 g 的表达式直接计算 $\|$梯度 $\sigma\|^2$，并考虑到同一量已经作为同一矩阵的一个元素出现，因此一致性要求

$$\|\operatorname{grad}\sigma\|^2 = -\sigma_{x^3} \quad \text{or} \quad \|\operatorname{grad}\sigma\|^2 = \sigma_{x^3}. \tag{65}$$

回想一下 $A(\operatorname{grad}\,\rho) = \rho\operatorname{grad}\,\rho$以及 $A(\operatorname{grad}\sigma) = \sigma\operatorname{grad}\,\sigma$，表示 A的矩阵具有如下形式:

$$A = \begin{pmatrix} \rho+\sigma & \rho\sigma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & f \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad f = f(x^1, x^2, x^3, x^4)\,.$$

注意， A是 $\mathcal{T}$-不变的，因此 $A(\partial_4) \in \Gamma(T^-)$，于是 $A(\partial_4)$的分量仅沿着 ∂_3和 ∂_4。此外，考虑到 A 是 g-对称的，我们有

$$f = -(\rho-\sigma)\,\frac{\sigma_{x^4}}{\|\operatorname{grad}\sigma\|^2}.$$

假设 (65) 的第一个方程成立。注意，只有当 $\sigma_{x_3} = 0$时， $\nabla^g_{\partial_4}\mathcal{T}$的 (4，1) 项才会消失。然而，由于我们假设 $\operatorname{grad}\sigma$ 不是各向同性的，(65) 的第一个方程告诉我们 $\sigma_{x_3} \neq 0$。因此 $\nabla^g\mathcal{T} \neq 0$，这对于 para-K¨ahler 度量是不可能的。

唯一的可能性是 (65) 的第二个方程成立。
直接计算表明，在这种情况下，方程（7）成立当且仅当

$$\rho_{x^4} = (\rho-\sigma)F\,, \quad F := -\frac{\left(\sigma_{x^3}\,\sigma_{x^3x^4} - \sigma_{x^4}\,\sigma_{x^3x^3}\right)}{\sigma^2_{x^3}}. \tag{66}$$

（注意， $\sigma_{x^3} \neq 0$ 和 $F \neq 0$，否则（64）将会退化。）然后，对 x^3求（66）的导数，得到

$$\frac{F_{x^3}}{F} = \frac{\sigma_{x^3}}{\rho-\sigma},$$

由此可得

$$F = e^H\,(\rho-\sigma)\,, \quad H = H(x^4)\,,$$

将其代入（66）后，得到

$$\rho_{x^4} = e^H\,\big(\rho-\sigma\big)^2.$$

由此可知， $\rho-\sigma$，进而 σ，必须仅为变量 x^4的函数。这是不可能的，因为正如我们已经提到的， $\sigma_{x^3} = 0$ 将意味着度量（64）退化。
为共同 包括在内；在这种情况下，不存在满足定理假设的三元组（g， $\mathcal{T}$， A）　　2.

6.2.2 梯度 $\rho \in \Gamma(T^-)$ 且梯度 σ 为非各向同性的情形

这种情况可以类似于第 6.2.1 节的情况处理。事实上，在这种情形下，

$$D = \mathrm{span}\{\mathcal{T}V_1\,,\ \mathcal{T}V_2\,,\ V_1 + \mathcal{T}V_1\}\,, \tag{67}$$

选择 D 的生成元，是因为如同第 6.2.1 节中一样，前两个是 Killing 向量场，第三个属于 $\Gamma(T^+) \setminus \{0\}$。由于（67）的生成元是超全纯的，我们可以选择一个与它们对易、横截于 D 的局部向量场 $Y \in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$（参见引理 28）。选定一个使 $\mathcal{T}V_1,\ \mathcal{T}V_2\,,\ V_1 + \mathcal{T}V_1\,,\ Y$ 为坐标向量场的坐标系后，推理和计算与第 6.2.1 节中的非常相似；因此，为简洁起见，我们省略这些内容。我们得到相同的结论：在这种情况下，也不存在满足定理 2 假设的三元组（$g, \mathcal{T}, A$）。

6.3 情形 维数 $D = 2$

下文中，我们分别用 E_ρ 和 E_σ表示 A 对应于特征值 ρ和σ的特征子空间。

6.3.1 梯度 ρ 不是各向同性且 梯度 $\sigma = 0$的情形

在此情形下， ρ 是 A 的非常数特征值，而 $\sigma = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。因此，根据（47）–（49），

$$V_1 = \mathrm{grad}\,\rho\,, \quad V_2 = c\,\mathrm{grad}\,\rho$$

and

$$D = \mathrm{span}\{\mathcal{T}V_1, V_1\}\,.$$

为便于记号，我们令

$$X_1 := \mathcal{T}V_1\,, \quad X_2 := V_1\,, \quad Y_1 \in \Gamma(T^+ \cap E_\sigma)\,, \quad Y_2 \in \Gamma(T^- \cap E_\sigma) \tag{68}$$

于是

$$TM = \mathrm{span}\{X_1\} \oplus \mathrm{span}\{X_2\} \oplus \mathrm{span}\{Y_1\} \oplus \mathrm{span}\{Y_2\}\,. \tag{69}$$

在 M° 中向量场有定义的点处。注意，由于 g 非退化， $g(X_i,\ X_i) \neq 0$且 $g(Y_1,\ Y_2) \neq 0$。此外， $g(X_i,\ Y_j) = g(X_1,\ X_2) = g(Y_i,\ Y_i) = 0$。下文中，我们将从（69）出发，构造适用于本节所讨论情形的局部坐标系。首先，我们分析（69）中出现的向量场所定义的二维分布的可积性；结果总结如下命题所示。

命题 30。 设 X_1、 X_2、 Y_1、 Y_2如（68）中所示。分布张成空间$\{X_1, X_2\}$、张成空间$\{X_1, Y_1\}$、张成空间$\{X_1, Y_2\}$、张成空间$\{X_2, Y_1\}$和张成空间$\{X_2, Y_2\}$均可积，而张成空间$\{Y_1, Y_2\}$不可积，因为它在 X_1方向上有非零分量。

证明。 由命题 23 可知，分布 $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$ 可积。下文仅证明分布 $\mathrm{span}\{X_1, Y_2\}$ 的可积性，因为通过采用类似的计算和推理即可得到其他分布的可积性；同时还将证明 $\mathrm{span}\{Y_1, Y_2\}$ 不可积。

为证明 $\mathrm{span}\{X_1, Y_2\}$ 的可积性，我们必须考虑以下关系，其中 Z 是一个任意向量场:

$$g(\nabla^g_Z Y_i, Y_i) = Z\,g(Y_i, Y_i) - g(\nabla^g_Z Y_i, Y_i) = -g(\nabla^g_Z Y_i, Y_i) \ \Rightarrow\ g(\nabla^g_Z Y_i, Y_i) = 0$$

以及下面这个情形，其中我们假设 Z 是$\{X_1, X_2, Y_2\}$的张成空间的一个截面:

$$\begin{aligned}
\rho\, g\left(\nabla^g_Z X_i, Y_2\right) &= \rho\Big(Z\big(g(X_i, Y_2)\big) - g\left(X_i, \nabla^g_Z Y_2\right)\Big) = -g\left(\rho X_i, \nabla^g_Z Y_2\right) = \\
&- g\left(AX_i, \nabla^g_Z Y_2\right) = -g\left(X_i, A(\nabla^g_Z Y_2)\right) = g\Big(X_i, \left(\nabla^g_Z A\right)(Y_2) - \nabla^g_Z (AY_2)\Big) = \\
&g\Big(X_i, \Big(Z^\flat \otimes \Lambda + \Lambda^\flat \otimes Z - (\mathcal{T}Z)^\flat \otimes \mathcal{T}\Lambda - (\mathcal{T}\Lambda)^\flat \otimes \mathcal{T}Z\Big)(Y_2) - \nabla^g_Z(\sigma Y_2)\Big) \overset{(*)}{=} \\
&g\Big(X_i, \Big(Z^\flat \otimes \Lambda - (\mathcal{T}Z)^\flat \otimes \mathcal{T}\Lambda\Big)(Y_2) - \sigma\nabla^g_Z Y_2\Big) = -g(\sigma\nabla^g_Z Y_2, X_i) = \sigma\, g\left(\nabla^g_Z X_i, Y_2\right)\,,
\end{aligned} \tag{70}$$

其中步骤（$*$）在 $\Lambda = \frac{1}{2}$梯度 $\rho = \frac{1}{2}X_2$时成立，见（8）。由于 $\sigma \neq \rho$，因此

$$g\left(\nabla^g_Z X_i, Y_2\right) = 0\,, \tag{71}$$

由此我们得到

$$g\left(X_i, \nabla^g_Z Y_2\right) = Z\, g\left(X_i, Y_2\right) - g\left(\nabla^g_Z X_i, Y_2\right) = 0\,.$$

此外，由于 X_1 是一个 Killing 向量场，

$$g\left(\nabla^g_{Y_2} X_1, X_2\right) = -g\left(\nabla^g_{X_2} X_1, Y_2\right) \overset{(71)}{=} 0.$$

于是，我们得出

$$g([X_1, Y_2], X_2) = g([X_1, Y_2], Y_2) = 0\,,$$

也就是说，$[X_1, Y_2]$ 是 span$\{X_1, Y_2\}$ as span$\{X_1, Y_2\} =$(span$\{X_2, Y_2\})^\perp$的一个截面。
分布 span$\{Y_1, Y_2\} =$(span$\{X_1, X_2\})^\perp$ 不可积。事实上，假设 Z是 span$\{Y_1, Y_2\}$的一个截面，并采用与（70）中类似的计算，我们得到

$$\sigma\; g\left(\nabla^g_Z Y_i, X_j\right) = g\Big(Y_i, \Big(\Lambda^\flat \otimes Z - (\mathcal{T}\Lambda)^\flat \otimes \mathcal{T}Z\Big)\left(X_j\right) - \rho \nabla^g_Z X_j\Big)$$

由此我们得到

$$g\left(\nabla^g_{Y_2} Y_1, X_i\right) = \frac{g(Y_1, Y_2)}{2(\sigma - \rho)}(X_1 + X_2)^\flat\left(X_i\right), \qquad g\left(\nabla^g_{Y_1} Y_2, X_i\right) = \frac{g(Y_1, Y_2)}{2(\sigma - \rho)}(X_2 - X_1)^\flat\left(X_i\right),$$

这意味着

$$g\left([Y_1, Y_2], X_i\right) = g\left(\nabla^g_{Y_1} Y_2 - \nabla^g_{Y_2} Y_1, X_i\right) = -\frac{g(Y_1, Y_2)}{\sigma - \rho} X_1^\flat\left(X_i\right).$$

因此，$[Y_1, Y_2]$ h 作为沿 X_1的一个非零分量，这意味着 $\{Y_1, Y_2\}$ 的张成空间不可积 . □

注31. 考虑到上述证明的最后一部分，我们可以得出结论：$[Y_1, Y_2]$ 沿 X_2 没有分量。特别地，对于某些函数 μ、ν 和 $\gamma \neq 0$,

$$[Y_1, Y_2] = \mu Y_1 + \nu Y_2 + \gamma X_1\,.$$

为了通过考虑命题 30 中的向量场来构造一个特选坐标系，同时也考虑到注31，我们需要以下两个技术引理。

引理 32. 设 X_1, X_2, Y_1, Y_2 是流形 M 上的线性无关向量场，使得 t

$$\mathrm{span}\{X_1, X_2\}\,, \quad \mathrm{span}\{X_2, Y_1\}\,, \quad \mathrm{span}\{X_1, Y_2\}\,, \quad \mathrm{span}\{X_2, Y_2\}$$

是可积分布，其中 Y_1 和 Y_2 如注*31*所述。于是，存在 M 上的非零函数 f，使得下列向量场

$$X_2\,, \quad fX_1 + Y_1\,, \quad Y_2 \tag{72}$$

相互张成2 维可积分布。

证明. 由于 span$\{X_2, Y_2\}$ 可积，适当重命名 $X_2 \to aX_2$、$Y_2 \to bY_2$ 并选取合适的函数 a, b 后，我们可以假设

$$[X_2, Y_2] = 0\,. \tag{73}$$

根据假设，存在函数 $\alpha, \beta, \xi, \eta, \delta, \varphi, \mu, \nu$ 和 $\gamma \neq 0$，使得

$$[X_1, X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2\,, \quad [X_2, Y_1] = \xi X_2 + \eta Y_1\,, \quad [X_1, Y_2] = \delta X_1 + \varphi Y_2\,, \quad [Y_1, Y_2] = \mu Y_1 + \nu Y_2 + \gamma X_1\,. \tag{74}$$

根据（74），（72）中第一个与第二个向量场之间，以及第二个与第三个向量场之间的括号分别等于

$$\big(X_2(f) - f\alpha\big)X_1 + \big(-f\beta + \xi\big)X_2 + \eta Y_1\,, \quad \big(-Y_2(f) + f\delta + \gamma\big)X_1 + \mu Y_1 + (f\varphi + \nu)Y_2\,. \tag{75}$$

直接计算表明，（75）中的第一个向量场属于张成空间$\{X_2, fX_1+Y_1\}$，且第二个向量场属于张成空间$\{fX_1+Y_1, Y_2\}$，当且仅当满足以下方程组

$$\begin{cases} X_2(f) = (\alpha+\eta)f \\ Y_2(f) = (\delta-\mu)f+\gamma \end{cases} \tag{76}$$

有解。为证明其存在性，只需检验上述方程组的相容条件是否满足。特别地，

$$Y_2(X_2(f)) = Y_2(\alpha+\eta)f+(\alpha+\eta)(\delta-\mu)f+(\alpha+\eta)\gamma, \qquad X_2(Y_2(f)) = X_2(\delta-\mu)f+(\delta-\mu)(\alpha+\eta)f+X_2(\gamma),$$

并取其差；由（73）可得以下相容条件：

$$\big(X_2(\delta)-Y_2(\alpha)-X_2(\mu)-Y_2(\eta)\big)f+X_2(\gamma)-(\alpha+\eta)\gamma=0\,. \tag{77}$$

根据 Jacobi恒等式，条件（77）实际上成立。事实上，由

$$[X_1,[X_2,Y_2]]+[X_2,[Y_2,X_1]]+[Y_2,[X_1,X_2]]=0$$

通过直接计算，并结合（73）和（74），可得

$$-X_2(\delta)X_1+\delta\beta X_2-X_2(\varphi)Y_2+Y_2(\alpha)X_1-\alpha\varphi Y_2+Y_2(\beta)X_2=0\,.$$

特别地，将 X_1 的分量置为零，可得

$$X_2(\delta)-Y_2(\alpha)=0\,. \tag{78}$$

此外，由恒等式

$$[Y_1,[X_2,Y_2]]+[X_2,[Y_2,Y_1]]+[Y_2,[Y_1,X_2]]=0\,,$$

通过进行类似的计算，我们得到

$$X_2(\mu)Y_1+\mu\xi X_2+X_2(\nu)Y_2+X_2(\gamma)X_1-\gamma\alpha X_1-\gamma\beta X_2+Y_2(\xi)X_2+Y_2(\eta)Y_1-\eta\nu Y_2-\eta\gamma X_1=0$$

并令 X_1 和 Y_1 的分量为零，得到

$$X_2(\gamma)-(\alpha+\eta)\gamma=0\,,\quad X_2(\mu)+Y_2(\eta)=0\,. \tag{79}$$

条件（79）与（78）一起给出（77）。 □

引理33。设 X、Y、Z 是线性无关向量场，满足

$$\mathrm{span}\{X,Y\}\,,\quad \mathrm{span}\{X,Z\}\,,\quad \mathrm{span}\{Y,Z\}$$

是可积分布。于是存在三个非零函数 α、β、γ，使得

$$[\alpha X,\beta Y]=0\,,\quad [\alpha X,\gamma Z]=0\,,\quad [\beta Y,\gamma Z]=0\,. \tag{80}$$

证明。根据假设，存在函数 a、b、c、d、e、f，使得

$$[X,Y]=aX+bY\,,\quad [X,Z]=cX+dZ\,,\quad [Y,Z]=eY+fZ\,. \tag{81}$$

展开方程（80），并利用（81），可得到以下三个方程组 s:

$$\begin{cases} Y(\alpha)-a\alpha=0 \\ Z(\alpha)-c\alpha=0 \end{cases},\quad \begin{cases} X(\gamma)+d\gamma=0 \\ Y(\gamma)+f\gamma=0 \end{cases},\quad \begin{cases} X(\beta)+b\beta=0 \\ Z(\beta)-e\beta=0 \end{cases}. \tag{82}$$

方程组（82）的相容条件分别为

$$-ea-fc-Z(a)+Y(c)=0\,,\quad -ad-bf+X(f)-Y(d)=0\,,\quad -cb+de-X(e)-Z(b)=0\,,$$

根据 Jacobi恒等式，这些条件均成立

$$[Z,[X,Y]]+[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]=0\,.$$

□

命题 30 和注31 使我们得以将引理32 应用于式 (68) 中引入的向量场。因此，考虑到引理33，经过适当缩放 Y_1 和 Y_2 （缩放因子为处处非零的函数）并重新命名后，存在两个非零函数 f 和 h，使得向量场

$$U_2 := hX_2, \quad U_3 := Y_1 + fX_1, \quad U_4 := Y_2$$

彼此对易。最后，为了得到由对易向量场构成的标架，我们将对易向量场 U_i 限制在可积分布 $\{U_2, U_3, U_4\}$ 的张成空间的一片叶 Σ 上，并沿横截 Killing 向量场 X_1 将它们延拓，具体如下。

设 ϕ_t 为 X_1 的局部流。接着，我们将 $U_i|_\Sigma$、$i \in \{2,3,4\}$ 延拓为 U_i^{ext}，定义在 Σ 的一个足够小的邻域上，使得

$$U_i^{\mathrm{ext}}(\phi_t(p)) := \phi_{t*}\big(U_i(p)\big)\,, \quad p \in \Sigma\,, \quad i \in \{2,3,4\}\,,$$

均有定义。这样，我们有 $\phi_{t*}(U_{\text{延拓}i}) = U_i^{\mathrm{ext}}$。于是

$$[X_1, U_i^{\mathrm{ext}}] = 0\,.$$

此外，

$$[U_i^{\mathrm{ext}}, U_j^{\mathrm{ext}}] = \phi_{t*}\Big([U_i, U_j]\big|_\Sigma\Big) = 0\,,$$

因此，向量场 U_i^{ext} 彼此对易，且每个向量场也都与 X_1 对易。由于 X_1 是超全纯的（见命题 14），ϕ_{t*} 与 $\mathcal{T}$ 对易。因此，

$$\mathcal{T}\,\phi_{t*}\big(Y_1\big) = \phi_{t*}\big(Y_1\big)\,, \quad \mathcal{T}\,\phi_{t*}\big(Y_2\big) = -\phi_{t*}\big(Y_2\big)\,.$$

那么，考虑到

$$T^+ = \mathrm{span}\{Y_1, X_1 + X_2\}\,, \quad T^- = \mathrm{span}\{Y_2, X_1 - X_2\}\,,$$

我们有以下分解：

$$\phi_{t*}(Y_1) = \big(a_1 Y_1 + a_2(X_1 + X_2)\big) \circ \phi_t\,, \quad \phi_{t*}(Y_2) = \big(a_3 Y_2 + a_4(X_1 - X_2)\big) \circ \phi_t\,.$$

另一方面， X_1 也是一个 Killing 向量场（见推论 13），这意味着 ϕ_t 是一个局部等距变换。那么，我们有

$$\begin{aligned} a_2 \|X_1\|^2_{\phi_t(p)} &= g_{\phi_t(p)}(\phi_{t*}\big(Y_1(p)\big), X_1(\phi_t(p))) = g_p(Y_1(p), X_1(p)) = 0\,, \\ a_4 \|X_1\|^2_{\phi_t(p)} &= g_{\phi_t(p)}(\phi_{t*}\big(Y_2(p)\big), X_1(\phi_t(p))) = g_p(Y_2(p), X_1(p)) = 0\,. \end{aligned}$$

由于我们假设 X_1 不是各向同性的，因此 $a_2 = a_4 = 0$，并且还回顾到 $[X_1, X_2] = 0$ （见命题 23），我们有

$$X_1\,, \quad U_2^{\mathrm{ext}} = \phi_{t*}\,(hX_2) \;= hX_2\,, \;\; U_{\mathrm{ext}_3} \;= \phi_{t*}(Y_1 + fX_1) = a_1 Y_1 + fX_1, \quad U_4^{\mathrm{ext}} = \phi_{t*}\,(Y_2) \;= a_3 Y_2 \tag{83}$$

彼此对易。在本节余下部分中，我们将用 (x^1, x^2, x^3, x^4) 表示一个局部坐标系，其中向量场 (83) 是坐标向量场，即 $\partial_1 = X_1$, $\partial_i = U_i^{\mathrm{ext}}$, $i \in \{2,3,4\}$。
在这个坐标系中，我们有

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & h & -f & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & \frac{f}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & f(\rho - c) & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}\,.$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned} g(\partial_1, \partial_1) = -g(\mathrm{grad}\,\rho, \mathrm{grad}\,\rho) = -\frac{g(\mathrm{grad}\,\rho, \partial_2)}{h} = -\frac{\rho_{x^2}}{h}\,, \quad \rho_{x^1} = g(\mathrm{grad}\,\rho, \partial_1) = g(\mathrm{grad}\,\rho, \mathcal{T}\,\mathrm{grad}\,\rho) = 0\,, \\ \rho_{x^3} = g(\mathrm{grad}\,\rho, \partial_3) = g(\mathrm{grad}\,\rho, Y_1 + f\,\mathcal{T}\,\mathrm{grad}\,\rho) = 0\,, \quad \rho_{x^4} = g(\mathrm{grad}\,\rho, \partial_4) = g(\mathrm{grad}\,\rho, Y_2) = 0\,. \end{aligned}$$

因此， $\rho = \rho(x^2)$。

通过类似的计算，我们还可以得到 g 的其余分量 :

$$g(\partial_1,\partial_3) = f\, g(\mathcal{T}\operatorname{grad}\rho, \mathcal{T}\operatorname{grad}\rho) = -\frac{f\rho_{x^2}}{h}\,, \quad g(\partial_2,\partial_2) = h\, g(\operatorname{grad}\rho,\partial_2) = h\rho_{x^2}\,.$$

于是，我们得到

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_{x^2}}{h} & 0 & -\frac{f\rho_{x^2}}{h} & 0 \\ 0 & h\rho_{x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{f\rho_{x^2}}{h} & 0 & -\frac{f^2\rho_{x^2}}{h} & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 ∂_1 是 Killing 向量场，因此 h、 f 和 g_{34} 均与 x^1 无关。

鉴于 $\det g = g_{34}^2\rho_{x^2}^2 \neq 0$， $\nabla^g_{\partial_1}\mathcal{T}$ 的 (4,1) 项当且仅当 $h_{x^3} = -f_{x^2}$ 时为零，因此存在一个函数 $H(x^2,x^3,x^4)$，使得

$$h = H_{x^2}\,, \quad f = -H_{x^3}.$$

$\nabla^g_{\partial_1}\mathcal{T}$ 的 (3,1) 项当且仅当 $H_{x^2x^4} = 0$ 时为零，这意味着

$$H(x^2,x^3,x^4) = \alpha(x^2,x^3) + \beta(x^3,x^4).$$

考虑到 $h = \alpha_{x^2} \neq 0$， $\nabla^g_{\partial_3}\mathcal{T}$ 的（3，1）项为零当且仅当 if

$$(g_{34})_{x^2} = -\rho_{x^2}\,\beta_{x^3x^4}.$$

通过考察带有 $X = \partial_3$ 的方程（7）的（3，2）项，我们得到

$$g_{34} = (c-\rho)\beta_{x^3x^4}.$$

考虑到 $\det\, g = (\rho-c)^2\rho_{x^2}^2\,\beta_{x^3x^4}^2 \neq 0$，通过考察带有 $X = \partial_1$ 的方程（7）的（4，1）项，我们得到 $\alpha_{x^2x^3} = 0$，这意味着

$$\alpha(x^2,x^3) = \xi(x^2) + \eta(x^3).$$

总之，通解为

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{x^2} & \eta_{x^3}+\beta_{x^3} & 0 \\ \frac{1}{\xi_{x^2}} & 0 & -\frac{\eta_{x^3}+\beta_{x^3}}{\xi_{x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & (c-\rho)(\eta_{x^3}+\beta_{x^3}) & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

$$g = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_{x^2}}{\xi_{x^2}} & 0 & \frac{(\eta_{x^3}+\beta_{x^3})\rho_{x^2}}{\xi_{x^2}} & 0 \\ 0 & \xi_{x^2}\rho_{x^2} & 0 & 0 \\ \frac{(\eta_{x^3}+\beta_{x^3})\rho_{x^2}}{\xi_{x^2}} & 0 & -\frac{(\eta_{x^3}+\beta_{x^3})^2\rho_{x^2}}{\xi_{x^2}} & (c-\rho)\beta_{x^3x^4} \\ 0 & 0 & (c-\rho)\beta_{x^3x^4} & 0 \end{pmatrix}.$$

其中我们回顾一下， $\rho(x^2)$ 是任意非恒定函数， $\xi(x^2)$、 $\eta(x^3)$ 和 $\beta(x^3,\ x^4)$ 是任意函数，且 $\xi_{x^2} \neq 0$ 和 $\beta_{x^3x^4} \neq 0$。令 $\mu = -\xi_{x^2}$ 和 $\nu = \eta_{x^3} + \beta_{x^3}$，即可得到定理 2 中 $\dim D = 2$ 情形第一种情况的标准形。

6.3.2 梯度 ρ，梯度 $\sigma \in \Gamma(T^+) \setminus \{0\}$的情形

在这种情况下，回顾式 (48)，我们有

$$\mathcal{T}\mathcal{D} = \mathcal{D} = \operatorname{span}\{V_1 = \operatorname{grad}\rho + \operatorname{grad}\sigma,\, V_2 = \sigma\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{grad}\sigma\}\,,$$

根据命题 23，该分布是可积的。我们将通过在 $\Gamma(T^-) \setminus \{0\}$ 中添加两个向量场，把 $\{V_1, V_2\}$ 补成一个标架，这两个向量场需满足以下性质：它们彼此对易，也分别与 V_1 和 V_2 对易，并且与后两者构成一组线性无关向量场，使所得的四个向量场构成一个局部坐标系。上述另外两个向量场的构造如下。

设 Σ 是可积分布 T^- 的一片叶。不失一般性，我们可以在 Σ 上取两个向量场 $X \in \Gamma(E_\rho \cap T^-)$ 和 $Y \in \Gamma(E_\sigma \cap T^-)$，使得 $[X, Y] = 0$。令 X^{ext} 和 $Y^{\text{延拓}}$ 分别为沿着 V_1 和 V_2 的流对 X 和Y 作出的延拓。

这类延拓 在足够小的 Σ 邻域内有良好定义，且 V_1 与 V_2 交换 .
此外，由于 V_1 和 V_2 是超全纯的（见命题 14），它们的局部流保持 T^- 不变，这意味着 X^{ext} 和 $Y^{\text{外}}$ 都是 T^- 的截面。

此外，由于在这种情况下 $V_1 = \mathcal{T}V_1$ 和 $V_2 = \mathcal{T}V_2$ 也是 Killing 向量场（见推论 13），其局部流是局部等距变换；又由于在 Σ 上有 $g(X,\ V_2 - \sigma V_1) = g(Y,\ V_2 - \rho V_1) = 0$，因此

$$g(X^{\text{ext}}, V_2 - \sigma V_1) = g(Y^{\text{ext}}, V_2 - \rho V_1) = 0. \tag{84}$$

事实上，若以 ϕ_t 表示 V_1 和 V_2 的局部流的一般组合，并考虑到 $[V_1, V_2] = 0$，则有

$$\phi_{t*}(V_2 - \sigma V_1) = (V_2 - \sigma V_1) \circ \phi_t, \quad \phi_{t*}(V_2 - \rho V_1) = (V_2 - \rho V_1) \circ \phi_t\,.$$

方程 (84) 意味着 X^{ext} 与 X 成比例，且 $Y^{\text{外}}$ 与 Y 成比例。事实上，由于 X^{ext} 是 T^- 的截面，它的非零分量只能沿着 X 和 Y。然而，由于 $V_2 - \sigma V_1 =$(梯度 $\sigma \in \Gamma(E_\sigma \cap T^+)$, $g(X^{\text{ext}},\ V_2 - \sigma V_1) = 0$ 意味着 X^{ext} 沿 Y 的分量为零。对 Y^{ext} 也可作同样的推理。

总之，我们构造了四个向量场

$$V_1,\, V_2,\, X^{\text{ext}},\, Y^{\text{ext}} \tag{85}$$

它们彼此对易。

在本节的其余部分，我们将用（x^1，x^2，x^3，x^4）表示一个局部坐标系，其中向量场（85）是坐标向量场，即

$$\partial_1 = V_1, \quad \partial_2 = V_2, \quad \partial_3 = X^{\text{ext}}, \quad \partial_4 = Y^{\text{ext}}\,.$$

现在，让我们计算度量 g 在上述坐标系中的分量。由于∂_1，$\partial_2 \in \Gamma(T^+)$，我们有

$$g(\partial_1, \partial_1) = g(\partial_2, \partial_1) = g(\partial_2, \partial_2) = 0\,.$$

因此，

$$\rho_{x^1} + \sigma_{x^1} = 0\,, \quad \sigma\rho_{x^1} + \rho\sigma_{x^1} = 0\,,$$

这意味着 ρ 和 σ 都与 x^1 无关。类似地，可以看出它们也与x^2无关。此外，考虑到 $\partial_3 \in \Gamma(E_\rho)$ 以及 $\partial_4 \in \Gamma(E_\sigma)$，我们有

$$g(\operatorname{grad}\rho, \partial_4) = g(\operatorname{grad}\sigma, \partial_3) = 0\,,$$

这意味着 ρ 与 x^4 无关，且 σ 与 x^3无关。综上，矩阵 (g_{ij}) 具有以下形式：

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_{x^3} & \sigma_{x^4} \\ 0 & 0 & \sigma\rho_{x^3} & \rho\sigma_{x^4} \\ \rho_{x^3} & \sigma\rho_{x^3} & 0 & 0 \\ \sigma_{x^4} & \rho\sigma_{x^4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于我们处理的是适配于 T^+和 T^-的坐标系，超复结构 $\mathcal{T}$的分量矩阵由满足 $n=2$的式 (2) 给出。

张量场 A 分量构成的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\rho+\sigma & \rho\sigma & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma\end{pmatrix}.$$

直接计算可得，方程 (7) 和 $\nabla^g\mathcal{T}=0$ 均成立。总之，我们得到了定理 2 中 $\dim D=2$ 的第二种情形的标准形。

6.3.3 当 梯度 ρ, 梯度 $\sigma\in\Gamma(T^-)\setminus\{0\}$ 时的情形

这种情形与第 6.3.2 节所讨论的情形非常相似。事实上，可以证明

$$-V_1=\operatorname{grad}\rho+\operatorname{grad}\sigma\,,\quad -V_2=\rho\operatorname{grad}\sigma+\sigma\operatorname{grad}\rho\,,\quad X^{\mathrm{ext}}\,,\quad Y^{\mathrm{ext}}\,,$$

其中， X^{ext} 和 Y_{ext}分别是沿 V_1 和 V_2 对两个向量场 $X\in\Gamma(E_\rho\cap T^+)$、 $Y\in\Gamma(E_\sigma\cap T^+)$ 的延拓；这两个向量场定义在 T^+ 的一个叶上，且彼此对易。此外，与第 6.3.2 节的情形类似，可以证明 X^{ext} 和 Y_{ext} 分别与 X 和 Y 成比例。

The 通解为 $(g,\ -\mathcal{T},\ A)$，其中 $(g,\ \mathcal{T},\ A)$ 与上一节中的相同 .

6.3.4 梯度 $\rho\in\Gamma(T^+)\setminus\{0\}$，梯度 $\sigma\in\Gamma(T^-)\setminus\{0\}$的情形

在这种情形下，再次回顾式 (48)，我们有

$$\mathcal{T}\mathcal{D}=\mathcal{D}=\operatorname{span}\{\mathcal{T}V_1=\operatorname{grad}\rho-\operatorname{grad}\sigma,\,\mathcal{T}V_2=\sigma\operatorname{grad}\rho-\rho\operatorname{grad}\sigma\}$$

根据命题 23，该分布是可积的。与上一节中的做法类似，我们将通过添加两个向量场来把 $\{\mathcal{T}V_1,\mathcal{T}V_2\}$ 补充为一个标架：在这种情形下，一个向量场属于$\Gamma(T^-)\setminus\{0\}$，另一个属于 $\Gamma(T^+)\setminus\{0\}$。我们将构造这些向量场，使其满足以下性质：它们彼此可交换，也与 $\mathcal{T}V_1$ 和 $\mathcal{T}V_2$ 可交换，并且与后两者一起构成一组线性无关向量场。上述另外两个向量场的构造如下。

设 $X\in\Gamma(T^-\cap E_\rho)$和 $Y\in\Gamma(T^+\cap E_\sigma)$。由于 $TM=\mathcal{D}\oplus\operatorname{span}\{X,Y\}$and $g(X,Y)=g$(梯度 ρ, 梯度 σ) =0（ A的特征子空间彼此 g-正交，见引理 21），因此 $X(\rho)=g(X,$梯度$\rho)\neq 0$且 $Y(\sigma)=g(Y,$梯度$\sigma)\neq 0$ （否则度量将是退化的）。考虑到 X 和 Y 均为各向同性，即 $g(X,X)=g(Y,Y)=0$，则

$$(\operatorname{span}\{X,\,Y\})^{\perp}=\operatorname{span}\{X,\,Y\}\,.$$

现在我们证明 $\operatorname{span}\{X,\,Y\}$ 是可积的。
设 Z 是 $\operatorname{span}\{X,\,Y\}$的任意一个截面。那么，

$$g\left(\nabla^g_Z X,X\right)=Z\,g\left(X,X\right)-g\left(\nabla^g_Z X,X\right)\quad\Rightarrow\quad g\left(\nabla^g_Z X,X\right)=0\,.$$

同样， $g(\nabla^g_Z Y,Y)=0$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\sigma\,g\left(\nabla^g_Z Y,X\right)&=\sigma\Big(Z\big(g(Y,X)\big)-g\left(Y,\nabla^g_Z X\right)\Big)=-g\left(\sigma Y,\nabla^g_Z X\right)=\\&-g\left(AY,\nabla^g_Z X\right)=-g\left(Y,A(\nabla^g_Z X)\right)=g\Big(Y,\left(\nabla^g_Z A\right)(X)-\nabla^g_Z(AX)\Big)=\\&g\Big(Y,\Big(Z^\flat\otimes\Lambda+\Lambda^\flat\otimes Z-(\mathcal{T}Z)^\flat\otimes\mathcal{T}\Lambda-(\mathcal{T}\Lambda)^\flat\otimes\mathcal{T}Z\Big)(X)-\nabla^g_Z(\rho X)\Big)\overset{(*)}{=}\\&-\rho\,g\left(Y,\nabla^g_Z X\right)=\rho\,g\left(\nabla^g_Z Y,X\right)\end{aligned}$$

（步骤（$*$）成立，因为 $g(X,Z) = g(Y,Z) = 0$）。
因此，由于 $\sigma \neq \rho$，我们有 $g(\nabla^g_Z Y,\ X) = 0$，这意味着 $g(\nabla^g_Z X,\ Y) = 0$。由此可得，span$\{X, Y\}$ 是全测地的，因而是可积的。

对 X 和 Y 乘以适当的函数进行缩放后，我们可以假设 $[X,Y] = 0$。现在，设 Σ 是 span$\{X, Y\}$ 的一片叶。分别将 $X^{\rm ext},\ Y_{\rm ext}$记作沿超全纯 Killing 向量场 $\mathcal{T}V_1$、$\mathcal{T}V_2$ 对 $X|_\Sigma$ 和 $Y|_\Sigma$ 的延拓（参见推论 13 和命题 14 ）。如此，我们得到四个线性无关的向量场

$$\mathcal{T}V_1, \mathcal{T}V_2, X^{\rm ext}, Y^{\rm ext} \tag{86}$$

它们彼此对易。

由于 $\mathcal{T}V_1$ 和 $\mathcal{T}V_2$ 是超全纯向量场，且注意到 $X \in \Gamma(T^- \cap E_\rho)$ 和$Y \in \Gamma(T^+ \cap E_\sigma)$，我们有 $X^{\rm ext} \in \Gamma(T^-)$ 和 $Y_{\rm ext}\in \Gamma(T^+)$。因此，对适当的函数 $f_1 \neq 0,\ f_2,\ h_1 \neq 0,\ h_2$，以下分解成立：

$$X^{\rm ext} = f_1 X + f_2 \operatorname{grad}\sigma\,, \quad Y^{\rm ext} = h_1 Y + h_2 \operatorname{grad}\rho\,. \tag{87}$$

由于 $\mathcal{T}V_1$ 和 $\mathcal{T}V_2$ 也都是 Killing 向量场，因此它们的局部流的任意复合都是局部等距变换。特别地，我们有

$$0 = g(X,Y)|_\Sigma = g(X^{\rm ext}, Y^{\rm ext}) = f_1 h_2 X(\rho) + h_1 f_2 Y(\sigma). \tag{88}$$

在本节余下部分中，我们用 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 表示一个局部坐标系，其中向量场 (86) 是坐标向量场，即

$$\partial_1 = \operatorname{grad}\rho - \operatorname{grad}\sigma, \quad \partial_2 = \sigma\operatorname{grad}\rho - \rho\operatorname{grad}\sigma, \quad \partial_3 = X^{\rm ext}, \qquad \partial_4 = Y^{\rm ext}\,.$$

现在我们计算 上述坐标系中度量 g 的分量。注意 at

$$g(\text{梯度 }\rho, \partial_1) = g(\operatorname{grad}\rho, \partial_2) = g(\operatorname{grad}\rho, \partial_4) = g(\operatorname{grad}\sigma, \partial_1) = g(\operatorname{grad}\sigma, \partial_2) = g(\operatorname{grad}\sigma, \partial_3) = 0\,,$$

这意味着

$$\rho = \rho(x^3)\,, \quad \sigma = \sigma(x^4)\,,$$

由此，结合（88），我们得到

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_{x^3} & -\sigma_{x^4} \\ 0 & 0 & \sigma\,\rho_{x^3} & -\rho\,\sigma_{x^4} \\ \rho_{x^3} & \sigma\,\rho_{x^3} & 0 & 0 \\ -\sigma_{x^4} & -\rho\,\sigma_{x^4} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{89}$$

考虑到

$$\operatorname{grad}\rho = \frac{\rho}{\rho-\sigma}\partial_1 - \frac{1}{\rho-\sigma}\partial_2, \qquad \operatorname{grad}\sigma = \frac{\sigma}{\rho-\sigma}\partial_1 - \frac{1}{\rho-\sigma}\partial_2\,,$$

可以很容易地计算出超复结构的分量，

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma} & \frac{2\rho\sigma}{\rho-\sigma} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\rho-\sigma} & -\frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{90}$$

并且，鉴于 (87)， A 的分量，

$$A = \begin{pmatrix} \rho+\sigma & \rho\sigma & -\sigma f_2 & \rho\, h_2 \\ -1 & 0 & f_2 & -h_2 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{91}$$

其中 h_2 可由 (88) 计算得出：

$$h_2 = -f_2 \frac{g(\partial_4, \operatorname{grad}\sigma)}{g(\partial_3, \operatorname{grad}\rho)} = -f_2 \frac{\sigma_{x^4}}{\rho_{x^3}}\,.$$

直接计算表明，利用目前为止得到的结果，方程 $\nabla^g \mathcal{T} = 0$ 得以满足，而方程（7）仍未满足。事实上，考虑带有$X = \partial_i$、 $i \in \{1,2\}$的方程（7）的 (2,3) 项，我们得到 $f_2 = f_2(x^3, x^4)$；另一方面，研究带有 $X = \partial_j$、$j \in \{3,4\}$ 的同一方程的 (2,3) 项，并回忆 $\det g = (\rho-\sigma)^2 \rho_{x^3}^2 \sigma_{x^4}^2 \neq 0$，可得

$$f_2(x^3, x^4) = k\frac{\rho_{x^3}}{\rho - \sigma}\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

总之，在这种情况下，我们分别得到 g 和 $\mathcal{T}$，其表达式分别由（89）和（90）给出，而 A 则是（91），其中 f_2和 h_2 如上所述。因此，我们得到定理 2 中 $\dim D = 2$ 的第四种情形。

6.4 情形 维数 $D = 1$

6.4.1 梯度 $\rho \in \Gamma$（T^+）和 梯度 $\sigma = 0$的情形

在此情形下， ρ 是 A 的一个非常数特征值，而 $\sigma = c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$。我们将考虑以下向量场：

$$X_1 := \mathcal{T} V_1 = V_1\,, \quad X_2 \in \Gamma(T^- \cap E_\rho)\,, \quad Y_1 \in \Gamma(T^+ \cap E_\sigma)\,, \quad Y_2 \in \Gamma(T^- \cap E_\sigma)\,. \tag{92}$$

注意到，$\operatorname{span}\{X_1, Y_1\}$ 和 $\operatorname{span}\{X_2, Y_2\}$ 是可积的，因为它们分别是 $\mathcal{T}$的特征分布T^+和 T^-。此外，与第 6.3 节所讨论的情形类似，我们有以下命题。

命题 34。 设 X_1、X_2、Y_1、Y_2如 （92）所示。分布 $\operatorname{span}\{X_1, X_2\}$、$\operatorname{span}\{X_1, Y_2\}$ 和 $\operatorname{span}\{X_2, Y_1\}$是可积的，而 $\operatorname{span}\{Y_1, Y_2\}$ 不可积，因为其沿 X_1具有非零分量。

证明。证明与命题 30 的证明非常相似，因此为简洁起见，我们省略证明。 . □

根据推论 13，向量场 X_1 是 Killing 向量场，它将作为我们下面要构造的适当局部坐标系中的第一个坐标向量场。首先，根据命题 34，并结合引理 32 和引理 33，经过适当函数缩放 X_2、 Y_1 和 Y_2 ，并重新命名后，存在一个函数 f ，使得以下向量场

$$U_2 = X_2, \quad U_3 = Y_1 + fX_1, \quad U_4 = Y_2$$

彼此对易。

设 Σ 是分布 $\operatorname{span}\{U_2, U_3, U_4\}$ 的一片叶。设 ϕ_t 是 X_1 的局部流。接着，我们按如下方式将 $U_i|_\Sigma$ 延拓到 Σ 的一个足够小的邻域，记为 U_i^{ext}:

$$U_i^{\mathrm{ext}}(\phi_t(p)) := \phi_{t*}\big(U_i(p)\big)\,, \quad p \in \Sigma\,.$$

这样， $U_{\mathrm{ext}i}$沿着 X_1 的积分曲线为常数，即 $\phi_{t*}(U_{\mathrm{ext}i}) = U_i^{\mathrm{ext}}$。因此，$[X_1, U_i^{\mathrm{ext}}] = 0$，而且 $[U_{\mathrm{ext}i}, U^{\mathrm{ext}}_{\ j}] = \phi_{t*}\Big([U_i, U_j]\big|_\Sigma\Big) = 0$。 于是，三个向量场 $U_{\mathrm{ext}i}$、 $i \in \{2,3,4\}$ 彼此对易，并且各自也与 X_1 对易。

由于 X_1 是超全纯的（见命题 14）， $\mathcal{T}$与 ϕ_{t*}可交换。于是，

$$\mathcal{T}\,\phi_{t*}\big(X_2(p)\big) = \phi_{t*}\big(X_2(p)\big)\,, \quad \mathcal{T}\,\phi_{t*}\big(Y_1(p)\big) = -\phi_{t*}\big(Y_1(p)\big)\,, \quad \mathcal{T}\,\phi_{t*}\big(Y_2(p)\big) = \phi_{t*}\big(Y_2(p)\big), \quad p \in \Sigma\,.$$

因此，回想起 $\{X_1, Y_1\}$ 是 T^+ 的基，而 $\{X_2, Y_2\}$ 是 T^-的基，我们得到以下分解：

$$\phi_{t*}\big(X_2(p)\big) = h_1 Y_2 + h_2 X_2\,, \quad \phi_{t*}\big(Y_1(p)\big) = h_3 Y_1 + h_4 X_1\,, \quad \phi_{t*}\big(Y_2(p)\big) = h_5 Y_2 + h_6 X_2\,, \quad p \in \Sigma\,.$$

另一方面，ϕ_t 是一个局部等距变换，且 X_1 是一个 Killing 向量场。特别地，我们有以下等式：

$$h_6\, g_{\phi_t(p)}(X_1, X_2) = g_{\phi_t(p)}\left(\phi_{t*}\big(X_1(p)\big), \phi_{t*}\big(Y_2(p)\big)\right) = g_p(X_1(p), Y_2(p)) = 0\,.$$

由于 $g(X_1,\ X_2) \neq 0$，我们有 $h_6 = 0$，这意味着

$$\phi_{t*}\big(X_2(p)\big) = h_1 Y_2 + h_2 X_2\,, \quad \phi_{t*}\big(Y_1(p)\big) = h_3 Y_1 + h_4 X_1\,, \quad \phi_{t*}\big(Y_2(p)\big) = h_5 Y_2\,.$$

最后，以下向量场

$$X_1, \quad U_2^{\text{ext}} = h_2 X_2 + h_1 Y_2, \quad U_3^{\text{ext}} = h_3 Y_1 + (h_4 + f) X_1, \quad U_4^{\text{ext}} = h_5 Y_2\,, \tag{93}$$

彼此对易。在本节余下部分中，我们用 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 表示一个局部坐标系，其中向量场 (93) 是坐标向量场，即 $\partial_1 = X_1$ 和 $\partial_i = U_i^{\text{ext}}$, $i \in \{2,3,4\}$。在该坐标系中，超复结构 $\mathcal{T}$ 的分量矩阵为

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

而张量场 A 的分量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & f_2(\rho - c) & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & f_1(c-\rho) & 0 & c \end{pmatrix}.$$

其中 $f_1 = h_1$ 和 $f_2 = h_4 + f$。
现在来计算度量系数 $g(\partial_i,\ \partial_j)$。我们有

$$\rho_{x_1} = g(\operatorname{grad}\rho, \partial_1) = g(K\operatorname{grad}\rho, K\operatorname{grad}\rho) = 0\,, \quad \rho_{x_3} = g(\operatorname{grad}\rho, \partial_3) = g(X_1, Y_1 + f_2 X_1) = 0\,,$$
$$\rho_{x_4} = g(\operatorname{grad}\rho, \partial_4) = g(X_1, Y_2) = 0\,,$$

因此 $\rho = \rho(x^2)$。类似地，我们也得到 g 的其他分量：

$$g(\partial_3, \partial_4) = g(Y_1, Y_2)\,, \quad g(\partial_2, \partial_3) = g(X_2 + f_1 Y_2, Y_1 + f_2 X_1) = f_2\, g(X_2, X_1) + f_1\, g(Y_1, Y_2) = f_2 \rho_{x_2} + f_1 g_{34}\,,$$

因此我们有

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{x_2} & 0 & 0 \\ \rho_{x_2} & 0 & f_2\rho_{x_2} + f_1 g_{34} & 0 \\ 0 & f_2\rho_{x_2} + f_1 g_{34} & 0 & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

g 的分量与 x^1 无关，因为 ∂_1 是一个 Killing 向量场。考虑到这一点，$\nabla^g \mathcal{T} = 0$ 当且仅当

$$\big(f_1 g_{34}\big)_{x^4} - \big(g_{34}\big)_{x^2} + \rho_{x^2} f_2 = 0. \tag{94}$$

考虑到 $\det g = (g_{34})^2 \rho_{x^2}^2 \neq 0$，且 g_{23} 与 x^1 无关，方程（7）中取 $X = \partial_1$ 时的 (1，3) 项意味着 f_2 与 x^1 无关。因此，再次回想 g_{23} 与 x^1 无关，也可知 f_1 与 x^1 无关。

考虑到(94)，方程（7）中取 $X = \partial_4$ 时的 (4，2) 项意味着

$$g_{34} = (\rho - c)\,\big(f_2\big)_{x^4}.$$

将 (7) 的 (4，2) 项与 $X = \partial_2$ 结合可得

$$f_1 = \frac{(f_2)_{x^2}}{(f_2)_{x^4}}\,, \tag{95}$$

而将 (7) 的 (4，2) 项与 $X=\partial_3$ 结合可得 (95) 与 x^3 无关。Th en

$$f_2(x^2,x^3,x^4)=F(x^3,\varphi(x^2,x^4)).$$

最后，总结如下：

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\rho&0&(\rho-c)F&0\\0&\rho&0&0\\0&0&c&0\\0&(c-\rho)\frac{F_{x^2}}{F_{x^4}}&0&c\end{pmatrix},\tag{96}$$

$$g=\begin{pmatrix}0&\rho_{x^2}&0&0\\\rho_{x^2}&0&\big((\rho-c)F\big)_{x^2}&0\\0&\big((\rho-c)F\big)_{x^2}&0&(\rho-c)F_{x^4}\\0&0&(\rho-c)F_{x^4}&0\end{pmatrix}.$$

其中 $\rho=\rho(x^2)$、 $F=F(x^3,\varphi(x^2,x^4))$，满足 $\rho_{x^2}\neq 0$, $F_{x^4}\neq 0$。通过交换 $x^2\leftrightarrow x^3$，我们得到定理 2 中 $\dim D=1$ 第一种情形的标准形。

6.4.2 梯度 $\rho\in\Gamma(T^-)$ 和 梯度 $\sigma=0$的情形

此情形与第 6.4.1 节讨论的情形非常相似。通解由 $(g,-\mathcal{T},A)$ 给出，其中 $(g,\mathcal{T},A)$ 由式 (96) 给出。通过交换 $x^2\leftrightarrow x^3$，我们得到定理 2 中 $\dim D=1$ 第二种情形的标准形。

7 四维 para-Kähler-爱因斯坦度量与非平行 Benenti张量

考虑到定理1，如果我们在同一个 pc-射影类中找到两个不成比例的爱因斯坦度量，就可以构造一个 pc-射影等价的爱因斯坦度量二参数族。因此，本节将确定定理 2 中出现的度量 g 何时为爱因斯坦度量，以及由式 (9) 给出的与之关联的度量 $\hat{}g$ 何时为爱因斯坦度量，因为 g 和 $\hat{}g$ 是 pc-射影等价且不成比例的。以下各小节按照定理 2 中的情形编排。

下文记 $\mathrm{E}=\mathrm{Ric}(g)-\lambda g$（分别记为 $\mathrm{E}=\mathrm{Ric}(\hat{}g)-\lambda\,\hat{}g$），因此，当且仅当 $\mathrm{E}=0$（分别为 $\mathrm{E}=0$）时，g（分别为 $\hat{}g$）是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数为 λ（分别为 λ）。

7.1 非退化情形

7.1.1 实刘维尔度量的情形

命题 35。 定理 *2* 中实 *Liouville* 型的度量 g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ，当且仅当以下方程组

$$\begin{cases}3\rho_{x^1}^2+2\lambda\rho^3-3k\rho^2-6h\rho=c_1\\3\sigma_{x^2}^2-\varepsilon(2\lambda\sigma^3-3k\sigma^2-6h\sigma)=c_2\end{cases}\tag{97}$$

对某些常数 h、k、c_1、$c_2\in\mathbb{R}$成立。

证明。 方程 $\mathrm{E}_{11}+\varepsilon\mathrm{E}_{22}=0$ 等价于

$$\frac{\rho_{x^1x^1x^1}}{\rho_{x^1}}+2\lambda\rho=-\varepsilon\frac{\sigma_{x^2x^2x^2}}{\sigma_{x^2}}+2\lambda\sigma$$

并且，回想起 $\rho=\rho(x^1)$ 和 $\sigma=\sigma(x^2)$，上述方程给出

$$\frac{\rho_{x^1x^1x^1}}{\rho_{x^1}}+2\lambda\rho=-\varepsilon\frac{\sigma_{x^2x^2x^2}}{\sigma_{x^2}}+2\lambda\sigma=k\in\mathbb{R}$$

i.e.

$$\begin{cases} \rho_{x^1x^1} + \lambda\rho^2 - k\rho - h_1 = 0 \\ \sigma_{x^2x^2} - \varepsilon(\lambda\sigma^2 - k\sigma - h_2) = 0 \end{cases} \qquad h_1, h_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{98}$$

将 (98) 代入方程 $\mathrm{E}_{11} = 0$，得到 $h_1 = h_2 = h$；考虑到这一点，再将 (98) 代入 E 的其余项，得到零。最后，我们注意到，方程组 (98) 导出 (97)。

□

命题36。 设 g 是定理 *2* 中的一个实 *Liouville* 型度量。若 g 是爱因斯坦度量，则由 (9) 给出的度量 $\hat{}g$ 是爱因斯坦度量，当且仅当 $\varepsilon c_1 + c_2 = 0$，其中 c_i 由命题 *35* 定义，而 $\hat{}g$ 的爱因斯坦常数 $\hat{}\lambda$ 等于 $\frac{1}{2}c_1$。

证明。 根据 (97)，方程 $(\sigma - \rho)(\varepsilon\rho\hat{}\mathrm{E}_{11} - \sigma\hat{}\mathrm{E}_{22}) = 0$ 为（回想一下，在我们研究的情形中，$\rho \neq \sigma$）

$$\varepsilon c_1 + c_2 = 0\,.$$

将此关系代入张量 $\hat{}\mathrm{E}$，我们可知（始终考虑条件 (97)），当且仅当 $\hat{}\lambda = \frac{1}{2}c_1$ 时结果为零。

□

正如本节开头所述，一旦我们有了属于同一 pc-射影类的两个不成比例的 para-K¨ahler-爱因斯坦度量，根据定理1，我们便可构造一个 para-K¨ahler-爱因斯坦度量的二参数族。下面我们将通过一个具体例子来说明这一过程。

例37。 令 $\varepsilon = 1$、$\rho = -\frac{6}{\lambda\, x^1()^2}$ 以及 $\sigma = \frac{6}{\lambda\, x^2()^2}$。若方程组 (97) 满足 $h = k = c_1 = c_2 = 0$，则度量 g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ。根据命题*36*，由 (9) 给出的度量 $\hat{}g$ 是*Ricci*平坦的。更确切地说，

$$\hat{g} = \frac{\lambda^2\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)}{36}\left((x^1)^2dx^1dx^1 + (x^2)^2dx^2dx^2\right) + \frac{1}{9}\lambda^2\left((x^1)^2 - (x^2)^2\right)dx^3dx^3 - \frac{4}{3}\lambda dx^3dx^4$$

以及带有 $n = 2$的公式(4)给出了以下2参数抛物-*K¨ahler*-爱因斯坦度量：

$$\begin{aligned} -\frac{6\lambda^2}{B}\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)&\left(\frac{(x^1)^2}{\alpha\lambda(x^1)^2 - 6\beta}dx^1dx^1 + \frac{(x^2)^2}{\alpha\lambda(x^2)^2 + 6\beta}dx^2dx^2\right) \\ &+ \frac{24\lambda^2}{B^2}\left(\alpha\lambda(x^1)^4 - \alpha\lambda(x^1)^2(x^2)^2 + \alpha\lambda(x^2)^4 - 6\beta(x^1)^2 + 6\beta(x^2)^2\right)dx^3dx^3 \\ &- \frac{288\lambda}{B^2}\left(\alpha\lambda(x^1)^2 - \alpha\lambda(x^2)^2 - 6\beta\right)dx^3dx^4 + \frac{864\lambda}{B^2}\alpha dx^4dx^4\,, \end{aligned} \tag{99}$$

其中 $B = (\alpha\lambda(x^1)^2 - 6\beta)(\alpha\lambda(x^2)^2 + 6\beta)$。(99) 的爱因斯坦常数为 $\lambda\alpha^3$。

7.1.2 复刘维尔度量的情形

在本节中，我们始终假设由 $\rho_{\bar{z}} = 0$ 导出的柯西-黎曼方程（当然也包括其相容条件）均得到满足。

命题38。 定理 *2* 中的复刘维尔型度量 g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ，当且仅当满足以下复方程

$$\rho_z^2 - \frac{1}{6}\lambda\rho^3 - a\rho^2 - 2h\rho + d = 0 \tag{100}$$

对于某些常数 $a \in \mathbb{R}$ 和 $h, d \in \mathbb{C}$，该式成立。

证明。 方程 $\mathrm{E}_{12}=0$ 可表示如下:

$$\frac{\rho_{zzz}}{\rho_z}-\frac{1}{2}\lambda\rho=\frac{\bar{\rho}_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}}{\bar{\rho}_{\bar{z}}}-\frac{1}{2}\lambda\bar{\rho}\,.$$

由于 $\frac{\rho_{zzz}}{\rho_z}-\frac{1}{2}\lambda\rho$ 是一个全纯函数，上述等式表明它是一个实常数，我们将其记为 a，因此有 $\rho_{zzz}-\frac{1}{2}\lambda\rho\rho_z-a\rho_z=0$，并且

$$\rho_{zz}-\frac{1}{4}\lambda\rho^2-a\rho=h \tag{101}$$

其中 $h\in\mathsf{C}$，从而得到（100）。最后，将（101）代入张量场 E，可得零。 □

注39。 由（100） 得到的（三阶）方程组等价于

$$\mathrm{E}_{11}=\mathrm{E}_{12}=0\,. \tag{102}$$

事实上，回顾 $\rho\,(x^1+ix^2)\;=R\,(x^1,x^2)\;+iI\,(x^1,x^2)$ 满足柯西-黎曼方程，直接计算表明，方程组（102） 为零，当且仅当$\mathrm{E}\;=0$。该方程组可写为

$$\begin{cases} I\,I_{x^2}I_{x^1x^1x^2}+I\,I_{x^1}I_{x^1x^1x^1}-(I_{x^2})^2I_{x^1x^1}-(I_{x^1})^2I_{x^1x^1}=0\\ \lambda I(I_{x^1})^2+\lambda I(I_{x^2})^2-2I_{x^2}I_{x^1x^1x^1}+2I_{x^1}I_{x^1x^1x^2}=0\,, \end{cases} \tag{103}$$

其优点在于仅用实函数 I表示。考虑到 I 是一个非零调和函数，方程组（103） 可以写成以下更为优雅的形式:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{(I^2_{x^1})_{x^1}}{I}\right)_{x^1}-\left(\dfrac{(I^2_{x^2})_{x^2}}{I}\right)_{x^2}=0\\ \left(\dfrac{(I^2_{x^1})_{x^1}}{I}\right)_{x^2}+\left(\dfrac{(I^2_{x^2})_{x^2}}{I}\right)_{x^1}=-\lambda\,(I^2_{x^1}+I^2_{x^2}) \end{cases}$$

注40。 我们注意到，通过对方程 (100) 关于 z 求导，并令实部和虚部均为零，可以得到低阶导数之间的一些关系。更确切地说，有

$$\begin{cases} I_{x^1}I_{x^2}=h_1I+\frac{1}{4}\lambda R^2I+aRI-\frac{1}{12}\lambda I^3+h_2R-\frac{1}{2}d_2\\ I^2_{x^2}-I^2_{x^1}=-\frac{1}{2}\lambda RI^2+\frac{1}{6}\lambda R^3-aI^2+aR^2-2h_2I+2h_1R-d_1 \end{cases} \tag{104}$$

and

$$\begin{cases} I_{x^1x^1}=\frac{1}{2}\lambda RI+aI+h_2\\ I_{x^1x^2}=\frac{1}{4}\lambda R^2-\frac{1}{4}\lambda I^2+aR+h_1 \end{cases} \tag{105}$$

其中 $h_1=\frac{1}{2}(h+\bar{h})$、 $h_2=\frac{1}{2i}(h-\bar{h})$、 $d_1=\frac{1}{2}(d+\bar{d})$和 $d_2=\frac{1}{2i}(d-\bar{d})$。方程组 (105) 不过就是 (101)。

命题41。 设 g 是定理 *2* 中的复刘维尔型度量。若 g 是爱因斯坦度量，则由 (9) 给出的度量$\hat{}g$ 是爱因斯坦度量，当且仅当由 (100) 给出的 h 和 d 是实常数。在此情形下，$\hat{}g$ 的$\hat{}$爱因斯坦常数 λ 等于 $6d$。

证明。 从某种意义上说，证明与实刘维尔情形的证明类似，但需要更加谨慎。直接计算$\hat{}\,\hat{}$表明 $\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{22}=0$ ，因此，与实情形类似，我们考虑方程

$$(\rho-\bar{\rho})(\rho\,\hat{\mathrm{E}}(\partial_z,\partial_z)+\bar{\rho}\,\hat{\mathrm{E}}(\partial_{\bar{z}},\partial_{\bar{z}}))=2iI(R\hat{\mathrm{E}}_{11}+I\hat{\mathrm{E}}_{12})=0\,.$$

由于我们假设 g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ，因此方程组 **(103)** 成立。将其代入上面的方程，得到

$$\lambda I^3+6I\,I_{x^1x^2}-6I_{x^1}I_{x^2}=0$$

结合 **(104)** 和 **(105)**，可得

$$2h_2R-d_2=0\,.$$

由于 R 不能是常数，上述关系推出 $h_2=d_2=0$，即 **(100)** 中的常数 h 和 d 为实数。

考虑到这一点，直接计算可得，条件 **(103)**、**(104)** 和 **(105)** 当且仅当 $\lambda=6d$ 时推出$\hat{}\,\hat{}\,\mathrm{E}\;=0$ 。

□

7.2 退化情形

7.2.1 当 维数 $D = 2$ 时的情形

命题 42. 定理 *2* 中维数 $D = 2$ 情形的第一类度量 g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ，当且仅当满足以下方程组

$$\begin{cases} \mu = \frac{3(\rho-c)\rho_{x^2}}{2\lambda(\rho-c)^3+c_2(\rho-c)^2+c_1} \\ \nu_{x^3} = -\frac{1}{6}c_2\nu^2 + f\nu + h \end{cases} \tag{106}$$

对于某些常数 c_1, c_2 和函数 $f = f(x^3)$，$h = h(x^3)$，该式成立。

证明。 E 的非零项只有 E_{11}, E_{13}, E_{22}, E_{33} 和 E_{34}。此外，我们有以下关系：

$$\nu\mathrm{E}_{11} + \mathrm{E}_{13} = \mu^2\mathrm{E}_{11} + \mathrm{E}_{22} = \nu^2\mathrm{E}_{11} - \mathrm{E}_{33} = 0\,,$$

因此，待研究的方程组可化简为 $\mathrm{E}_{11} = 0, \mathrm{E}_{34} = 0$。方程 $\mathrm{E}_{11} = 0$ 是一个常微分方程，其解由 (106) 的第一个方程给出。将其代入 $\mathrm{E}_{34} = 0$，得到

$$\left(c_2\nu + 3\frac{\nu_{x^3x^4}}{\nu_{x^4}}\right)_{x^4} = 0 \tag{107}$$

由此得到（106）的第二个方程。 □

命题 43. 设 g 是定理 *2* 中维数 $D = 2$ 情形下第一类的度量。设 c_1 和 c_2 由（106）给出。若 g 是爱因斯坦度量，则由（9）给出的度量 $\hat{}g$ 是爱因斯坦度量，当且仅当 $c_1 = 0$。在此情形下，$\hat{}g$ 的爱因斯坦常数 $\hat{}\lambda$ 等于 $c^2\left(\lambda c - \frac{1}{2}c_2\right)$。

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$证明. E 的非零项仅有 E_{11}, E_{13}, E_{22}, E_{33} 和 E_{34}。此外，我们有以下关系：

$$\nu\hat{\mathrm{E}}_{11} + \hat{\mathrm{E}}_{13} = \mu^2\hat{\mathrm{E}}_{11} + \hat{\mathrm{E}}_{22} = \nu^2\hat{\mathrm{E}}_{11} - \hat{\mathrm{E}}_{33} = 0\,,$$

$\hat{}\,\hat{}$ 因此，待研究的方程组简化为 $\mathrm{E}_{11} = 0$，$\mathrm{E}_{34} = 0$。

现在，由于根据假设，g 是爱因斯坦度量，其爱因斯坦常数等于 λ，方程组（106）成立。特别地，根据该方程组的第一个方程，并回想 ρ 不可能是常数，且 $\hat{}c \neq 0$，方程 $\mathrm{E}_{11} = 0$ 为

$$(2\lambda r^3 + c_2r^2 + c_1)\big((-2c^3\lambda + c_2c^2 + 2\hat{\lambda})r^2 - 2c_1c\,r - c_1c^2\big) = 0\,, \quad r := \rho - c\,.$$

由 (106) 的第一个方程可知，μ 由此给出，因此量 $2\lambda r^3 + c_2r^2 + c_1$ 不可能为零。于是，$(-2c^3\lambda + c_2c^2 + 2\hat{}\lambda)r^2 - 2c_1c\,r - c_1c^2 = 0$，这意味着

$$c_1 = 0\,, \quad \hat{\lambda} = c^2\left(\lambda c - \frac{1}{2}c_2\right)\,.$$

将上述方程连同 (106) 的第一个方程代入 $\hat{}\mathrm{E}_{34} = 0$，得到 (107)。由于我们假设 g 是爱因斯坦度量，因此该方程成立。 □

此情形下的其他度量，即定理 2 中 $\dim D = 2$ 情形的第二、第三和第四种度量，都是平坦的。通过直接计算可知，事实上，所有 $\hat{}g$ 由 (9) 给出的度量 (4) 都是平坦的。

7.2.2 当 维数 $D = 1$

命题 44. 设 g 是定理 *2* 中 维数 $D = 1$ 情形的度量。若 g 是爱因斯坦度量，则它是平坦的。在此情形下，所有 (4) 中由 (9) 给出的 $\hat{}g$ 对应的度量都是平坦的。

证明. 方程 $\mathrm{E}_{13}=0$ 给出 $\lambda\rho_{x^3}=0$，并且由于根据假设 $\rho_{x^3}\neq 0$，我们得到 $\lambda=0$，也就是说，在此情形下，若度量 g 是爱因斯坦度量，则它必定是 Ricci平坦的。将 $\lambda=0$ 代入方程 $\mathrm{E}_{24}=0$，并回想 $F=F(x^2,\varphi(x^3,x^4))$ 是满足 $F_{x^4}\neq 0$ 的任意函数，我们得到

$$\frac{F_{\varphi\varphi}F_{x^2\varphi}-F_{\varphi}F_{x^2\varphi\varphi}}{F_{\varphi}^2}=-\left(\frac{F_{\varphi\varphi}}{F_{\varphi}}\right)_{x^2}=0$$

得到

$$F(x^2,\varphi(x^3,x^4))=\alpha(\varphi(x^3,x^4))\beta(x^2)+\gamma(x^2)$$

其中 α，β，γ为任意函数。直接计算表明，如果 $\lambda=0$且 F由上述公式给出，则 g 的曲率张量为零。

通过类似的计算可以证明，在 g 为爱因斯坦度量，即在此特定情形下为平坦度量的假设下，由(9)给出的$\hat{}g$ 所对应的度量(4)也是平坦的。 □

致谢

第一作者衷心感谢“Finanziamento alla Ricerca”项目（合同编号53 RBA21MANGIO）以及PRIN项目2022“实流形与复流形：几何与全纯动力学”（代码2022AP8HZ9）提供的支持。第二作者获“Starting Grant”项目支持，合同编号为53 RSG22SALFIL。两位作者均为INdAM下属GNSAGA的成员。

声明

相关数据

作者声明未包含相关数据。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突

参考文献

[1] D.V.Alekseevsky，《伪K*ähler*¨与超K*ähler*¨对称空间》。见《伪黎曼几何与超对称手册》，703-729，IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 16，欧洲数学会，苏黎世，2010年。[2] D. V. Alekseevsky, C. Medori, A. Tomassini，《齐性超K*ähler*¨爱因斯坦流形》。《俄罗斯数学调查》64 (2009年) 1-43。[3] D. V. Alekseevsky, C. Medori, A. Tomassini，《极大齐性超CR流形》。《全球分析与几何年刊》30 (2006年)，第1期，1-27。[4] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon，《K*ähler*¨几何中的哈密顿 2-形式。I. 一般理论》。《微分几何杂志》**73** (2006年)，第3期，359-412。[5] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon，《K*ähler*¨几何中的哈密顿 2-形式。II. 整体分类》。《微分几何杂志》**68** (2004年)，第2期，277-345。[6] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, C. Tønnesen-Friedman，《K*ähler*¨几何中的哈密顿 2-形式。III. 极值度量与稳定性》，。《数学发明》**173** (2008年)，第3期，547-601。[7] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, C. Tønnesen-Friedman，《K*ähler*¨几何中的哈密顿 2-形式。IV. 弱 Bochner 平坦的 K*ähler*¨流形》。《分析与几何通讯》**16**(2008年)，第1期，91-126。

[8] V. Apostolov, D. M. J. Calderbank, P. Gauduchon, 《弱自对偶 K ¨ahler 曲面的几何》. Compositio Math. 135 (2003), no. 3, 279-322.[9] A. Bolsinov, V. S. Matveev, Benenti 系统的几何解释。《几何与物理杂志》44 (2003), 第4期, 489-506。[10] A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, T. Mettler, S. Rosemann, 容许 c-射影向量场的四维 K ¨ahler 度量。《纯粹与应用数学杂志》(9) 103 (2015), 第3期, 619-657。[11] A. Bolsinov, V.S. Matveev, S. Rosemann, c-射影等价度量的局部标准形及任意符号下 Yano-Obata 猜想的证明。Lorentz 度量情形下射影 Lichnerowicz 猜想的证明。《高等师范学校科学年刊》(4) 54 (2021), 第6期, 1465-1540。[12] R.L. Bryant, G. Manno, V. S. Matveev, Sophus Lie 问题的一个解：容许两个射影向量场的二维度量的标准形。《数学年刊》340 (2008), 第2期, 437-463。[13] D.M.J. Calderbank, M. G. Eastwood, V. S. Matveev, K. Neusser, c-射影几何。《美国数学会回忆录》267 (2020), 第1299期, v+137 页。[14] D.M.J. Calderbank, V.S. Matveev, S. Rosemann, 具有哈密顿 2-形式的 K ¨ahler 度量的曲率与 c-射影可动性。Compos. Math. 152 (2016), 第8期, 1555-1575。[15] A. ˇCap, A.R. Gover, c-射影紧化；（拟）K ¨ahler 度量与 CR 边界。《美国数学杂志》141 (2019), 第3期, 813-856。[16] V. Cruceanu, P. Fortuny, P. M. Gadea, 超复几何综述。《落基山数学杂志》26 (1996) 83-115。[17] M. Dunajski, A.R. Gover, A. Waterhouse, 爱因斯坦度量的射影与 c-射影紧化的一些例子。《亨利·庞加莱年刊》21 (2020), 第4期, 1113-1133。[18] J.K. Flood, A.R. Gover, c-射影可度量化方程解的几何。《纯粹与应用数学年刊》(4) 202 (2023), 第3期, 1343-1368。[19] P. M. Gadea, A. Montesinos Amilibia, 常超全纯截面曲率空间。《太平洋数学杂志》136 (1989) 85-101。[20] F. R. Harvey, H. B. Lawson, 分裂特殊 Lagrange 几何。《度量与微分几何》, 数学进展 297 (2012) 43-89。[21] S. Lie, 《关于测地曲线的研究》。《数学年刊》20 (1882)。[22] G. Manno, F. Salis, 超K ¨ahler 流形浸入超K ¨ahler 空间形式。《数学成果》, 已接收。[23] G. Manno, F. Salis, 浸入超K ¨ahler 空间形式的环面超K ¨ahler-爱因斯坦流形。《几何与物理杂志》218 (2025), 论文编号 105688, 16页。[24] G. Manno, J. Schumm, A. Vollmer, K ¨ahler 曲面的 c-射影对称代数。《几何分析杂志》35 (2025), 第3期, 论文编号 75, 51页。[25] V. S. Matveev, 恰有一个射影向量场的二维度量。《数学年刊》352 (2012), 第4期, 865-909。[26] V.S. Matveev, S. Rosemann, K ¨ahler 流形的锥化构造及其在 c-射影几何中的应用。《数学进展》274 (2015), 1-38。[27] J. Mike˘s, N. S. Sinyukov, 仿射联络空间的拟平面映射。苏联数学 27:1 (1983), 63-70, 《高等院校学报·数学》248:1 (1983), 55-61。[28] J. Mike˘s, 全纯射影映射及其推广。《几何》3。《数学科学杂志》（纽约）89 (1998), 第3期, 1334-1353。

[29] J. Mikeˇs、E.Stepanova、A. Vanˇzurov´a 等，《特殊映射的微分几何》。奥洛穆茨帕拉茨基大学理学院，奥洛穆茨（2015 年），568 页。

(G. Manno) Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange", Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino.电子邮箱：giovanni.manno@polito.it

(F. Salis) Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange", Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino.电子邮箱：filippo.salis@polito.it