一种改进的 SIS 流行病模型及其在健康保险定价中的应用

Tuan Chau Do[a]、Tien Thinh Le[b]、Nguyen Trong Hieu[c]、Manh Tuan Hoang[d], *

[a]自然科学学院，布达佩斯技术与经济大学，匈牙利布达佩斯 *Muegyetem rkp. 3*，邮编 *1111*[b]数学与统计学院，胡志明市经济大学，越南胡志明市第*10*郡第*8*坊 *Nguyen Tri Phuong* 校区，邮编 *279*[c]自然科学大学，越南国家大学河内分校，越南河内市 *Thanh Xuan* 郡 *Thanh Xuan Trung* 坊 *Nguyen Trai* 街 *334* 号[d]数学系，*FPT*大学，越南河内和乐高科技园区 *Km29 Thang Long* 大道

arXiv:2601.02168v1 [math.DS] 5 Jan 2026

摘要

本文研究经典 SIS 模型的一种改进版本，该模型纳入住院治疗和疾病致死率，旨在更准确地刻画与健康保险定价模型相关的动力学。具体而言，我们提出了一个称为 SISHD模型的新框架，同时考虑住院个体和疾病致死率。我们全面分析了所提出模型的动力学性质，包括解的正性和有界性、基本再生数，以及平衡点的存在性和渐近稳定性。此外，我们将该模型应用于健康保险定价，并利用 SISHD模型估算的人口规模来确定适当的保险成本。最后，我们通过数值模拟展示并验证了理论结果。

关键词： 数理流行病学、SIS流行病模型、动力系统、稳定性分析、健康保险定价

*2020*年数学主题分类： 34C60,37N99

1. 引言

数理流行病学有着悠久且成熟的发展历史，并且至今仍是一个具有众多实际应用的重要领域（例如，参见 [3, 4, 15] 及其中的参考文献）。由 Kermack 和 McKendrick [13], 首次提出的著名 SIR 模型，是最早的疫情建模框架之一，广泛用于介绍流行病学建模的基本原理。在实践中，对传染病进行数学建模和分析，已成为理解传播动力学、预测疫情暴发以及制定疾病控制与预防策略的重要手段。近年来，数理流行病学模型在保险定价中的应用引起了众多研究者的广泛关注；因此，若干研究成果不仅在理论上，而且在实践中都证明了极高的价值（例如，参见 [7, 9, 10, 11, 17, 18, 21, 22] 及其中的参考文献）。

在这项工作中，我们重新审视一个经典的SIS流行病模型 [1, 3, 4, 15], ，该模型描述的是个体感染传染病后虽能康复，但康复后不会获得免疫力的情形。所考虑的模型形式如下：

$$\begin{aligned} S'(t) &= \Lambda - \beta I(t)S(t) + \alpha_I I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) &= \beta I(t)S(t) - (\alpha_I + \gamma_I + \mu)I(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

*通讯作者电子邮箱： tuanb2610@gmail.com (Tuan Chau Do)，letienthinh2510@gmail.com(Tien Thinh Le),hieunguyentrong@gmail.com(Nguyen Trong Hieu)，tuanhm16@fe.edu.vn (Manh Tuan Hoang)

满足初始数据： $S(0) \geq 0$ 且 $I(0) \geq 0$。

在此模型中：

- 总人口分为两个互不相交的群体：易感类（S），由尚未感染但有感染疾病风险的个体组成；以及感染类（I），由已感染且能够将疾病传播给他人的个体组成；
- $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示时刻 t 的易感者人数和感染者人数；
- β 表示传播率；
- α_I 表示康复率；
- μ 表示自然死亡率；
- γ_I 表示传染类中的疾病致死率（I）；
- Λ 表示补充率（出生率）。

值得注意的是,ant 出于流行病学原因，假设所有参数均为正。

式（1.1）的传播图见图1。关于模型（1.1）的推导和动力学行为的更多细节，可参见 [1, 3, 4, 15]（另见 [12, 14] 及其中的参考文献）。包括式（1.1）在内的 SIS 模型被视为基础框架，是许多重要流行病学模型的基石，并具有广泛的实际应用。

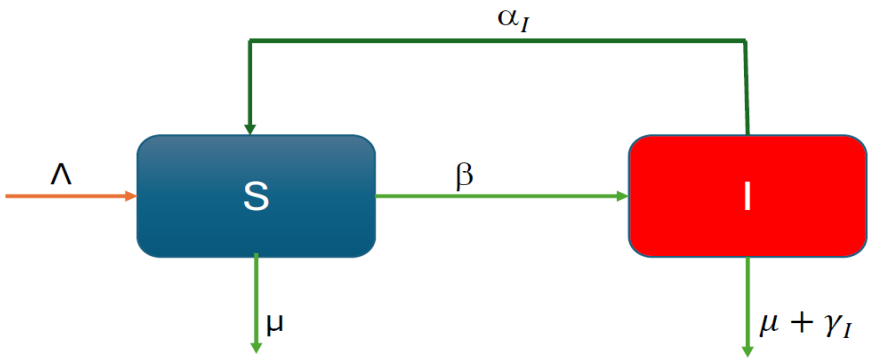


图1：模型（1.1）的传播图。

在本研究中，我们考虑（1.1）的一个修正版，并研究其在精算疾病保险中的应用。为此，我们首先对（1.1）进行修改，使其更符合现实情况。为此，我们将以下新类别纳入模型：

- 类别 H 由因接受治疗而住院、但仍可能将疾病传播给他人的个体组成；
- 类别 D 由因该疾病死亡的个体组成。

于是，（1.1）的扩展版本为：

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta IS - \beta\epsilon HS + \alpha_I I - \mu S + \alpha_H H, \\ I' &= \beta IS + \beta\epsilon HS - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)I, \\ H' &= \delta I - (\gamma_H + \mu + \alpha_H)H, \\ D' &= \gamma_I I + \gamma_H H, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

- δ 是从 I 到 H的住院率;
- $\epsilon \in [0,1]$ 表示住院个体（H）相对于传染性个体（I）的相对传染性

- α_H 表示从 H 到 S的出院（康复）率;
- γ_H 表示住院个体 H的疾病致死率。

模型（1.2）中类别 S、I、H 和 D 之间的传播如图2所示。

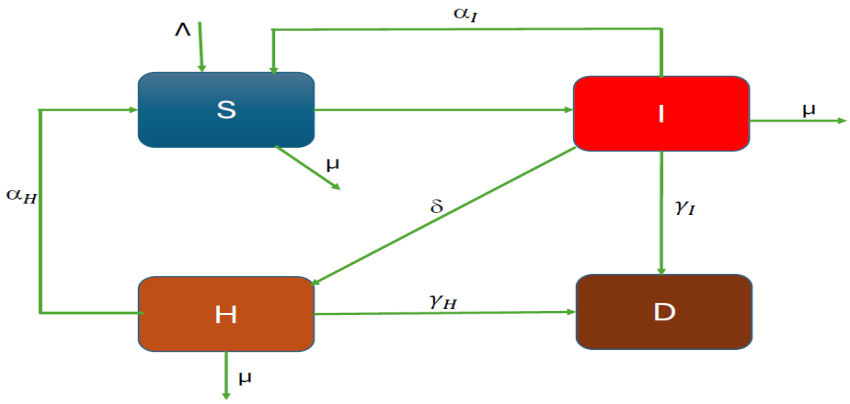


图2：模型（1.2）的传播图。

对模型（1.2）进行定性分析后，我们探讨其在健康保险定价中的应用，即使用根据模型（1.2）估算的个体数量来计算保险费。所得结果表明，该模型在现实场景中具有若干潜在且实用的应用。

本文的结构安排如下:
第2节建立模型 (1.2) 的动力学性质，包括解的正性与有界性、基本再生数、平衡点及其渐近稳定性。第3节介绍模型 (1.2) 在精算疾病保险中的应用。第4节报告数值模拟，以支持并说明理论结果。最后一节给出一些评论和未解决的问题。

2. SISHD模型的动力学分析

本节分析模型 (1.2) 的动力学性质。记 $N(t)$ 为模型 (1.2) 中存活个体的总数，即当 $t \geq 0$ 时，$N(t) = S(t) + I(t) + H(t)$。

命题 2.1. 模型 (1.2) 存在正向不变集 $\mathbb{R}^4_+ = \{(S,I,H,D)^T \in \mathbb{R}^4 | S,I,H,D \geq 0\}$，即对于 $t > 0$，只要 $\big(S(0)\ \ I(0)\ \ H(0)\ \ D(0)\big)^T \in \mathbb{R}^4_+$，就有 $\big(S(t)\ \ I(t)\ \ H(t)\ \ D(t)\big)^T \in \mathbb{R}^4_+$。此外，我们有以下关于 $N(t)$ 的估计

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}. \tag{2.1}$$

证明。令 $\big(S(0)\ \ I(0)\ \ H(0)\ \ D(0)\big)^T$ 为属于 $\mathbb{R}^4_+$ 的任意初始数据。由 (1.2) 可得

$$\begin{aligned}
S'|_{S=0} &= \Lambda + \alpha_I I + \alpha_H H \geq 0\\
I'|_{I=0} &= \beta\epsilon HS \geq 0\\
H'|_{H=0} &= \delta I \geq 0,\\
D'|_{D=0} &= \gamma_I I + \gamma_H H \geq 0
\end{aligned}$$

对所有 S，I，H，$D \geq 0$ 均成立。因此，根据 [19, 命题 B.7]，我们推得 $S(t)$ $I(t)$ $H(t)$ $D(t)$ ≥ 0 对 $t \geq 0$ 成立。这意味着 $\mathbb{R}^4_+$ 是 (1.2) 的正向不变集。

容易验证，存活个体总数满足

$$N' = (S + I + H)' = \Lambda - \mu(S + I + H) - \gamma_I I - \gamma_H H \leq \Lambda - \mu(S + I + H) = \Lambda - \mu N.$$

利用常微分方程基本比较定理 [16] 可得

$$N(t) \leq \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu},$$

这意味着估计式 (2.1) 成立。因此，证明完成。 □

由于 D 分量只出现在第四个方程中，因此只需考虑前三个方程:

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta IS - \beta\epsilon HS + \alpha_I I - \mu S + \alpha_H H, \\ I' &= \beta IS + \beta\epsilon HS - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)I, \\ H' &= \delta I - (\gamma_H + \mu + \alpha_H)H \end{aligned} \tag{2.2}$$

在其由下式定义的可行区域上

$$\Omega = \left\{(S, I, H) \in \mathbb{R}^3_+ | S + I + H \leq \frac{\Lambda}{\mu}\right\}. \tag{2.3}$$

W现在确定 (2.2 的平衡点集合和基本再生数).

定理 2.2。 *(i)* 对于所有参数取值，模型 (2.2) 始终存在一个无病平衡点（*DFE*） $E_0 = (S_0, I_0, H_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$。

(ii) 模型 (2.2) 的基本再生数计算如下:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\Lambda\left[(\gamma_H + \mu + \alpha_H) + \epsilon\delta\right]}{\mu(\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)(\gamma_H + \mu + \alpha_H)}. \tag{2.4}$$

(ii) 当且仅当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时，存在唯一的地方病平衡点（*DEE*） $E_* = (S_*, I_*, H_*)$。此外，若 E_* 存在，则其表达式为

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)(\gamma_H + \mu + \alpha_H)}{\beta\left[\gamma_H + \mu + \alpha_H + \epsilon\,\delta\right]}, \\ I^* &= \frac{(\gamma_H + \mu + \alpha_H)\left(\Lambda - \mu\, S^*\right)}{(\gamma_I + \mu + \delta)(\gamma_H + \mu + \alpha_H) - \alpha_H\,\delta}, \\ H^* &= \frac{\delta\, I^*}{\gamma_H + \mu + \alpha_H}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

证明。 **第 (i) 部分的证明**。 (2.2) 的任意平衡点都是以下方程组的解

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \beta IS - \beta\epsilon HS + \alpha_I I - \mu S + \alpha_H H, \\ 0 &= \beta IS + \beta\epsilon HS - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)I, \\ 0 &= \delta I - (\gamma_H + \mu + \alpha_H)H. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由（2.6）的第3个方程可知,

$$H = \frac{\delta}{\gamma_H + \mu + \alpha_H} I. \tag{2.7}$$

将该方程代入（2.6）的第二个方程，得到

$$I\left[\beta S+\beta\epsilon\frac{\delta}{\gamma_H+\mu+\alpha_H}S-(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)\right]=0. \tag{2.8}$$

显然，(2.8) 始终有一个平凡解 $I=0$。由此可得 $H=0$。将 $I=H=0$代入第一个方程 (2.6)，得到 $S=\Lambda/\mu$。因此，$(S_0,\ I_0,\ H_0)=(\Lambda/\mu,\ 0,\ 0)$ 是 (2.2) 的一个无病平衡点。

第 (i) 部分的证明。现在，我们使用 [20] 中提出的方法计算 (2.2) 的基本再生数。将 (2.2) 中的变量重新排列为 $X=(I,\ H,\ S)^T$后，无病平衡点变为 $X_f=(0,\ 0,\ \Lambda/\mu)$，且 (2.2) 可以写成矩阵形式

$$X'=\mathcal{F}(X)-\mathcal{V}(X),$$

其中

$$\mathcal{F}(X)=\begin{pmatrix}\beta IS+\beta\epsilon HS\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{V}(X)=\begin{pmatrix}(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)I\\ -\delta I+(\gamma_H+\mu+\alpha_H)H\\ -\Lambda+\beta IS+\beta\epsilon HS-\alpha_I I+\mu S-\alpha_H H\end{pmatrix}.$$

因此，

$$D\mathcal{F}(X_f)=\begin{pmatrix}\beta\frac{\Lambda}{\mu} & \beta\epsilon\frac{\Lambda}{\mu} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad D\mathcal{V}(X_f)=\begin{pmatrix}\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta & 0 & 0\\ -\delta & \gamma_H+\mu+\alpha_H & 0\\ \beta\frac{\Lambda}{\mu}-\alpha_I & \beta\epsilon\frac{\Lambda}{\mu}-\alpha_H & \mu\end{pmatrix}.$$

因此，基本再生数计算为

$$\mathcal{R}_0=\rho(FV^{-1})=\frac{\beta\Lambda\left[(\gamma_H+\mu+\alpha_H)+\epsilon\delta\right]}{\mu(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)}.$$

(iii) 由 (2.8) 可得一个非平凡解

$$S_*=\frac{(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)}{\beta\left[(\gamma_H+\mu+\alpha_H)+\epsilon\delta\right]}.$$

将该方程和（2.7）代入（2.6）的第一个方程，得到

$$I^*=\frac{\Lambda-\mu S^*}{\gamma_I+\mu+\delta-\dfrac{\alpha_H\delta}{\gamma_H+\mu+\alpha_H}}$$

容易看出，$I_*>0$ 当且仅当 $\mu S_*<\Lambda$，这等价于 $\mathcal{R}_0>1$。因此，我们得出结论：$E_*=(S_*,\ I_*,\ H_*)$当且仅当 $\mathcal{R}_0>1$ 时构成（2.2）的唯一地方病平衡点。

证明完毕。 □

将定理 1 应用于 [20]中的（2.2），得到:

推论 2.3。当 $\mathcal{R}_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 相对于集合 Ω 局部渐近稳定；当 $\mathcal{R}_0>1$时则不稳定。

现在我们分析无病平衡点的全局渐近稳定性。

定理 2.4. 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$，无病平衡点 E_0 不仅局部渐近稳定，而且全局渐近稳定。

证明。为了证明无病平衡点的全局渐近稳定性，我们将验证（2.2）满足文献 [6] 中给出的条件（$H1$）$-$（$H2$）。事实上，我们将（2.2）改写为以下形式

$$\begin{aligned} X' &= F(X, Z), \\ Z' &= G(X, Z), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned} &X = S, \quad Z = (I, H)^T, \\ &F(X, Z) = \Lambda - \beta IS - \beta\epsilon HS + \alpha_I I - \mu S + \alpha_H H, \\ &G(X, Z) = \begin{pmatrix} \beta IS + \beta\epsilon HS - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)I \\ \delta I - (\gamma_H + \mu + \alpha_H)H \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是，无病平衡点变为 $U_0 = (X^*, 0) = (\Lambda/\mu, 0)$。

注意，子系统 $X' = F(X, 0)$ 为

$$X' = \Lambda - \mu X.$$

因此， X^* 是该方程的全局渐近稳定平衡点。由此，条件（$H1$）得以满足。

为了验证条件（$H2$），我们将函数 $G(X, Z)$ 改写为以下形式

$$G(X, Z) = AZ - \widehat{G}(X, Z),$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \beta X^* - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta) & \beta\epsilon X^* \\ \delta & -(\gamma_H + \mu + \alpha_H) \end{pmatrix}, \quad \widehat{G}(X, Z) = \begin{pmatrix} \beta I(X^* - X) + \beta\epsilon H(X^* - X) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证， A 是一个 M-矩阵，并且对于 Ω 中的所有 (X, Z)， $G(X, Z) \geq 0$，这意味着条件（$H2$）成立。

因此，利用[6], 中建立的全局稳定性结果，我们可以得到所需结论。证明完毕。

□

现在考虑情形 $\mathcal{R}_0 > 1$，并研究地方病平衡点 E_* 的渐近稳定性 .

定理 2.5。地方病平衡点 E_* 局部渐近稳定，当且仅当 $\mathcal{R}_0 > 1$。

证明。（2.2）的雅可比矩阵为

$$J(S, I, H) = \begin{pmatrix} -\beta I - \beta\epsilon H - \mu & -\beta S + \alpha_I & -\beta\epsilon S + \alpha_H \\ \beta I + \beta\epsilon H & \beta S - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta) & \beta\epsilon S \\ 0 & \delta & -(\gamma_H + \mu + \alpha_H) \end{pmatrix},$$

这意味着

$$J(S_*, I_*, H_*) = \begin{pmatrix} -\beta I_* - \beta\epsilon H_* - \mu & -\beta S_* + \alpha_I & -\beta\epsilon S_* + \alpha_H \\ \beta I_* + \beta\epsilon H_* & \beta S_* - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta) & \beta\epsilon S_* \\ 0 & \delta & -(\gamma_H + \mu + \alpha_H) \end{pmatrix}.$$

通过设定

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \Lambda - \mu S_*, \\
M_1 &= \frac{\gamma_H + \mu + \alpha_H}{(\gamma_I + \mu + \delta)(\gamma_H + \mu + \alpha_H) - \alpha_H \delta}, \\
M_2 &= \frac{\delta}{\gamma_H + \mu + \alpha_H}, \\
B &= M_2,
\end{aligned}
$$

我们得到 $I_* = M_1(\Lambda - \mu S_*) = M_1 M_0$ 和 $H_* = M_1 M_2(\Lambda - \mu S_*) = M_0 M_1 M_2$。利用此关系可将$J(S_*, I_*, H_*)$化简为

$$
J(S_*, M_0) = \begin{pmatrix}
-\beta\, M_0\, M_1\, (1 + \epsilon B) - \mu & -\beta S_* + \alpha_I & -\beta \epsilon S_* + \alpha_H \\
\beta\, M_0\, M_1\, (1 + \epsilon B) & \beta S_* - (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta) & \beta \epsilon S_* \\
0 & \delta & -(\gamma_H + \mu + \alpha_H)
\end{pmatrix},
$$

Th $J(S_*, I_*, H_*)$ 的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$, 其中

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (\alpha_H + \alpha_I + \delta + \gamma_H + \gamma_I + 3\mu) - \beta S_* + \beta M_0 M_1 + \beta \epsilon B\, M_0 M_1, \\
a_2 &= \alpha_H \alpha_I + \alpha_H \delta + \alpha_H \gamma_I + \alpha_I \gamma_H + \delta \gamma_H + \gamma_H \gamma_I + 2\mu(\alpha_H + \alpha_I + \delta + \gamma_H + \gamma_I) + 3\mu^2 \\
&\quad + (\beta S_*)\big(-\alpha_H - \gamma_H - 2\mu - \epsilon\delta\big) + (\beta M_0 M_1)\big(\alpha_H + \delta + \gamma_H + \gamma_I + 2\mu\big) \\
&\quad + (\beta \epsilon B\, M_0 M_1)\big(\alpha_H + \delta + \gamma_H + \gamma_I + 2\mu\big), \\
a_3 &= \mu^3 + \mu^2(\alpha_H + \alpha_I + \delta + \gamma_H + \gamma_I) + \mu(\alpha_H \alpha_I + \alpha_H \delta + \alpha_H \gamma_I + \alpha_I \gamma_H + \delta \gamma_H + \gamma_H \gamma_I) + (\beta S_*) \\
&\big(-\mu^2 - \mu(\alpha_H + \gamma_H + \epsilon\delta)\big) + (\beta M_0 M_1)\big(\mu^2 + \mu(\alpha_H + \delta + \gamma_H + \gamma_I) + \alpha_H \gamma_I + \delta \gamma_H + \gamma_H \gamma_I\big) + (\\
&\beta \epsilon B\, M_0 M_1)\big(\mu^2 + \mu(\alpha_H + \delta + \gamma_H + \gamma_I) + \alpha_H \gamma_I + \delta \gamma_H + \gamma_H \gamma_I\big).
\end{aligned}
$$

现在我们证明 $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ 和 $a_1 a_2 - a_3 > 0$。事实上, （2.6）的第二个方程表明

$$
\beta S_* \big(1 + \epsilon B\big) = \alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta,
$$

或者等价地

$$
\beta S_* = \frac{\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta}{1 + \epsilon B}.
$$

将其代入 a_1 可得

$$
a_1 = \beta M_0 M_1\, (1 + \epsilon B) + \mu + (\gamma_H + \mu + \alpha_H) + \frac{\epsilon B}{1 + \epsilon B}\, (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta) > 0.
$$

容易看出

$$
(\beta S_*)\big[\mu^2 + \mu(\alpha_H + \gamma_H + \epsilon\delta)\big] = \mu\, (\alpha_I + \gamma_I + \mu + \delta)\, (\gamma_H + \mu + \alpha_H),
$$

这意味着

$$
a_3 = \beta\, M_0\, M_1 \left(1 + \frac{\epsilon\, \delta}{\gamma_H + \mu + \alpha_H}\right) \Big[\mu^2 + \mu(\alpha_H + \delta + \gamma_H + \gamma_I) + \alpha_H \gamma_I + \delta \gamma_H + \gamma_H \gamma_I\Big] > 0.
$$

经过一些简单的代数运算，我们可以证明 $a_1 a_2 - a_3 > 0$。

因此，我们已证明 a_1、 $a_3 > 0$ 和 $a_1 a_2 - a_3 > 0$。根据劳斯-赫尔维茨判据（ [1]中的定理 4.4），我们可以推断特征多项式的所有根均为负数或实部为负。这意味着 E_* 局部渐近稳定。证明完毕。 □

注2.6。 要证明无病平衡点全局渐近稳定并不容易；然而，第3节报告的数值模拟表明，该平衡点不仅局部渐近稳定，而且全局渐近稳定。这与关于流行病学模型渐近稳定性的著名结果一致 [1, 3, 4, 15]。

由于无病平衡点是全局渐近稳定的，在实际情况下，我们应设法控制参数，使基本再生数小于 1。在这种情况下，无病平衡点是全局渐近稳定的，这意味着疾病将被消灭。通过分析 $\mathcal{R}_0$相对于可控参数的敏感性，我们可以深入了解疾病预防。更具体地说， $\mathcal{R}_0$相对于可控参数（β， ϵ， α_I， α_H， γ_I， γ_H）的导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} &= \frac{\Lambda\left[(\gamma_H+\mu+\alpha_H)+\epsilon\delta\right]}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)} \;>\; 0,\\
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \epsilon} &= \frac{\beta\Lambda\delta}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)} \;>\; 0,\\
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \alpha_I} &= -\frac{\beta\Lambda\left[(\gamma_H+\mu+\alpha_H)+\epsilon\delta\right]}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)^2(\gamma_H+\mu+\alpha_H)} \;<\; 0,\\
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \gamma_I} &= -\frac{\beta\Lambda\left[(\gamma_H+\mu+\alpha_H)+\epsilon\delta\right]}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)^2(\gamma_H+\mu+\alpha_H)} \;<\; 0,\\
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \alpha_H} &= -\frac{\beta\Lambda\,\epsilon\delta}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)^2} \;<\; 0,\\
\frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \gamma_H} &= -\frac{\beta\Lambda\,\epsilon\delta}{\mu\,(\alpha_I+\gamma_I+\mu+\delta)(\gamma_H+\mu+\alpha_H)^2} \;<\; 0.
\end{aligned}$$

由此，我们可以看出各参数对疾病传播过程的影响。在第4节进行的数值模拟中，我们将采用一组特定参数计算敏感性指数，并展示可控参数的影响。

3. 健康保险定价应用

假设一名投保人参加了一项保费固定的年度保险计划。如果该投保人感染传染病并需要医疗治疗，保险公司将在满足所有保单条件 [7, 9, 10, 11, 17, 18, 21, 22]的前提下，承担治疗费用。假设有一个保险模型，以固定的单位时间费率 π 向易感人群（第 S 类）收取保险费。作为交换，保险公司按以下方式给付保险金：

- 感染者的保险金给付金额 b_I （I）；
- 住院患者的保险金给付金额 b_H （H）；
- 若因该疾病死亡，将一次性给付 d 。

根据等价基本原理， [9], 均衡保费的确定方式应使保险金给付的预期现值等于保费收入的预期现值

$$\mathbb{E}[\text{Present value of benefit outgo}] = \mathbb{E}[\text{Present value of premium income}].$$

因此，该保险模型的等价原理方程可表示如下：

$$\pi \int_0^T S(t)dt = b_I \int_0^T I(t)dt + b_H \int_0^T H(t)dt + d\int_0^T D(t)dt. \tag{3.1}$$

由该方程可得，在长度为 T 的保障期内，保险公司的保费率满足零利润条件：

$$\pi = \frac{b_I \int_0^T I(t)dt + b_H \int_0^T H(t)dt + d \int_0^T [\gamma_I I(t) + \gamma_H H(t)]dt}{\int_0^T S(t)dt}. \tag{3.2}$$

确定零利润保险费水平及相应附加费后，储备水平便成为保险公司在实践中的首要考量。储备水平定义如下：

$$V(t) = \pi \int_t^T S(\tau)d\tau - \left[b_I \int_t^T I(\tau)d\tau + b_H \int_t^T H(\tau)d\tau + d \int_t^T (\gamma_I I(\tau) + \gamma_H H(\tau))d\tau \right]. \tag{3.3}$$

储备水平是反映保险公司在整个保障期 [21]内财务平衡状况的关键指标：

- $V(t) < 0$：保险公司在时间 t 的储备为负，表明预期负债超过保费流入。此类情况需要额外资本来维持偿付能力，也意味着定价方法较为审慎或保守。

- $V(t) > 0$：保险公司持有正储备，意味着保费收入的现值超过预期未来负债。尽管这看起来可能代表盈余，但通常反映出保费结构过高，并由此引发对公平性、监管合规及长期财务可持续性的担忧。在精算实践中，持续出现负储备通常被认为不可接受。

- $V(t) = 0$：这代表理想的精算平衡，即保险费经过精确校准，与预期未来负债相匹配。这符合等价原则；该原则认为，在定价公平的保险模型中，给付与费用的现值必须等于保费收入的现值。

因此，如果 π 设置得过低，储备金 V 在模拟期间可能会变为负值，这表明该方案资金不足，无法满足预期负债。相反，如果 π 设置得过高，储备金可能会大幅超过预期索赔额，这意味着定价过高或运营效率低下。

为确定 T 天保险合同中 π 的可接受取值，应选择保费率，使得对所有 $t \in [0, T]$， $V(t) \geq 0$。由此得到以下精算约束：

$$\pi \geq \pi^* := \max_{t \in [0,T]} \frac{b_I \int_t^T I(\tau)d\tau + b_H \int_t^T H(\tau)d\tau + d \int_t^T [\gamma_I I(\tau) + \gamma_H H(\tau)]d\tau}{\int_t^T S(\tau)d\tau}, \tag{3.4}$$

这可确保未来保费的折现值足以覆盖未来负债。此外，它还为 π 确定了一个实际的上限，可根据模型轨迹通过数值方法估算。

4. 数值实验

本节通过数值算例来支持并说明理论结论。

4.1. 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时 *SISHD*模型的动力学

在本小节中，我们研究当基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 小于 1 时，所提出的 SISHD 模型 (1.2) 的动力学行为。为此，我们考虑参数集如表 1 所示的 (1.2)。对于这些参数集， $\mathcal{R}_0 < 1$；因此，无病平衡点全局渐近稳定。此外，数值模拟中使用了表 2 所示的初始数据集。

表1：满足 $\mathcal{R}_0 < 1$ 的五组参数

Set	Λ	μ	β	ϵ	α_I	γ_I	δ	γ_H	α_H	$\mathcal{R}_0$
A1	20.0	0.02	0.00012	0.20	0.05	0.10	0.02	0.05	0.01	0.6632
A2	20.0	0.02	0.00018	0.25	0.06	0.12	0.03	0.06	0.02	0.8413
A3	30.0	0.03	0.00010	0.15	0.04	0.08	0.01	0.04	0.01	0.6367
A4	10.0	0.01	0.00020	0.30	0.08	0.15	0.02	0.05	0.02	0.8269
A5	25.0	0.025	0.00014	0.10	0.05	0.09	0.03	0.06	0.015	0.7395

表2：SIH模型 (2.2) 数值模拟所用的初始数据（S_0，I_0，H_0）。

初始集	S_0	I_0	H_0
IC_1	800	100	100
IC_2	700	200	50
IC_3	500	250	250
IC_4	600	100	300
IC_5	400	300	300

在下文报告的所有数值算例中，我们采用经典四阶龙格-库塔方法 ([2])，并使用较小的步长，即 $h = 10^{03}$，在区间 $[0, 365]$ 上对 (2.2) 进行数值求解。所得的 (2.2) 的解见图3–7。显然，这些解为正、稳定，并收敛至地方病平衡点。这为第2节中提出的理论结果提供了佐证。

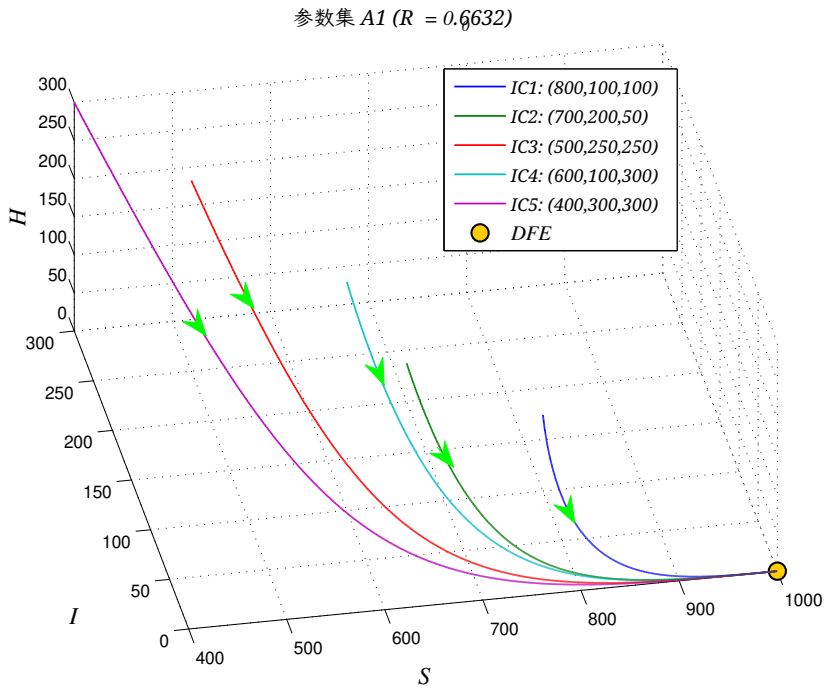
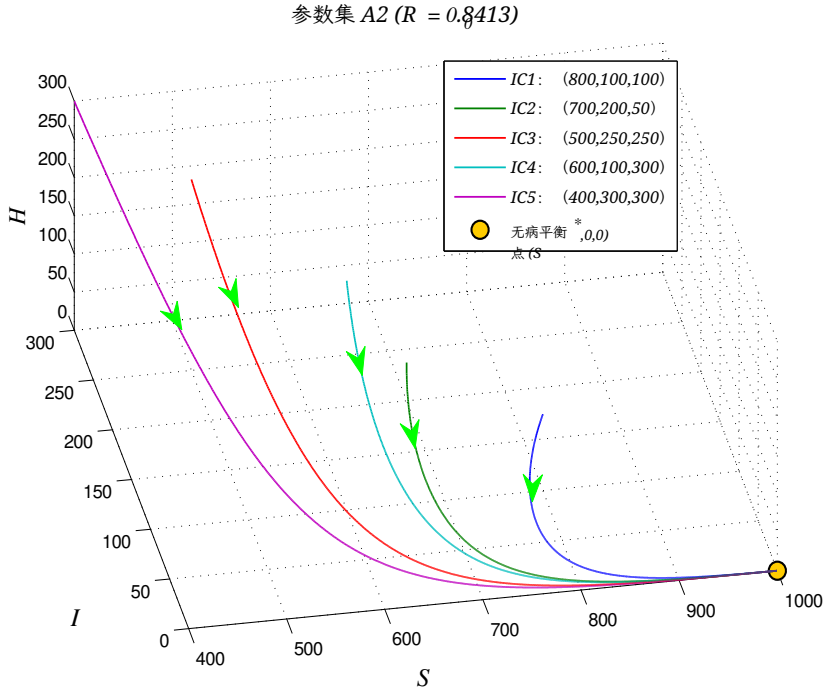


图3：表1中参数集 A1 对应的 (2.2) 的动力学



Fig图 4：参数集 A2 下 (2.2) 的动力学，见表 1

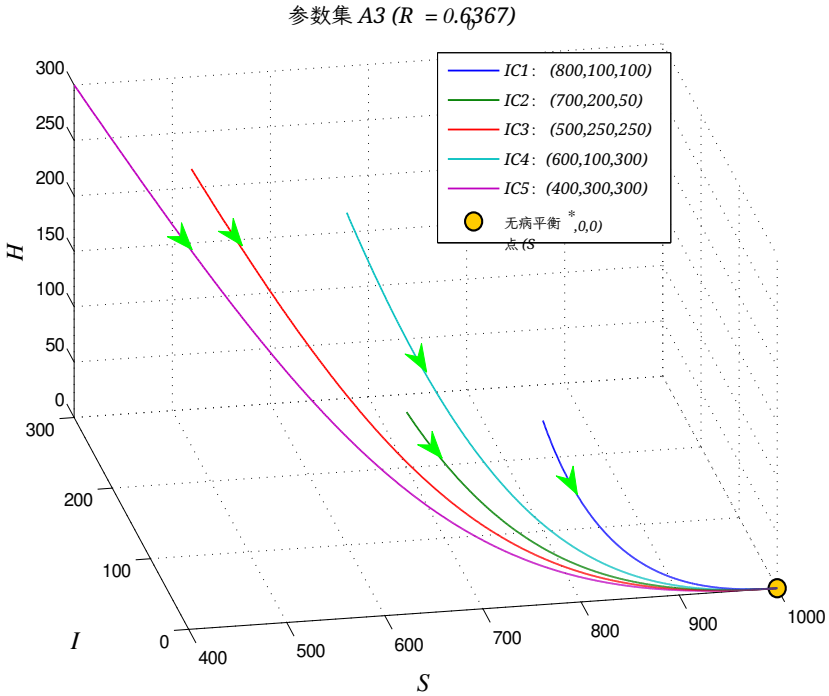
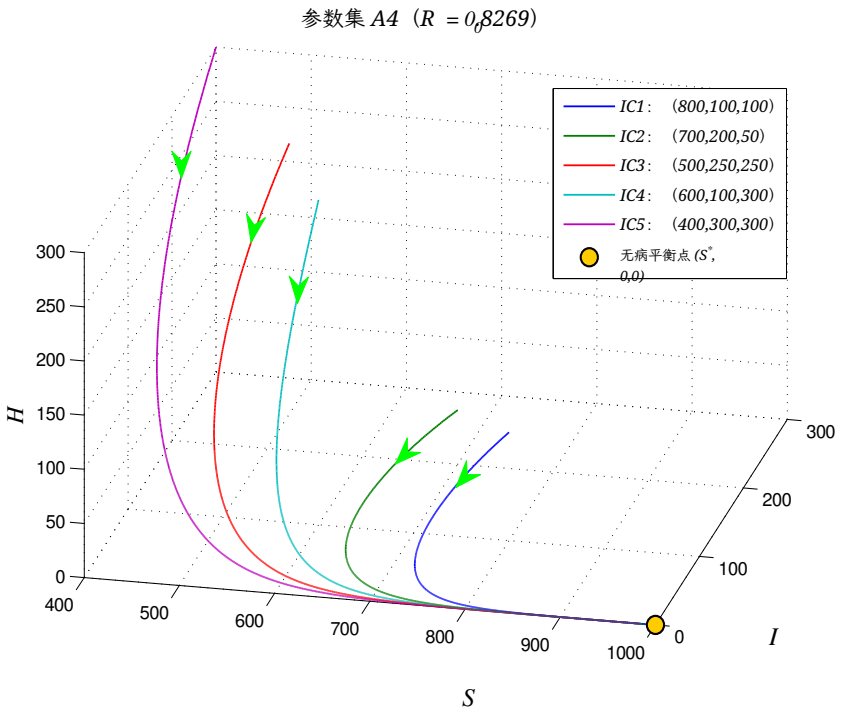


图5：表1中参数集 A3 对应的 (2.2) 的动力学



Fig图6：表1中参数集 A4 对应的 (2.2) 的动力学　　表1

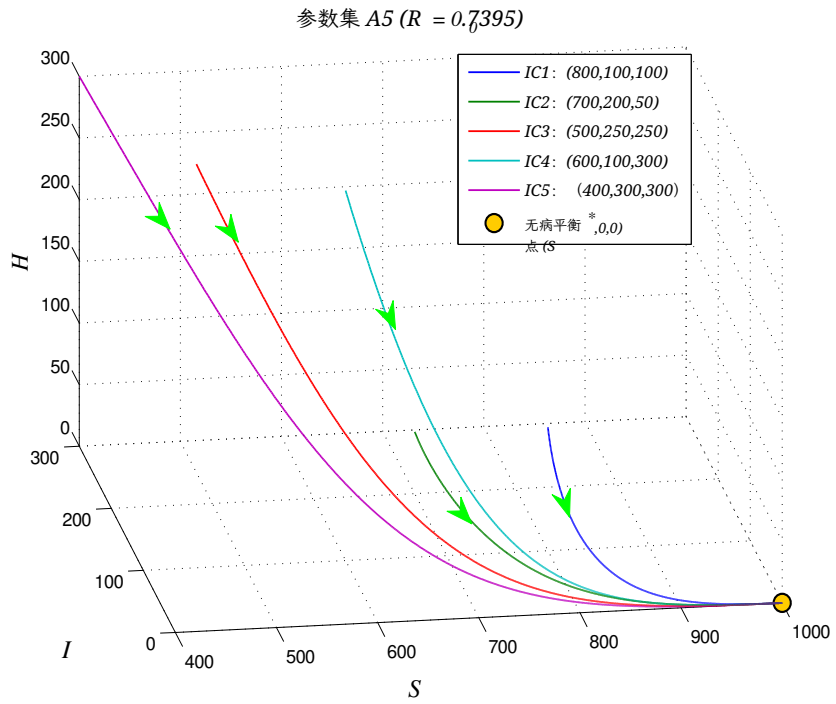


图7：表1中参数集 A5 对应的 (2.2) 的动力学

4.2. $\mathcal{R}_0 > 1$时 *SISHD*模型的动力学

在本小节中，我们研究满足条件$\mathcal{R}_0 > 1$时 SISHD模型 (1.2) 的动力学行为。模型采用表3和表4中分别给出的参数集和初始数据进行评估。使用四阶龙格－库塔法得到的解如图 8–12所示。值得指出的是，数值结果表明，地方病平衡点不仅局部渐近稳定，而且全局渐近稳定。这支持注 2.6 中提出的猜想。

表3：满足 $\mathcal{R}_0 > 1$ 且对应疾病地方病平衡点 (S^*, I^*, H^*)

Set	Λ	μ	β	ϵ	α_I	γ_I	δ	γ_H	α_H	$\mathcal{R}_0$	S^*	I^*	H^*
B_1	20	0.02	0.000154	0.20	0.02	0.05	0.02	0.03	0.005	1.5	666.67	75.60	27.49
B_2	20	0.02	0.000253	0.25	0.03	0.06	0.03	0.04	0.010	2.0	500.00	94.59	40.54
B_3	30	0.03	0.000239	0.15	0.01	0.04	0.02	0.03	0.005	2.5	400.00	203.48	62.61
B_4	10	0.01	0.000318	0.30	0.02	0.05	0.02	0.04	0.010	3.5	285.71	93.17	31.06
B_5	25	0.025	0.000649	0.10	0.03	0.05	0.03	0.04	0.010	5.0	200.00	198.02	79.21

表4：数值模拟中使用的初始条件 (S_0, I_0, H_0)

初始数据	S_0	I_0	H_0
IC1	800	100	100
IC2	700	200	50
IC3	500	250	250
IC4	600	100	300
IC5	400	300	300

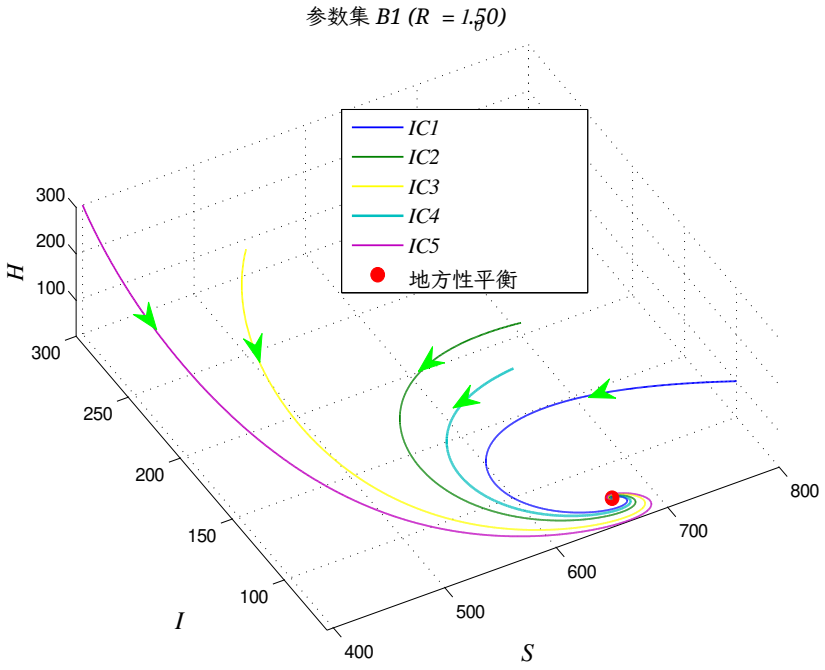
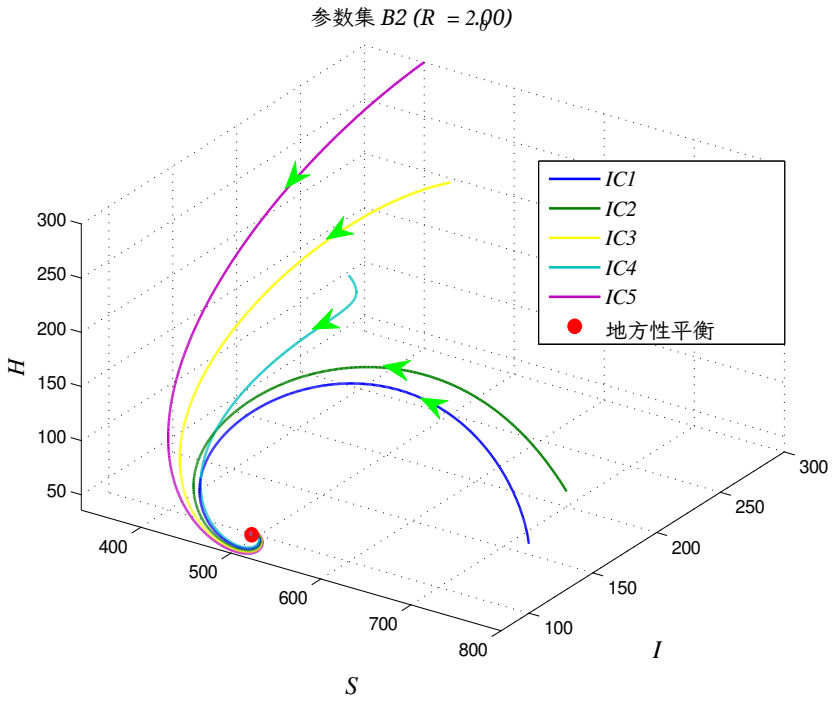


图8：表3中参数集 B1 对应的 (2.2) 的动力学



Figu图 9：参数集 B2 下 (2.2) 在 T 中的动力学 表 3。

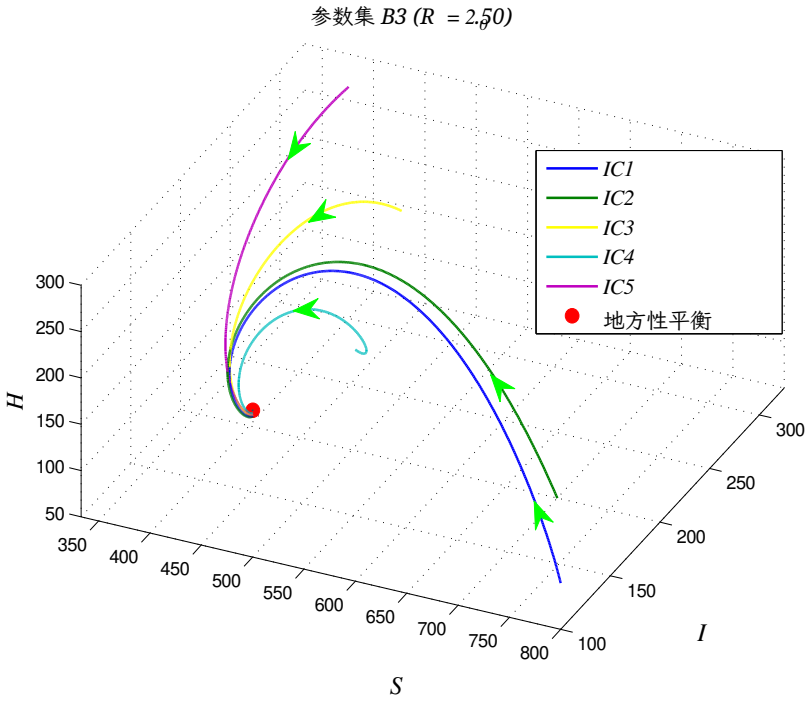
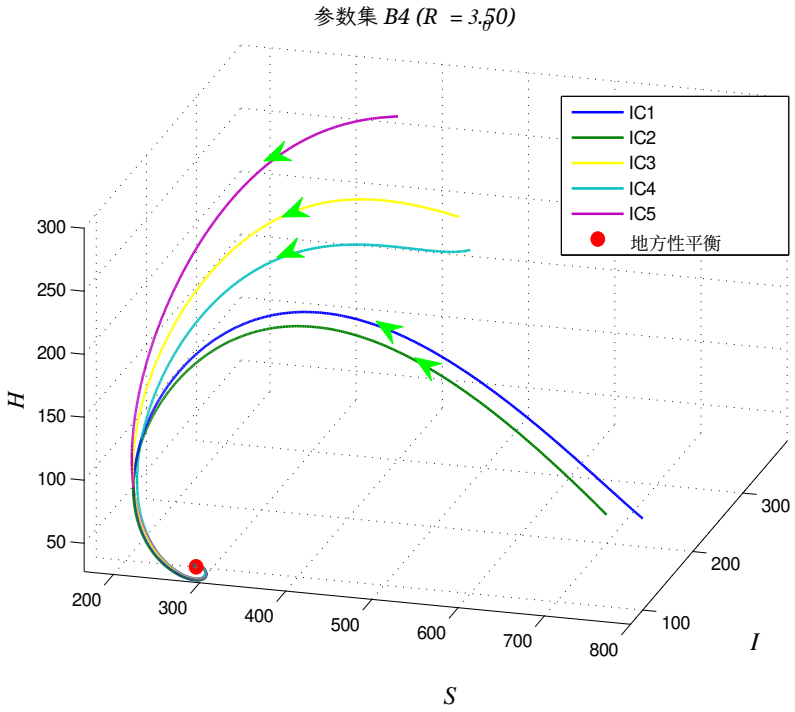


图10：表3中参数集 B3 下方程 (2.2) 的动力学



Figu图 11：参数集 B4 下 (2.2) 在 T 中的动力学　　表 3

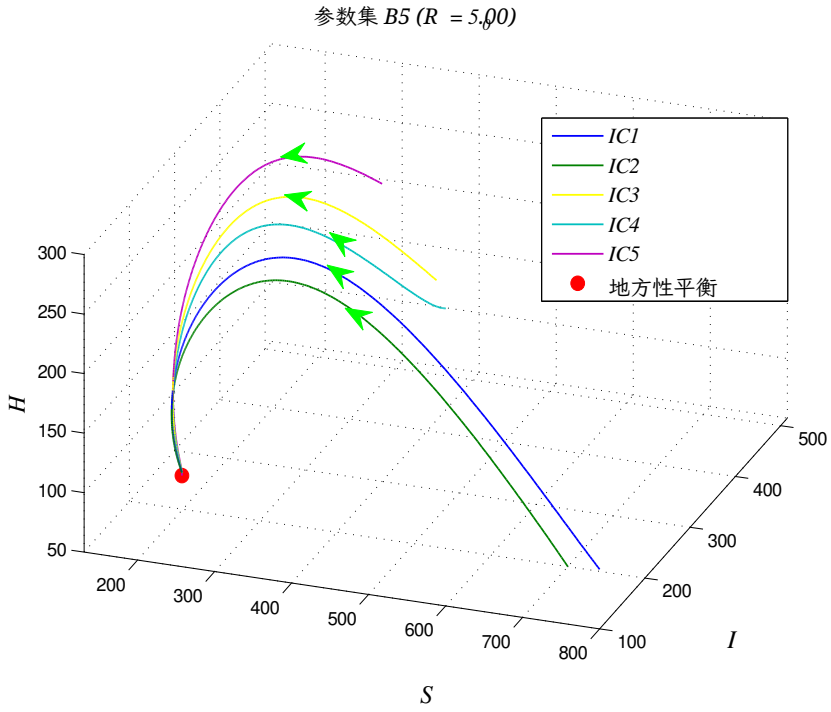


图12：表3中参数集 B5 对应的 (2.2) 的动力学

在结束本小节之前，我们计算基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 相对于（2.2）中可控参数的敏感性指数。根据 [8]，我们回顾如下：变量 u 对参数 p 的归一化前向敏感性指数定义为：

$$\Upsilon_p^u := \frac{\partial u}{\partial p} \times \frac{p}{u}.$$

使用参数集 B4 计算得到的敏感性指数如图 13 所示。这些指数表明各参数对疾病传播动力学的影响程度，进而有助于制定有效的预防和控制策略。

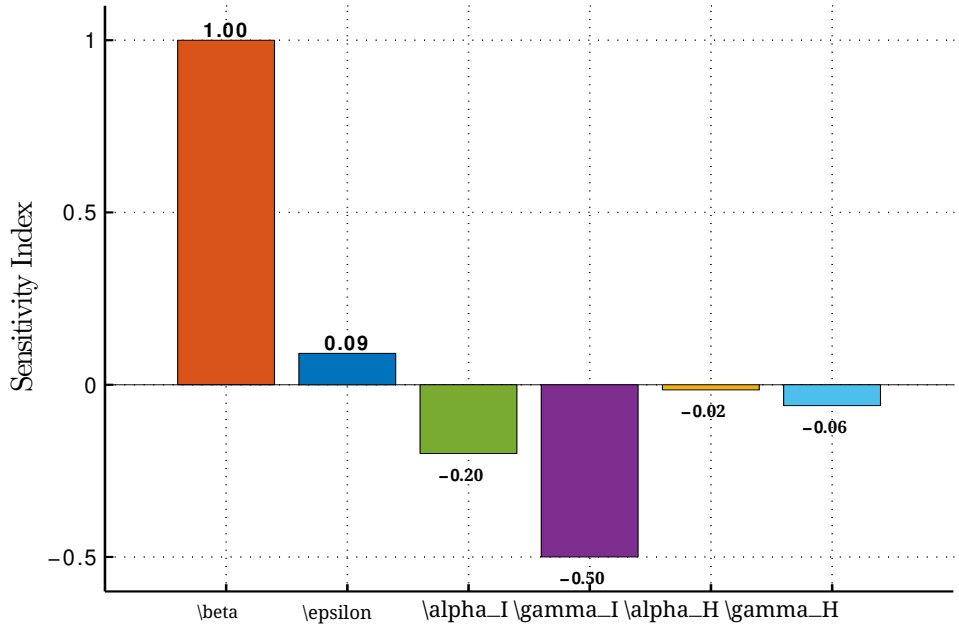


图 13：使用参数集 B4 计算的敏感性指数

4.3. 健康保险定价示例

本节将通过一个示例说明所提出模型在保险费确定中的应用。首先，我们将（3.1）中的给付金额取为：

$$b_I = 1.0, \quad b_H = 20, \quad d = 100.$$

然后，按照表5计算式（3.2）中定义的保费率 π，该保费率体现了零利润条件。

表5：表3和表4中每个参数集和初始条件对应的 π 值。

参数集	初始数据	S_0	I_0	H_0	π
B1	IC1	800	100	100	1.93896
B1	IC2	700	200	50	1.91942
B1	IC3	500	250	250	2.26632
B1	IC4	600	100	300	2.24263
B1	IC5	400	300	300	2.36076
B2	IC1	800	100	100	3.70673
B2	IC2	700	200	50	3.67883
B2	IC3	500	250	250	4.04164
B2	IC4	600	100	300	4.01615
B2	IC5	400	300	300	4.13672
B3	IC1	800	100	100	6.33601
B3	IC2	700	200	50	6.38258
B3	IC3	500	250	250	6.85861
B3	IC4	600	100	300	6.73363
B3	IC5	400	300	300	6.99956
B4	IC1	800	100	100	5.83294
B4	IC2	700	200	50	5.7334
B4	IC3	500	250	250	6.4421
B4	IC4	600	100	300	6.43625
B4	IC5	400	300	300	6.62139
B5	IC1	800	100	100	16.3427
B5	IC2	700	200	50	16.3699
B5	IC3	500	250	250	17.1336
B5	IC4	600	100	300	16.9398
B5	IC5	400	300	300	17.3489

对于参数集 B2 和初始数据 IC1，我们确定，式3.4中定义的 π^* 等于 5.67475。该数值可确保未来保费的折现值足以覆盖未来负债。式（3.3）中储备水平 $V(t)$ 对应于 $\pi = \pi^*$, $\pi = 90\%\pi^*$ 和 $\pi = 110\%\pi^*$ 的图示见图14-17。这些结果支持第3节中提出的理论分析。

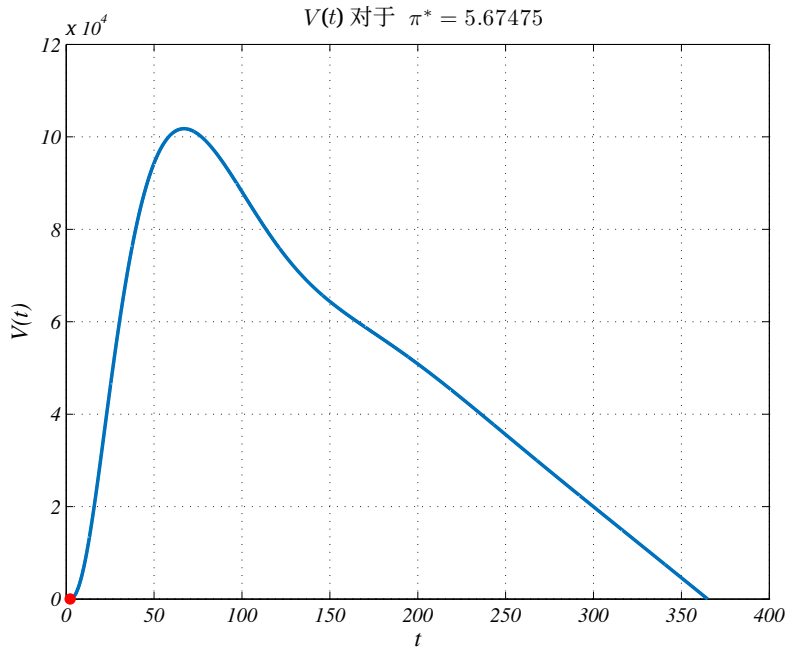


图 14：储备水平 $V(t)$，其中 $\pi = \pi^*$

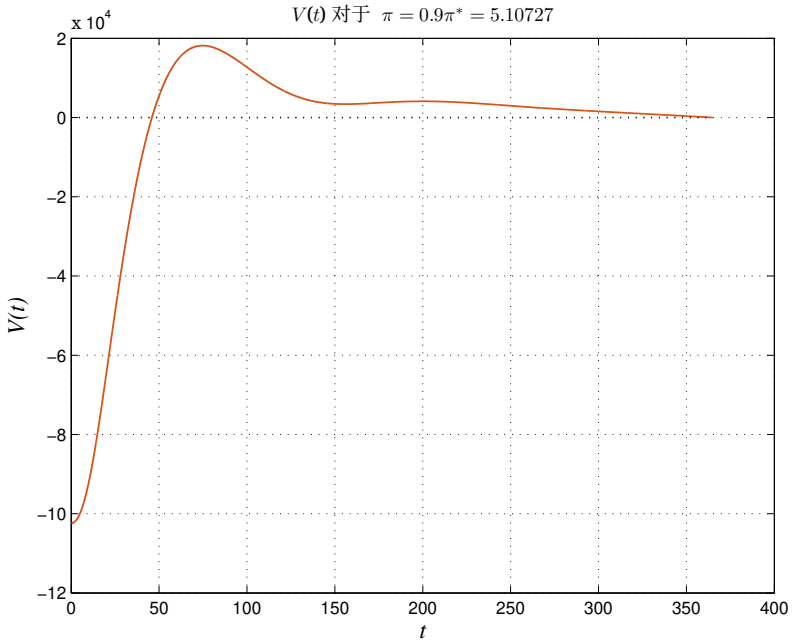


图 15：储备水平 $V(t)$，其中 $\pi = 90\%\pi^*$

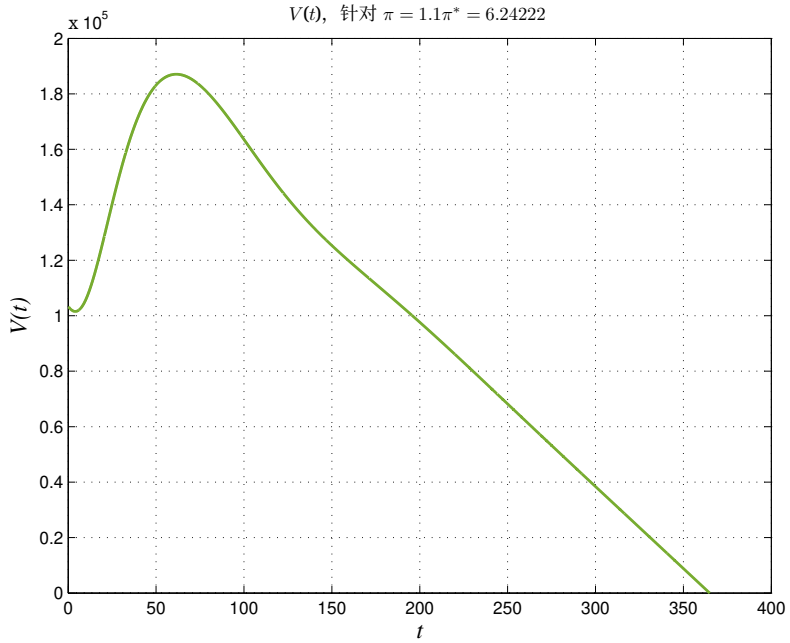


图16：储备水平 $V(t)$， $\pi = 110\%\pi^*$

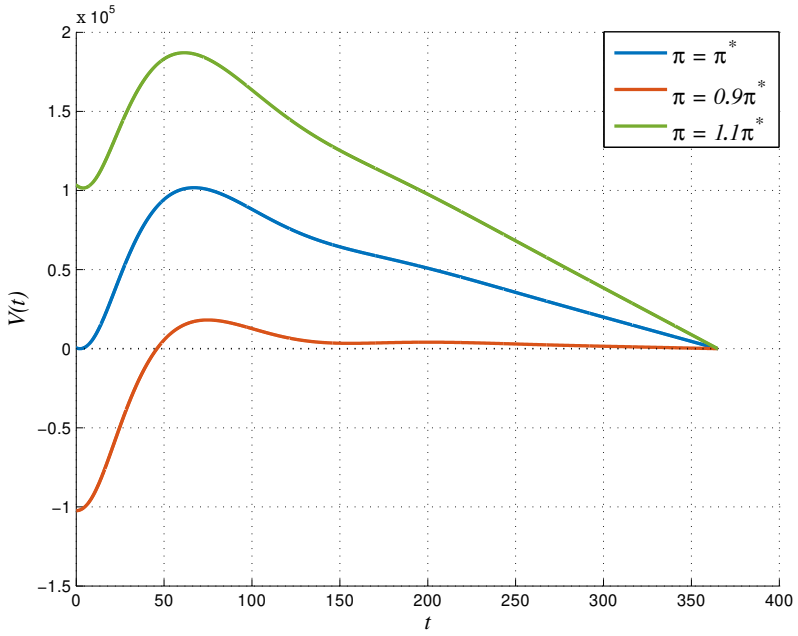


图17：对应于 $\pi = \pi^*$、 $\pi = 90\%\pi^*$ 和 $\pi = 110\%\pi^*$的式（3.3）中的储备水平 $V(t)$。

5. 结论与讨论

本研究通过纳入住院治疗和疾病致死率，对经典 SIS 模型进行了改进，构建了所谓的 SISHD 模型。动力学分析证明了解的正性和有界性，给出了基本再生数，并探讨了无病平衡点和地方病平衡点的存在性及渐近稳定性。本文还展示了所提出模型在健康保险定价中的应用，即利用 SISHD 模型推导出的人口动力学来估算保险成本。数值模拟验证了理论结果，并展示了该模型在健康保险系统评估与管理中的潜在适用性。

未来的研究可通过考虑随机效应或年龄结构化种群来扩展这一框架，以增强其实际适用性。特别是，以下问题值得重点关注：

- 基于现实世界数据进行参数估计；
- 考虑影响疾病传播过程的因素，例如季节性传播和随机效应；
- 开发数据驱动模型，以更好地捕捉现实世界中的动力学。

致谢

共同第一作者和末位作者谨向越南高等数学研究院（VIASM）致谢，感谢其提供的经费支持和优越的工作条件。这项工作是在他们于 VIASM 工作期间完成的。

我们感谢默克公司（Merck & Co., Inc.）的 Oluwaseun F. Egbelowo 博士，就传染病的数学建模与分析进行了富有见地的讨论。我们也感谢越南国家大学科学大学的 Thai Tuan Dinh，在论文准备期间提供了有益的讨论。

CRediT 作者贡献声明

Tien Thinh Le 和**Tuan Chau Do**：撰写审阅与编辑、可视化、验证、软件、资源、调查、正式分析、数据整理。

Nguyen Trong Hieu 和**Manh Tuan Hoang**：撰写审阅与编辑、撰写初稿、可视化、验证、监督、软件、资源、项目管理、方法学、调查、正式分析、数据整理、概念化、经费获取。

Tien Thinh Le 和**Tuan Chau Do** 作为共同第一作者，对本项工作贡献相同。

数据和材料的可获取性

作者确认，支持本研究结论的数据可在本文[和/或]补充材料中获取。

利益冲突

W我们声明，就本文的发表而言，不存在利益冲突 .

参考文献

[1] L. J. S. Allen，《数学生物学导论》，Prentice Hall，2007年。[2] U. M. Ascher、L. R. Petzold，《常微分方程与微分-代数方程的计算机方法》，工业与应用数学学会，费城，1998年。[3]F. Brauer、C. Castillo-Chavez，《种群生物学与流行病学中的数学模型》，施普林格，柏林，2012年。[4] F. Brauer，数理流行病学：过去、现在与未来，《传染病建模》2（2017）113-127。[5] V. Capasso、G. Serio，Kermack-McKendrick确定性流行病模型的推广，《数学生物科学》42（1978）43-61。[6] C. Castillo-Chavez、Z. Feng和W. Huang，关于 R_0 的计算及其在全局稳定性中的作用，载于《新发和再发传染病的数学方法：模型、方法与理论》，C. Castillo-Chavez、S. Blower、P. van den Driessche、D. Kirschner和A.-A. Yakubu编，施普林格，柏林，2002年，第229-250页。[7] A. A. Chernov、A. A. Shemendyuk和M. Y. Kelbert，疫情暴发下连通SEIR模型中的公平保险费率，《自然现象的数学建模》16（2021）34。[8] N. Chitnis、J. M. Hyman、Jim. M. Cushing，通过数学模型的敏感性分析确定疟疾传播中的重要参数，《数学生物学通报》（2008）70：1272-1296。[9] R. Feng、J. Garrido，流行病学模型的精算应用，《北美精算学杂志》15（2011）112-136。[10] R. Feng、J. Garrido、L. Jin、S.-H. Loke、L. Zhang，流行病分舱模型及其保险应用，载于：Boado-Penas, M.d.C.、Eisenberg, J.、Sahin S.（编）《大流行病：保险与社会保障》。Springer Actuarial。施普林格，尚。 https://doi.org/10.1007/978-3-030-78334-1_2[11] L. Francis、M. Steffensen，流行病期间的个人寿险，《精算科学年刊》18（2023）152-175。[12] A. Gray、D. Greenhalgh、L. Hu、X. Mao、J. Pan，随机微分方程SIS流行病模型，《SIAM应用数学杂志》7（2011）876-902。[13] W. O. Kermack、A. G. McKendrick，对流行病数学理论的贡献，《伦敦皇家学会会刊——A辑》115（1927）700-721。[14] G. Lan、Y. Huang、C. Wei、S. Zhang，具有饱和接触率的随机SIS流行病模型，Physica A 529（2019）121504。[15] M. Martcheva，《数理流行病学导论》，施普林格，纽约，2015年。[16] A. McNabb，微分方程的比较定理，《数学分析与应用杂志》119（1986）417-428。[17] C. I. Nkeki、E. H. Iroh，传染病健康保险模型的流行病学与精算分析，《北美精算学杂志》29（2024年）422-451。[18] C. I. Nkeki、E. H. Iroh，传染病的流行病学与健康保险模型，《金融经济学年刊》19（2024年）2450007。

[19] H. L. Smith, P. Waltman，《恒化器理论：微生物竞争的动力学》，剑桥大学出版社，1995年。[20] P. van den Driessche, J. Watmough，分舱疾病传播模型的再生数与阈值以下地方病平衡点，《数学生物科学》180（2002年）29-48。[21] C. Zhai, P. Chen, Z. Jin, T. K. Siu，传染病建模与大流行保险的精算应用：澳大利亚维多利亚州案例研究，《精算科学年刊》18（2024年）242-269。[22] A. Zinihi, M. Ehrhardt, M. R. S. Ammi，基于SEIARD流行病学模型的传染病保险精算分析，arXiv:2508.06580v1。