arXiv:2601.02169v1 [math-ph] 5 Jan 2026

宽带准静态被动隐身：近场区域的界限与限制

Maxence Cassier*、Graeme W. Milton†和 Aaron Welters‡

* 艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、Centrale Med、弗涅尔研究所，法国马赛；

† 数学系，犹他大学，美国犹他州盐湖城 84112；

‡ 数学与系统工程系，佛罗里达理工学院，美国佛罗里达州墨尔本 FL32901

摘要

本文考察以下具有挑战性的问题的若干方面：在麦克斯韦方程组的准静态区域内，对于靠近物体的观测者，是否可以使用被动隐身斗篷，使介电夹杂物在有限频率区间内不可见？在本研究中，通过考察狄利克雷到诺伊曼映射（DtN），我们不仅对这一问题给出了否定回答，还进一步给出了该映射的一些定量界，从而为隐身以及近似隐身设定了基本极限。这些界涉及以下物理参数：频率区间的长度和中心、隐身装置的体积、障碍物体积以及物体的相对介电常数。我们的方法基于两项关键工具：i）复合材料抽象理论中的变分原理；ii）利用无源系统求和规则解析推导界的方法。为使用工具 i），我们证明了一个关于狄利克雷到诺伊曼映射的新表示定理，该定理使我们能够将这一映射解释为复合材料抽象理论中的有效算子。这一表示的一个重要结果是，它使我们能够纳入复合材料理论中的广泛而深入的成果，例如变分原理，并将由此导出的界应用于狄利克雷到诺伊曼映射。这些结果可能对隐身以外的其他领域也有用。接下来，为使用工具 ii），我们证明被动性假设使我们能够将狄利克雷到诺伊曼映射（作为频率的函数）与两类重要的解析函数联系起来，即赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数。这些函数的求和规则与变分方法相结合，使我们能够推导出关于狄利克雷到诺伊曼映射的新不等式，从而对频率区间内的被动隐身施加基本限制，包括精确隐身和近似隐身。我们同时考察有损隐身斗篷和无损隐身斗篷两种情形。

关键词： 隐形、被动隐身、色散麦克斯韦方程组、准静态、狄利克雷到诺伊曼算子、复合材料抽象理论、有效算子、变分原理、赫尔格洛茨函数与斯蒂尔切斯函数、求和规则。

*电子邮箱：maxence.cassier@fresnel.fr

†电子邮箱：graeme.milton@utah.edu

‡电子邮箱：awelters@fit.edu

目录

1 引言 3 1.1 研究动机与研究现状.3 1.2 被动隐身基本极限主要结果概述 . . . . . 6 1.3 论文结构 .9

2 预备知识 11
2.1 记号与约定 .11 2.2 赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数的一些性质综述 .13 **3 隐身问题的表述**

隐身问题的表述 15 3.1 问题设定 .15 3.2 被动隐身装置介电常数的主要假设 . . . . . 16 3.3 准静态区域中隐身问题的数学表述 18

4 狄利克雷到诺伊曼映射的有效算子表示 21
4.1 狄利克雷到诺伊曼映射表示的霍奇分解 .22 4.2 复合材料抽象理论： Z-问题与有效算子 . . . . . 23 4.3 狄利克雷 Z-问题及其相关有效算子.26 4.4 狄利克雷到诺伊曼算子与有效算子之间的联系 .27 **5 有效算子的变分原理与界** 30 5.1 复合材料抽象理论中的变分原理 .30 5.2 在狄利克雷到诺伊曼映射中的应用.32

6 具有仿射边界条件的狄利克雷到诺伊曼映射 33
6.1 仿射边界条件下的狄利克雷到诺伊曼映射、平均化及新的有效算子表示.34 6.2 关于 $\mathbf{a}^D$ 用平均张量 $\langle \mathbf{a} \rangle$ 和 $\langle \mathbf{a}^{-1} \rangle^{-1}$ 的初等界 . . . 36

7 狄利克雷到诺伊曼映射的解析性性质 37
7.1 与两个狄利克雷到诺伊曼映射之差相关的赫尔格洛茨函数 . . . . . 37 7.2 斯蒂尔切斯函数与赫尔格洛茨函数之间的联系 .44 7.3 构造与狄利克雷到诺伊曼映射相关的斯蒂尔切斯函数 .44 **8**

频率区间内被动隐身的定量界 46 8.1 不可能实现完美隐身.46 8.2 求和规则方法与一般界.47 8.3 无损情形.49 8.4 有损情形.53 8.5 将无损情形推广至包含色散障碍物. 56

A 附录：辅助结果 59
A.1 命题19的证明 .59 A.2 逆算子的强收敛 .60 A.3 巴拿赫空间中的赫尔格洛茨函数 .61

1 引言

1.1 动机与研究现状

多年来，隐形和隐身一直令人心驰神往。从科学角度看，隐形是指无法被适当的探测场探测到，而不仅仅是像电磁波谱中的许多部分那样无法被我们的眼睛看见。关于物体隐形的最早研究成果之一来自 Dolin [52]，他于1961年发现了如今称为变换光学的理论，并利用它构造出夹杂物，使其能够对任何以给定频率随时间振荡的外加电磁场隐形。Kerker [76] 于1975年指出，如果包覆椭球相对于外部电磁波的空间变化尺度足够小（即处于准静态极限，且外加场空间均匀），并且核、壳层和周围介质的电介电常数和磁导率经过适当选择，那么包覆椭球几乎不会扰动周围介质中的电磁波。这类夹杂物称为中性包覆夹杂物；这一术语源自 Mansfield [90] 的用法。Mansfield 于1953年发现，可以从均匀受力板中切除某些加固孔洞（他称之为中性孔洞），而不扰动周围的应力：参见 [99, 第 7 节。11] 关于中性包覆夹杂物的更多研究成果。在二维情形下的准静态极限中，研究发现，若包覆圆柱的核、涂层和基体的电介电常数之比为 1:-1:1，那么这种如今称为简易超透镜的结构能够 [112] 对外部介质中的非均匀场隐形。超越准静态极限后，Alu 和 Engheta [5] 于2005年发现，具有适当模量的包覆球体可以实现隐形，即在某一频率下，其总散射截面可以为零。从有限的意义上说，这些包覆夹杂物的涂层能够使其内部隐形。

在真正隐身的首个实例中，Greenleaf、Lassas 和 Uhlmann [62, 63] 于2003年将变换电导率与一种奇异变换结合起来，该变换将去掉原点的球映射到一个环域，从而得到一种隐身斗篷：它对任何施加于外部的电场都不可见，并且即使将导电物体置于环域内，也不会失去这种隐身效果。2006年，Milton 和 Nicorovici [102] 发现了由反常共振导致的隐身现象：若将可极化偶极子簇或偶极能量源置于超透镜附近的特定区域，它们便基本不可见；其基本机制已在 [112]中发现。此后不久，Pendry、Schurig 和 Smith [122] 运用变换光学与奇异变换（同样将去掉原点的球映射到一个环域），实现了对任何以固定频率振荡的外加电磁场的隐身。与此同时，Leonhardt [84] 独立地利用几何光学极限下的变换实现了隐身。将变换光学用于隐身（甚至用于 Dolin 更早的研究）的一大实施障碍在于：偏离几何光学极限后，理想情况下相对磁导率必须与相对介电常数相等、呈各向异性，并且必须按照适当变换所要求的方案精确设计。此外，变换隐身所要求的方案通常需要奇异各向异性，这使其更难实现；所谓的地毯隐身 [86]和非欧几里得隐形 [85]是例外。幸运的是，只要对变换稍作扰动使其不再奇异，从而减弱各向异性的极端程度，隐身效果仍可在任意高的近似程度上保持 [78, 77, 88, 11]。Pendry、Schurig 和 Smith 提出的隐身斗篷的一种近似方案经过了实验测试 [126]，结果与数值模拟高度吻合，

但仍存在显著散射。随后，通过消除隐身斗篷外表面的反射，这种近似方案得到了改进 [29]。Pendry 和 Ramakrishna 还提出了另一种与超透镜有关的有趣隐身斗篷 [121] ，并由 Lai 等人于2003年进一步研究。 [81]其基本原理是：通过超透镜中的邻近反物体，抵消超透镜外部某个物体产生的散射；反物体具有与该物体相同的介电常数和磁导率，但二者的符号相反。因此，这种隐身斗篷需要针对待隐身物体进行设计。幻象光学是其一种延伸 [82], ，它可以使某个物体的散射表现得仿佛来自另一个指定物体。此后，相关研究兴趣激增，研究范围包括声学隐身 [48, 115, 117, 47], 、热隐身 [125], 线性弹性隐身 [46], 以及地震波隐身 [27]。最后，在声波导领域，我们想指出一种有趣的方法 [42] ：通过用薄外部谐振器扰动波导边界，使物体在固定频率下的远场区域中不可见。该方法的主要优势在于，隐身仅通过对波导边界进行几何改动即可实现，而材料属性保持不变。不过，所需的边界几何扰动会强烈依赖障碍物的形状。

对于许多应用而言，设计能在所关注的频率区间内实现完美隐身的隐身斗篷，是非常理想的。然而，出于物理原因，人们提出了一些根本性问题，试图解释为何完美宽带被动隐身不可能实现，以及实现近似隐身面临哪些挑战。首先，Pendry、Schurig 和 Smith [122] 以及 Miller [94] 指出，被动介质中波包的因果性和有限传播速度（例如参见 [83, 135, 33]）使物体无法在时域中实现完美隐身。由于组成材料特性的色散，这些基于变换的隐身方案仅在离散频率下成立。尽管已有这些结果，要将时域中的这些限制转化为频域中的定量限制仍然很难。

规避这些限制的一种方法是采用有源隐身。然而，与被动隐身不同，这需要由外部源直接提供能量，或由主动介质（例如增益介质）间接提供能量。第一类有源隐身斗篷由 Miller [94] 提出，之后由多个研究小组进一步发展，例如 [64, 65, 116, 30, 31], ；其中，源经过精心设计以匹配外加场，在形成静区（场强为零）时，不会对一定距离以外的场产生影响，而被隐身的物体可以放置在该静区内。由于这种构造与频率无关，因此适用于多个频率或连续频率范围。也可以根据希望隐身的物体来设计隐身斗篷；这尤其适用于板方程，因为此时位移场保持有限 [118]。第二类有源隐身斗篷称为快光隐身斗篷 [133], ，其出现源于近期物理学界对主动介质的关注，例如参见 [114, 38, 54, 17]。这类快光隐身斗篷利用主动介质克服被动电磁系统中的光速限制，但仍受因果性和稳定性约束 [1, 53], ，这一课题超出了本文的讨论范围。然而，鉴于这些有源隐身斗篷的能量需求，采用被动介质实现宽带隐身具有强烈的现实动因。本文聚焦于被动电磁隐身，这是由材料在高频极限下特有的介电性质决定的。

近似宽带被动隐身近年来已通过最优设计方法得到研究 [72], [130]。这些研究团队还利用半定松弛方法研究了完美和近似被动隐身的界限与限制问题，即

二次约束二次规划（QCQPs）（其一般数学框架综述于 [89]），该方法近年来已在物理学领域，尤其是电磁学中得到相当广泛的应用，其基础是一些通用技术，例如 [80, 66, 39], 另请参见 [9, 55]及其中的参考文献。然而，这些精确的数值界并未直接用系统的物理参数表示。在这一视角下，确立取决于系统关键参数的基本物理极限至关重要，例如频率区间的中心频率、频率带宽、隐身斗篷和物体体积，以及物体的相对介电常数，从而清楚理解理论上能够实现的目标。事实上，被动隐身的一个关键限制源于无源性；无源性意味着因果性，同时也对介质中传播的波速施加光速界限（参见，例如， [135, 33]），这又由于解析性导致了相应约束，将完美隐身限制在单一频率下使用透明材料。此外，色散和耗散以及相对论因果性还会进一步限制近似隐身，尤其是在待隐身物体或带宽不可忽略时。

在此背景下，Craeye 和 Bhattacharya [45] 首先基于电磁波包的群时延，确立了二维系统实现隐身所能覆盖的频率带宽上限。然而，他们的结论依赖于一些强假设，尤其涉及隐身斗篷的几何形状和所采用的具体隐身方法。随后，Monticone 和 Al`u [105]通过推导散射截面的一般界限，证明被动隐身无法扩展至整个频谱。在后续研究中， [106], 他们借助电路类比，确立了与频率相关的散射截面限值，该限值适用于平面结构和具有球对称性的三维物体。此外，Hashemi、Qiu、McCauley、Joannopoulos 和 Johnson [68]指出，对于基于变换的隐身斗篷，宽带被动隐身的可能性受到被隐身物体物理尺寸的根本限制。还值得注意的是，即使无法在有限带宽内实现完美隐身，仍有一些技术可以在目标频率范围内显著降低物体的散射特征，相关研究见 [40, 74]。

相比之下，如 [36], 此处推导出的界具有显著优势：它们既不依赖物体和隐身斗篷的几何形状，也不依赖隐身斗篷的具体色散特性。值得注意的是，隐身物体可以完全位于隐身斗篷之外（更多详情请参见注释13 ）。这些界明确考虑了带宽大小；尽管它们仅适用于准静态区域，却适用于多种被动隐身方法，包括基于反常共振、变换光学和互补介质的方法。

上述大多数研究关注的是远场区域（包括通过 QCQP 方法得到的数值界），而对近场隐身问题中隐身限制的关注则少得多，尽管这对应用而言非常重要。具体而言，与前两位作者 M. Cassier 和 G. W. Milton 先前的工作相比 [36] ，该工作通过推导隐身装置极化率张量的界，研究了准静态区域中的远场隐身问题；本研究则聚焦于同一区域中的近场隐身问题。更准确地说，我们推导了给定频率区间内与该系统相关的狄利克雷到诺伊曼（DtN）算子的界。DtN 算子将所考虑介质体 Ω 边界上的电压（见图 1）映射为电位移场的外法向分量（精确定义见第 3.3节）。由于现在可以利用近场信息，我们所得到的界

更为显式，并且涉及的物理参数多于 [36]中的结果。此外，与极化率张量（它是一个 3×3 矩阵值函数）不同，狄利克雷到诺伊曼映射是定义在无限维空间上的算子值函数。这使分析大为复杂，因此需要开发新的工具。我们的方法利用赫尔格洛茨函数与复合材料抽象理论之间的深层联系 [99, 103]来克服这些挑战。

1.2 概要 被动隐身基本极限主要结果概述

在我们的设定中，我们考虑任意开有界集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ，该集合是单连通的，且边界足够光滑 $\partial \Omega$（例如，具有 Lipschitz 连续性）。此外，任何可容许势函数u 都必须是 Ω 上的平方可积函数，且其（弱）梯度 ∇u 也必须平方可积；尤其是，这意味着它的边界值 $u|_{\Omega} = V_0$ （即，可容许的表面势）是 $\partial\Omega$ 上的平方可积函数（相关函数空间的精确定义见第2.1 节）。

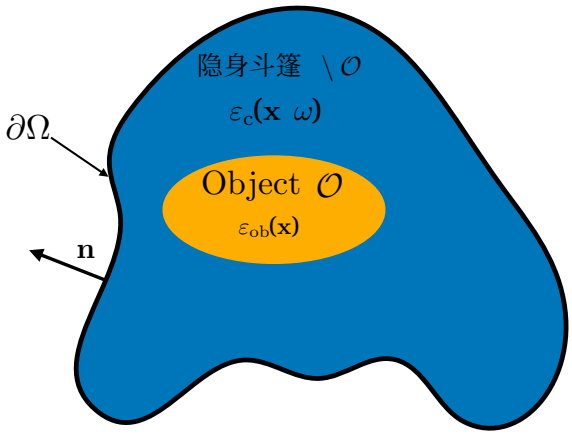

图1：隐身装置填充了一个开、有界且单连通的利普希茨区域 Ω，范围为 $\mathbb{R}^3$。它由物体（黄色部分）和被动隐身斗篷（蓝色部分）组成。物体是一个勒贝格可测集 $\mathcal{O}$ ，具有正体积，其介电常数为 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega) = \varepsilon_{ob}(\mathbf{x})$；被动隐身斗篷则包含在集合 $\Omega \setminus \mathcal{O}$ 中，具有正体积，介电常数为 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega) = \varepsilon_c(\mathbf{x}\ \omega)$。这里， $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\mathbf{n}$是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。需要指出的是，与图中所示不同，物体 $\mathcal{O}$ 可以包含多个连通分支（例如， $\mathcal{O}$ 可以由 Ω 中的多个夹杂物构成）。

待隐身的物体位于 $\mathcal{O} \subseteq \Omega$中，隐身斗篷位于 $\Omega \setminus \mathcal{O}$。二者的体积均为正 $|\mathcal{O}|, |\Omega \setminus \mathcal{O}|$，见图1。假设障碍物具有非色散介电常数$\varepsilon_{ob}(\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ 属于频率范围 $[\omega_-, \omega_+] \subseteq (0, \infty)$，且该介电常数为实对称正定矩阵，满足 $\varepsilon_{ob}(\mathbf{x}) \geq \varepsilon \mathbf{I}$，其中 $\varepsilon_0 > 0$ 表示真空的介电常数，$\varepsilon > \varepsilon_0$为某个标量常数。隐身斗篷由被动材料制成，该材料具有色散性且可能具有各向异性，其介电常数张量 $\varepsilon_c(\mathbf{x}\ \omega)$（$\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$）在频率$\omega \in [\omega_-, \omega_+]$下予以考察。然而，由于隐身斗篷的材料是被动的， $\varepsilon_c(\mathbf{x}\ \omega)$必须满足某些

关于复频率的解析性质 ω 在复平面的开放上半平面 $\mathbb{C}^+$ 内 $\mathbb{C}$(参见第3.1节和 3.2节，了解明确陈述的介电常数假设)。因此，整个器件的介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}\ \omega),\mathbf{x}\in\Omega$ 定义为任意 $\omega\in[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$ 时满足

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)=\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x})\text{ for a.e. }\mathbf{x}\in\mathcal{O}\text{ and }\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)=\boldsymbol{\varepsilon}_c(\mathbf{x},\omega)\text{ for a.e. }\mathbf{x}\in\Omega\setminus\mathcal{O}.$$

给定边界 $\partial\Omega$ 上的电（表面）势 V_0，狄利克雷到诺伊曼算子的二次型 $\langle\Lambda_{\mathbf{a}}V_0$、$V_0\rangle$，其中 $\in\{\boldsymbol{\varepsilon}$（、$\omega)$ $\varepsilon_0\mathbf{I}\}$（其精确定义见第 3.3 节），通过格林公式 [（该公式的精确表述见公式 (2.6)）] 与 Ω 内具有边界值 $V_{\mathbf{a}}|_{\partial\Omega}=V_0$、电势为 $V_{\mathbf{a}}$ 的电场 $\mathbf{E_a}=-\nabla V_{\mathbf{a}}$，以及介质体 Ω 中介电常数为 a 的（无散）电位移场 $\mathbf{D_a}$ =a$\mathbf{E_a}$ 相关，具体为

$$\langle\Lambda_{\mathbf{a}}V_0,\overline{V_0}\rangle=\int_\Omega\mathbf{D_a}(\mathbf{x})\cdot\overline{\mathbf{E_a}(\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{x}.\tag{1.1}$$

观测者可以测量该量，因为 $\Lambda_{\mathbf{a}}V_0=\mathbf{D_a}\cdot\mathbf{n}$ 在 $\partial\Omega$ 上，它是与观测者在介质体边界上施加的表面势V_0 对应的边界上的电位移场的法向分量，施加位置为 $\partial\Omega$（参见图 2）。此外，将 (1.1) 乘以频率 ω并取虚部，可得到（除去一个 1/2 因子，见 [71, 第 6 节9]和 [99, 第 11.1 节，公式 (11.16)]）以下量表示材料因吸收导致的电损耗:

$$\mathrm{Im}\langle\Lambda_{\omega\mathbf{a}}V_0,\overline{V_0}\rangle=\mathrm{Im}(\omega\langle\Lambda_{\mathbf{a}}V_0,\overline{V_0}\rangle)=\int_\Omega\mathrm{Im}[\omega\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{E_a}(\mathbf{x})\cdot\overline{\mathbf{E_a}(\mathbf{x})}]\mathrm{d}\mathbf{x}.\tag{1.2}$$

现在，为了比较隐身装置 $\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 与占据 Ω 的空空间的 DtN算子（其介电常数为真空的介电常数，即 Λ_{ε_0}（按惯例 $\Lambda_{\varepsilon_0}:=\Lambda_{\varepsilon_0\mathbf{I}}$））， 我们考虑它们二次型之差及其沿正虚轴的极限，即，

$$F_{V_0}(\omega):=\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}-\Lambda_{\varepsilon_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle,\quad\omega\in[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+,\tag{1.3}$$

$$F_{V_0,\infty}:=\lim_{y\to+\infty}F_{V_0}(\mathrm{i}y)=\lim_{\omega=\mathrm{i}y,y\to+\infty}\frac{\mathrm{Im}[\omega F_{V_0}(\omega)]}{\mathrm{Im}\,\omega}\geq0.\tag{1.4}$$

最重要的是，1.3 的模给出了衡量隐身装置在频率 $\omega\in[\omega_-,\omega_+]$ 下隐身效果的品质因数。此外，该极限 $F_{V_0,\infty}$ 的存在性和非负性，是隐身装置无源性所施加的物理约束的结果（更多内容见定理 47）。此外，正如我们所证明的（推论 48），对于非零仿射边界条件，该极限严格为正，即 $V_0=-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega},\mathbf{e}_0\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$，且满足不等式

$$F_{V_0,\infty}\geq|\mathcal{O}|\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\ \frac{1}{|\mathcal{O}|\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}+|\Omega\setminus\mathcal{O}|}\ \varepsilon_0\ |\Omega|\ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^3}>0,\tag{1.5}$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathbb{C}^3}$ 表示 $\mathbb{C}^3$的标准范数。

接下来的讨论将概述本文的主要结果。第一个定理指出，在一个频率区间内不可能实现完美隐身（该定理的精确表述见定理 52）。

定理 1. 在关于介电常数 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$的适当假设下，障碍物无法在频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 内实现完美隐身。

证明的思路是，由于 $F_{V_0}(\omega)$ 在 $[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$ 上是解析的，因此在$[\omega_-,\omega_+]$ 上的完美隐身通过解析延拓意味着 $F_{V_0}(\omega)=0$ 在 $[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$ 上成立，从而得到 $F_{V_0,\ \infty}=0$对于非零仿射边界条件 V_0，这与（1.5）矛盾。

下一个结果也证明了上述定理，并给出了定量界，对频率区间上的完美隐身和近似隐身都施加了基本限制（定理56 及其推论58 ，以及定理59 及其推论60 给出了构成本定理的精确表述）。

定理 2. 在介电常数 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$ 满足适当假设且 $F_{V_0,\ \infty}>0$(例如，非零仿射边界条件 V_0) 时，以下不等式成立：

$$0<\frac{1}{4}(\omega_+^2-\omega_-^2)F_{V_0,\infty}\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}|\omega^2F_{V_0}(\omega)|.$$

此外，假设隐身斗篷在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上无损耗。如果对于某个 $\omega_0\in[\omega_-,\omega_+]$，$F_{V_0}(\omega_0)=0$，那么

$$F_{V_0}(\omega)\le-\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega^2}\right)F_{V_0,\infty}<0,\quad if\ \omega_-\le\omega<\omega_0,$$
$$0<\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}\right)F_{V_0,\infty}\le F_{V_0}(\omega),\quad if\ \omega_0<\omega\le\omega_+.$$

更一般地，如果无损隐身斗篷在某个 $\omega_0\in[\omega_-,\omega_+]$ 处实现了近似隐身，即，˜存在 $\eta>0$，使得对于所有可容许的表面势 V_0,

$$|F_{\tilde{V}_0}(\omega_0)|\le\eta\,G^{\rm vac}_{\tilde{V}_0}\quad where\quad G^{\rm vac}_{\tilde{V}_0}=\langle\Lambda_{\varepsilon_0}\tilde{V}_0,\overline{\tilde{V}_0}\rangle,$$

then

$$F_{V_0}(\omega)\le\big(-F_{V_0,\infty}+\eta\,G^{\rm vac}_{V_0}\big)\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega^2}+\eta\,G^{\rm vac}_{V_0}\ \ if\ \omega_-\le\omega\le\omega_0,$$

$$F_{V_0}(\omega)\ge\big(F_{V_0,\infty}+\eta\,G^{\rm vac}_{V_0}\big)\,\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}-\eta\,G^{\rm vac}_{V_0}\quad if\ \omega_0\le\omega\le\omega_+.$$

证明这一结论并非易事，需要付出比证明前一个定理大得多的努力。因此，本文的大部分篇幅都用于证明，而该证明基于结合以下两种用于导出界的技术：

i) 复合材料抽象理论中的变分界（例如，[103, 99, 13, 134]）。更准确地说：

- 首先基于霍奇分解（见定理21）构建了一个泛函框架，从而得到狄利克雷到诺伊曼映射的新表示，该映射以有效算子的形式表示（见定理35）。

- 狄利克雷到诺伊曼算子的这一新表示，使得可以将复合材料抽象理论中的有效算子变分界应用于隐身装置。特别地，这得到界（1.5）对于 $F_{V_0,\ \infty}$ 其形式取决于隐身装置的关键物理参数：障碍物和隐身斗篷的体积（即 $|\mathcal{O}|$, $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$），以及障碍物相对介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x})/\varepsilon_0$ 的下界，该下界由比值 $\varepsilon/\varepsilon_0$给出。

ii) 通过解析方法，利用无源系统的求和规则推导频率相关的界（例如，参见 [19, 36]）。

- 首先证明（$\omega \mapsto \omega\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} = \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 和 $\omega \mapsto \omega F_{V_0}(\omega)$ [中的函数（见（1.3））] 是 Herglotz 函数（见命题 46 和 73，以及定理 47），然后证明函数 $z \mapsto F_{V_0}(\sqrt{-z})$ 是斯蒂尔切斯函数（见引理 50）。
- 通过求和规则的一般方法（见第 8.2 节），可得到函数 $\omega \mapsto F_{V_0}(\omega)$ 关于 $F_{V_0,\infty}$、带宽 $\omega_+ - \omega_-$、以及中心频率 $(\omega_+ + \omega_-)/2$ (见定理 56 和 59）。

最后，我们还可以利用上述主要结果，通过以下方式为隐身提供更多见解：a）对函数 $[\omega_-, \omega_+] \ni \omega \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)$ 作出更高正则性的假设（见推论 60 和注 63）；或 b）允许存在色散障碍物，即允许 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega)$ 随频率变化（见推论 65）。

1.3 论文概要

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍预备知识。首先，在第 2.1 小节中，我们回顾有界 Lipschitz 区域上椭圆型偏微分方程所需的 Sobolev 空间泛函框架，然后介绍所需的基体／算子记号。接着，在第 2.2 小节中，我们回顾本文涉及的两类主要解析函数的性质，即 赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数。

第 3 节首先介绍第 3.1 小节，其中我们描述准静态电磁学在有限频率区间内、单连通有界 Lipschitz 区域上的近场隐身问题。接着，在第 3.2 小节中，我们详细说明与组成材料（即其介电常数）相关的物理和数学假设（参见假设 H1–H6），这些假设与 隐身装置的无源性有关。随后，在第3.3小节中，我们通过引入准静态区域对应椭圆型偏微分方程的狄利克雷问题及其相关的狄利克雷到诺伊曼映射，精确定义隐身问题。该映射代表观测者从区域边界探测介质时能够获取的数据。由此，我们便能以这个有界线性算子为基础，严格定义隐身和近似隐身（见定义 20）。

在第4节中，我们将展示如何在复合材料抽象理论中将狄利克雷到诺伊曼映射表示为一个有效算子。为此，我们首先在第4.1小节讨论与拉普拉斯方程狄利克雷问题相关的霍奇分解（见定理21）。接着，在第4.2 小节中，我们介绍复合材料抽象理论的基本形式体系，首先说明用于定义有效算子的希尔伯特空间框架；该框架基于广义的霍奇分解概念和本构材料关系，并将其概括为一个称为 Z问题的概念。接着，在第4.3小节中，我们利用第 Z节的霍奇分解定义“狄利克雷28问题”（见定义4.1）。之后，在第4.4小节中，我们

证明本节的主要结果（即定理35），即针对狄利克雷 Z问题，以有效算子的形式给出狄利克雷到诺伊曼映射的一种新表示。

在第 5 节中，我们首先在第 5.1 小节描述抽象框架如何使我们能够系统地推导出 Z-问题的有效算子界，其方式类似于复合材料理论中的做法，例如两个被称为狄利克雷变分原理和汤姆孙变分原理的变分原理。随后，在第 5.2 小节中，我们将这一框架应用于推导狄利克雷Z-问题有效算子的相关极小化变分原理，从而得到关于狄利克雷到诺伊曼映射的第一组基本界。

在第 6 节中，我们将椭圆型偏微分方程的可能边界条件范围缩小为仿射边界条件，该方程定义了狄利克雷到诺伊曼映射。首先，在第 6.1 小节中，我们证明两个定理（43 和 44），将具有仿射边界条件的狄利克雷到诺伊曼映射与一个新的 Z-问题及其相关有效算子联系起来。然后，在第6.2 小节中，我们说明这将如何为具有这些仿射边界条件的狄利克雷到诺伊曼映射导出第二组基本界。

在第7节中，我们考察无源系统的狄利克雷到诺伊曼映射的解析性质。首先，在第7.1小节中，我们将狄利克雷到诺伊曼映射的二次型与频率的赫尔格洛茨函数联系起来（见命题46）。随后，我们比较隐身斗篷与未隐身装置的二次型，并利用狄利克雷到诺伊曼映射作为有效算子的表示公式，证明一个出人意料的结果（见定理47）：二者之差也是一个赫尔格洛茨函数。接着，在第7.2小节中，我们回顾所研究的两类主要解析函数——赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数——之间的联系。然后，在第7.3小节中，我们利用这一联系，说明隐身问题中的物理假设如何使狄利克雷到诺伊曼映射之差经变量变换后成为具有若干非常有用性质的斯蒂尔切斯函数（见定理51）。该函数的性质将是下一节推导与隐身问题相关的求和规则和界的关键。

第 8 节专门推导隐身问题的定量界限与限制。首先，在第 8.1小节中，我们证明完美隐身不可能在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上实现（见定理 52）。接着，在第 8.2 小节中，我们回顾 [19, 36] 中关于赫尔格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数界限的求和规则方法。随后，在第 8.3、8.4和8.5小节中，我们将其应用于本问题，在对隐身装置作出不同假设的条件下，推导隐身的基本界限与限制。在第 8.3小节中，在无损假设下，我们证明，如果能在某一频率下实现完美隐身或近似隐身，就会对所考虑频率区间内的隐身效果施加约束（见定理 56 和推论 58）。另一方面，在第 8.4 小节中，我们考虑更一般的有损隐身装置情形，并推导出在此情形下对隐身效果施加约束的不等式（见定理 59 和推论 60）。最后，在第8.5小节中，我们将第8.3 小节中针对无损隐身斗篷得到的结果推广到色散障碍物的情形（见推论65）。

本文最后以附录 A结束。首先，A.1 节给出命题19的证明。接着，在A.2 节中，我们证明一个关于可逆算子序列强收敛的技术性结果。最后，在A.3 节中，我们介绍有界线性算子在巴拿赫空间及其对偶空间之间作用时所需的泛函框架，从而说明为何可将狄利克雷到诺伊曼映射称为算子值 Herglotz 函数。阐述这一重要算子的这种结构，有助于开展进一步研究。

2 预备知识

2.1 记号与约定

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中一个非空、有界、连通的开集，且具有 Lipschitz边界（即一个有界利普希茨区域）。我们考虑复希尔伯特空间

$$\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^d$$

带有标准内积 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathcal{H}}$ 定义为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\mathbf{x},\ \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$$

以及与之关联的希尔伯特范数，我们记为 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$。接下来，我们介绍以下与梯度 ∇和散度 $\nabla\cdot$ 算子相关的经典 Sobolev 空间，以及格林公式：

- $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}$ 赋予其希尔伯特范数：

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

- $H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{在 } \partial\Omega\}$ 上。回顾一下，$H^1_0(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的闭子空间（关于 $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ 范数）。我们将其拓扑对偶记为 $H^{-1}(\Omega)$，即 $H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))^*$，而 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H^{-1}(\Omega)\, H^1_0(\Omega)}$ 表示 $H^{-1}(\Omega)$ 与 $H^1_0(\Omega)$ 之间的对偶积。
- $H_{div}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla\cdot\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}$ 赋予其希尔伯特范数：

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H_{div}(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

- $H_{div,0}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H_{div}(\Omega) \mid \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{在 } \partial\Omega\}$. 上。回想一下，$H_{div,0}(\Omega)$ 是$H_{div}(\Omega)$ 中的闭子空间（相对于$\|\cdot\|_{H_{div}(\Omega)}$ 范数）。
- $H_{harm}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u = 0\}$。
- 迹空间：$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{u|_{\partial\Omega} \mid u \in H^1(\Omega)\right\}$ 赋予希尔伯特范数（例如参见[58,第 8]）：

$$\|V_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u\in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega}=V_0} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

回想一下，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ 上的对偶积定义在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 与其拓扑对偶$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^*$ 之间，是边界上 L^2-内积的推广，具体而言

$$\langle u, \overline{v}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (u, v)_{L^2(\partial\Omega)},\ \forall u \in L^2(\partial\Omega) \text{ and } \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

此外，$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 配有其自然的对偶范数：

$$\|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sup_{v\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\left|\langle u, \overline{v}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right|}{\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}.$$

• 格林公式成立（例如参见 [58, 第 28 页，公式 (2.17)]）：对所有 $\mathbf{v} \in H_{div}(\Omega)$ 以及所有 $u \in H^1(\Omega)$,

$$(\mathbf{v}, \nabla u)_{\mathcal{H}} + (\nabla \cdot \mathbf{v}, u)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{v}, \overline{u|_{\partial\Omega}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{2.6}$$

其中，$\gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 定义在 $\partial\Omega$ 上，$\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位法向量，方向朝向 Ω 的外部。算子 γ_n 称为法向迹算子。它是从 $H_{div}(\Omega)$ 到 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的有界线性算子。此外，对于满足 $\Delta u \in L^2(\Omega)$ [的函数 $u \in H^1(\Omega)$，或者等价地，满足 $\nabla u \in H_{div}(\Omega)$]，的函数，我们引入标准记号 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 表示梯度的法向迹，即 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \gamma_{\mathbf{n}}(\nabla u) = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ 在 $\partial\Omega$ 上。

注 3。对于隐身问题，我们假设 $d = 3$，但仍保留记号 d，因为本文中的一些重要结果（也适用于隐身情形之外）对维数 $d \geq 2$ 同样成立。

从巴拿赫空间 E 到巴拿赫空间 F 的所有有界线性算子构成的巴拿赫代数记作 $\mathcal{L}(E, F)$；为简便起见，$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$。对于任意具有内积 $(\cdot, \cdot)$ 的复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$（约定内积对第一个分量是线性的，对第二个分量是共轭线性的），如果 $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，则将其（希尔伯特空间）伴随算子记作 $\mathbb{A}^\dagger$。$\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的实部 $\mathfrak{R}(\mathbb{A})$ 和虚部 $\mathfrak{I}(\mathbb{A})$ 定义为[1]

$$\mathfrak{R}(\mathbb{A}) := \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^\dagger), \ \mathfrak{I}(\mathbb{A}) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger), \tag{2.7}$$

特别地，它们所对应的二次型满足关系

$$\mathrm{Re}(\mathbb{A}v, v) = (\mathfrak{R}(\mathbb{A})v, v), \ \mathrm{Im}(\mathbb{A}v, v) = (\mathfrak{I}(\mathbb{A})v, v), \ \forall v \in \mathcal{H}.$$

若 $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是半正定的，记作 $\mathbb{A} \geq 0$，则称之为半正定；如果 $\mathbb{A}$ 还是可逆的，则称其为 $\mathbb{A} > 0$。若 $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 且 $\mathbb{B} - \mathbb{A} \geq 0$，我们记作 $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$（即 $\mathbb{A} \geq \mathbb{B}$）。算子$\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 称为强制的[2] 当且仅当

$$\exists c > 0, \gamma \in [0, 2\pi) \text{ such that } \mathrm{Im}\left[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbb{A}v, v)\right] \geq c\,(v, v), \ \forall v \in \mathcal{H}, \tag{2.8}$$

也就是说，$0 < cI_{\mathcal{H}} \leq \mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbb{A})$，其中 $I_{\mathcal{H}}$ 表示 $\mathcal{H}$上的恒等算子。

对于希尔伯特空间 $\mathbb{C}^d$，我们采用标准内积，并用 $||\cdot||_{\mathbb{C}^d}$ 表示其范数。我们用 $M_d(\mathbb{C})$ 表示赋予谱范数 $\|\cdot\|$ 的有限维复巴拿赫空间，该谱范数由 $\mathbb{C}^d$ 上的范数 $||\cdot||_{\mathbb{C}^d}$ 诱导，空间元素为 $d \times d$ 复矩阵。在此设定下，对于矩阵 $\mathbf{A} \in M_d(\mathbb{C})$，其转置记为 $\mathbf{A}^\top$，其伴随算子（即共轭转置）记为 $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\top$；类似地定义记号 $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$ $\mathfrak{I}(\mathbf{A})$，以及如上文针对算子所定义的半正定矩阵和强制矩阵的概念。此外，$\mathbf{I}$ 表示单位矩阵。

[1]对于复数 $z = a + \mathrm{i}b (a, b \in \mathbb{R})$，我们用记号 $z = a - \mathrm{i}b$ 表示复共轭；$\mathrm{Re}\ z := \frac{1}{2}(z + z) = a$和 $\mathrm{Im}\ z := \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z) = b$分别表示 z的实部和虚部。相较之下，为避免可能产生的混淆，尤其是在矩阵的语境下，我们用 (2.7) 表示 $\mathbb{A}$ 的算子实部和虚部。事实上，矩阵 $\mathrm{A} \in M_d(\mathbb{C})$ 的实部和虚部通常定义为 $\mathrm{Re(A)} = (\mathrm{A} + \mathrm{A})/2$ 和 $\mathrm{Im(A)} = (\mathrm{A} - \mathrm{A})/2\mathrm{i}$（即分别取 A 各元素的实部和虚部；例如参见 [70, p. 7]），这通常不同于定义 (2.7)。[2]关于强制性的其他几种与 (2.8) 等价的定义，参见例如 [10, p. 156, Def. 4.2.6 & Rem. 4.2.7]。

对于 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中的开集 $\mathcal{O}$，我们用 $M_d(L^\infty(\mathcal{O}))$ 表示从 $\mathcal{O}$ 到 $M_d(\mathbb{C})$ 的本质有界可测函数空间，该空间赋予范数 $\|\cdot\|_\infty$，其定义如下：

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}} \|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|, \quad \forall \mathbf{a} \in M_d(L^\infty(\mathcal{O})).$$

若满足以下条件，则称 一**致** $\in M_d(L^\infty(\mathcal{O}))$ 为一致强制的

$$\exists c > 0, \gamma \in [0, 2\pi) \text{ such that } \operatorname{Im}\left[e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{W}\cdot\overline{\mathbf{W}}\right] \geq c||\mathbf{W}||^2_{\mathbb{C}^d}, \ \forall \mathbf{W} \in \mathbb{C}^d, \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \quad (2.9)$$

最后，我们用以下符号表示复平面 $\mathbb{C}$和实数轴 $\mathbb{R}$的若干子集：

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \ \mathbb{R}^\pm = \{x \in \mathbb{R} \mid \pm x \geq 0\}, \ \mathbb{R}^{\pm,*} = \{x \in \mathbb{R} \mid \pm x > 0\}.$$

2.2 赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数的一些性质综述

现在我们回顾两类解析函数的定义：赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数，它们用于描述被动材料，并将在本文中贯穿使用。有关这些函数性质的更多细节，请参见 [79, 附录] 和 [73, 57, 18]。

我们首先引入标量赫尔格洛茨函数这一类函数。

定义 4. 解析函数 $h: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ 若满足以下条件，则称其为赫尔格洛茨函数（亦称 *Nevanlinna* 函数或皮克函数）

$$\operatorname{Im} h(z) \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

Herglotz 函数的一个有用性质是 Nevanlinna [108] 给出的以下表示定理。

定理 5. h 是赫尔格洛茨函数，当且仅当它具有以下表示

$$h(z) = \alpha z + \beta + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right) \mathrm{dm}(\xi), \quad \textit{for } \operatorname{Im}(z) > 0, \quad (2.10)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^+$、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 m 是正则正博雷尔测度，且 $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{dm}(\xi)/(1+\xi^2)$有限。

注 6. 若表示式 m 中引入的测度 (2.10) 满足 $\int_{\mathbb{R}} |\xi|\mathrm{dm}(\xi)/(1+\xi^2)$有限，则可将关系式 *(2.10)* 改写为：

$$h(z) = \alpha z + \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{dm}(\xi)}{\xi - z} \qquad \textit{with } \gamma = \beta - \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi\,\mathrm{dm}(\xi)}{1+\xi^2} \in \mathbb{R}.$$

对于给定的 Herglotz 函数 h，由以下推论可知，表示 h 中引入的三元组 $(\alpha, \beta,$ (2.10) m) 唯一确定。

推论 7。 设 h是一个由其表示式（*2.10*）定义的赫尔格洛茨函数，则有：

$$\alpha = \lim_{y\to+\infty} \frac{h(\mathrm{i}y)}{\mathrm{i}y}, \ \beta = \operatorname{Re} h(\mathrm{i}), \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{m}(\{a\}) = \lim_{y\to 0^+} y\ \operatorname{Im} h(a + \mathrm{i}y), \quad (2.11)$$

$$\forall (a,b) \subset \mathbb{R} \textit{ with } a < b, \ \frac{\mathrm{m}([a,b]) + \mathrm{m}((a,b))}{2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im} h(x + \mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x. \quad (2.12)$$

事实上，表示定理 5 和勒贝格控制收敛定理表明（参见例如 [19]），*：

$$h(z) = -\mathrm{m}(\{0\})z^{-1} + o(z^{-1}) \ \text{ as } |z| \to 0 \ \text{ and } \ h(z) = \alpha\, z + o(z) \text{ as } |z| \to +\infty. \tag{2.13}$$

换句话说，当 $|z|$趋于 $+\infty$ 时，赫尔格洛茨函数的增长速度至多为 z ；而当 $|z|$ 沿正虚轴趋于 0 时，其奇异性不可能强于 z^{-1} 。更一般地，矩阵值赫尔格洛茨函数 [57] 定义如下。

定义8. 解析函数 $h\colon \mathbb{C}^+ \to M_n(\mathbb{C})$ 是矩阵值*Herglotz*函数，当且仅当

$$\Im[h(z)] \geq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

下面这个直接的引理表明，只需考察矩阵值函数的二次型，就能证明该函数是Herglotz函数。

引理9. 矩阵值函数 $h : \mathbb{C}^+ \to M_n(\mathbb{C})$ 是*Herglotz*函数，当且仅当对每个 $u \in \mathbb{C}^n$.，标量值函数 $z \mapsto (h(z)u) \cdot u$ 都是*Herglotz*函数 ¯

现在我们引入第二类解析函数，即与Herglotz函数密切相关的斯蒂尔切斯函数：

定义 10. 斯蒂尔切斯函数是满足以下条件的解析函数 $s\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Im} s(z) \leq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}^+ \ \ \textit{and} \ \ s(x) \geq 0 \ \ \textit{for } x > 0.$$

根据解析延拓和施瓦茨反射原理，由此定义可知，斯蒂尔切斯函数 s必须满足

$$s(z) = \overline{s(\overline{z})}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-. \tag{2.14}$$

与赫尔格洛茨函数一样，斯蒂尔切斯函数也可由一个表示定理刻画。

定理 11. s 是斯蒂尔切斯函数的充要条件由以下表示给出：

$$s(z) = \alpha + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{dm}(\xi)}{\xi + z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \tag{2.15}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 和 m 是正则正博雷尔测度，且 $\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{dm}(\xi)/(1+\xi)$ 有限。此外， $\alpha = \lim_{x \to +\infty} {}^{s}(x)$ *(*当 $x > 0$时*)*以及 m 在 (2.15) 中的测度由 s唯一确定。

注 12. 利用表示定理 *5*和 *11*，我们指出，显然，若 s 是斯蒂尔切斯函数，则由 h 定义的 $h(z) = s(-z)$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上是一个赫格洛茨函数，其测度 m的支撑包含于 $\mathbb{R}^+$ 关系式 *(2.10)* 中。赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数之间的另一种联系见第 *7.3* 节的推论 *49*。

3 隐身问题的表述

3.1 问题的设定

这里我们考虑以下具有挑战性的问题：在麦克斯韦方程组的准静态区域内，能否利用被动隐身斗篷，在有限频率区间内使一个介电夹杂物对靠近物体的观测者不可见？我们证明，由于隐身装置的无源性，答案是否定的。此外，基于两类解析函数（即赫格洛茨函数和斯蒂尔切斯函数）的性质——它们用于建模无源器件——我们证明了一些界，这些界对有限频率区间内的被动隐身装置施加了基本极限。本文将 [36]的结果扩展到近场问题的情形。在 [36], 中，作者研究的是远场隐身问题，其中观测者远离隐身装置。在这种情况下，用于探测装置的主要散射贡献是其对应的极化率张量（即一个关于频率的 3×3 复值矩阵函数）。在我们当前的设定中，观测者靠近装置，因此该问题没有采用数学上的远场近似。观测者可以通过在隐身装置的边界（或包含该隐身装置的某个外部边界）施加复电压来探测系统，并测量该边界上电场产生的法向位移。换言之，在所考虑的频率区间内，只要知道与系统相关的狄利克雷到诺伊曼算子，就可以探测介质。由于对于每个所考虑的频率，狄利克雷到诺伊曼算子都定义在一个无限维函数空间上，因此，与 [36] 作者研究 3×3 极化率张量的情形相比，人们似乎拥有更多信息来限制频率区间内的隐身效应。然而，我们表明，正如 [36], 中所示，只需进行一次测量，就能对这种效应施加基本极限。此外，这次测量甚至可以简单地取为仿射的。

我们假设（见图1），被动隐身斗篷与物体共同占据一个有界、开且非空的单连通利普希茨区域 Ω，$\mathbb{R}^d$（更多详情见备注 13）。待隐身物体是一个被动介电、各向同性或各向异性的夹杂物，占据$\mathcal{O} \subseteq \Omega$ 中一个非空开子集（或更一般地，任意勒贝格测度非零的可测子集）。需要注意的是，$\mathcal{O}$ 不必是单连通的（从物理上说，这意味着我们可以隐身多个夹杂物，或拓扑结构非平凡的夹杂物）。我们还假设其对应的介电常数是在频率区间$[\omega_-, \omega_+] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ 上取实值的张量 $\varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}\ \omega)$（其中 $\omega_- < \omega_+$）。为使该物体不可见，我们使用一个占据 Ω 的隐身斗篷 $\setminus \mathcal{O}$（其体积为正，等于其勒贝格测度 $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$），该斗篷由被动（且可能有耗散的）材料制成，其介电常数张量对于几乎处处的 $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$由 $\varepsilon_c(\mathbf{x}\ \omega)$ 给出。因此，定义频率ω 属于 $[\omega_-, \omega_+]$ 时隐身斗篷与隐身物体的介电常数函数如下：

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}, \omega) \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ and } \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_c(\mathbf{x}, \omega) \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}. \tag{3.16}$$

此外，物体由标准的无色散、无损耗且互易的材料制成，其介电常数严格大于真空的介电常数 $\varepsilon_0 > 0$ on $[\omega_-, \omega_+]$。此外，从数学上说，我们将后一关系解析地延拓至上半平面 $\mathbb{C}^+$，因此对几乎处处的$\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ and $\forall \omega \in [\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+$:

$$\Im[\varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}, \omega)] = 0 \ \text{ with } \ \varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x})^\top \text{ and } \varepsilon_{\text{ob}}(\mathbf{x}) \geq \varepsilon \mathbf{I} \text{ with } \varepsilon > \varepsilon_0. \tag{3.17}$$

注记13。 更一般地说，Ω可以视为一个具有 *Lipschitz*边界的有界开单连通域，其中包含物体和隐身斗篷。因此，物体和隐身斗篷不必填满 Ω。对于被动隐身，我们只要求 $\Omega \setminus \mathcal{O}$ 由被动介质占据。因此，我们的结果也适用于隐身斗篷未像利用反常共振进行隐身时那样包围物体的被动隐身方法 *[102, 113, 6, 110, 93]*或利用互补介质的方法 *[81, 111]*,另请参阅其中的参考文献。

3.2 主　　动隐身装置介电常数的主要假设　　e

介电常数 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$ 由所考虑的频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$中的（ $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$（3.16）定义。然而，由于材料具有无源性， ω 在上半平面 $\mathbb{C}^+$中关于频率 [100, 138, 19, 135, 36, 33, 32]必须满足某些解析性质。这些性质引入了系统在不同频率下响应之间的相关性，并对频率区间 **ε内系统响应的电磁性质施加约束。因此，为在下一段中详细说明这些性质，将** $\omega(\mathbf{x}\ \mathbb{C}^+)$ 在（3.16）中的定义扩展到上半平面中的频率。

一阶 Sobolev 空间 **无源性：** 由于隐身斗篷由被动材料制成，对于几乎处处的 $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$, $\omega \mapsto \omega\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$ 是一个矩阵值Herglotz函数，其含义见定义 8。

H2 **实性原理：** 对于几乎处处的$\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$, $\forall \omega \in \mathbb{C}^+$, $\varepsilon(\mathbf{x}-\bar{\omega}) = \overline{\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)}$。我们指出，这种对称性反映了隐身斗篷的电极化率张量在时域中是实值张量这一事实 [，而 susceptibility 的时间傅里叶-拉普拉斯变换恰好就是张量 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)/\varepsilon_0 - \mathbf{I}$]。

H3 **高频行为：** 我们假设隐身斗篷的介电常数在位于正虚轴上的复频率 $\mathrm{i}\mathbb{R}^+$, $*$处具有以下极限行为:

$$\text{for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O},\ \varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \to \varepsilon_0 \mathbf{I} \text{ as } |\omega| \to \infty \text{ on } \mathrm{i}\mathbb{R}^{+,*}. \tag{3.18}$$

方程（3.18）是一个数学上的最小假设，实际上与材料的高频行为有关。除了一些数学上的“病态情况”（例如，亚纯介电常数函数 ε 在实轴上有离散个极点，参见 [33]中的方程（80）和（81）），在物理模型中（例如广义Drude-Lorentz模型，参见 [33, 34, 35]），极限（3.18）与实轴上的高频极限一致。事实上，由于电子惯性，在高频区域，隐身斗篷表现为无色散材料，其介电常数的高频极限是真空的介电常数 ε_0 （参见 [83, 第 78]节）。

H4 **隐身斗篷的频率连续性** $[\omega_-, \omega_+]$ **：** 我们假设，隐身装置的介电常数可以从上半平面连续延拓至所考虑的频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$，即函数 $\omega \mapsto \omega\varepsilon(\mathbf{x}\ \cdot)$ 在$[\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+$ 上几乎处处连续，其中 $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$。

注 14。 我们指出，利用 (3.17)，显然，*H1*、*H2* 和 *H4* 对整个隐身装置的介电常数均成立；也就是说，将$\Omega \setminus \mathcal{O}$ 替换为 Ω 时，这些结论同样成立。

与 [36], 一样，本文对介电常数张量作出以下两个假设，以确保所研究偏微分方程（PDE）的适定性。因此，这些假设确保了用于描述隐身问题的狄利克雷到诺伊曼算子的存在。

H5 **频率上局部一致有界**： $\forall\omega_0 \in [\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$， $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega_0) \in M_d(L^\infty(\Omega))$，并且存在 $c_1(\omega_0)$ $\delta>0$ 使得

$$\forall\omega \in B(\omega_0,\delta)\cap([\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+),\ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\|_\infty \le c_1(\omega_0).$$

此外，我们假设这一性质在 $\omega_0=\infty$ 的某个邻域内也成立，即在之前的关系式中，将 $B(\omega_0,\delta)$ 替换为 $\{\omega=\mathrm{i}y \mid y\in\mathbb{R}^+,\ *,\quad y>1/\delta\}$。

H6 **强制性假设：**[3]

- $\forall\omega_0\in[\omega_-,\omega_+],\ \exists\delta,c_2(\omega_0)>0 \mid \forall\omega\in B(\omega_0,\delta)\cap([\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+)$ there exists $\gamma(\omega)\in[0,2\pi)$ such that:

$$\mathrm{Im}\left[e^{\mathrm{i}\,\gamma(\omega)}\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)\mathbf{E}\cdot\overline{\mathbf{E}}\right]\ge c_2(\omega_0)||\mathbf{E}||^2_{\mathbb{C}^d},\ \ \forall\mathbf{E}\in\mathbb{C}^d,\ \text{ for a.e. } \mathbf{x}\in\Omega.$$

注释15。 我们指出，*H5* 和上述强制性假设 *H6* 是与我们的隐身问题相关的偏微分方程具有数学适定性的标准充分条件。然而，从某种意义上说，这一假设具有一定限制性，因为它不适用于某些特定的隐身装置。例如，若考虑由无损均匀各向同性负折射率超材料制成的隐身斗篷，其介电常数 $\varepsilon_c(\cdot,\ \omega)$ 在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上为负常数函数，并带有介电常数张量为正的介电障碍物$\varepsilon_{ob}(\mathbf{x})$ 满足 (3.17)，则这种强制性假设不成立。然而，可以放宽这一假设，并利用针对具有变号系数的二阶散度型椭圆偏微分方程所发展的数学方法获得偏微分方程的适定性，例如 $T-$强制性 *[22, 10]* 方法，或针对各向异性介质在 *[109]* 中发展的方法。不过，为简便起见，本文采用标准的强制性假设。此外，我们强调，本文推导出的界不依赖于正的强制性常数 $c_2(\omega_0)$ 因此这些常数可以任意小。

注 16. 很容易验证，如果 $\omega\varepsilon(\cdot,\omega)$ 满足假设 H5和强制性假设*H6*，那么 $\varepsilon(\cdot,\omega)$也满足。

下一个引理告诉我们，由于 (3.17)，且在假设一阶 Sobolev 空间和 H3 下，我们自动得到 $\varepsilon(\cdot,\omega)$ 在上半平面 $\mathbb{C}^+$中具有强制性。

引理17。 如果假设一阶 *Sobolev* 空间和 *H3* 成立，则

$$\mathfrak{I}[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]\ge \mathrm{Im}(\omega)\varepsilon_0\mathbf{I}>0,\ \ \forall\omega\in\mathbb{C}^+. \tag{3.19}$$

[3]我们指出， [36] 第 071504-16 页的强制性假设 ˜H7 中有一处笔误，需要更正；该假设与本文中的假设 H6 类似。应分别将项 $|\mathrm{Im}(e^{i\gamma}(\omega)\varepsilon(\mathrm{x}\ \omega)\mathrm{E}\cdot\mathrm{E})|$ 和 $|\mathrm{Im}(e^{i\gamma}(\omega_0)\varepsilon(\mathrm{x}\_\omega)\mathrm{E}\cdot\mathrm{E})|$ 替换为 $\mathrm{Im}(e^{i\gamma(\overline{\omega})}\varepsilon(\mathrm{x}\_\omega)\mathrm{E}\ \cdot\mathrm{E})$ 和 $\mathrm{Im}(e^{i\gamma}(\omega_0)\varepsilon(\overline{\mathrm{x}}\ \omega)\mathrm{E}\ \cdot\mathrm{E})$。我们还指出， [119], 第 20 页的假设 H7a 和 H7b 中也需要作出˜ ˜同样的更正；该文作者在一篇关于赫尔格洛茨函数及其应用的综述中，用数页篇幅总结了 [36]的研究结果。

证明。 首先，根据假设一阶 Sobolev 空间和 H3， $\omega \mapsto \omega\varepsilon(\cdot,\ \omega)$ 是一个满足极限（3.18）的矩阵值 Herglotz函数。因此，对于任意固定的 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^d$ 以及几乎处处的 $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$，函数$\omega \mapsto \omega\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)\ \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{U}}$ 定义于 $\mathbb{C}^+$，是一个标量值Herglotz函数，因此根据定理 5，对任意 $\omega \in \mathbb{C}^+$，它具有如下表示:

$$\omega\varepsilon(\mathbf{x},\omega)\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}} = \varepsilon_0\,|\mathbf{U}|^2\,\omega + b_{\mathbf{x},\mathbf{U}} + \int_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\xi-\omega} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right)\mathrm{d}m_{\mathbf{x},\mathbf{U}}(\xi), \tag{3.20}$$

其中 $b_{\mathbf{x},\mathbf{U}} \in \mathbb{R}$ （我们指出，如果 H2 成立，则 $b_{\mathbf{x},\mathbf{U}} = 0$），且 $\mathrm{m}_{\mathbf{x},\mathbf{U}}$ 是一个正则正博雷尔测度，使得 $\int_{\mathbb{R}}$ $\mathrm{dm}_{\mathbf{x},\mathbf{U}}(\xi)/(1+\xi^2)$ 有限。因此，由于 $b_{\mathbf{x},\mathbf{U}} \in \mathbb{R}$，$\mathrm{Im}[(\xi-\omega)^{-1}]$ 对于 $\omega \in \mathbb{C}^+$ 为正，且 $\mathrm{m}_{\mathbf{x},\mathbf{U}}$ 是正测度，(3.20) 蕴含

$$\text{对于几乎处处的 } \mathbf{x} \in \Omega\setminus\mathcal{O} \text{ 以及 } \forall\omega\in\mathbb{C}^+,\quad \mathrm{Im}\left[\omega\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)\mathbf{U}\ \cdot\overline{\mathbf{U}}\right] \geq \varepsilon_0\,\mathrm{Im}(\omega)||\mathbf{U}||^2_{\mathbb{C}^d},\quad \forall\mathbf{U}\in\mathbb{C}^d. \tag{3.21}$$

此外，利用（3.17），对于几乎处处的 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ 以及 $\forall\omega \in \mathbb{C}^+$:

$$\mathrm{Im}\left[\omega\varepsilon(\mathbf{x},\omega)\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}}\right] = \mathrm{Im}(\omega)\left[\varepsilon_{ob}(\mathbf{x})\mathbf{U}\cdot\overline{\mathbf{U}}\right] \geq \varepsilon\ \mathrm{Im}(\omega)||\mathbf{U}||^2_{\mathbb{C}^d} \geq \varepsilon_0\ \mathrm{Im}(\omega)||\mathbf{U}||^2_{\mathbb{C}^d},\ \forall\mathbf{U}\in\mathbb{C}^d. \tag{3.22}$$

结合（3.21）和（3.22）可得张量层面的不等式（3.19） l. □

3.3 数学 准静态区域中隐身问题的表述 e

在我们的隐身问题中，我们考虑麦克斯韦方程组的准静态区域。在某些假设下，该区域可作为一种近似得到合理解释，见 [83, 第七章], [41, 132], [99,第 11], 以及 [8] （其中已扩展至包括涡流 [28]），这使得物体不一定要很小，且频率也不一定要接近零。还应注意，准静态区域也适用于电场较大的情况，例如，由于场梯度极大，异常局域共振界面附近的区域内准静态近似仍然有效，见 [93, 第 3]。因此，本文的讨论适用于一大类随频率和空间变化的介电常数。例如，在我们的语境下，若隐身装置相对于频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$ （更准确地说，相对于大于 ω_+的最高频率所对应的波长）较小，则准静态区域的条件成立。

在此设定下，可以忽略时谐麦克斯韦方程组中的传播部分，从而使方程组解耦。因此，复值电场满足 $\nabla\times\mathbf{E}(\cdot,\omega) = 0$ 在 Ω 上成立。由于 Ω 是单连通的，这等价于电场可由复势导出，即 $\mathbf{E}(\cdot,\omega) = -\nabla V(\cdot,\omega)$。此外，由于 $\nabla\cdot\mathbf{D}(\cdot,\omega) = \nabla\cdot\varepsilon(\cdot,\omega)\mathbf{E}(\cdot,\omega) = 0$，这意味着势场 $V \in H^1(\Omega)$ 满足以下椭圆方程:

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\nabla\cdot\varepsilon(\cdot,\omega)\nabla V = 0 & \text{in } \Omega,\\ V = V_0 & \text{on } \partial\Omega,\end{cases}$$

其中表面势 V_0 由观测者施加在边界 $\partial\Omega$ 上（见图2）。随后，观测者可以测量由此产生的位移场法向分量，即:

$$\mathbf{D}(\cdot,\omega)\cdot\mathbf{n} = -\varepsilon(\cdot,\omega)\nabla V\cdot\mathbf{n} \text{ on } \partial\Omega,$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 Ω 的单位外法向量。因此，观测者可以获取隐身装置的狄利克雷到诺伊曼算子，该算子将 V_0 Ω 上的数据映射为 $\varepsilon(\cdot,\omega)\nabla V\cdot\mathbf{n}$ 在 $\partial\Omega$ 上的测量值。

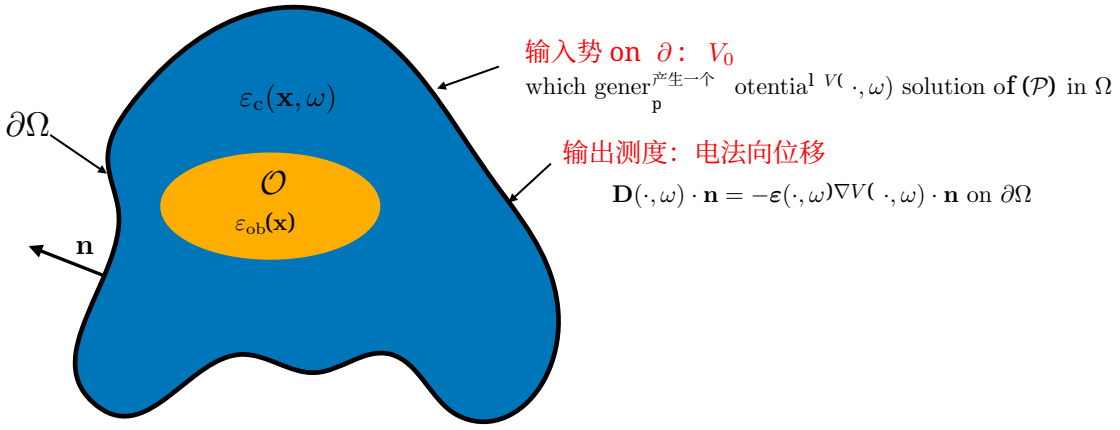

图 2：隐身问题的描述：观测者在隐身装置 $\partial\Omega$ 的边界处施加表面势 $V_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$，并在每个频率 ω of$[\omega_-,\omega_+]$下测量由此产生的电位移法向分量：$\mathbf{D}(\cdot,\omega)\cdot\mathbf{n}=-\varepsilon(\cdot,\omega)\nabla V\cdot\mathbf{n}$ on $\partial\Omega$，其中势函数 $V(\cdot,\omega)$ 是椭圆问题 $(\mathcal{P})$ 的解。

注 18。我们强调，椭圆方程 $(\mathcal{P})$ 仅在所关注的频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$（准静态近似成立的范围内）具有物理意义。然而，由于隐身斗篷的介电张量 $\varepsilon(\mathbf{x}\ \omega)$ 也通过被动本构定律为所有频率 ω *in* $\mathbb{C}^+$ 定义，因此仍可从数学角度考虑这些方程$\omega\in[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$，以在所考虑的频率范围$[\omega_-,\omega_+]$内推导隐身的基本极限。

现在，我们在以下命题中回顾该算子的数学定义及其相关泛函框架（该命题的证明是标准的，但为了方便读者，我们仍在附录中，具体而言，在第A.1小节中给出证明）。该命题针对一般的a进行陈述；本文后文将赋予a不同的性质，其中包括$\mathbf{a}=\varepsilon(\cdot,\omega)$。

命题 19. 设 Ω 是一个有界利普希茨区域，属于 $\mathbb{R}^d$（其中 $d\geq 2$），并假设 $\mathbf{a}\in M_d(L^\infty(\Omega))$ 是一致强制的 $[$，其意义见式（2.9）$]$。那么，对于任意数据 $V_0\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，狄利克雷边值问题：

$$\nabla\cdot\mathbf{a}\nabla u=0\ \ in\ \Omega\qquad with\ u=V_0\ \ on\ \partial\Omega \tag{3.23}$$

存在唯一解 $u\in H^1(\Omega)$，且该解连续依赖于边界数据 V_0。因此，可以定义狄利克雷到诺伊曼算子 $\Lambda_{\mathbf{a}}$：$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 如下：

$$\Lambda_{\mathbf{a}}V_0=\gamma_n(\mathbf{a}\nabla u)=\mathbf{a}\nabla u\cdot\mathbf{n}\ \ on\ \partial\Omega \tag{3.24}$$

和 $\Lambda_{\mathbf{a}}\in\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$。

利用假设 H1、H3、H5 和 H6（另请参见备注16和引理17），命题19 证明了引入该问题的狄利克雷到诺伊曼算子（$\mathcal{P}$），该算子是函数

$$\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \tag{3.25}$$

对于每个 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 以及每个频率 $\omega \in [\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+$，定义为

$$\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} V_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\nabla V \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial\Omega, \tag{3.26}$$

其中，V 是椭圆方程 $(\mathcal{P})$ 的唯一解。

在这种情况下，如果观测者无法根据测量区分与隐身装置相关的狄利克雷到诺伊曼算子和对应于 Ω 全部被空域占据且其介电常数为真空介电常数情形的狄利克雷到诺伊曼算子，则称物体在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上实现隐身。

因此，对于观测者施加的任意固定势函数 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，引入函数 F_{V_0}：$[\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$，定义为

$$F_{V_0} : \omega \mapsto \langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} - \Lambda_{\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{3.27}$$

F_{V_0} 的模衡量隐身的质量。这引出了频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上完美隐身以及单一频率 $\omega_0 \in [\omega_-, \omega_+]$ 下近似隐身的以下定义。

定义 20。 当频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 满足以下条件时，障碍物被完全隐身

$$\forall \omega \in [\omega_-, \omega_+] \quad and \quad \forall V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \ one \ has \ F_{V_0}(\omega) = 0.$$

此外，我们也会将这一术语用于子区间（包括由单一频率构成的单元素集合）。进一步地，我们称障碍物在频率 $\omega_0 \in [\omega_-, \omega_+]$ 处近似隐身（容差为 $\eta > 0$），如果

$$|F_{V_0}(\omega_0)| \le \eta\, G^{\text{vac}}_{V_0} \quad with \quad G^{\text{vac}}_{V_0} = \langle \Lambda_{\varepsilon_0} V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad \forall V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega). \tag{3.28}$$

我们指出，在上述定义中，$G^{\text{vac}}_{V_0}$是非负的（若 V_0 不是常数表面势，则甚至为正），因为若记 u 为 $H^1(\Omega)$中方程（3.23）关于**任意** $= \varepsilon_0\mathbf{I}$的唯一解，则由格林公式（2.6）应用于 $u \in H^1(\Omega)$和$\mathbf{v} = \mathbf{a}\nabla u \in H_{div}(\Omega)$，可得:

$$G^{\text{vac}}_{V_0} = \langle \Lambda_{\varepsilon_0} V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \varepsilon_0 \|\nabla u\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.29}$$

对于任意$\mathbf{a} \in M_d(L^\infty(\Omega))$，若其按照（ [2.9)], 所定义的狄利克雷到诺伊曼映射的算子范数 $\Lambda_{\mathbf{a}}$（定义见命题19）为

$$\|\Lambda_{\mathbf{a}}\| = \sup_{U,V \in H^{1/2}(\partial\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle \Lambda_{\mathbf{a}} U, \overline{V} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}|}{\|U\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|V\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}. \tag{3.30}$$

此外，利用极化恒等式 [131, p. 25]，可将半双线性型 $\langle \Lambda_{\mathbf{a}} U, \overline{V} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$表示如下

$$\langle \Lambda_{\mathbf{a}} U, \overline{V} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \left[i^k \langle \Lambda_{\mathbf{a}} (U + i^k V, \overline{U + i^k V} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right]. \tag{3.31}$$

因此，利用上述极化恒等式，可以推得，在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上实现完美隐身，等价于 $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 中的下列等式：

$$\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} = \Lambda_{\varepsilon_0}, \quad \forall \omega \in [\omega_-, \omega_+].$$

换言之，隐身物体的狄利克雷到诺伊曼算子在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上与真空的狄利克雷到诺伊曼算子一致。

若函数 $F_{V_0}(\cdot)$ 的模不为零，但对于 $[\omega_-, \omega_+]$ 上的所有施加势 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，相较于介质 Ω 充满真空时与狄利克雷到诺伊曼映射 Λ_{ε_0} 相关的非负二次型 $G^{\mathrm{vac}}_{V_0}$，其值始终很小，则称该物体是近似隐身的，即满足式 (3.28)。事实上，将极化恒等式 (3.31) 应用于算子 $\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_0)} - \Lambda_{\varepsilon_0}$，其中 U 和 V 是 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 中任意归一化的元素，并利用 (3.30)，经过简单计算（留给读者完成）可得，频率 ω_0 下近似隐身的定义 (3.28) 意味着

$$\|\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_0)} - \Lambda_{\varepsilon_0}\| \leq 2\,\eta \|\Lambda_{\varepsilon_0}\|. \tag{3.32}$$

本文表明，即使观测者无法访问势函数 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 所构成的完整无限维空间来探测介质，完美隐身也不可能实现。但对于这一隐身问题，我们的主要结果是关于函数 $F_{V_0}(\cdot)$ 的界，该函数定义在 $[\omega_-, \omega_+]$ 上，对应于与 d 输入独立仿射势 V_0相关的d 次测量。此外，只需进行这些 d 测量中的一次，就能利用这些界阻止近似隐身。这些界表明，即使在一个频率区间内实现近似隐身，也受到装置无源性所施加的基本极限约束。这些极限与界中出现的物理参数有关：带宽 $\omega_+ - \omega_-$、中心频率 $(\omega_- + \omega_+)/2$、障碍物体积 $|\mathcal{O}|$、隐身层体积 $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$，以及障碍物相对介电常数的一个下界 $\varepsilon/\varepsilon_0$。

4 DtN 矩阵的有效算子表示

在复合材料抽象理论中，存在一种希尔伯特空间框架，用于定义有效算子。该框架基于霍奇分解和本构材料关系的广义概念，并将其概括为一种称为 Z-问题的概念（参见 [97, 99, 59, 103, 134] ，以及 [60] 对这一问题的精彩综述；另见 [12, 第 1 节。2] 关于 Z-问题的简要历史；另 [13], 及其中的参考文献）。我们将在第4.2 小节简要回顾这一理论；此前，我们会在第4.1 小节介绍本文所采用的霍奇分解，该分解与拉普拉斯方程的狄利克雷问题相关（见定理21）。采用这一框架的一个动机是，它可以系统地推导有效算子的界，其方式与复合材料理论类似，例如，通过两个变分

称为狄利克雷变分原理和汤姆孙变分原理的原理，见 [97, 99, 103, 13, 134],；例如，由此可推导出维纳（1912年）关于有效电导率的算术平均与调和平均界 [137]。关于这一点，我们将推迟到第5节再讨论。有鉴于此，本节的主要结果（即第4.4小节的定理35）给出了狄利克雷到诺伊曼映射的一种新表示，该表示以某个特定 Z-问题的有效算子来表述。我们将其称为"狄利克雷 Z-问题"（见第4.3小节的定义28），并以第4.1小节的霍奇分解为基础。在后续章节中，我们将展示如何运用这两种变分原理，利用这一表示推导狄利克雷到诺伊曼映射的界，并将其应用于隐身问题。

4.1 狄利克雷到诺伊曼映射表示的霍奇分解

霍奇分解（亦称亥姆霍兹分解或亥姆霍兹-霍奇分解） [49, 104, 127, 21] 及其相关的正交投影方法 [136] 是复合材料理论中函数希尔伯特空间的关键工具 [50, 51, 99, 103, 59, 60, 13, 134] ，尤其可参见 [99, 第 12 节。7]。对于我们的问题，为了用有效算子表示狄利克雷到诺伊曼映射，我们需要用到以下狄利克雷问题的标准霍奇分解 [即（$\mathcal{P}$）其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)\ =\mathbf{I}$]其陈述和证明可见于，例如 [49,命题 1，第 215 页—217]。

定理 21 （狄利克雷问题的霍奇分解）。设Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界单连通利普希茨区域。则由以下方式定义的三个空间 $\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}$

$$\mathcal{U} = \nabla H_{harm}(\Omega) = \{\mathbf{E}_0 = -\nabla u \mid u \in H^1(\Omega)\ \textit{and}\ \Delta u = 0\}, \tag{4.33}$$

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{E} = -\nabla V \mid V \in H_0^1(\Omega)\}, \tag{4.34}$$

$$\mathcal{J} = \{\mathbf{J} \in H_{div,0}(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{J} = 0\}, \tag{4.35}$$

是希尔伯特空间 $\mathcal{H} =\mathbf{L}^2(\Omega)$中的相互正交子空间。此外，

$$\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\Omega) = \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}, \tag{4.36}$$

$$\text{range}(\nabla|_{H^1(\Omega)}) = \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E},\ \text{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}) = \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}, \tag{4.37}$$

其中，$\nabla|_{H^1(\Omega)}\colon\ H^1(\Omega)\ \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ 是作用于 $H^1(\Omega)$上的梯度算子 ∇，而 $\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}\colon H_{div}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是作用于 $H_{div}(\Omega)$上的散度算子 $\nabla\cdot$。

定义 22. 我们将 $\boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2$ 定义为希尔伯特空间 $\mathcal{H} =\mathbf{L}^2(\Omega)$ 到 $\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}$上的正交投影，分别由(4.33), (4.34), (4.35)定义。

注 23. 由于该定理对我们的结果至关重要，我们想在此阐述其证明思路，特别是说明它是以下事实的直接推论。首先，$\nabla|_{H^1(\Omega)}$和 $\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}$ 是稠密定义的闭算子，且具有闭值域（证明其中一个算子具有闭值域基本上是证明中困难的部分，参见 *[7]*），其伴随算子为

$$(\nabla|_{H^1(\Omega)})^\dagger = -\nabla \cdot |_{H_{div,0}(\Omega)},\ (\nabla|_{H_0^1(\Omega)})^\dagger = -\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)},$$

而后者是格林公式 (2.6)的推论。其次，根据伴随算子理论中的一般结果 *[75,* 定理 *5.13*，第 *234],* 可得

$$\mathcal{H} = \text{range}(\nabla|_{H^1(\Omega)}) \overset{\perp}{\oplus} \text{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div,0}(\Omega)}) = \text{range}(\nabla|_{H_0^1(\Omega)}) \overset{\perp}{\oplus} \text{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}). \tag{4.38}$$

最后，H $odge$ 分解定理是由此以及以下事实直接得出的 t

$$\mathcal{U} = \text{range}(\nabla|_{H^1(\Omega)}) \cap \text{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}), \tag{4.39}$$

$$\mathcal{E} = \text{range}(\nabla|_{H_0^1(\Omega)}) \quad and \quad \mathcal{J} = \text{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div,0}(\Omega)}). \tag{4.40}$$

下面对此作进一步阐述。首先，显然，根据正交分解 *(4.38)* 以及等式 *(4.39)* 和 *(4.40)*， $\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{J}$ 是$\mathcal{H}$的两两正交（闭）子空间。因此，只要证明以下断言，定理便得证：若 $F \in \mathcal{H}$，则对于某些 $E_0 \in \mathcal{U}$、$E \in \mathcal{E}$ 和 $J \in \mathcal{J}$，$F = E_0 + E + J$。我们来证明这一点。设 $F \in \mathcal{H}$。那么，根据 *(4.38)* 的第一个等式 $[$，$F = \nabla u + J$，其中 $J \in kernel(\nabla \cdot |_{H_{div}}0(\Omega)) = \mathcal{J}$ and $u \in H^1(\Omega)$。由于 $\nabla u \in \mathcal{H}$，那么根据 *(4.38)* 的第二个等式 $[)$，E_0，其中 $v \in H_0^1(\Omega)$（因此 $E = \nabla v \in \mathcal{E}$），且 $E_0 \in kernel(\nabla \cdot |_{H_{div}}(\Omega))$，这意味着 $E_0 = \nabla(u - v) \in range(\nabla|_{H^1}(\Omega)) \cap kernel(\nabla \cdot |_{H_{div}}(\Omega))$。因此，$E_0 \in \mathcal{U}$（因为调和函数 $u - v \in H^1(\Omega)$）。由此我们证明了 $F = E_0 + E + J$，其中 $E_0 \in \mathcal{U}$、$E \in \mathcal{E}$ 且 $J \in \mathcal{J}$。断言得证。

4.2 复合材料抽象理论： Z-问题与有效算子

这里简要回顾复合材料抽象理论中关于 Z-问题和有效算子的基本内容。定义 Z-问题的出发点是一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，假设该空间具有子空间$\perp$ $\perp\mathcal{H} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{E} \oplus \mathcal{J}$ 上的正交三重分解；当 $\mathcal{H}$ 是平方可积函数空间时，这可以看作霍奇分解的抽象形式。接下来给定一个（有界）线性算子 $\mathbf{L}$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$，我们将其视为一个材料张量（更准确地说，是由该张量进行左乘的算子）。 Z-问题随后涉及在 $\mathcal{H}$ 上求解一个受约束线性方程；该方程是具有材料张量 $\mathbf{L}$ 的线性本构关系的类似形式，其中输入场和$\perp$ $\perp$输出场分别属于 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{E}$和 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{J}$。因此，该受约束线性方程隐含地满足某些偏微分方程约束，而这些约束编码在 $\mathcal{H}$的霍奇分解中。由此，对于Z-问题，可通过线性本构关系定义有效算子 $\mathbf{L}_*$： $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$；该算子只关注整个系统的受限部分，即子空间$\mathcal{U}$中的部分。例如，在 $\mathcal{H}$ 是周期函数空间且 $\mathcal{U}$ 是这些函数的周期平均值空间的情形下，$\mathbf{L}_*$ 会将输入的平均值映射为材料张量为 $\mathbf{L}$ 的材料本构关系中输出的平均值。这通常是复合材料理论的起点，而该理论与偏微分方程的均匀化理论密切相关；关于这一点，参见例如 [99, 59, 103, 13, 134]。在此情形下，有效张量 $\mathbf{L}_*$ 与通过对周期复合材料进行均匀化所得到的张量一致。

下面我们给出 Z问题及其相关有效算子的精确定义（定义24）。随后，我们将讨论强制算子 Z的问题的解的存在唯一性、有效算子$\mathbf{L}$的良定义性$\mathbf{L}_*$，以及将有效算子表示为$\mathbf{L}$的舒尔补的公式。相关的主要结果是定理25和引理27。下一节中，我们将考虑与第 Z4.1小节引入的霍奇分解相关的问题，并讨论该问题的有效算子与狄利克雷到诺伊曼映射之间的关系。 Z

定义24 （Z-问题与有效算子）。 该 Z-问题

$$(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathbf{L}), \tag{4.41}$$

是与希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 相关的以下问题，该空间配备内积 $(\cdot,\cdot)$，并将 $\mathcal{H}$ 正交三重分解为

$$\mathcal{H}=\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{J}, \tag{4.42}$$

以及一个有界线性算子 $\mathbf{L}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$：给定 $\mathbf{E}_0\in\mathcal{U}$，求满足下列条件的三元组 $(\mathbf{J}_0,\mathbf{E},\mathbf{J})$ $\in\mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$

$$\mathbf{J}_0+\mathbf{J}=\mathbf{L}\left(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}\right). \tag{4.43}$$

若存在这样的三元组 $(\mathbf{J}_0,\mathbf{E},\mathbf{J})$，则称其为在 $\mathbf{E}_0$ 处的 Z-问题的一个解。此外，若存在一个有界线性算子 $\mathbf{L}_*\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$，使得

$$\mathbf{J}_0=\mathbf{L}_*\mathbf{E}_0, \tag{4.44}$$

每当 $\mathbf{E}_0\in\mathcal{U}$ 且 $(\mathbf{J}_0,\mathbf{E},\mathbf{J})$ 是 $\mathbf{E}_0$，处的 Z-问题的一个解时，$\mathbf{L}_*$ 就称为该 Z-问题的有效算子。

考虑一个 Z-问题（$\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{L}$）。于是可以将算子写为

$$\mathbf{L}=[\mathbf{L}_{ij}]_{i,j=0,1,2}\in\mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{4.45}$$

表示为 3×3 关于希尔伯特空间$\perp$ $\perp$的正交三重分解所对应的分块算子矩阵 $\mathcal{H}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{E}\oplus\mathcal{J}$ (4.42)
更准确地说，我们引入$\mathbf{\Gamma}_0$，$\mathbf{\Gamma}_1$，$\mathbf{\Gamma}_2$这组 $\mathcal{H}$到 $H_0=\mathcal{U}$，$H_1=\mathcal{E}$，$H_2=\mathcal{J}$的正交投影，并定义

$$\mathbf{L}_{ij}\in\mathcal{L}(H_j,H_i),\ \mathbf{L}_{ij}=\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_j:H_j\to H_i, \tag{4.46}$$

对于 i，$j=0$，1，2。特别地，$\mathbf{L}_{11}$是$\mathbf{L}$在 $\mathcal{E}$上的压缩，也就是说，

$$\mathbf{L}_{11}=\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_1|_{\mathcal{E}}, \tag{4.47}$$

即，算子 $\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_1$ 在 $\mathcal{H}$ 闭子空间 $\mathcal{E}$上的限制。因此，方程 (4.43) 等价于以下系统

$$\mathbf{L}_{00}\mathbf{E}_0+\mathbf{L}_{01}\mathbf{E}=\mathbf{J}_0, \tag{4.48}$$
$$\mathbf{L}_{10}\mathbf{E}_0+\mathbf{L}_{11}\mathbf{E}=0, \tag{4.49}$$
$$\mathbf{L}_{20}\mathbf{E}_0+\mathbf{L}_{21}\mathbf{E}=\mathbf{J}. \tag{4.50}$$

最后，由此并假设 $\mathbf{L}_{11}$ 可逆，我们得到方程 (4.43) 解的经典公式，以及将有效算子表示为舒尔补的表示公式（该公式也见 [99,式 (12.57)]）：

$$\mathbf{J}_0=\mathbf{L}_*\mathbf{E}_0,\ \mathbf{E}=-\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{L}_{10}\mathbf{E}_0,\ \mathbf{J}=\mathbf{L}_{20}\mathbf{E}_0+\mathbf{L}_{21}\mathbf{E}, \tag{4.51}$$
$$\mathbf{L}_*=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{00}&\mathbf{L}_{01}\\ \mathbf{L}_{10}&\mathbf{L}_{11}\end{bmatrix}/\mathbf{L}_{11}=\mathbf{L}_{00}-\mathbf{L}_{01}\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{L}_{10}. \tag{4.52}$$

因此，我们证明了以下定理。

定理 25. 若 $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},L)$ 是一个 Z-问题（如定义24所述），且 L_{11} [（由方程 (4.47) 定义）] 可逆，则方程 (4.43)（即 E_0 处的 Z-问题）对每个 $E_0\in\mathcal{U}$ 都有唯一解，且该解由公式 (4.51)、(4.52) 给出。此外，Z-问题的有效算子 L_* 存在且唯一，并由舒尔补公式 (4.52) 给出。

以下引理给出了有效算子的一些重要性质，包括一种替代表示（另见 [13,命题 17]），关于$\mathbf{L}_*$，稍后将会用到。

引理 2 6. 设$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J}$、$\mathbf{L})$ 是一个 Z-问题，且$\mathbf{L}_{11}\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$ 可逆。则：

(i) 若 λ 是非零标量，则$(\lambda\mathbf{L})_*=\lambda\mathbf{L}_*$。

(ii) 若$\mathbf{L}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}$，则$\mathbf{L}_*=\mathbf{L}$，即$\mathbf{L}_*\mathbf{E}_0=\mathbf{L}\mathbf{E}_0$，$\forall\mathbf{E}_0\in\mathcal{U}$。

(iii) 若 $[\mathbf{L}_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1}\in\mathcal{L}\ (\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E})$ 可逆，则 $([\mathbf{L}_{ij}]_i^{-1},\ _{j=0,\ 1})_{00}\in\mathcal{L}\ (\mathcal{U})$ 可逆，且 $_d$

$$\mathbf{L}_*=([\mathbf{L}_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1})_{00}^{-1}. \tag{4.53}$$

（iv）算子 $(\mathbf{L}^\dagger)_{\ 11}=\ (\mathbf{L}_{11})^{\ \dagger}\in\mathcal{L}\ (\mathcal{U})$ 可逆，且 $(\mathbf{L}_*)^{\ \dagger}=\ (\mathbf{L}^\dagger)_{\ *}$。

证明。命题（i）、（ii）和（iv）的证明是舒尔补公式（4.52）的直接推论；对于（iv），还有，$j=0,\ 1,\ 2$，因为它们是正交投影，因而是自伴算子。现在证明（iii）。由于$\mathbf{L}_{11}$ 可逆，定理25成立，因此有效算子$\mathbf{L}_*$ 存在，且由（4.52）给出。根据假设，$[\mathbf{L}_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1}$ 可逆；根据艾特肯块对角化公式（例如参见[13, 引理 11] 或 [139]），

$$\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{00}&\mathbf{L}_{01}\\ \mathbf{L}_{10}&\mathbf{L}_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{L}_{01}\mathbf{L}_{11}^{-1}\\ 0&\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_*&0\\ 0&\mathbf{L}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}&0\\ \mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{L}_{10}&\mathbf{I}\end{bmatrix},$$

由此可知，$\mathbf{L}_*$ 可逆，并且巴拿赫维奇求逆公式（例如参见 [13,引理 14] 或 [139]）成立：

$$[\mathbf{L}_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}=\begin{bmatrix}(\mathbf{L}_*)^{-1}&-(\mathbf{L}_*)^{-1}\mathbf{L}_{01}\mathbf{L}_{11}^{-1}\\ -\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{L}_{10}(\mathbf{L}_*)^{-1}&\mathbf{L}_{11}^{-1}+\mathbf{L}_{11}^{-1}\mathbf{L}_{10}(\mathbf{L}_*)^{-1}\mathbf{L}_{01}\mathbf{L}_{11}^{-1}\end{bmatrix}.$$

因此，可得

$$([\mathbf{L}_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1})_{00}=(\mathbf{L}_*)^{-1},$$

这就得到了所需公式（4.53）。 □

以下引理很有用，因为它给出了$\mathbf{L}_{11}$ 和 $[\mathbf{L}_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1}$均可逆的充分条件。证明很简单，故略去。

引理27。若 L 在意义 (2.8)] 下是强制的 [，则 L_{11} 和 $[L_{ij}]_{i,j=0,1}$ 均为强制的，且算子 L、L_{11}，和 $[L_{ij}]_{i,j=0,1}$ 都是可逆的。特别地，对于任何 L 为强制的Z-问题 $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},L)$，定理 25 均成立。

4.3 狄利克雷 Z-问题及相关有效算子

现在我们定义一个 Z-问题及其相关的有效算子，它们源自定理 4.36中的霍奇分解（21）、狄利克雷边值问题（3.23）以及狄利克雷到诺伊曼算子（3.24）。

定义 *28*（狄利克雷 Z-问题）。设 a：$\Omega \to M_d(\mathbb{C})$ 是一个矩阵值函数，使得 $a \in M_d(L^\infty(\Omega))$ 按照（*2.9*）$\int$的意义是一致强制的 $\int$。与希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$、$\mathcal{H}$ 在（*4.36*）中的正交三重分解以及由 a 左乘得到的有界线性算子 $L_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 相关的 Z-问题（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、$L_{\mathbf{a}}$）称为狄利克雷Z-问题。为简便起见，$L_{\mathbf{a}}$ 记作 a；在这种记号约定下，我们将（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、a）称为与 a 相关的狄利克雷 Z-问题，并将有效算子 $(L_{\mathbf{a}})_*$ 记作 a_*。

命题 *29*。对于任意狄利克雷 Z-问题（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、a），算子 $a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$、$[a_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1} = (\mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1)a(\mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1)|_{\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E})$ 以及 $a_{11} = \Gamma_1 a \Gamma_1|_{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 都按照（*2.8*）$\int$ 的意义是强制的 $\int$且可逆。因此，定理 *25* 对任意狄利克雷 Z-问题均成立；特别地，E_0 处的狄利克雷 Z-问题对每个 $E_0 \in \mathcal{U}$均存在唯一解。

证明。考虑一个 Dirichlet Z-问题（$\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{a}$）。则 $\mathbf{a}: \Omega \to M_d(\mathbb{C})$ 是一个矩阵值函数，使得 $\mathbf{a} \in M_d(L^\infty(\Omega))$，并且存在 $c > 0$ 和 $\gamma \in [0, 2\pi)$，使得

$$\mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{W} \cdot \overline{\mathbf{W}}) \geq c||\mathbf{W}||^2_{\mathbb{C}^d},\ \forall \mathbf{W} \in \mathbb{C}^d,\ \text{for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

这意味着 $\mathbf{a}$ 是强制的，因为对于所有 $\mathbf{W} \in \mathcal{H}$:

$$\mathrm{Im}\left[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{aW}, \mathbf{W})_{\mathcal{H}}\right] = \int_\Omega \mathrm{Im}\left[e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{W}(\mathbf{x})}\right] \mathrm{d}\mathbf{x} \geq \int_\Omega c\,||\mathbf{W}(\mathbf{x})||^2_{\mathbb{C}^d}\mathrm{d}\mathbf{x} = c\,\|\mathbf{W}\|^2_{\mathcal{H}}.$$

该命题的证明现在由此以及引理 27 得出。 □

下一个结果直接由引理 26 和命题 29 得出，因此省略证明。

推论 30。设（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、$\mathbf{a}$）为一个 *Dirichlet* Z-问题。则：

(i) 若 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 则 $(\lambda\mathbf{a})_* = \lambda\mathbf{a}_*$。

(ii) 若$\mathbf{a}$ 是常矩阵，则$\mathbf{a}_* = \mathbf{a}$，即$\mathbf{a}_*\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}\mathbf{E}_0$，$\forall \mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$。

(iii) 算子 $[\mathbf{a}_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E})$ 可逆，$([\mathbf{a}_{ij}]^{-1}_{i,\ j=0,\ 1})_{00} = \mathbf{\Gamma}_0[\mathbf{a}_{ij}]^{-1}_{i,\ j=0,\ 1}\mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$可逆，并且

$$\mathbf{a}_* = ([\mathbf{a}_{ij}]^{-1}_{i,j=0,1})^{-1}_{00}. \tag{4.54}$$

(iv) 矩阵值函数 $a^\dagger : \Omega \to M_d(\mathbb{C})$ 定义为 $a^\dagger(x) = a(x)^\dagger$ 对所有 $x \in \Omega$ 均成立，具有以下性质：$a^\dagger \in M_d(L^\infty(\Omega))$，$a^\dagger$ 一致强制 $\int$，其含义见 *(2.9)*$\int$；并且就 *Dirichlet* Z-问题 $(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, a^\dagger)$ 的有效算子 $(a^\dagger)_* \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ 而言，我们有

$$(\mathbf{a}_*)^\dagger = (\mathbf{a}^\dagger)_*,$$

其中 $(\mathbf{a}_*)^\dagger$ 是算子 $\mathbf{a}_* \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$的（希尔伯特空间）伴随算子。

4.4 狄利克雷到诺伊曼算子与有效算子之间的联系 r

这里我们将形式化并证明第4节的主要结果（定理35），该结果将狄利克雷到诺伊曼映射$\Lambda_{\mathbf{a}}$（定义见命题19）与第$\mathbf{4}_*$ .3小节中狄利克雷 Z问题的有效算子a联系起来。我们可以通过提升算子 $\Lambda_{\mathbf{a}}$ 与 $\mathbf{a}_*$ 之间的关系来刻画 Π（定义31），以及其伴随算子 $\Pi^\dagger$，公式如下： $\Lambda_{\mathbf{a}} = \Pi^\dagger \mathbf{a}_* \Pi$。或许有人会认为 $\Lambda_{\mathbf{a}}$ 与$\mathbf{a}_*$ 是相合算子，但事实并非如此，因为 Π 不是可逆的，而只是满射（根据命题32）。

定义 3 **1**（提升算子）。 提升算子 Π： $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to \mathcal{U}$ 是由下式定义的函数:

$$\Pi(V_0) = \nabla u, \ \ V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \tag{4.55}$$

其中， u 是调和函数 $[$，即由以下狄利克雷边值问题唯一确定的 $u \in H_{harm}(\Omega)]$:

$$\Delta u = 0 \ in \ \Omega \ \ with \ \ u = V_0 \ on \ \partial\Omega. \tag{4.56}$$

命题 32。 提升算子 Π： $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to \mathcal{U}$ 是一个有界线性算子，即，$\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ \mathcal{U})$ 它是满射，但不是单射。其核是一维的，且包含 $\partial\Omega$ 上的常值场。此外，其伴随算子 $\Pi^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{U},$ $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 是由下式定义的"诺伊曼"迹算子 $\Pi^\dagger$： $\mathcal{U} \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$: $^-$

$^-$

$$\Pi^\dagger(\nabla v) = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \ \forall\, v \in H_{harm}(\Omega). \tag{4.57}$$

证明。对于每个 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，都存在唯一的 $u \in H^1(\Omega)$（它关于 V_0 线性且连续地依赖），使其满足方程 (4.56)。这定义了一个有界线性算子 $P_\Omega \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^1(\Omega))$，其定义为 $P_\Omega(V_0)$ $= u$ （参见例如 [104, 定理 3.14，第 46] 页）。于是，作为 $\nabla \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathrm{L}^2(\Omega))$，可立即推出 $\Pi = \nabla P_\Omega \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ \mathcal{U})$。此外， Π不是单射。事实上， $\Pi(V_0)^- = 0 = \nabla u$ （其中 u 由 (4.56) 定义）当且仅当（由于 Ω 连通）u 在 Ω 中为常数。因此，这等价于其迹 V_0 在 $\partial\Omega$ 上为常数。此外， Π是满射，因为根据定义， $\mathcal{U}$ 中的任意元素均可写作 ∇u ，其中 $u \in H_{harm}$ (Ω)，即 u是调和函数（即 $\Delta u = 0$），且 $u \in H^1(\Omega)$。因此，由于 $u \in H^1(\Omega)$，它在 $\partial\Omega$ 上的迹存在，记为 V_0，并且 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$。故根据构造， u 满足 (4.56)，因此$\Pi(V_0) = \nabla u$。

对于伴随公式，利用以下性质：任意 $\nabla v \in \mathcal{U}$ [，对于某个 $v \in H_{harm}(\Omega)]$ ，以及任意 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$:

$$\begin{aligned}
(\nabla v, \Pi V_0)_{\mathcal{H}} &= (\nabla v, \nabla u)_{\mathcal{H}} \\
&= (-\nabla^2 v, u)_{L^2(\Omega)} + \left\langle \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \overline{u} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \text{[by the Green's formula (2.6)]} \\
&= \left\langle \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \overline{V_0} \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \text{(since } v \text{ is harmonic and } u = V_0 \text{ on } \partial\Omega)
\end{aligned}$$

这意味着 $\Pi^\dagger(\nabla v) = \partial v / \partial \mathbf{n}$。 □

下面的命题（前面有一个技术引理）建立了对于给定的表面势 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，解 u 所满足的狄利克雷边界值问题（3.23）与和 V_0相关的解（$\mathbf{J}_0, \mathbf{E}$、$\mathbf{J}$）$\in \mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$所满足的狄利克雷$Z$-问题（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、$\mathbf{a}$）之间的关系，其中该问题对应于 $\mathbf{E}_0 = \Pi(V_0)$。$\in \mathcal{U}$这一关系将是定理 35中用有效算子表示狄利克雷到诺伊曼算子的关键要素。

引理 33。令 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。则

$$\{\nabla\widetilde{v} \mid \widetilde{v} \in H^1(\Omega) \text{ with } \widetilde{v}|_{\partial\Omega} = V_0\} = \{\mathbf{E}_0 + \widetilde{\mathbf{E}} \mid \widetilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{E} \text{ and } \mathbf{E}_0 \in \mathcal{U} \text{ with } \mathbf{E}_0 = \Pi(V_0)\}. \quad (4.58)$$

证明。设 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 固定。

步骤 1：(4.58)的左包含的证明

假设 $v \in H^1(\Omega)$，且 $v|_{\partial\Omega} = V_0$。则由定理 21，可得

$$\nabla v \in \operatorname{range}(\nabla|_{H^1(\Omega)}) = \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E}.$$

因此，可以将 ∇v 唯一分解为

$$\nabla v = \widetilde{\mathbf{E}}_0 + \widetilde{\mathbf{E}} \text{ with } \widetilde{\mathbf{E}}_0 = -\nabla V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} \in \mathcal{U} \text{ and } \widetilde{\mathbf{E}} = -\nabla V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in \mathcal{E}, \quad (4.59)$$

对某个 $V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} \in H^1(\Omega)$，满足 $\Delta V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} = 0$，以及某个 $V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in H_0^1(\Omega)$。定义 $\mathbf{E}_0 := \Pi(V_0)$，并注意到 $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$，根据提升算子 Π 的定义。因此，要证明所考虑的集合包含关系，只需证明 $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0$。为证明这一点，首先注意到由 (4.59) 可得

$$\nabla(v + V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} + V_{\widetilde{\mathbf{E}}}) = 0.$$

因此，由于 Ω 是连通的，存在一个常数 $C \in \mathbb{C}$，使得 $v + V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} + V_{\widetilde{\mathbf{E}}} = C$ 在 $\Omega = \partial\Omega \cup \Omega$ 上成立。由此可知，$V_0 + V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} = C$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，因为 $V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in H_0^1(\Omega)$。因此，$V_0 = -V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} + C$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，并且可知由 $\psi = -V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} + C$ 在 Ω 上定义的函数 $\psi \in H^1(\Omega)$ 满足：

$$\Delta\psi = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad \psi = V_0 \text{ on } \partial\Omega.$$

因此，根据 Π 的定义可得 $\mathbf{E}_0 = \Pi(V_0) = \nabla\psi$；又由于 $\nabla\psi = -\nabla V_{\widetilde{\mathbf{E}}_0} = \widetilde{\mathbf{E}}_0$，，这就证明了$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0$，，如所需。

步骤2：证明(4.58)的右包含

假设 $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ 且 $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$，其中 $\mathbf{E}_0 = \Pi(V_0)$，并定义 $\mathbf{E}_1 := \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$。那么存在 $V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in H_0^1(\Omega)$，使得 $\widetilde{\mathbf{E}} = -\nabla V_{\widetilde{\mathbf{E}}}$，并且存在 $V_{\mathbf{E}_0} \in H^1(\Omega)$，使得 $\mathbf{E}_0 = -\nabla V_{\mathbf{E}_0}$，其中 $-V_{\mathbf{E}_0} \in H^1(\Omega)$ 是满足 $-V_{\mathbf{E}_0}|_{\partial\Omega} = V_0$ 的狄利克雷边值问题 (4.56) 的解。因此，显然 $\mathbf{E}_1 = \nabla v$，其中 $v = -(V_{\mathbf{E}_0} + V_{\mathbf{E}_1}) \in H^1(\Omega)$，且其在 $\partial\Omega$ 上的迹等于 V_0，即 $v|_{\partial\Omega} = V_0$。这证明了 (4.58) 的右包含。 □

命题 *34.* 假设 $a \in M_d(L^\infty(\Omega))$ 满足 *(2.9)* 意义下的一致强制性 *[]*，且令 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$。那么，与 V_0 相关的狄利克雷边值问题 *(3.23)* 的唯一解 u （由命题 *19* 定义），以及与 $E_0 = \Pi(V_0) = \Pi(u|_{\partial\Omega}) \in \mathcal{U}$相关的狄利克雷$Z$-问题（定义 *28* 中引入）的唯一解 $(J_0, E, J) \in \mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, a)$ 之间满足

$$\nabla u = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} \quad \text{and} \quad \mathbf{J}_0 + \mathbf{J} = \mathbf{a}\nabla u. \quad (4.60)$$

证明。令 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 固定，并令 u 为狄利克雷边值问题 (3.23) 在 $H^1(\Omega)$ 中对应的唯一解。特别地，u 在 $\partial\Omega$ 上的迹等于 V_0，即$u|_{\partial\Omega} = V_0$，由引理 33可得

$$\nabla u = \mathbf{E}_0 + \widetilde{\mathbf{E}} \quad \text{with} \quad \mathbf{E}_0 = \Pi(V_0) = \Pi(u|_{\partial\Omega}) \in \mathcal{U} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathbf{E}} = -\nabla V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in \mathcal{E}, \ \text{for some } V_{\widetilde{\mathbf{E}}} \in H_0^1(\Omega).$$

于是，$\mathbf{a}\nabla u \in$ 核$(\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)})$，由定理 21 可推得

$$\mathbf{a}(\mathbf{E}_0 + \widetilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{a}\nabla u \in \operatorname{kernel}(\nabla \cdot |_{H_{div}(\Omega)}) = \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}.$$

根据 Dirichlet Z问题（$\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{a}$）在 $\mathbf{E}_0$处解的唯一性（参见命题 ~29），可得 $\mathbf{E} = \mathbf{E}$ 且 $\mathbf{J}_0 + \mathbf{J} = \mathbf{a}\nabla u$。 □

以下定理是第 4 节的主要结果。Milton 在 [103, 第 2] 章中指出，狄利克雷到诺伊曼算子可以用有效算子表示。如下给出的数学重述及其证明，是本文三位作者合作的成果。证明于 2019 年完成；基于此，第三位作者及其合作者为电网络提出了这一结果的离散类比，参见 [13, 定理 63]。

定理 35 （狄利克雷到诺伊曼映射的有效算子表示）。狄利克雷到诺伊曼算子 $\Lambda_{\mathbf{a}} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$（定义见命题 *19*）以及 *Dirichlet* 问题的有效算子 $\mathbf{a}_*$，其中 *Dirichlet*Z问题 ($\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{a}$)（定义见定义 *28*），满足

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = \Pi^\dagger \mathbf{a}_* \Pi, \tag{4.61}$$

其中 Π： $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to \mathcal{U}$是提升算子（定义见命题*31*），$\Pi^\dagger$： $\mathcal{U} \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 是其伴随算子（参见命题*32*），且$\mathbf{a}_*$ 由舒尔补公式给出

$$\mathbf{a}_* = \mathbf{a}_{00} - \mathbf{a}_{01}\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10}, \tag{4.62}$$

$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{a} \mathbf{\Gamma}_j : \operatorname{range}(\mathbf{\Gamma}_j) \to \operatorname{range}(\mathbf{\Gamma}_i), \ i,j = 0,1, \tag{4.63}$$

其中 $\mathbf{\Gamma}_0$ 和 $\mathbf{\Gamma}_1$ 分别是希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$ 到空间$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{E}$的正交投影（定义见命题*22*）。

证明。设 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$固定。若记 u 为$H^1(\Omega)$中狄利克雷边值问题（3.23）对应的唯一解，并记（$\mathbf{J}_0, \mathbf{E}$，$\mathbf{J}$）$\in \mathcal{U} \times \mathcal{E} \times \mathcal{J}$为与 Z问题（$\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{a}$）相对应的狄利克雷边值问题唯一解，且该问题与$\mathbf{E}_0 = \Pi V_0 \in \mathcal{U}$相关，则根据命题34，有如下关系

$$\nabla u = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} \in \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E} \quad \text{and} \quad \mathbf{J}_0 + \mathbf{J} = \mathbf{a}\nabla u \in \mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}.$$

此外，根据命题 29，我们知道 Dirichlet$_*$ 问题的有效算子 $\mathbf{a}$ Z-problem$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathbf{a})$ 存在。根据 $\mathbf{a}_*$ 的定义，有

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{a}_* \mathbf{E}_0.$$

于是，得到

$$\begin{aligned}\langle \Pi^* \mathbf{a}_* \Pi V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} &= (\mathbf{a}_* \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}} \ \ (\text{since } \mathbf{E}_0 = \Pi\, V_0) \\ &= (\mathbf{J}_0, \mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}, \mathbf{E}_0 + \mathbf{E})_{\mathcal{H}} \ \ (\text{as } \mathcal{U}, \mathcal{E} \text{ and } \mathcal{J} \text{ are mutually orthogonal}) \\ &= (\mathbf{a}\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathbf{a}\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{H}} + (\nabla \cdot \mathbf{a}\nabla u, u)_{L^2(\Omega)} \ \ (\text{since } \nabla \cdot \mathbf{a}\nabla u = 0 \text{ on } \Omega) \\ &= \langle \Lambda_{\mathbf{a}} V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

其中，对于最后一个等式，我们用到了格林公式（2.6），以及 $\Lambda_{\mathbf{a}} V_0 = \mathbf{a}\nabla u \cdot \mathbf{n}$在 $\partial\Omega$ 上成立。因此，由此以及半双线性型的极化恒等式 [131, 第 25], 页可得 $\Pi^* \mathbf{a}_* \Pi = \Lambda_{\mathbf{a}}$。

□

5 有效算子的变分原理与界

本节中，我们将介绍（见第 5.1 小节）复合材料抽象理论中的两个标准变分原理（即下文的定理36 和 38 ），本文将用到这两个原理，它们要求满足某些算子正性假设（特别是，它们并不适用于每个强制算子）。这些变分原理与狄利克雷到诺伊曼映射 [44] 的经典狄利克雷变分原理和汤姆孙变分原理有关 [20, 23, 24, 98], ，我们将在第 5.2 小节详细阐述这种关系。我们还将从第一个变分原理（定理 39）推出一个推论（推论 36）：对于任意强制算子 $\mathbf{L}_*$ 对应的一个 Z-问题，其有效算子 $\mathbf{L}$满足一个算子不等式。稍后在第 6 节中，我们将利用定理 36 和 38 ，推导出具有仿射边界条件的狄利克雷到诺伊曼映射的界。随后，在第 7.1 节中，我们将利用推论 39 证明本文的一项关键结果：表示两个特定且不同的狄利克雷到诺伊曼映射的两个赫尔格洛茨函数之差，也是一个赫尔格洛茨函数（见定理 47）。

5.1 复合材料抽象理论中的变分原理 $\mathbf{s}$

接下来的两个定理广为人知（例如，参见 [101, 97, 99, 103, 13, 134]），其证明可见于例如 [13]。

定理 36 （狄利克雷极小化原理）。 若（$\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathbf{L}$）是一个 Z-问题，且$\mathbf{L}^\dagger = \mathbf{L}$、$\mathbf{L}_{11} \geq 0$, 并且$\mathbf{L}_{11}$ 可逆，则有效算子$\mathbf{L}_*$ 是满足以下最小化原理的唯一自伴算子：

$$(\mathbf{L}_* \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0) = \min_{\mathbf{E} \in \mathcal{E}} (\mathbf{L}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}), \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}), \ \forall \mathbf{E}_0 \in \mathcal{U},$$

并且，对每个$\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$，极小元唯一，且由下式给出

$$\mathbf{E} = -\mathbf{L}_{11}^{-1} \mathbf{L}_{10} \mathbf{E}_0.$$

此外，我们对有效算子有如下上界：

$$\mathbf{L}_* \leq \mathbf{L}_{00} = \boldsymbol{\Gamma}_0 \mathbf{L} \boldsymbol{\Gamma}_0 |_{\mathcal{U}}.$$

定理的一个直接推论 36 是以下单调性结果（在复合材料理论中也称为已知结果，例如参见 [99, 第 13 节。2], [134,推论 4]）。

推论 37. 若$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathbf{L})$和$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathbf{M})$是满足$\mathbf{L}^\dagger=\mathbf{L}$、$\mathbf{M}^\dagger=\mathbf{M}$的 Z-问题，且$\mathbf{L}_{11}$和$\mathbf{M}_{11}$均为半正定且可逆，并且$\mathbf{L}\le\mathbf{M}$，则

$$\mathbf{L}_*\le\mathbf{M}_*.$$

对定理36 的改进是以下定理，它还给出了有效算子的下界。

定理 38 (汤姆孙最小化原理)。 若$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathbf{L})$是满足$\mathbf{L}^\dagger=\mathbf{L}\ge 0$的 Z-问题，且$\mathbf{L}$ 可逆，则$(\mathbf{L}_*)^{-1}$ 是满足该最小化原理的唯一自伴算子：

$$((\mathbf{L}_*)^{-1}\mathbf{J}_0,\mathbf{J}_0)=\min_{\mathbf{J}\in\mathcal{J}}(\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{J}_0+\mathbf{J}),\mathbf{J}_0+\mathbf{J}),\ \forall\mathbf{J}_0\in\mathcal{U},$$

并且，对每个$\mathbf{J}_0\in\mathcal{U}$，极小元唯一，且由下式给出

$$\mathbf{J}=-\mathbf{L}_{22}^{-1}\mathbf{L}_{20}\mathbf{J}_0.$$

此外，有效算子满足以下上界和下界：

$$0\le[(\mathbf{L}^{-1})_{00}]^{-1}]\le\mathbf{L}_*\le\mathbf{L}_{00},\tag{5.64}$$

其中

$$(\mathbf{L}^{-1})_{00}=\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{L}^{-1}\mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{U}}.$$

以下推论 [似乎是新的，至少在复合材料（抽象）理论中是如此] 是本文所需的一项关键结果（例如，参见第 7.1 节中定理的证明）。

推论 39。 若$(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathbf{L})$是一个 Z-问题，且$\mathbf{L}$是强制的，即：

$$\exists c>0,\gamma\in[0,2\pi)\mid\operatorname{Im}[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}v,v)]\ge c(v,v),\ \forall v\in\mathcal{H},$$

则有效算子$\mathbf{L}_*$是强制的，并且

$$0<cI_{\mathcal{U}}\le[\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})]_*\le\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}_*).$$

证明。 假设这些条件成立。首先，考虑 Z问题（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、$\mathfrak{I}$（$e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}$）问题。然后应用定理 36，可得

$$\begin{aligned}([\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)&=\min_{\mathbf{E}\in\mathcal{E}}(\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})\\&=\min_{\mathbf{E}\in\mathcal{E}}\operatorname{Im}[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})],\ \forall\mathbf{E}_0\in\mathcal{U}.\end{aligned}$$

其次，考虑 Z-问题（$\mathcal{H}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$、$e^{\mathrm{i}\gamma}\mathrm{L}$）。根据引理 26.(i) 和引理27，可知（$e^{\mathrm{i}\gamma}\mathrm{L}$）$_*=e^{\mathrm{i}\gamma}\mathrm{L}_*$，并且对于任意 $\mathrm{E}_0\in\mathcal{U}$，存在一个解（$\mathrm{J}_0,\mathrm{E}$，$\mathrm{J}$）$\in\mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$，使其满足在 E_0 处的该 Z-问题，这意味着

$$e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)=((e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)=(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})$$

因此

$$\begin{aligned}(\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}_*)\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)&=\mathrm{Im}[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)]=\mathrm{Im}[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})]\\&\geq\min_{\mathbf{E}\in\mathcal{E}}\mathrm{Im}[e^{\mathrm{i}\gamma}(\mathbf{L}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})]=([\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0),\end{aligned}$$

这证明了 $[\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})]_*\leq\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}_*)$。最后，由于 $0<cI_{\mathcal{H}}\leq\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L}$，根据引理26.(ii)和定理36 可得 $0<cI_{\mathcal{U}}=(cI_{\mathcal{H}})_*\leq[\mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{L})]_*$。证明完毕。 □

5.2 狄利克雷到诺伊曼映射的应用

现在考虑特殊情形下的狄利克雷到诺伊曼映射 $\Lambda_{\mathbf{a}}$：$\mathbf{a}$ $=\mathbf{a}(\mathbf{x})\in M_d(L^\infty(\Omega))$ 一致正定，即

$$\exists c>0\ \mid\ \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{W}\cdot\overline{\mathbf{W}}\geq c||\mathbf{W}||^2_{\mathbb{C}^d},\ \ \forall\mathbf{W}\in\mathbb{C}^d,\ \text{ for a.e. }\mathbf{x}\in\Omega.\tag{5.65}$$

特别地，$\mathbf{a}$ 在（2.9）的意义下是一致正定的（具有相同的 c和 $\gamma=\pi/2$），并且$\mathbf{L_a}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega))$（即，左乘$\mathbf{a}$的算子，参见定义28）是正定的（$\mathbf{L}^\dagger_{\mathbf{a}}=\mathbf{L_a}\geq0$），且可逆 [；特别地，它在（2.8）的意义下是强制的，具有相同的 c和 $\gamma=\pi/2$]。

接下来，由于对$\mathbf{a}$的这些假设，狄利克雷边值问题（3.23）的经典狄利克雷变分原理可表述如下 [24, 式（2.9）], [98, 式（3.1）], [44, 第 240]: 对于每个 $V_0\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，

$$\min_{v\in H^1(\Omega),v|_{\partial\Omega}=V_0}(\mathbf{a}\nabla v,\nabla v)_{\mathcal{H}}=\langle\Lambda_{\mathbf{a}}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\tag{5.66}$$

且左端有唯一极小化元 u，即唯一解 $u\in H^1(\Omega)$，它满足狄利克雷边值问题（3.23）。此外，这也唯一确定了狄利克雷到诺伊曼映射 $\Lambda_{\mathbf{a}}$。我们首先说明，凭借定理 35中给出的狄利克雷到诺伊曼映射的有效算子表示，这个经典变分原理其实就是换了一种形式的定理 36。这种方法遵循复合材料抽象理论中一种有趣且更具一般性的观点，并不局限于狄利克雷到诺伊曼映射。

令 $V_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 为固定值，并由 $\mathbf{E}_0\in\mathcal{U}$ 按 $\mathbf{E}_0=\Pi(V_0)$ 定义。于是可得：

$$\begin{aligned}\langle\Lambda_{\mathbf{a}}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}&=(\mathbf{a}_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}&&(\text{since }\Lambda_{\mathbf{a}}=\Pi^\dagger\mathbf{a}_*\Pi\text{ by Theorem 35}),\\&=\min_{\widetilde{\mathbf{E}}\in\mathcal{E}}(\mathbf{a}(\mathbf{E}_0+\widetilde{\mathbf{E}}),\mathbf{E}_0+\widetilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{H}}&&(\text{using Theorem 36}),\\&=\min_{v\in H^1(\Omega),v|_{\partial\Omega}=V_0}(\mathbf{a}\nabla v,\nabla v)_{\mathcal{H}},&&(\text{using Lemma 33}).\end{aligned}\tag{5.67}$$

~ ~ ~根据定理 36，极小元 $\mathbf{E}$ 属于 $\min_{\sim}(\mathbf{a}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\ \mathbf{E}_0+\mathbf{E})_{\mathcal{H}}$ 是唯一的，且由下式给出$\mathbf{E}\in\mathcal{E}$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10}\mathbf{E}_0 \quad \text{with } \mathbf{E}_0 = \Pi(V_0).$$

因此，利用（4.51），可推知 $\mathbf{E}$ 恰好是唯一解（$\mathbf{J}_0, \mathbf{E}$,$\mathbf{J}$） $\in\mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$中对应于 Z的狄利克雷 $\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，$\mathbf{a}$）边值问题中的场 $\mathbf{E}_0 = \Pi$（V_0） $\in\mathcal{U}$。因此，根据命题 34，可得

$$\nabla u = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E} \ \text{ and } \ \mathbf{J}_0 + \mathbf{J} = \mathbf{a}\nabla u,$$

其中 u 是狄利克雷边值问题（3.23）的唯一解。因此，由于

$$(\mathbf{a}(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}), \mathbf{E}_0+\mathbf{E})_{\mathcal{H}} = (\mathbf{a}\nabla u, \nabla u)_{\mathcal{H}},$$

由此可得 u 是（5.66）左端的一个极小元。此外，该极小元是唯一的，因为若 $\tilde{u}\in H^1(\Omega)$ 是此问题的一个极小元，那么根据引理 33 以及与方程（5.67）第二行相关问题的极小元的唯一性，必有 $\nabla\tilde{u} = \nabla u = \mathbf{E}+\mathbf{E}_0$。因此，由于 Ω 连通，可得 $\tilde{u}-u$ 在 Ω 上为常数，且在 $\partial\Omega$ 上的迹为零，因此 $u=\tilde{u}$ 在 Ω 上成立，进而可知（5.66）左端的极小元是唯一的。至此，便通过复合方法抽象理论证明了经典狄利克雷变分原理。

最后，狄利克雷到诺伊曼映射的有效算子表示（定理 35）还有一项应用：通过应用汤姆孙最小化原理（见定理 38），我们可以得到以下关于该映射上界和下界的命题。

命题 40. 设 $\mathbf{a}:\Omega\to M_d(\mathbb{C})$ 是一个矩阵值函数，满足 $\mathbf{a}\in M_d(L^\infty(\Omega))$一致正定 $[$，其含义见 (5.65)$]$。则狄利克雷到诺伊曼算子 $\underset{\sim}{\Lambda}_{\mathbf{a}}$（定义见命题 19）对任意 $V_0\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 和 $\mathbf{E}_0=\Pi(V_0)\in\mathcal{U}$ 均满足：

$$0 \le (\mathbf{E}_0, [(\mathbf{a}^{-1})_{00}]^{-1}\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}} \le \langle \Lambda_{\mathbf{a}} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le (\mathbf{E}_0, \mathbf{a}_{00}\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}. \tag{5.68}$$

证明。 设 $V_0\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。则 $\Lambda_{\mathbf{a}} = \Pi^\dagger \mathbf{a}_* \Pi$（根据定理 35），这意味着

$$\langle \Lambda_{\mathbf{a}} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (\mathbf{a}_*\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}} \quad \text{with } \mathbf{E}_0 = \Pi(V_0)\in\mathcal{U}.$$

因此，不等式（5.68）可由定理 5.64）中给出的有效算子上界和下界立即推出38。

□

6 带仿射边界条件的狄利克雷到诺伊曼映射

考虑狄利克雷边值问题 (3.23)，其中采用仿射边界条件，即边界值 $V_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 由下式给出[4]

$$V_0 = -\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}, \tag{6.69}$$

[4]这里的“仿射”一词可能会令人困惑，因为边界值 V_0 关于 $\mathbf{x}$是线性的，但在（6.69）中加上任意常数都不会改变狄利克雷到诺伊曼映射（3.26）的输出。因此，我们省略仿射边界条件中的常数部分。

对于固定的 $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d$。我们的目标是刻画这些仿射边界条件下的狄利克雷到诺伊曼算子 $\Lambda_{\mathbf{a}}$。下一节将通过一种新的有效算子表示来实现这一点。之后，当 $\mathbf{a}$也满足一致正定条件 [（见式(5.65)]）时，我们便能根据空间平均化推导出该算子的界。这些界最初由 Nemat-Nasser 和 Hori 提出 [107, 第 2.7 节。3] 这一思路源自 J. Willis 在私人通信中的一条评论（1989年），随后 G. W. Milton [98] 进一步发展了它，得出了更紧的界，并纳入了关于非均质体 Ω 的更多信息；但本文不采用这些信息。本文采用的方法有所不同，它基于复合材料抽象理论，该理论最早由 [103]提出。

6.1 仿射边界条件下的狄利克雷到诺伊曼映射、平均化及一种新的有效算子表示

现在考虑函数 $u(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in \Omega$。它是函数在 Ω 上的调和延拓 V_0见（6.69） [因为 $u \in H^1(\Omega)$，其中 $\Delta u = 0$ 在 Ω 中，且 $u = V_0$ 在 $\partial\Omega$]上。因此，根据提升算子 Π，我们有

$$\Pi(V_0) = \Pi(-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}|_{\partial\Omega}) = \nabla(-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}) = -\mathbf{e}_0 = \mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}. \tag{6.70}$$

为了用这些仿射边界条件刻画狄利克雷到诺伊曼映射，我们需要以下定义和引理（其证明显然，故略去）。

定义 41。将平均值记为

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x},\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H} \quad where\ \ |\Omega| = \int_\Omega 1\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

将常值（即均匀）场的空间记为 $\langle \mathcal{U} \rangle$，即

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle\},$$

并定义平均算子 Γ_{avg}： $\mathcal{H} \to \langle \mathcal{U} \rangle$ 为

$$\Gamma_{avg}\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle \in \langle \mathcal{U} \rangle,\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H}.$$

引理 42. 平均算子 Γ_{avg} 是 $\mathcal{H}$ 在 d 维子空间 $\langle \mathcal{U} \rangle \subseteq \mathcal{U}$上的正交投影。

本节的主要结果是以下两个定理。第一个结果表明，算子 $\mathbf{a}^D$，由式（6.71定义，是算子 $\mathbf{a}_*$ 在 $\mathcal{H}$ 上的压缩，作用于子空间$\langle \mathcal{U} \rangle$ （等价地，$\mathbf{a}_*$ 是 $\mathbf{a}^D$的扩张）。第二个结果表明，$\mathbf{a}^D$ 是一个 Z-问题的有效算子。

定理 43. 狄利克雷到诺伊曼算子 $\Lambda_{\mathbf{a}}$: $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 以及狄利克雷 Z-问题 $(\mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathbf{L}_{\mathbf{a}})$ 的有效算子 $\mathbf{a}_*$ 满足

$$\langle \Lambda_{\mathbf{a}}(-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}|_{\partial\Omega}), \overline{(-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}|_{\partial\Omega})} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (\mathbf{a}_*\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{a}^D\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}},\ \forall \mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d,$$

其中$\mathbf{a}^D$： $\langle \mathcal{U} \rangle \to \langle \mathcal{U} \rangle$ 是有界线性算子

$$\mathbf{a}^D = \Gamma_{avg}\mathbf{a}_*\Gamma_{avg}|_{\langle \mathcal{U} \rangle} \in \mathcal{L}(\langle \mathcal{U} \rangle). \tag{6.71}$$

证明。 首先，由命题 29 和引理 42可知，$\mathbf{a}^D = \Gamma_{avg}\mathbf{a}_*\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle} \in \mathcal{L}(\langle\mathcal{U}\rangle)$，其中 $\Gamma_{avg}^\dagger = \Gamma_{avg} = \Gamma_{avg}^2$。现在，照例，我们将 $\mathbb{C}^d$ 中的元素与其在 $\langle\mathcal{U}\rangle$中对应的常值函数等同起来。因此，若 $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d$，则通过这种等同关系，我们有 $\Gamma_{avg}\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$，所以由等式（6.70）以及恒等式 $\Lambda_{\mathbf{a}} = \Pi^\dagger\mathbf{a}_*\Pi$ （由定理 35），可得

$$\begin{aligned}\langle\Lambda_{\mathbf{a}}(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}), \overline{(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega})}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} &= (\mathbf{a}_*\Pi(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}), \Pi(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}))_{\mathcal{H}}\\ &= (\mathbf{a}_*\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{a}^D\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 44。若$\mathbf{a}^D$ 是由 （*6.71*）定义的算子，且$\mathbf{a}_{*^D}$ 是 Z问题 （$\mathcal{H}^D$，$\mathcal{U}^D$，$\mathcal{E}^D$，$\mathcal{J}^D$，$\mathbf{a}$）的有效算子，其中

$$\mathcal{H}^D = \mathcal{H},\ \mathcal{U}^D = \langle\mathcal{U}\rangle,\ \mathcal{E}^D = \mathcal{E},$$
$$\mathcal{J}^D = \left(\mathcal{U} \overset{\perp}{\ominus} \langle\mathcal{U}\rangle\right) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J} = \{\mathbf{J} \in H_{div}(\Omega) \mid \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \ \textit{and}\ \langle\mathbf{J}\rangle = 0\}$$

（此处 $\mathcal{U} \overset{\perp}{\ominus} \langle\mathcal{U}\rangle$表示 $\mathcal{U}$）中 $\langle\mathcal{U}\rangle$的正交补），则

$$\mathbf{a}^D = \mathbf{a}_{*^D}.$$

证明。首先，由定理21和引理42可得

$$\mathcal{H} = \langle\mathcal{U}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \left[\left(\mathcal{U} \overset{\perp}{\ominus} \langle\mathcal{U}\rangle\right) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}\right].$$

这证明了（$\mathcal{H}^D$，$\mathcal{U}^D$，$\mathcal{E}^D$，$\mathcal{J}^D$，$\mathbf{a}$）是一个 Z-问题，其中 $\mathcal{J}^D = \left(\mathcal{U} \overset{\perp}{\ominus} \langle\mathcal{U}\rangle\right) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{J}$可按以下方式刻画

$$\mathcal{J}^D = \text{kernel}(\nabla\cdot|_{H_{div}(\Omega)}) \cap \text{range}(\Gamma_{avg}) = \{\mathbf{J} \in H_{div}(\Omega) \mid \nabla\cdot\mathbf{J} = 0 \text{ and } \langle\mathbf{J}\rangle = 0\},$$

因为 $\mathcal{U} \oplus \mathcal{J}$ 是散度算子 [的核，见定理 21]中的关系式（4.37）。接下来，由于 $\mathcal{E}^D = \mathcal{E}$，根据命题 29 可知，定理 25 对 Dirichlet Z-问题（$\mathcal{H}$，$\mathcal{U}$，$\mathcal{E}$，$\mathcal{J}$，a）以及 Z-问题（$\mathcal{H}^D$，$\mathcal{U}^D$，$\mathcal{E}^D$，$\mathcal{J}^D$，a）均成立。我们断言 $\mathsf{a}^D = \mathsf{a}_{*^D}$. 令 $\mathsf{E}_0 \in \mathcal{U}^D$。那么，根据定理 25，存在一个 $(\mathsf{J}_0, \mathsf{E}, \mathsf{J}) \in \mathcal{U}^D \times \mathcal{E}^D \times \mathcal{J}^D$，使得

$$\mathbf{J}_0 + \mathbf{J} = \mathbf{a}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}),\ \mathbf{J}_0 = \mathbf{a}_{*^D}\mathbf{E}_0.$$

另一方面，$\mathbf{E} \in \mathcal{E}^D = \mathcal{E}$、$\mathbf{E}_0, \mathbf{J}_0 \in \mathcal{U}$（作为 $\mathcal{U}^D = \langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \mathcal{U}$）以及 $(\mathbf{I} - \Gamma_2)\ \mathbf{J} \in \mathcal{U} \overset{\perp}{\ominus} \langle\mathcal{U}\rangle$，其中 Γ_2 是 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{J}$上的正交投影，因此

$$[\mathbf{J}_0 + (\mathbf{I} - \Gamma_2)\mathbf{J}] + \Gamma_2\mathbf{J} = \mathbf{a}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}),$$

由定理25 可知

$$\mathbf{J}_0 + (\mathbf{I} - \Gamma_2)\mathbf{J} = \mathbf{a}_*(\mathbf{E}_0).$$

由此可知，且

$$\Gamma_{avg}\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0,\ \Gamma_{avg}[\mathbf{J}_0 + (\mathbf{I} - \Gamma_2)\mathbf{J}] = \mathbf{J}_0,$$

我们已经得到

$$\mathbf{a}^D(\mathbf{E}_0) = \Gamma_{avg}\mathbf{a}_*\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle}(\mathbf{E}_0) = \mathbf{J}_0 = \mathbf{a}_{*^D}(\mathbf{E}_0).$$

由于这　　对每个 $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}^D = \langle\mathcal{U}\rangle$，这一点都成立，因此我们已经证明了该结论。这就证明了定理。 □

值得指出的是，这一定理及其证明与复合材料抽象理论中关于有效算子及其相关问题可以进行的某些操作存在类比，例如参见 Z问题，见 [99,第 29 节。1] 和 [103,第 7 章，第 9]。

6.2 根据平均张量 $\langle\mathbf{a}\rangle$ 和 $\langle\mathbf{a}^{-1}\rangle^{-1}$ 得到的 $\mathbf{a}^D$ 的基本界

下一个定理是本节的主要结果。这些不等式是已知的（例如，参见 [69], [98, 式 (3.4) 和 (3.6)]），但我们将在此利用复合材料抽象理论给出一种新的简洁证明；我们认为，这一结果本身也具有重要意义。

定理 45。 若 $\mathbf{a}$ 是一致正定的 *[*，其含义见（*5.65*）*]*则以下算子不等式成立：

$$0 \le \langle\mathbf{a}^{-1}\rangle^{-1} \le \mathbf{a}^D \le \langle\mathbf{a}\rangle, \tag{6.72}$$

其中

$$\langle\mathbf{a}\rangle = \Gamma_{avg}\mathbf{a}\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle},\ \langle\mathbf{a}^{-1}\rangle = \Gamma_{avg}\mathbf{a}^{-1}\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle}. \tag{6.73}$$

此外，对于每个$\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d$,

$$0 \le (\langle\mathbf{a}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}} \le \langle\Lambda_{\mathbf{a}}(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}), \overline{(-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega})}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le (\langle\mathbf{a}\rangle\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}}. \tag{6.74}$$

证明。 首先，显然，为证明此定理，我们只需证明算子不等式（6.72），因为其余不等式可立即由定理 43推出。根据定理 44 ，我们知道 $\mathbf{a}^D = \mathbf{a}_{*^D}$ 是 Z-问题（$\mathcal{H}^D$，$\mathcal{U}^D$，$\mathcal{E}^D$，$\mathcal{J}^D$，$\mathbf{a}$）的有效算子，因此由汤姆孙变分原理（定理 38）将其应用于该 Z-问题，我们得到

$$0 \le (\Gamma_{avg}\mathbf{a}^{-1}\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle})^{-1} \le \mathbf{a}_{*^D} \le \Gamma_{avg}\mathbf{a}\Gamma_{avg}|_{\langle\mathcal{U}\rangle}.$$

定理得证。 □

请注意，上界和下界（6.74）类似于命题5.68中的界（40 ），并且也通过使用汤姆孙变分原理得到，不过此处该原理应用于新的Z问题（$\mathcal{H}^D$，$\mathcal{U}^D$，$\mathcal{E}^D$，$\mathcal{J}^D$，$\mathbf{a}$）。与界（5.68）相比，它们的优点是通过平均化，对材料张量 $\mathbf{a}$的依赖关系表达得更为明确；但其适用性较窄，因为它们仅适用于仿射边界条件。

7 狄利克雷到诺伊曼映射的解析性

本节讨论狄利克雷到诺伊曼映射作为频率 ω的函数时的解析性质。首先，在第7.1节，我们研究其二次型，并证明对于固定的表面势 V_0，它是 ω中的赫尔格洛茨函数。其次，在第 7.2节，我们回顾 [36]如何由斯蒂尔切斯函数构造赫尔格洛茨函数，并在第 7.3 节利用这一方法将该二次型与斯蒂尔切斯函数联系起来。

7.1 与两个狄利克雷到诺伊曼映射之差相关的赫尔格洛茨函数

本节建立了无源器件的狄利克雷到诺伊曼映射的二次型（作为频率的函数）与一类广为人知的解析函数之间的联系：赫尔格洛茨函数。这类函数在科学文献中被广泛用于描述无源系统 [138, 19, 103, 33]。此外，这类函数的数学性质（积分表示 [2, 18, 57], 求和规则 [19, 67, 135, 36], 连分数展开 [95, 96, 123]）与复分析相结合，成为在有限带宽内推导无源系统物理性质定量界的关键工具（例如透镜成像 [87], 散射 [129],隐身 [36], 电磁波的传播速度 [135]）。对于电磁系统，最初曾基于变分方法建立狄利克雷到诺伊曼映射与赫尔格洛茨函数之间的联系 [37]。在此，我们采用基于复合材料抽象理论的另一种视角来建立这一桥梁。这使我们能够将狄利克雷到诺伊曼映射表示为有效算子（见定理35），并利用基于舒尔补技术的变分界来证明更强的结果，例如定理47。该定理比较了隐身斗篷与未隐身装置的狄利克雷到诺伊曼映射的二次型，使我们能够证明一个违反直觉的结果：它们的差仍然是赫尔格洛茨函数。

命题 46. 若隐身装置满足假设 一阶 Sobolev 空间和 H3–H6，则函数$\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 从 $\mathbb{C}^+$ 到 $\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega)\ H^{-1/2}(\partial\Omega))$ 是一个解析算子值函数。此外，对于每个 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，标量函数

$$h_{V_0} : \omega \mapsto \langle \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{7.75}$$

d定义在 $\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]$ 上，是一个在 $[\omega_-, \omega_+$ 上连续的赫尔格洛茨函数 $]$.

证明. 我们的证明分为四个步骤。

步骤 1：预备知识

首先，由 (3.17) 以及假设 H1、H3 可知引理17成立，因此结合假设 H5、H6，根据命题 19，函数 $\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 从 $\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]$到 $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 是良好定义的。其次，这些假设意味着定理 35 的表示公式 (4.61) 对 $\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 在 $\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]$ 上成立，其中具有一个 $= \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot, \omega)$，且有效张量 $\mathsf{a}_* = \big(\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot, \omega)\big)_*$ 由舒尔补公式 (4.62) 和 (4.63) 给出。

步骤2：$\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$的解析性

接下来，我们将证明 $\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 是定义在 $\mathbb{C}^+$上的解析算子值函数，由此可推出标量函数 h_{V_0} 在 $\mathbb{C}^+$上是解析的。为此，我们首先证明，与关于 $\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot, \omega)$ 的左乘相对应的算子 $\mathbf{L}^{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 是一个解析算子值

从 $\mathbb{C}^+$ 到 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$。结合 [75, 定理 3。12]（该定理指出弱解析性与算子范数拓扑下的解析性等价）以及半双线性型的极化恒等式 [131, p. 25], 可知，这等价于证明函数的解析性

$$\omega \mapsto (\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\mathbf{F},\mathbf{F})_{\mathcal{H}} \text{ on } \mathbb{C}^+, \text{ for each } \mathbf{F}\in\mathcal{H}.$$

由于根据被动性假设 H1， $\omega \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}\ \omega)$ 对几乎处处的 $\mathbf{x}\ \in \Omega$ 都是解析的，因此可通过应用 [91] 中给出的积分号下的复微分定理来证明这种解析性（使用假设 H5 作为控制条件，即 [91,定理], 假设中所要求的假设 A3）。由于 $L_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$（我们也将其记为 $\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$，关于这一记号滥用请参见定义 (28)）是解析的，这意味着算子值函数 $\omega \mapsto \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{ij} = \Gamma_i\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\Gamma_j \in \mathcal{L}(\text{值域}(\boldsymbol{\Gamma}_j), \text{值域}(\boldsymbol{\Gamma}_i))$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析的。由于 $\omega \mapsto \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{11} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析的，并且根据引理 17 和引理27，由引理27可知，对于每个 $\omega \in \mathbb{C}^+$， $\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{11}$ 作为 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 的元素都是可逆算子，因此从 ω 到逆算子的映射，即 $\omega \mapsto [\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{11}]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$，在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析的（例如参见 [75,第 7 章、第 1 节，第 365–366] 页）。这证明了舒尔补函数 $\omega \mapsto \left(\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\right)_* \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ [（见 (4.62) 和 (4.63)] ）在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析算子值函数。因此，由于提升算子 Π 及其伴随算子 $\Pi^\dagger$ 是有界且与频率无关的，根据 (4.61) 可知 $\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析的。

步骤 3： h_{V_0} 是一个赫尔格洛茨函数

为了证明函数 h_{V_0} 在 $\mathbb{C}^+$ 上具有半正定虚部，我们利用定理 (35)，将狄利克雷到诺伊曼映射与相应狄利克雷 Z问题的有效张量联系起来。令 $\mathrm{E}_0 = \Pi V_0$。那么，由于 $\mathrm{E}_0 \in \mathcal{U}$，对于固定的 $\omega \in \mathbb{C}^+$，存在一个解 $(\mathrm{J}_0, \mathrm{E}, \mathrm{J}) \in \mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$，满足狄利克雷 Z问题 $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathrm{a})$，其中 $\mathrm{a} = \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$，在 E_0 处，这意味着

$$\begin{aligned}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} &= ([\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\Pi V_0,\Pi V_0)_{\mathcal{H}}\\ &= ([\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\ &= ([\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)](\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

（在上述等式中，我们利用了 $\mathbf{J}_0 = [\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)]_*\mathbf{E}_0, \mathbf{J}_0+\mathbf{J} = \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)(\mathbf{E}_0+\mathbf{E})$，以及 $\mathcal{U}$， $\mathcal{E}$， $\mathcal{J}$彼此正交这一事实）。由此可得

$$\mathrm{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = (\mathfrak{I}[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)](\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

其中，最后一个不等式源于隐身装置满足被动性假设 H1；该假设意味着，对于几乎处处的 $\mathbf{x}\ \in \Omega$， $\omega \mapsto \omega\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}\ \omega)$ 是一个矩阵值Herglotz函数，因此$\mathfrak{I}[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}\ \omega)] \geq 0$ 对于 $\omega \in \mathbb{C}^+$成立。这证明了 h_{V_0} 是一个标量值Herglotz函数。

步骤 4： h_{V_0} 在 $[\omega_-,\omega_+]$上的连续性

最后，我们证明映射的连续性

$$\omega \mapsto \Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0 = \Pi^\dagger(\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega))_*\Pi V_0$$

在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上的 $H^{-1/2}$-范数下。这种连续性尤其意味着 h_{V_0} 在$[\omega_-,\omega_+]$上的连续性。由于 Π 及其伴随算子 $\Pi^\dagger$ 都是与频率无关的有界算子

ω，只需证明映射 $\omega \mapsto (\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega))_*\mathbf{E}_0$ 在任意 $\mathcal{H}$-范数下的连续性，其中$\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$ 取自 $[\omega_-, \omega_+]$。为此，使用推论 4.54中的公式（ 30 [，该公式由引理 17 以及张量 $\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)$], 上的强制性假设H6成立。也就是说，对于任意固定的$\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$:

$$\big(\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\big)_*\mathbf{E}_0 = \big[[\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\big]_{00}^{-1}\mathbf{E}_0, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+], \tag{7.76}$$

[其中，$\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)$ 对应于 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$] 中的算子 $\mathbf{L}^{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$。令 $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个序列 o f $\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]$ 其趋于 $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$。首先，元素序列 $[\omega_n\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega_n)_{ij}]_{i,\ j=0,\ 1}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E})$ 是有界的，因为根据强制性假设H6，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall \omega_n \in B(\omega,\delta) \cap (\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]),\ \|[\omega_n\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{E})} \leq c_2(\omega)^{-1}, \tag{7.77}$$

其中 $c_2(\omega)$ ~ $\perp$ 是 H6 中出现的强制性常数。此外，对于每个 $\mathbf{E} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{E}$,

$$\|\big([\boldsymbol{\omega_n\varepsilon}(\cdot,\ \omega_n)^{ij}]_{i,\ j=0,\ 1} - [\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)^{ij}]_{i,\ j=0,\ 1}\big)\ \tilde{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{H}} = \|[\omega_n\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega_n) - \omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)]\ \tilde{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{7.78}$$

当 $n \to +\infty$，其中极限是通过勒贝格控制收敛定理得到的（该定理的应用由假设H4和H5保证）。因此，结合（7.77）和（7.78），再结合引理 67，可得以下强收敛：对于每个~ $\perp$ $\mathbf{E} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{E}$,

$$\|\big([\omega_n\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1} - [\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\big)\,\tilde{\mathbf{E}}\|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ as } n \to +\infty.$$

因此，对于任意$\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$，有:

$$\|\big(\big[[\omega_n\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\big]_{00} - [\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}]_{00}\big)\,\mathbf{E}_0\|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ as } n \to +\infty. \tag{7.79}$$

然后，由于 $\big(\omega_n\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega_n)\big)_*$ 也由舒尔补公式（4.62）和（4.63）给出，因此，结合（7.76）以及假设H5和H6，并利用正交投影 Γ_j，对于 $j = 0$、1、2 的范数均为 1]，存在 $\delta > 0$，使得对所有$\omega_n \in B(\omega,\ \delta) \cap (\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+])$:

$$\|\big[[\omega_n\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\big]_{00}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = \|\big(\omega_n\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)\big)_*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq c_1(\omega) + c_1(\omega)^2 c_2(\omega)^{-1}, \tag{7.80}$$

其中 $c_1(\omega)$ 是假设 H5 中的常数。结合引理67 以及 (7.79) 和 (7.80)，可得对于任意 $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$:

$$\|\big(\big[[\omega_n\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega_n)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}\big]_{00}^{-1} - [\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)_{ij}]_{i,j=0,1}^{-1}]_{00}^{-1}\big)\,\mathbf{E}_0\|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ as } n \to +\infty.$$

由 (7.76) 可知，对于任意 $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{U}$，$\omega \mapsto (\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega))_*\mathbf{E}_0$ 关于$\mathcal{H}$-范数在 $[\omega_-, \omega_+]$ 上连续。

□

现在，我们引入一个额外的建模假设；并非所有结果都必须满足这一假设。

H7 互易原理：隐身斗篷由互易介质构成，即其介电常数满足:

$$\text{for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O},\ \forall \omega \in [\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+,\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)^\top = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega).$$

现在，我们可以给出本节的主要结果。为此，我们引入如下定义的矩阵值介电常数 $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)$:

$$\text{for a.e. } \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ob}}(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \text{for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O},\ \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{I}. \tag{7.81}$$

在下一个定理中，我们指出，假设 H2 仅用于证明结论 2。

定理47。 假设隐身装置满足假设 H1–H6 ，并对每个固定的 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，定义 $[\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+$ 上的标量函数如下:

$$h_{\text{dif},V_0} : \omega \mapsto \langle [\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} - \Lambda_{\omega\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \tag{7.82}$$

那么它具有以下性质:

1. h_{dif,V_0} 是一个赫尔格洛茨函数，且在 $[\omega_-, \omega_+]$ 上连续。
2. 如果隐身装置由互易材料制成，即假设H7 成立，那么

$$h_{\text{dif},V_0}(-\overline{\omega}) = -\overline{h_{\text{dif},V_0}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^+. \tag{7.83}$$

如果隐身装置含有某种非互易材料，即假设 H7 不成立，那么 (7.83) 在势函数 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 为实值函数时成立。

3. $\forall \omega \in [\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+$,

$$\frac{h_{\text{dif},V_0}(\omega)}{\omega} = \langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} - \Lambda_{\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = F_{V_0}(\omega). \tag{7.84}$$

4. $h_{\text{dif},\ V_0}$ 在正虚轴上满足以下非负极限:

$$F_{V_0}(\mathrm{i}y) = \frac{h_{\text{dif},V_0}(\mathrm{i}y)}{\mathrm{i}y} \to F_{V_0,\infty} := \langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)} - \Lambda_{\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \geq 0 \tag{7.85}$$

as $y \to +\infty$，其中矩阵值介电常数函数 $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)$ 定义于 (7.81) .

证明。 我们的证明分为四个步骤。

步骤 1：断言 1 的证明

首先，我们指出 $h_{\text{dif},\ V_0}$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上解析且在 $[\omega_-, \omega_+]$ 连续，因为它是两个函数之差，即 h_{V_0} [由 (7.75)]定义，以及

$$h_{\text{vac},V_0} : \omega \mapsto \langle \Lambda_{\omega\varepsilon_0} V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Omega))} \quad \text{defined on } [\omega_-, \omega_+] \cup \mathbb{C}^+,$$

根据命题 46，它们具有相同的正则性。注意，在命题 46中，我们证明了与包含障碍物的隐身装置的介电常数张量 $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$ 相关的函数 h_{V_0} 具有这种正则性。不过，利用同一证明并注意到，将 $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$ 替换为真空的介电常数张量 $\varepsilon_0\mathbf{I}$后，假设 H1-H6 仍然成立，很容易验证，当 Ω 充满真空时，函数 h_{vac,V_0} 也满足这一结论。

这一步的要点是证明，两个赫尔格洛茨函数h_{V_0}与h_{vac,V_0}之差仍然是一个赫尔格洛茨函数（这一点并不显然）。证明所依据的关键工具是与复合材料抽象理论相关的变分原理（见第5节）。令 $\omega\in\mathbb{C}^+$。于是我们有

$$\operatorname{Im} h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)=\operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}-\operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\varepsilon_0}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}. \tag{7.86}$$

定义$\mathbf{E}_0=\Pi V_0\in\mathcal{U}$并使用 DtN 算子的表示（4.61），即$\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}=\Pi^\dagger[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\ \omega)]_*\Pi$和$\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0(\omega,\cdot)}=\Pi^\dagger[\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0(\omega,\ \cdot)]_*\Pi$，可得等式

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}&=(\mathfrak{I}\{[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\}\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}},\\ \operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}&=(\mathfrak{I}\{[\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0]_*\}\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

应用推论 39，再结合引理 17 和推论 37，然后使用推论 30(ii)，得到以下一系列不等式：

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}&=(\mathfrak{I}\{[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\}\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\ &\geq(\{\mathfrak{I}[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]\}_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\ &\geq([(\operatorname{Im}\omega)\boldsymbol{\varepsilon}_0]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\ &=(\mathfrak{I}\{[\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0]_*\}\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\ &=\operatorname{Im}\langle\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

a因此，结合（7.86），有$\operatorname{Im}h_{\mathrm{dif},\ V_0}(\omega)\geq0$。因此，$h_{\mathrm{dif},\ V_0}$是一个赫尔格洛茨函数.

步骤2：断言2的证明

设 $\omega\in\mathbb{C}^+$。则有$-\omega\in\mathbb{C}^+$并且

$$h_{\mathrm{dif},V_0}(-\overline{\omega})=h_{V_0}(-\overline{\omega})-h_{\mathrm{vac},V_0}(-\overline{\omega}). \tag{7.87}$$

首先，利用狄利克雷到诺伊曼映射的表示（4.61）以及以下事实：$\mathbf{E}_0=\Pi V_0$, $(-\omega\varepsilon_0)_*=-\omega\overline{\varepsilon_0}$, $(\omega\varepsilon_0)_*=\omega\varepsilon_0$ [根据推论 30(ii)]，代入上述表达式可得

$$\begin{aligned}h_{\mathrm{vac},V_0}(-\overline{\omega})&=\big((-\overline{\omega}\varepsilon_0)_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}=-\big(\overline{\omega}\varepsilon_0\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}=-\overline{\big(\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}}\\ &=-\overline{\big((\omega\,\varepsilon_0)_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}}=-\overline{h_{\mathrm{vac},V_0}(\omega)}.\end{aligned} \tag{7.88}$$

到目前为止，我们尚未使用假设 H7。接下来需要证明 $h_{V_0}(-\omega)=-h_{V_0}(\omega)$，~~这需要用到~~互易原理假设 H7，除非 V_0 是实值函数。根据实性原理 H2，可得

$$\begin{aligned}h_{V_0}(-\overline{\omega})&=\langle\Lambda_{-\overline{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,-\overline{\omega})}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}=\langle\Lambda_{-\overline{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}\\ &=-\langle\Lambda_{\overline{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}}V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式源于以下事实：$\Lambda_{-\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}=-\Lambda_{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)^\circ}$~~我们将~~~~$w$~~~~(~~分别将 u）记为命题中 $H^1(\Omega)$ 上狄利克雷问题（3.23）的唯一解（参见

满足**某个** $=\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$ [分别为 **某个** $=\omega\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$] 以及 $f=V_0$（分别为 $f=V_0$）。利用格林公式（2.6），可得

$$h_{V_0}(-\overline{\omega})=-\int_\Omega \overline{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}\nabla u\cdot\overline{\nabla w}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

情形 1：若满足互易性假设 H7，则由（3.17）可得 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)^\top$ 对几乎处处的$\mathbf{x}\in\Omega$。由此可得

$$\begin{aligned}h_{V_0}(-\overline{\omega}) &= -\int_\Omega \overline{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}\,\overline{\nabla w}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\mathbf{x}=-\overline{\int_\Omega \omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)\,\nabla w\cdot\overline{\nabla u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}} \\ &= -\overline{\langle\Lambda_{\omega\,\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}V_0,\overline{V_0}\rangle}_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}=-\overline{h_{V_0}(\omega)}.\end{aligned}\tag{7.89}$$

情形 2：若互易性假设 H7 不成立，但 V_0 是实值函数，则由于 $V_0=\overline{V_0}$ 的 H^1-解的唯一性，问题（3.23）给出 $u=w$，因此无需利用 7.89）中的第一个等式仍然成立，其中 $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x},\omega)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)^\top$ 对几乎处处的$\mathbf{x}\in\Omega$。~~由此我~~我们得出 $h_{V_0}(-\omega)=-h_{V_0}(\omega)$。

将（7.87）和（7.88）与这两种情形下的结论结合起来，即得所需等式（7.83）。

步骤 3：断言 3 的证明

设 $\omega\in[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+$。我们指出，根据假设，$0\notin[\omega_-,\omega_+]$。因此，利用备注16 和命题 19，可以定义狄利克雷到诺伊曼映射 $\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$。此外，利用推论30的 **(i)** 和 **(ii)**，可得 $[\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*=\omega[\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*$ 以及 $(\omega\varepsilon_0)_*=\omega\,\varepsilon_0$。因此，根据狄利克雷到诺伊曼算子的表示式（4.61），可得关系式 $\Lambda_{\omega\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}=\omega\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}$ 和$\Lambda_{\omega\varepsilon_0}=\omega\Lambda_{\varepsilon_0}$，由此推出

$$\forall\omega\in[\omega_-,\omega_+]\cup\mathbb{C}^+,\quad \frac{h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)}{\omega}=\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}-\Lambda_{\varepsilon_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}=F_{V_0}(\omega).\tag{7.90}$$

步骤 4：断言 4 的证明

令 $\omega=\mathrm{i}\,y$ 满足 $y>0$。首先，对于 7.90)，有恒等式 $\omega=\mathrm{i}\,y$。其次，由于假设 3.16) 和 3.17) 在 $\mathbb{C}^+$ 上成立，因此结合假设 H3 以及 $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)$ 在 7.81) 中的定义，我们得出沿正虚轴成立的以下极限：

$$\text{for a.e. }\mathbf{x}\in\Omega,\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathrm{i}y)\to\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})\ \text{ as } y\to\infty.\tag{7.91}$$

现在，可以采用与命题 46 的步骤 4 类似的论证，只需将 $\varepsilon(\cdot,\omega)$ 替换为 $\omega\varepsilon(\cdot,\omega)$。更具体地说，用 7.91) 替换假设 H4，将极限 $\omega_n\to\omega$ 替换为 $\omega_n=\mathrm{i}y_n\to\infty$，并在 ∞ 的邻域内使用假设 H5，以及 $\varepsilon(\cdot,\omega)$ 的强制性，其强制性常数为 ε_0 [，该常数可由正虚轴上的表示式 3.20) 轻易推出]，，从而得到

$$F_{V_0}(\mathrm{i}y)=\frac{h_{\mathrm{dif},V_0}(\mathrm{i}y)}{\mathrm{i}y}\to\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)}-\Lambda_{\varepsilon_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}=:F_{V_0,\infty},\ \text{as}\ \ y\to+\infty.$$

仍需证明上述极限非负。引入 $\mathbf{E}_0=\Pi V_0$ 的定义，并利用狄利克雷到诺伊曼算子的表示（4.61），得到：

$$\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)}-\Lambda_{\varepsilon_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}=\big([\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}-\big((\varepsilon_0)_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}\geq 0.$$

最后一个不等式是推论 37的单调性结果的推论，因为由（3.17）可知，对于几乎处处的 $\mathbf{x} \in \Omega$， $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_\infty^\dagger(\mathbf{x})$ 以及 $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_0 \mathbf{I}$，因此在左乘算子的意义下，有 $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot) \geq \varepsilon_0 \mathbf{I}$。

□

推论48. 如果 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是仿射的，即 $V_0 = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}|_{\partial\Omega}$，其中 $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d$ 为常向量，则

$$F_{V_0,\infty} = \langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)} - \Lambda_{\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \geq \Big(\big[\langle \boldsymbol{\varepsilon}_\infty^{-1}(\cdot) \rangle^{-1} - \varepsilon_0 \big] \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \Big)_{\mathcal{H}}, \tag{7.92}$$

其中

$$\Big(\big[\langle \boldsymbol{\varepsilon}_\infty^{-1}(\cdot) \rangle^{-1} - \varepsilon_0 \big] \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \Big)_{\mathcal{H}} = \Big(|\Omega| \Big[\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})^{-1} \mathrm{d}\mathbf{x} \Big]^{-1} - \varepsilon_0 \Big) |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2 \tag{7.93}$$

$$\geq |\mathcal{O}| \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_0 \, |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2}{|\mathcal{O}| \, \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + |\Omega \setminus \mathcal{O}|}. \tag{7.94}$$

证明。狄利克雷到诺伊曼算子的表示（4.61）（$\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = \Pi^\dagger (\varepsilon_0)_* \Pi = \Pi^\dagger \varepsilon_0 \Pi$（其中 $(\varepsilon_0)_* = \varepsilon_0$ 由推论30）以及关系式（6.70）可推出

$$\langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)} - \Lambda_{\varepsilon_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \langle \Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)} (-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}), \overline{(-\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x})} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - (\varepsilon_0 \, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)_{\mathcal{H}}.$$

现在，由于 $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\cdot)$ 是一个强制的自伴左乘算子]，我们将定理 45 [的不等式（6.74）的下界应用于上述表达式，由此得到不等式（7.92）。（7.93）中的等式直接由定义（6.73）得出，该定义表明，对于常值场 $\mathbf{e}_0 \in \langle \mathcal{U} \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_\infty^{-1}(\cdot) \rangle^{-1} \mathbf{e}_0 = |\Omega| \Big[\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})^{-1} \mathrm{d}\mathbf{x} \Big]^{-1} \mathbf{e}_0. \tag{7.95}$$

然后，结合定义（7.81）和（3.17）可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})^{-1} \leq \varepsilon^{-1} \, \mathbf{I} \ \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ and } \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})^{-1} = \varepsilon_0^{-1} \mathbf{I} \ \text{ for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{O}$$

这意味着

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_\infty(\mathbf{x})^{-1} \mathrm{d}\mathbf{x} \leq |\mathcal{O}| \varepsilon^{-1} \mathbf{I} + |\Omega \setminus \mathcal{O}| \, \varepsilon_0^{-1} \mathbf{I}. \tag{7.96}$$

最后，结合等式（7.93）、（7.95）和（7.96），以及以下事实：若 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 是正的可逆算子，且 $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$，则 $\mathbb{B}^{-1} \leq \mathbb{A}^{-1}$ 给出

$$\Big(\big[\langle \boldsymbol{\varepsilon}_\infty^{-1}(\cdot) \rangle^{-1} - \varepsilon_0 \big] \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \Big)_{\mathcal{H}} \geq \Big(\frac{|\Omega|}{|\mathcal{O}| \varepsilon^{-1} + |\Omega \setminus \mathcal{O}| \, \varepsilon_0^{-1}} - \varepsilon_0 \Big) |\Omega| \, \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2. \tag{7.97}$$

最后，利用 $|\mathcal{O}| + |\Omega \setminus \mathcal{O}| = |\Omega|$，可以将（7.97）右端改写为（7.94）右端，从而完成证明。

□

7.2 斯蒂尔切斯函数与赫尔格洛茨函数之间的联系

本节回顾 [36] 中采用的一种策略：由斯蒂尔切斯函数构造一个赫尔格洛茨函数，使其继承比“标准”赫尔格洛茨函数更多的性质。这些性质对于推导最优 [36]界至关重要。

我们定义复平方根如下：

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}\, e^{\mathrm{i}\arg z/2} \quad \text{if} \quad \arg z \in (0, 2\pi) \tag{7.98}$$

并通过取其来自上半平面的极限，将其延拓到支割线 $\mathbb{R}^+$ 上。换言之，非负实数 x 的平方根定义为 $\sqrt{x} = |x|^{\frac{1}{2}}$。下面的命题给出了构造斯蒂尔切斯函数的充分条件。该命题的灵感来自文献 [36]中的引理 8 和定理 9。我们在此重述其证明，供读者参考；另见 [36]中的推论 10。

命题 49。 若 S 是一个斯蒂尔切斯函数，且当 $x \to +\infty$ 在 $\mathbb{R}^{+,*}$上时， $S(x) \to S_\infty$，则由下式定义的 H

$$H(z) := z\, S(-z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \tag{7.99}$$

是一个在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ 上解析的赫尔格洛茨函数，并且在 $\mathbb{R}^{-,*} := (-\infty,0)$上非正（当 $S_\infty > 0$ 时甚至为负）。此外， H 满足以下施瓦茨反射原理：

$$\overline{H(\overline{z})} = H(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, \tag{7.100}$$

以及在由定理(2.10)给出的 H 的相关表示中5，正则正博雷尔测度m 的支撑包含于 $\mathbb{R}^+$，且系数 $\alpha = S_\infty$。

证明。我们在此给出主要思路，更多细节请参见 [36] 的推论 10 的证明。 H 定义良好、在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 上解析且在 $\mathbb{R}^{-,*}$ 上非正，这一事实直接源于斯蒂尔切斯函数 S 的性质及定义 10。若 $S_\infty > 0$，则 $H(z) = z\, S(-z)$ 在 $\mathbb{R}^{-,*}$ 上为负，这一事实直接源于表示式 (2.15)；该表示式意味着，当系数为 $\alpha_S = S_\infty > 0$ 时， S 在 $\mathbb{R}^{+,*}$ 上为正。此外，利用 S 的斯蒂尔切斯表示 (2.15)，容易验证对于$z \in \mathbb{C}^+$，$\operatorname{Im} H(z) \geq 0$。因此， H 是赫尔格洛茨函数。

斯蒂尔切斯函数 S 满足施瓦茨反射原理（2.14），即 S（z） $= S$（z）对所有 $z \in \overline{\mathbb{C}^+ \setminus \mathbb{R}^-}$均成立。因此，有

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, \quad \overline{H(\overline{z})} = z\, \overline{S(\overline{-z})} = z\, S(-z) = H(z).$$

由 S的表示式（2.15），利用控制收敛定理还可证明 $\alpha_S = S_\infty = \lim_{y\to\infty} S(-\mathrm{i}\, y)$，从而由（2.11）和（7.99）得到 $\alpha = S_\infty$。最后，利用（2.11）和（2.12），以及 H 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 上是解析的且在 $\mathbb{R}^-$上取实值这一事实，$,*$（通过控制收敛定理）推出 $\mathrm{m}([a, b]) = 0$ 对任意 $a < b < 0$ 均成立，因此 m 的支撑包含于 $\mathbb{R}^+$中。 □

7.3 与狄利克雷到诺伊曼映射相关的斯蒂尔切斯函数的构造

为了推导被动隐身装置的狄利克雷到诺伊曼映射关于频率的解析界，我们沿用 [36]中提出的方法。从这一视角出发，首先需要构造一个斯蒂尔切斯函数 S_{V_0}，使用函数 F_{V_0} 来衡量我们装置的隐身效应质量，随后我们将得到一个赫尔格洛茨函数 H_{V_0}，它具有一些有用性质，可用于下一节中推导界。

引理50。 假设该隐身装置满足假设 H1–H6 和 H7。那么，对于任意 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，由 $\forall z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)\cup[-\omega_+^2,-\omega_-^2]$ 定义的函数 S_{V_0} 为

$$S_{V_0}(z) := F_{V_0}(\sqrt{-z}) = \langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\sqrt{-z})} - \Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}]V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{7.101}$$

是一个满足以下条件的斯蒂尔切斯函数：极限 $\lim_{x\to+\infty} S_{V_0}(x) = F_{V_0,\,\infty} \geq 0$ [其中$F_{V_0,\,\infty}$ 定义于(7.85)]。此外，如果 $F_{V_0,\,\infty} > 0$ 则 S_{V_0} 在 $\mathbb{R}^+$上为正*。进一步地，S_{V_0} 在$(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)\cup[-\omega_+^2,-\omega_-^2]$上连续。最后，如果互易性假设 H7 不满足，则只要 V_0 是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$中的实值函数，所有这些性质仍然成立。

证明。 该证明基于关系式（7.84），该关系式联系了函数 F_{V_0} 与赫尔格洛茨函数 $h_{\mathrm{dif},\,V_0}$ 后者在定理47中引入。

设 $\omega \in \mathbb{C}^+\cup[\omega_-,\omega_+]$，则根据恒等式（7.84），有 $F_{V_0}(\omega) = h_{\mathrm{dif},\,V_0}(\omega)/\omega$。因此，根据定理（47）的断言1，$F_{V_0}$ 在 $\mathbb{C}^+$ 上是解析的，并且在 $[\omega_-,\omega_+]$上连续。

为了证明 S_{V_0} 是一个斯蒂尔切斯函数，我们证明 F_{V_0}的积分表示。本部分证明与 [33] 中定理 4.5 的证明类似，该定理给出了无源电磁线性系统中介电常数关于频率的表示。利用 $h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)$ 是满足“对称关系”（7.83）和极限行为（7.85）的赫尔格洛茨函数这一事实，根据定理 5 和推论 7 可知，它具有如下表示：

$$h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega) = F_{V_0,\infty}\,\omega + \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\xi-\omega} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right)\mathrm{d}m_{V_0}(\xi), \quad \forall\omega\in\mathbb{C}^+, \tag{7.102}$$

这里我们利用“对称关系”$h_{\mathrm{dif},V_0}(-\omega) = -h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)$ 蕴含h_{dif,V_0} 在 $\mathrm{i}\mathbb{R}^+$,* 上为纯虚数这一点，从而得到 $\mathrm{Re}\,h_{\mathrm{dif},V_0}(\mathrm{i}) = 0$。此外，我们指出，这个“对称关系”蕴含 $\mathrm{Im}\,h_{\mathrm{dif},V_0}(-\omega) = \mathrm{Im}\,h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)$。因此，结合（2.11）和（2.12）可知，根据定理 5 与 h_{dif,V_0} 相关联的正则正博雷尔测度是“偶”的，即对于任意博雷尔集 B，均有 $m_{V_0}(B) = m_{V_0}(-B)$。于是由（7.102）可得

$$F_{V_0}(\omega) = \frac{h_{\mathrm{dif},V_0}(\omega)}{\omega} = F_{V_0,\infty} + \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\xi-\omega} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right)\mathrm{d}m_{V_0}(\xi) \quad \forall\omega\in\mathbb{C}^+. \tag{7.103}$$

由于“对称关系”（7.83）表明，在 $F_{V_0}(\omega) = F_{V_0}(-\omega)$ 上成立 $\mathbb{C}^+$,因此可以利用$F_{V_0}(\omega) = 1/2[F_{V_0}(\omega) + F_{V_0}(-\omega)]$ 以及7.103）中的公式，在 ω 和 $-\omega \in \mathbb{C}^+$ 处得到

$$F_{V_0}(\omega) = F_{V_0,\infty} - \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}m_{V_0}(\xi)}{\omega^2-\xi^2}, \quad \forall\omega\in\mathbb{C}^+. \tag{7.104}$$

因此，由上述公式可得，对所有满足 $\omega \in \mathbb{C}^+ \cap \{u\in\mathbb{C} \mid \pm\mathrm{Re}(u) > 0\}$ 的情形：

$$\pm\,\mathrm{Im}\,F_{V_0}(\omega) \geq 0 \quad \text{and} \quad \forall y>0,\ F_{V_0}(\mathrm{i}y) = F_{V_0,\infty} + \int_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}m_{V_0}(\xi)}{y^2+\xi^2} \geq F_{V_0,\infty} \geq 0 \tag{7.105}$$

由于 m_{V_0} 是正测度，且 $F_{V_0,\,\infty} \geq 0$ 根据（7.81）。

根据复平方根的定义（7.98），其支割线位于 $\mathbb{R}^+$，可知 $z\mapsto\omega = \sqrt{-z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,\,0]$ 上解析，并将以下各项映射为：$\mathbb{C}\setminus(-\infty,\,0]$ 映射为$\mathbb{C}^+$，而 $\mathbb{C}^\pm$ 映射为

$\mathbb{C}^+ \cap \{\mp \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$。因此，由复合可推得，$S_{V_0}$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$上定义良好且解析。此外，根据（7.105），当 $\omega \in \mathbb{C}^+ \cap \{\mathrm{Re}(u) \leq 0\}$时，$\mathrm{Im}\, F_{V_0}(\omega) \leq 0$；因此，由复合可得，当 $z \in \mathbb{C}^+$时，$\mathrm{Im}\, S_{V_0}(z) \leq 0$。另外，若 $y > 0$，则根据（7.105），$S_{V_0}(y) = F_{V_0}(\mathrm{i}\, y^{1/2}) \geq 0$。因此，根据定义10，$S_{V_0}$ 是斯蒂尔切斯函数。此外，若$F_{V_0,\infty} > 0$，则（根据（7.105））$S_{V_0} > 0$ 在 $\mathbb{R}^+$,$_*$ 上。

此外，由（7.85），在 $\mathbb{R}^+$, $_*$上有：$S_{V_0}(y) = F_{V_0}(\mathrm{i}\, y^{1/2}) \to F_{V_0,\infty} \geq 0$ 当 $y \to +\infty$ 时。接着，根据复平方根的定义，$z \mapsto \omega = \sqrt{-z}$ 连续映射 $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) \cup [-\omega_+^2, -\omega_-^2]$到 $\mathbb{C}^+ \cup [\omega_-, \omega_+]$，利用定理 47 的断言 1 和 3，可得通过复合，S_{V_0} 在 $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) \cup [-\omega_+^2, -\omega_-^2]$上连续。

最后，利用定理 47，若 H7 不成立，则我们的证明不变，只需将 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 视为实值函数，因为此时“对称关系”（7.83）同样成立。 □

结合前面的引理 50 和推论49，可直接得到以下定理。该结果确立了一个与狄利克雷到诺伊曼映射相关的赫尔格洛茨函数的存在性。该函数一方面包含了我们的物理无源系统的所有性质；另一方面，它与函数F_{V_0}直接相关，该函数在（3.27）中引入，其模可以定量衡量隐身的质量。此外，这些函数的性质使我们能够将 [36] 中针对无源线性系统一般情形所建立的界应用于此处。

定理 51. 假设该隐身装置满足假设 H1–H6 和H7。那么，对于任意 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，由下式对所有 $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+) \cup [\omega_-^2, \omega_+^2]$ 定义的函数 H_{V_0}

$$H_{V_0}(z) = zS_{V_0}(-z) = zF_{V_0}(\sqrt{z}) = z\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\sqrt{z})} - \Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}]V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{7.106}$$

是一个赫尔格洛茨函数，在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 上解析且在 $[\omega_-^2, \omega_+^2]$ 上连续，并且在 ,$_*$ 上非正（若非负系数 $F_{V_0,\infty}$（定义见 (7.85) *is positive) on* $\mathbb{R}^-$,$_*$. *Moreover,* H_{V_0} *satisfies the following Schwarz reflection principle:*

$$\overline{H_{V_0}(\overline{z})} = H_{V_0}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+, \tag{7.107}$$

并且，在定理 5给出的 H_{V_0} 的相关表示 (2.10) 中，正则正博雷尔测度 m 的支撑包含于 $\mathbb{R}^+$，且系数 $\alpha = F_{V_0,\infty}$。此外，如果不满足互易性假设 H7，只要 V_0 是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$中的实值函数，上述所有性质仍然成立。

8 被动隐身在频率区间上的定量界

8.1 完美隐身不可能实现

与 [36] 远场隐身问题类似，本节将证明，按照定义20，完美隐身不可能在任何正的有限频率区间上实现。

定理52。 假设该隐身装置满足H1–H6 假设，则该障碍物在该频率区间内并未实现完美隐身。

证明。反设完美隐身成立，并令 V_0 为 $H^{1/2}(\partial\Omega)$中的任意仿射边界条件，其由 $V_0(\mathbf{x}) = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}$在 $\partial\Omega$上定义，其中$\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$为常向量。需要指出的是，如果H7不成立（即隐身斗篷含有非互易材料），我们进一步假设 V_0 为实值，因而$\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^d$。于是，完美隐身意味着，对于带宽 $[\omega_-, \omega_+]$上的所有 ω ，都有$F_{V_0}(\omega) = 0$ 。因此，由定理 51， 对于所有$z \in [\omega_-^2, \omega_+^2]$ ，都有 $H_{V_0}(z) = 0$ ；再利用施瓦茨反射原理 [（见（7.107））]，由（7.106）定义的 H_{V_0} 在（$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$）$\cup$（$\omega_-^2$， ω_+^2）上解析，并在（ω_-^2， ω_+^2）上为零，这意味着它在（$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$）$\cup$（$\omega_-^2$， ω_+^2）上恒等于零。因此，由于 H_{V_0} 是零赫尔格洛茨函数，其首项系数 α 为零。然而， H_{V_0} 的首项系数为F_{V_0}，∞ （见定理 51），根据推论48该系数为正。这就产生了矛盾，因此完美隐身不可能实现。

□

如前所述，这一结果排除了完美隐身，但并未排除近似隐身，因为它基于解析延拓论证，而解析延拓具有（指数级）不稳定性。粗略地说，这意味着：如果在解析函数的解析域中取两个互不相交的开集，那么该函数在其中一个开集上可以任意小，而在另一个开集上却可能极大 [64, 61]。因此，若要对正频率区间内的被动隐身施加基本极限，确实需要定量界 $[\omega_-, \omega_+]$。以下几个小节将围绕这一目标展开。

8.2 求和规则方法与一般界

在本小节中，我们回顾基于 [36] 中求和规则定理 [19] 推导出的、适用于被动线性系统的赫尔格洛茨函数一般界。

定理 53。 假设 $h\colon\ \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ 是一个赫尔格洛茨函数，并且沿正虚轴具有以下渐近展开（即 $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^+,\ *$）：

$$h(z) = a_{-1}\, z^{-1} + o(z^{-1}) \quad as\ |z| \to 0,$$

$$and \quad h(z) = b_{-1}\, z^{-1} + o(z^{-1}) \quad as\ |z| \to +\infty,$$

与 a_{-1} 和 $b_{-1} \in \mathbb{R}$。于是有如下恒等式

$$\lim_{\eta \to 0^+} \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\eta < |x| < \eta^{-1}} \operatorname{Im} h(x + \mathrm{i}y)\, \mathrm{d}x = a_{-1} - b_{-1}. \tag{8.108}$$

我们注意到，上述求和规则定理无法直接应用于 H_{V_0} （定理 51 中定义的）与我们的物理系统相关联的赫尔格洛茨函数。事实上，在正虚轴 $\mathrm{i}\mathbb{R}^{+,*}$ 上，该函数不会衰减至 0，而是在高频处线性发散。因此，我们将把该定理应用于其他赫尔格洛茨函数，这些函数由 H_{V_0} [见（8.110）] 与适当的赫尔格洛茨函数复合得到 h_μ 这些赫尔格洛茨函数与博雷尔概率测度相关联 μ [见（8.109）]。

在 [36] 中推导出的界推广了 [67, 19] 所建立的界，因为它们适用于与博雷尔概率测度相关的一类赫尔格洛茨函数 [（见8.109）]，而在[67, 19], 中，作者只考虑与有限区间上的均匀概率测度相关的赫尔格洛茨函数这一情形，并据此推导其界。此外，根据定理54，这些界是最优的，因为它们使不等式（8.113）左侧达到最大值。该不等式是从

有限区间8.108上的求和规则（ $[x_-, x_+]$）推导得出。此外，我们将在第8.3 节看到，如果隐身斗篷是无损的，那么这些界是尖锐的，也就是说，可以构造一个赫尔格洛茨函数 H_{V_0} 使不等式取等号。

为推导这些界，我们首先引入由 h_μ 定义的赫尔格洛茨函数：

$$h_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu(\xi)}{\xi - z}, \ \forall z \in \mathbb{C}^+, \tag{8.109}$$

对于 $\mu \in \mathcal{M}$[5]。这里， $\mathcal{M}$ 表示总质量归一化为 1 的有限正则正博雷尔测度 μ 的集合。换言之：对所有 $\mu \in \mathcal{M}$ ， $\mu(\mathbb{R}) = 1$，因此， $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}$上的博雷尔概率测度集合。

接下来，令 $\mu \in \mathcal{M}$ 和 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，若隐身斗篷不满足互易性假设 H7，则取 V_0 为实值。令 H_{V_0} 为定理 51 中给出的赫尔格洛茨函数，该定理假设隐身装置满足 H1–H6。此外，我们假设 V_0 的选取使得非负系数 F_{V_0}（在 (7.85)] 中定义）为正[；例如，根据推论48，如果 V_0 是仿射且非零的，即在 $\partial\Omega$上有 $V_0 = -\mathsf{e}_0 \cdot \mathbf{x}$，其中 e 是常向量$_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ （或者在 H7 不成立时为 $\mathsf{e}_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$）]，则这些条件成立。特别是，由于$F_{V_0}$， $_\infty > 0$ ，且它等于 H_{V_0} 的表示式 (2.10) 中的系数 α ，这意味着 H_{V_0} 是一个非常值赫尔格洛茨函数，因此，根据解析函数的开映射定理，$H_{V_0}(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$ 。

由于H_{V_0} 不是常数，因此可以将$H_{\mu,\ V_0}$ 定义为两个 Herglotz 函数的如下复合

$$H_{\mu,V_0} = h_\mu \circ H_{V_0} \quad \text{on } \mathbb{C}^+, \tag{8.110}$$

因此 $H_{\mu,\ V_0}$ 本身也是一个 Herglotz 函数。该方法在 [36], 中提出，通过求和规则定理（即定理 53）推导 Herglotz 函数 $H_{\mu,\ V_0}$ 对任意 $\mu \in \mathcal{M}$ 的界。这些界包含被动线性系统（此处为隐身斗篷）的物理属性和约束，它们编码在H_{V_0}中。

我们将对 Herglotz 函数 53 应用定理 $H_{\mu,\ V_0}$。为此，我们需要该函数在 $\mathrm{i}\mathbb{R}^{+,\ *}$ 上的渐近行为，涵盖低频和高频区域。$\mathrm{i}\mathbb{R}^{+,\ *}$ 上的低频行为可由式（2.13）得出，该式指出

$$H_{\mu,V_0}(z) = -\mu_{V_0}(\{0\}) z^{-1} + o(z^{-1}) \quad \text{when} \quad |z| \to 0 \text{ on } \mathrm{i}\mathbb{R}^{+,*}, \tag{8.111}$$

其中， μ_{V_0} 是与 Herglotz 函数 $H_{\mu,\ V_0}$ 相关联的正则正博雷尔测度，根据定理 5 [中的表示满足 $\mu_{V_0}(\{0\}) \geq 0$]。其在 $\mathrm{i}\mathbb{R}^{+,\ *}$ 上的高频行为为

$$H_{\mu,V_0}(z) = -\frac{1}{F_{V_0,\infty}} z^{-1} + o(z^{-1}) \quad \text{when} \quad |z| \to \infty \text{ on } \mathrm{i}\mathbb{R}^{+,*}. \tag{8.112}$$

关于这一渐近展开的证明，参见 [36,引理 13]。

[5]在 [36], 中，作者考虑支撑于紧区间 $[-\Delta, \Delta]$内的概率博雷尔测度 μ 。不过，即使不对测度的支撑 μ作任何假设，只需将 $[-\Delta, \Delta]$ 替换为 $\mathbb{R}$ ，所有证明仍然成立。因此，我们在这里以这个稍具一般性的设定陈述这些结果。

由渐近式（8.111）和（8.112），结合定理53 和推论 7 可知，对于任意 $[x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$ （其中 $x_- < x_+$），有以下不等式

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x \le \lim_{\eta\to 0^+}\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{\eta<|x|<\eta^{-1}} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x$$
$$\le -\mu_{V_0}(\{0\}) + \frac{1}{F_{V_0,\infty}} \le \frac{1}{F_{V_0,\infty}}$$

并且，特别地，我们得到以下有用的界：

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{F_{V_0,\infty}},\ \forall \mu \in \mathcal{M}. \tag{8.113}$$

我们指出，隐身装置的物理属性（障碍物体积$|\mathcal{O}|$、隐身层体积 $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$、障碍物相对于真空的相对介电常数等）通过系数$F_{V_0,\infty}$编码在一般界（8.113）中。

接下来的第 8.3 和 8.4 小节旨在通过选择赫尔格洛茨函数 h_μ的测度 $\mu \in \mathcal{M}$，从一般界（8.113）推导出以隐身装置物理参数表示的、更明确的不等式。这将使我们能够消去（8.113）中的极限。在第 8.3 节中，当假设隐身层在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$内无损耗时，狄拉克测度 δ_ξ 在概率博雷尔测度中对于获得紧确界起着关键作用。为说明使用狄拉克测度的理由，本节以如下定理作结：该定理指出，若要在博雷尔概率测度 $\mathcal{M}$的集合上最大化和规则型不等式（8.113）的左侧，只需使用位于点 $\xi \in \mathbb{R}$处的狄拉克测度 $\mu = \delta_\xi$。此外，若博雷尔概率测度 μ支撑在 $[-\Delta, \Delta]$ 中，则只需考虑位于点$\xi \in [-\Delta, \Delta]$处的狄拉克测度 $\mu = \delta_\xi$。对于紧支撑于 $[-\Delta, \Delta]$ 中的博雷尔概率测度 $\mathcal{M}$，这一结论已在 [36, 定理 14] 中陈述，对应于关系式（8.115）。但是，关系式（8.114）的证明与 [36, 定理 14] 中的证明相同，只需将 $[-\Delta, \Delta]$ 替换为 $\mathbb{R}$。因此，此处不再给出证明。

定理 54。假设隐身装置满足假设 H1–H6，并且选择 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 使得 $F_{V_0,\infty} > 0$。此外，如果不满足 *H7*，即如果隐身斗篷包含非互易材料，则假设 V_0 为实值。令 $[x_-, x_+] \subset \mathbb{R}$（其中$x_- < x_+$），则有

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\delta_\xi,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x \tag{8.114}$$

并且如果测 度属于 $\mathcal{M}$ 的测度子集 $\mathcal{M}_\Delta$，且这些测度支撑在 $[-\Delta, \Delta$ 中 $]$：

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_\Delta} \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x = \sup_{\xi\in[-\Delta,\Delta]} \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\delta_\xi,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x. \tag{8.115}$$

8.3 无损情形

本节假设隐身斗篷在频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 内是无损的（即隐身斗篷的透明窗口；详见 [83, 第80节和 84], [135, 33, 36]以了解更多信息），这意味着（在假设 H1 和 H4 下）隐身斗篷的介电常数满足以下假设：

H8 无损隐身斗篷 在 $[\omega_-,\omega_+]$ 中：假设隐身斗篷在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上无损，即，

$$\forall\omega\in[\omega_-,\omega_+] \text{ and for a.e. } \mathbf{x}\in\Omega\setminus\mathcal{O},\ \Im[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},\omega)]=0. \tag{8.116}$$

下面的引理表明，如果假设隐身斗篷在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上无损，那么函数 F_{V_0} 和赫尔格洛茨函数 H_{V_0} 会继承介电常数的类似性质。

引理 55。 假设隐身装置满足假设H1–H6 和H8（即隐身斗篷在频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 上无损）。令 $V_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$，并且，如果不满足H7 （即隐身斗篷包含非互易材料），令 V_0 为实值函数。那么

$$\operatorname{Im}F_{V_0}(\omega)=0,\quad \forall\omega\in[\omega_-,\omega_+]\quad \textit{and}\quad \operatorname{Im}H_{V_0}(x)=0,\quad \forall x\in[\omega_-^2,\omega_+^2], \tag{8.117}$$

其中，H_{V_0} 是由定理 (7.106)中定义的赫尔格洛茨函数 *51*。

证明。该性质同样是复合材料理论的推论，它源于狄利克雷到诺伊曼映射与有效张量之间通过因子分解 (4.61) 建立的联系（也可以通过格林公式证明这一点，但我们选择这种方法，以强调它与复合材料理论的联系）。令 $\mathsf{E}_0=\Pi V_0$。那么，由于 $\mathsf{E}_0\in\mathcal{U}$，对于固定的 $\omega\in[\omega_-,\omega_+]$，存在一个解 $(\mathsf{J}_0,\mathsf{E},\mathsf{J})\in\mathcal{U}\times\mathcal{E}\times\mathcal{J}$，满足狄利克雷 Z-问题 $(\mathcal{H},\mathcal{U},\mathcal{E},\mathcal{J},\mathsf{a})$，其中 $\mathsf{a}=\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)$，在 E_0 处，这意味着

$$\begin{aligned}
F_{V_0}(\omega) &= \langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)}-\Lambda_{\varepsilon_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac12}(\partial\Omega),H^{\frac12}(\partial\Omega)}\\
&= \big(\big[[\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*-[\varepsilon_0]_*\big]\Pi V_0,\Pi V_0\big)_{\mathcal{H}}\\
&= \big([\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0\big)_{\mathcal{H}}-(\varepsilon_0\mathbf{E}_0,\mathbf{E}_0)_{\mathcal{H}}\\
&= ([\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)](\mathbf{E}_0+\mathbf{E}),\mathbf{E}_0+\mathbf{E})_{\mathcal{H}}-\varepsilon_0\|\mathbf{E}_0\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

其中，在上述等式中，我们利用了 $\mathsf{J}_0=[\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)]_*\mathsf{E}_0,\mathsf{J}_0+\mathsf{J}=\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)(\mathsf{E}_0+\mathsf{E})$，$[\varepsilon_0]_*=\varepsilon_0$[根据推论 30.(ii)], 以及 $\mathcal{U}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{H}$ 中相互正交的子空间这一事实。由于 (3.17) 与 H8 一起确保当 $\Omega\setminus\mathcal{O}$ 被 Ω 替换时，(8.116) 仍然成立，因此对所有 $\omega\in[\omega_-,\omega_+]$:

$$\operatorname{Im}F_{V_0}(\omega)=\operatorname{Im}(\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)(\mathsf{E}_0+\mathsf{E}),\mathsf{E}_0+\mathsf{E})_{\mathcal{H}}-\operatorname{Im}\varepsilon_0\|\mathsf{E}_0\|_{\mathcal{H}}^2=(\Im[\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)](\mathsf{E}_0+\mathsf{E}),\mathsf{E}_0+\mathsf{E})_{\mathcal{H}}=0$$

并且，由 (7.106) 可知，对所有 $x\in[\omega_-^2,\omega_+^2]$，我们还有 $\operatorname{Im}H_{V_0}(x)=x\operatorname{Im}F_{V_0}(\sqrt{x})=0$。 □

下述定理给出了隐身斗篷在频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 内无损时的精确界，即满足 H8 时的情形。其证明已在 [36, 命题 15] 中建立（其中 H_{V_0} 和 F_{V_0} 分别起到 [36] 中函数 v 和 f 的作用）。该证明依赖于这样一个事实：$[\omega_-,\omega_+]$ 是 F_{V_0} 的透明窗口，即根据 (8.117)，F_{V_0} 在 $[\omega_-,\omega_+]$ 上为实值函数。利用这一信息，当 μ 取为恰当选取的狄拉克测度 $\mu=\delta_\xi\in\mathcal{M}$（其中 $\xi\in\mathbb{R}$）时，可以计算不等式 (8.113) 左侧的极限，从而得到界 (8.118)。然后，利用赫尔格洛茨函数 H_{V_0} 的定义 (7.106)，可立即由 (8.118) 推出不等式 (8.119) 成立。需要指出的是，[100]中通过与斯蒂尔切斯函数相关的插值技术，在未采用求和规则方法的情况下，针对被动线性电磁介质的介电常数，在材料被假设为无损的频率区间上推导出了与 (8.119) 类似的界。在 [36]，中，作者还给出了基于克拉默斯-克罗尼希关系的 (8.119) 的第二种证明。

定理 56。 令隐身装置满足假设 H1–H6 ， 并令 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 满足 $F_{V_0,\infty} > 0$。此外，假设当H7 不成立时（即隐身斗篷包含非互易材料时）， V_0 是实值函数。若H8 成立，换言之，隐身斗篷在正频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 内无损，则函数 H_{V_0} 满足

$$F_{V_0,\infty}(x - x_0) \le H_{V_0}(x) - H_{V_0}(x_0), \ \forall x, x_0 \in [\omega_-^2, \omega_+^2] \ \textit{such that} \ x_0 \le x, \tag{8.118}$$

由此得到关于 F_{V_0}的以下界:

$$\omega_0^2[F_{V_0}(\omega_0) - F_{V_0,\infty}] \le \omega^2[F_{V_0}(\omega) - F_{V_0,\infty}], \ \forall \omega, \omega_0 \in [\omega_-, \omega_+] \ \textit{such that} \ \omega_0 \le \omega. \tag{8.119}$$

注57。 请注意，界 (8.118) 和 (8.119)在以下意义上是尖锐的。对于任意给定的实数 $\omega_0 \in [\omega_-, \omega_+]$，设 F_{V_0} 由德鲁德色散定律给出

$$F_{V_0}(\omega) = F_{V_{0,\infty}} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}[F_{V_0,\infty} - F_{V_0}(\omega_0)] \quad \textit{where} \ F_{V_0}(\omega_0) \in [0, F_{V_0,\infty}].$$

那么，一方面，S_{V_0} 由 (7.101) 定义，是满足引理*50* 所有性质的斯蒂尔切斯函数，因此 H_{V_0} 由 (7.106)定义，在此处表示为

$$H_{V_0}(z) = F_{V_0,\infty}(z - x_0) + H_{V_0}(x_0), \quad \textit{where for} \ \ x_0 = \omega_0^2, \ \ H_{V_0}(x_0) = \omega_0^2 F_{V0}(\omega_0).$$

这是一个仿射赫格洛茨函数，具备定理 *51*的所有性质。另一方面，H_{V_0} 和F_{V_0} 满足 (8.117) ，对于这些函数，不等式 (8.118) （对于所有$x \in [x_-, x_+] = [\omega_-^2, \omega_+^2]$ 且 $x_0 = \omega_0^2$ 固定）以及(8.119) （对于所有 $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$ 且 ω_0 固定）都变为等式。

以下推论可由定理56的不等式（8.119）立即得出，前提是障碍物在频率 ω_0 下按（8.120）的意义被近似隐身。

推论58. 假设隐身装置满足定理*56* 中的假设，且固定输入信号为 V_0。此外，假设存在一个频率 $\omega_0 \in [\omega_-, \omega_+]$ ，使隐身斗篷在 ω_0处实现近似隐身，即存在 $\eta > 0$ 使得

$$|F_{\tilde{V}_0}(\omega_0)| \le \eta\, G_{\tilde{V}_0}^{\mathrm{vac}} \quad \textit{with} \ \ G_{\tilde{V}_0}^{\mathrm{vac}} = \langle \Lambda_{\varepsilon_0} \tilde{V}_0, \overline{\tilde{V}_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad \forall \tilde{V}_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega) \tag{8.120}$$

then

$$F_{V_0}(\omega) \le \big(-F_{V_0,\infty} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \big) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \ \textit{if} \ \omega_- \le \omega \le \omega_0, \tag{8.121}$$

$$F_{V_0}(\omega) \ge \big(F_{V_0,\infty} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \big) \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} - \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \ \ \textit{if} \ \omega_0 \le \omega \le \omega_+. \tag{8.122}$$

特别地，如果存在一个频率 $\omega_0 \in [\omega_-, \omega_+]$ ，使隐身斗篷在 ω_0处实现完美隐身，即 $F_{\tilde{V}_0}(\omega_0) = 0$ 对所有 $\tilde{V}_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 均成立，那么不等式 (8.121) 和 (8.122) 成立，其中 $\eta = 0$。

此外，如果 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是仿射的，即当 *H7* 满足时 $V_0 = -\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{x}|_{\partial\Omega}$ *for* $\boldsymbol{e}_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ （否则假设 $\boldsymbol{e}_0 \in \mathbb{R}^d$，即 *H7* 不成立），那么（根据推论*48*）我们有$F_{V_0,\infty} > 0$，并且可以在不等式 *(8.121)* 和 *(8.122)* 中将 $F_{V_0,\infty}$ *[]* 替换为其下界

$$|\mathcal{O}| \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon_0 |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2}{|\mathcal{O}| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + |\Omega \setminus \mathcal{O}|}. \tag{8.123}$$

假设在 ω_0 [处实现完美隐身，即当 $F_{\tilde{V}_0}(\omega_0) = 0$时，对于所有 $\tilde{V}_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$]，并选择一个仿射边界输入条件 V_0，可得到界（8.121）和（8.122），其中用 $\eta = 0$ 和（8.123）代替$F_{V_0,\ \infty}$· 于是，这两个精确不等式给出了频率区间 $[\omega_-, \omega_+]$ 上隐身效应的基本极限，因为在这种情况下有

$$F_{V_0}(\omega) \leq -|\mathcal{O}| \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon_0 |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}}{|\mathcal{O}| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + |\Omega \setminus \mathcal{O}|} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} < 0 \text{ if } \omega \in [\omega_-, \omega_0), \tag{8.124}$$

$$F_{V_0}(\omega) \ \geq |\mathcal{O}| \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon_0 |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}}{|\mathcal{O}| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + |\Omega \setminus \mathcal{O}|} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} > 0 \ \text{ if } \omega \in (\omega_0, \omega_+]. \tag{8.125}$$

因此，除 ω_0 之外的任何其他频率下都不可能实现完美隐身于 $[\omega_-, \omega_+]$。不过，这些结果提供了更精确的信息： $F_{V_0}(\omega)$ 的下界 (8.124) 和上界 (8.125) 取决于无源系统的物理参数和输入信号：带宽（通过项 $\pm|\omega^2 - \omega_0^2|$），以及 (8.123) 中的 [] 障碍物体积 $|\mathcal{O}|$、隐身层体积 $|\Omega\setminus\mathcal{O}|$、通过项 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 给出的障碍物相对介电常数下界，以及（相差一个 $1/2$ 因子）输入信号在 Ω 中产生的电场能量（Ω 中充满真空时），即 $\varepsilon_0 |\Omega| \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}$。我们指出，在近场情形的准静态近似中， $\varepsilon_0 |\Omega| \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}$ 是一种物理量，其大小与电磁散射理论中的入射场能量相当。相比之下，在 [36] 中关于远场隐身推导出的界并不通过项 $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$ 依赖于隐身层体积，因为这一信息在远场区域不可测量。

现在，若隐身斗篷在 ω_0处未能使物体完美隐身，而只在8.120所示的近似隐身条件于 ω_0 成立，且 $\eta > 0$足够小，那么我们的界仍会施加一些约束，阻止隐身在 $[\omega_-, \omega_+]$处实现。接下来我们来讨论这一点。

对于由 V_0 给出的仿射势 $V_0 = -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}\big|_{\partial\Omega}$，其中$\mathbf{e}_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$，边值问题（$u \in H^1$）的唯一解3.23对于$\mathbf{a} = \varepsilon_0 \mathbf{I}$ 同样是仿射的： u（$\mathbf{x}$） $= -\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x}$对所有$\mathbf{x} \in \Omega$ 均成立。因此，由（3.29）可得：

$$G^{\text{vac}}_{V_0} = \varepsilon_0 \|\nabla u\|^2_{\mathcal{H}} = \varepsilon_0 |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

因此，由于 V_0 是仿射的，将（8.121）中的F_{V_0}替换为∞，并以表达式（8.123）代入，可得 s

$$F_{V_0}(\omega) \leq \varepsilon_0 |\Omega| \ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d} \Big[(-\eta_{\text{lim}} + \eta) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} + \eta\Big], \quad \forall \omega \in [\omega_-, \omega_0], \tag{8.126}$$

其中

$$\eta_{\text{lim}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{|\mathcal{O}|}{|\mathcal{O}| \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + |\Omega \setminus \mathcal{O}|} > 0.$$

因此，若 $\eta \in (0, \ \eta_{\text{lim}})$，则可得

$$F_{V_0}(\omega) < 0 \quad \text{ if } \ \omega \in \Big[\omega_-, \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_{\text{lim}}}}\, \omega_0\Big). \tag{8.127}$$

因此，如果 $\omega_- < (1 - \eta/\eta_{\text{lim}})^{1/2} \omega_0$，那么定量界（8.126）表明，在区间 $[\omega_-, (1-\eta/\eta_{\text{lim}})^{1/2}\omega_0)$ 内的任何频率下都不可能实现完美隐身。类似地，利用界

(8.122)，可得到

$$F_{V_0}(\omega) \geq \varepsilon_0 \, |\Omega| \, \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2 \Big[(\eta_{\lim} + \eta) \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} - \eta \Big], \quad \forall \omega \in [\omega_0, \omega_+]. \tag{8.128}$$

因此可得

$$F_{V_0}(\omega) > 0 \quad \text{if} \ \ \omega \in \Big(\sqrt{1 + \frac{\eta}{\eta_{\lim}}} \, \omega_0, \omega_+ \Big]. \tag{8.129}$$

因此，若 $\omega_+ > (1 + \eta/\eta_{\lim})^{1/2} \omega_0$，则定量界（8.128）表明，在区间（$(1 + \eta/\eta_{\lim})^{1/2}\omega_0$, ω_+]）内的任何频率下都不可能实现完美隐身。因此，界（8.126）和（8.128）证明，如果带宽足够大，就不可能实现完美隐身，甚至近似隐身。同样，障碍物 $|\mathcal{O}|$ 和隐身斗篷 $|\Omega \setminus \mathcal{O}|$ 的体积，以及障碍物相对介电常数的下界 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 这些物理参数，都通过显式常数 $\eta_{\lim}$体现在这些界中。

8.4 有损情形

这里我们沿用 [19], 中针对被动线性电磁系统提出的方法，通过求和规则（定理53）推导界：在区间 $[-\Delta, \Delta]$ 上为 $\Delta > 0$选取均匀概率测度，即

$$\mathrm{d}\mu(\xi) = \frac{1_{[-\Delta,\Delta]}(\xi)}{2\Delta} \mathrm{d}\xi \tag{8.130}$$

对于赫尔格洛茨函数 h_μ，其定义见（8.109）。这里 $1_{[-\Delta,\Delta]}$（ξ）是示性函数，在区间 $[-\Delta, \Delta]$ 上取值为 1，在该区间之外取值为 0。这种方法首次应用于 [36] 远场准静态问题的隐身研究，用于推导被动隐身装置的极化率张量所满足的不等式，这些不等式限制了在某一频率区间内实现近似隐身的可能性。在本文中，我们将该方法应用于与狄利克雷到诺伊曼算子相关的全新框架，以推导近场准静态隐身问题的基本极限。下面回顾该方法的主要论证。更多细节请参见 [36, 第 II.F 节]。

将8.130）的表达式代入 Herglotz 函数的定义（8.110），得出 $H_{\mu,\ V_0}$以下公式：

$$H_{\mu,V_0}(z) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{\xi - H_{V_0}(z)} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\Delta} \log \left(\frac{H_{V_0}(z) - \Delta}{H_{V_0}(z) + \Delta} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \tag{8.131}$$

在复对数函数 log 的定义中，我们采用与平方根函数（ $\mathbb{R}^+$ 所用的相同支割线7.98）。接下来有

$$\frac{H_{V_0}(z) - \Delta}{H_{V_0}(z) + \Delta} = \frac{|H_{V_0}(z)|^2 - \Delta^2 + 2\mathrm{i}\Delta \, \mathrm{Im}[H_{V_0}(z)]}{|H_{V_0}(z) + \Delta|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

根据这些公式，并且由于对于 $z \in \mathbb{C}^+$ 有 $\mathrm{Im}[H_{V_0}(z)] \in \mathbb{C}^+$ （因为 H_{V_0} 是一个非常数赫尔格洛茨函数），可推得

$$\mathrm{Im}\, H_{\mu,V_0}(z) = \frac{1}{2\Delta} \arg \left(\frac{H_{V_0}(z) - \Delta}{H_{V_0}(z) + \Delta} \right) \geq \frac{\pi}{4\Delta} H(\Delta - |H_{V_0}(z)|), \quad \forall z \in \mathbb{C}^+, \tag{8.132}$$

其中 $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ 是 Heaviside函数（即 $\mathbb{R}^+$的示性函数）。现在我们利用不等式（8.132）得到（8.113）左侧的一个下界。
引入集合 $I_{\Delta,H_{V_0}} = \{x \in [x_-, x_+] \mid |H_{V_0}(x)| = \Delta\}$，其中 $[x_-, x_+] = [\omega_-^2, \omega_+^2]$。该集合在 $[x_-, x_+]$ 中的补集对应于 $[x_-, x_+]$ 中满足以下条件的点集 x：函数 $t \mapsto H(\Delta - |H_{V_0}(t)|)$ 在 $[x_-, x_+] \cup \mathbb{C}^+$ 中的 x 邻域内连续。因此，假设 $I_{\Delta,H_{V_0}}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的勒贝格测度为零，记作 $|I_{\Delta,H_{V_0}}|$，并利用 H_{V_0} 在 $[x_-, x_+]$ [上的连续性（见定理 (51)], ），由勒贝格控制收敛定理和不等式 (8.132) 可得

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{x_-}^{x_+} H(\Delta - |H_{V_0}(x+\mathrm{i}y)|)\,\mathrm{d}x = \int_{x_-}^{x_+} H(\Delta - |H_{V_0}(x)|)\,\mathrm{d}x \le \frac{4\Delta}{\pi} \lim_{y\to 0^+} \int_{x_-}^{x_+} \operatorname{Im} H_{\mu,V_0}(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x$$

[其中，右侧极限的存在性由推论 2.12 中的公式 (7] 保证。因此，在假设 $|I_{\Delta \text{ 的条件下，} H_{V_0}}| = 0$ 并根据一般界 (8.113，可得以下比 (8.113) 更宽松但更直观的不等式:

$$|\{x \in [x_-, x_+] \mid |H_{V_0}(x)| \le \Delta\}| = \int_{x_-}^{x_+} H(\Delta - |H_{V_0}(x)|)\,\mathrm{d}x \le \frac{4\Delta}{F_{V_0,\infty}}. \tag{8.133}$$

事实上，不需要假设8.133中的不等式$|I_{\Delta,\ H_{V_0}}| = 0$也成立。更准确地说，
$\{\Delta \in \mathbb{R}^{+,*} \mid |I_{\Delta,H_{V_0}}| > 0\}$ 至多是一个可数集（因为$|H_{V_0}|$作为$[x_-, x_+]$上的连续函数，在这个闭区间上可测）。因此，若$|I_{\Delta,\ H_{V_0}}| > 0$对 $\Delta > 0$成立，则可以找到一列正实数（Δ_n），满足 $\Delta_n > \Delta$且 $|I_{\Delta_n,\ H_{V_0}}| = 0$对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，并且当 Δ趋于 $n \to +\infty$时收敛于（8.133），因此可得

$$\int_{x_-}^{x_+} H(\Delta - |H_{V_0}(x)|)\,\mathrm{d}x \le \int_{x_-}^{x_+} H(\Delta_n - |H_{V_0}(x)|)\,\mathrm{d}x \le \frac{4\Delta_n}{F_{V_0,\infty}} \to \frac{4\Delta}{F_{V_0,\infty}} \text{ as } n \to +\infty. \tag{8.134}$$

（8.134）左侧的量表示在 x_- 与 x_+之间，函数 $|H_{V_0}|$ 小于或等于 Δ的集合的总长度。显然，该上界意味着当 $\Delta \to 0$时，这个总长度必然趋于零。特别地，若取

$$\Delta = \max_{x\in[x_-,x_+]} |H_{V_0}(x)|, \tag{8.135}$$

（其中 $0 < \Delta < \infty$ 由于 H_{V_0} 在 $[x_-, x_+] = [\omega_-^2, \omega_+^2]$ 上连续且不为零，根据命题52），那么（8.134）的左端为 $x_+ - x_-$，从而得到

$$\frac{1}{4}(x_+ - x_-)F_{V_0,\infty} \le \max_{x\in[x_-,x_+]} |H_{V_0}(x)|. \tag{8.136}$$

最后，由不等式（8.136）以及7.106）中 H_{V_0}的定义，可立即得到以下定理。此外，由该定理和推论48可立即得到下一个推论。需要注意的是，下面的不等式（8.137）直接类比于[36, 第24页，（3.23）]中关于极化率张量的界（这是 [36,命题 16]的推论）。

定理 59. 设隐身装置满足假设 一阶 Sobolev 空间–H6，并选取 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 使得 $F_{V_0,\infty} > 0$。此外，假设若H7 不成立，则 V_0 是实值函数

（即隐身斗篷包含非互易材料）。那么函数 F_{V_0} 满足以下不等式：

$$\frac{1}{4}(\omega_+^2-\omega_-^2)F_{V_0,\infty}\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}|\omega^2F_{V_0}(\omega)|. \tag{8.137}$$

推论60。假设隐身装置满足假设一阶 Sobolev 空间–H6，且 $V_0\in H^{1/2}(\partial\Omega)$是仿射的，即对于某个固定的$\mathbf{e}_0\in\mathbb{C}^d\setminus\{0\}$，有 $V_0=-\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}$，只要满足H7 （否则假设$\mathbf{e}_0\in\mathbb{R}^d$，即H7 不成立），则

$$\frac{1}{4}(\omega_+^2-\omega_-^2)|\mathcal{O}|\Big(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big)\ \frac{1}{|\mathcal{O}|\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}+|\Omega\setminus\mathcal{O}|}\ \varepsilon_0\ |\Omega|\ \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}|\omega^2F_{V_0}(\omega)|. \tag{8.138}$$

界 (8.138) 通过给出频率区间上函数 $\omega\mapsto|\omega^2F_{V_0}(\omega)|$ 最大值的下界，揭示了隐身效应的基本极限。与界 (8.121) 和 (8.122) 一样，这个界也取决于无源系统和输入信号的物理参数：带宽、障碍物 $|\mathcal{O}|$的体积、隐身层 $|\Omega\setminus\mathcal{O}|$的体积、障碍物相对介电常数的下界 $\varepsilon/\varepsilon_0$，以及输入信号在 Ω 充满真空时于 Ω 中产生的电场能量 $\varepsilon_0\ |\Omega|\ \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbb{C}^d}^2$。这些界不如推论58中的界精确，因为它们以一个正数控制最大值。事实上，这些界并未说明 F_{V_0} 是否会在频率区间内的某个特定频率处消失。不过，值得指出的是，将 $[\omega_-,\omega_+]$ 替换为任意子区间 $[\tilde\omega_-,\tilde\omega_+]\subseteq[\omega_-,\omega_+]$后，这些界仍然适用。因此，它们能给出 $\omega\mapsto|\omega^2F_{V_0}(\omega)|$ 在 $[\omega_-,\omega_+]$的任意子区间上的最大值的正下界。最后，我们指出，选择不同于最大值 (8.135) 的 $\Delta>0$，可以通过计算（数值或实验方式）界 (8.134) 左侧的值，得到隐身的基本极限。

现在考虑在单一频率 ω_0 下完美隐身的情况，即 $F_{V_0}(\omega_0)=0$。假设 $F_{V_0}(\cdot)\in\mathcal{C}^1([\omega_-,\omega_+])$。那么，利用上述结果，我们可以推导出导数 $F'_{V_0}(\omega_0)$ 的一个界，其中 $()'=\frac{d}{d\omega}()$。事实上，若 $[a,b]\subseteq[\omega_-,\omega_+]$，则由泰勒-拉格朗日不等式可得

$$|b^2F_{V_0}(b)-a^2F_{V_0}(a)|\le\max_{\omega\in[a,b]}\left|\frac{d}{d\omega}[\omega^2F_{V_0}(\omega)]\right|(b-a).$$

根据（8.137），这意味着

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\omega_+^2-\omega_-^2)F_{V_0,\infty}&\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}|\omega^2F_{V_0}(\omega)|=\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}|\omega^2F_{V_0}(\omega)-\omega_0^2F_{V_0}(\omega_0)|\\&\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}\left|\frac{d}{d\omega}[\omega^2F_{V_0}(\omega)]\right|(\omega_+-\omega_-)\end{aligned}$$

意味着

$$\frac{1}{4}(\omega_++\omega_-)F_{V_0,\infty}\le\max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}\left|\frac{d}{d\omega}[\omega^2F_{V_0}(\omega)]\right|. \tag{8.139}$$

尤其　特别是，如果我们将区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 缩小为单个点 $\{\omega_0\}$，那么根据连续性

$$\frac{1}{2}\omega_0 F_{V_0,\infty} \le \left|\frac{d}{d\omega}[\omega^2 F_{V_0}(\omega)]|_{\omega=\omega_0}\right| = \omega_0^2\left|F'_{V_0}(\omega_0)\right|,$$

这就证明了该不等式

$$F_{V_0,\infty} \le 2\omega_0\left|F'_{V_0}(\omega_0)\right|. \tag{8.140}$$

现在，若我们假设 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是仿射的 $V_0 = -\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{x}|_{\partial\Omega}$，如推论 60所述，则由该推论和刚才给出的证明可得

$$\frac{1}{4}(\omega_+ + \omega_-)|\mathcal{O}|\Big(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big)\ \frac{\varepsilon_0|\Omega|\ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}}{|\mathcal{O}|\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}+|\Omega\setminus\mathcal{O}|} \le \max_{\omega\in[\omega_-,\omega_+]}\Big|\frac{d}{d\omega}[\omega^2 F_{V_0}(\omega)]\Big|, \tag{8.141}$$

$$|\mathcal{O}|\Big(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big)\ \frac{\varepsilon_0|\Omega|\ \|\mathbf{e}_0\|^2_{\mathbb{C}^d}}{|\mathcal{O}|\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}+|\Omega\setminus\mathcal{O}|} \le 2\omega_0\left|F'_{V_0}(\omega_0)\right|. \tag{8.142}$$

因此，我们证明了定理 59 和推论 60的以下推论　.

推论*61*。若定理 *59* 中的假设成立，$F_{V_0}(\cdot) \in \mathcal{C}^1([\omega_-,\omega_+])$ 且$\omega_0 \in [\omega_-,\omega_+]$ 满足 $F_{V_0}(\omega_0) = 0$，则不等式 *(8.139)* 和 *(8.140)* 成立。此外，若 V_0 是仿射的且满足推论 *60* 的假设，则不等式 *(8.141)* 和 *(8.142)* 也成立。

注释*62*。推论*61*表明，对于给定的仿射边界条件 $V_0 \in H^{1/2}(\Omega)$，若 $F_{V_0} \in \mathcal{C}^1([\omega_-,\omega_+])$，则在区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 内能够实现完美隐身的频率集合是有限的。事实上，该集合包含于 S_{V_0}:
$= \{\omega \in [\omega_-,\omega_+] \mid F_{V_0}(\omega) = 0\}$.。由不等式 *(8.142)* 可知，对于任意频率 $\omega_0 \in S_{V_0}$，有 $F_{V_0}(\omega_0)$ $= 0$ 且 $F'_{V_0}(\omega_0) \neq 0$。因此，由于 $[\omega_-,\omega_+]$ 的紧致性以及 F_{V_0}的正则性，我们可推得 S_{V_0} 是一个有限集合。

注释*63*。与其他结果相比，推论*61*需要额外假设$F_{V_0}(\cdot) \in \mathcal{C}^1([\omega_-,\omega_+])$。保证这种正则性的一个充分条件，是用以下假设替代假设*H4*：映射 $\omega \mapsto \omega\,\varepsilon(x\ \omega)$可从 $\mathbb{C}^+$解析延拓到包含实区间 $[\omega_-,\omega_+]$的某个邻域。换言之，我们假设函数$\omega \mapsto \omega\,\varepsilon(x\ \omega)$在包含频率范围 $[\omega_-,\omega_+]$的某个开集内是解析的。例如，当介电常数 $\varepsilon(x\ \omega)$对于几乎处处的 $x \in \Omega\setminus\mathcal{O}$ 由广义耗散 *Drude-Lorentz*模型给出时（例如参见 *[35, 32]*），情况便是如此。在这一解析性假设下，可以采用与命题*46*的步骤*2*中相同的推理，但现在应用于 $\omega \in [\omega_-,\omega_+]$ （而不是$\omega \in \mathbb{C}^+$），从而得出 F_{V_0} 在 $[\omega_-,\omega_+]$的某个邻域内是解析的（因此自然也是 $\mathcal{C}^1$）。

8.5 将无损情形推广至包含色散障碍物的情况

我们在此证明，如果隐身斗篷在频率区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 内无损（即 H8 成立），那么推论 58 中的界可推广至这样一种（可能各向异性的）无源色散无损互易材料情形：其取实值的介电常数张量 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega)$ 在 $[\omega_-,\omega_+]$上“大于”真空。更准确地说，本节假设障碍物的介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}$ 满足：

- 假设 H1、H2 和 H4（其中 $\Omega \setminus \mathcal{O}$ 由 $\mathcal{O}$ 替代）；
- $\forall \omega \in [\omega_-, \omega_+]$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\cdot, \omega) \in M_d(L^\infty(\mathcal{O}))$ 以及 [不再使用 (3.17)] 而是对几乎处处的 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ 和 $\forall \omega \in [\omega_-, \omega_+]$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega)^\top, \ \Im[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega)] = 0, \ \text{and } \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega) \geq \varepsilon \mathbf{I} \text{ with } \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > \varepsilon_0. \quad (8.143)$$

最后，我们还假设 H8 成立，由此现在可以推出

$$\text{for a.e. } \mathbf{x} \in \Omega \text{ and } \forall \omega \in [\omega_-, \omega_+], \Im[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \omega)] = 0. \quad (8.144)$$

引理 64。 假设障碍物的介电常数满足 H1,H2, H4 *(其中 $\mathcal{O}$ 替代$\Omega \setminus \mathcal{O}$)*，并且 (8.143) 则对几乎处处的 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega_0) \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \forall \omega_0, \omega \in [\omega_-, \omega_+] \mid \omega_0 \leq \omega. \quad (8.145)$$

证明。 令$\mathbf{U} \in \mathbb{C}^d$ 固定。利用假设 H1 和 H2，可以按照引理50 的证明方式，得到形如（7.104）的公式 [，方法是将赫尔格洛茨函数$h_{\mathrm{dif},\ V_0}$ 替换为赫尔格洛茨函数 $\omega \mapsto \omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}\ \omega)\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}]$,，也就是说，对几乎处处的 $x \in \mathcal{O}$，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{U}} = a_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu_{\mathbf{x},\mathbf{U}}(\xi)}{\omega^2 - \xi^2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^+, \quad (8.146)$$

其中，$a_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$ 和$\mu_{\mathbf{x},\mathbf{U}}$ 分别是赫尔格洛茨函数$\omega \mapsto \omega \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega)\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$在表示公式（2.10）中的正系数和（偶）测度。此外，利用H4和（8.144），根据公式（2.12）可得，测度$\mu_{\mathbf{x},\mathbf{U}}$ 的支撑包含于 $Y = \mathbb{R} \setminus [(-\omega_+, -\omega_-) \cup (\omega_-, \omega_+)]$中。因此，假设H1至H4以及Schwarz 反射原理表明，公式（8.146）可解析延拓至 $\mathbb{C} \setminus Y$。因此，特别地，可以在积分号下对该公式求导（例如参见 [91]），在（ω_-, ω_-）上得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}, \cdot)\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{U}}](\omega) = 2\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu_{\mathbf{x},\mathbf{U}}(\xi)}{(\omega^2 - \xi^2)^2} \geq 0, \quad \forall \omega \in (\omega_-, \omega_+). \quad (8.147)$$

因此，（8.14 7）以及 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \cdot)$在 $\omega_\pm$ 处的连续性（根据假设H4）显然蕴含（8.145）。 □

现在，我们将推论58 中得到的界推广到色散障碍物的情形。关键要素包括上述单调性、狄利克雷变分原理（5.66）（该原理在隐身斗篷无损时成立），以及针对非色散障碍物得到的推论58 中的解析界。

首先，利用事实 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ob}}(\cdot, \omega) \in M_d(L^\infty(\mathcal{O}))$ 、8.143）以及关于隐身装置的假设 H5 和 H6，仍可通过命题 19在 $[\omega_-, \omega_+]$上定义函数 F_{V_0}，该函数对所有 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 定义为

$$F_{V_0}(\omega) = \langle [\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot,\omega)} - \Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}] V_0, \overline{V_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad (8.148)$$

当障碍物具有色散性时（对应于图3右侧的情形）。

令 ω_0 为 $[\omega_-,\omega_+]$ 中的一个固定参考频率；在下文中，我们假设近似隐身成立。于是，可以像之前那样定义 [，见（3.27)]一个函数 $F_{V_0,\ \mathrm{ref}}$在 $\mathbb{C}^+\cup[\omega_-,\omega_+]$ 上，该函数通过对隐身装置作出一阶 Sobolev 空间 H1、H3、H4、H5 和 H6 假设

$$F_{V_0,\mathrm{ref}}(\omega)=\langle[\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega)}-\Lambda_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}]V_0,\overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{8.149}$$

对于参考介电率 $\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\ \omega)$，其对所有 $\omega\in\mathbb{C}^+\cup[\omega_-,\omega_+]$ 均由

$$\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega)=\varepsilon(\cdot,\omega)\ \text{ on }\ \Omega\setminus\mathcal{O}\quad\text{ and }\quad\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega):=\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\cdot,\omega_0)\ \text{on}\ \mathcal{O}.$$

换句话说，$\varepsilon_{\mathrm{ref}}$在隐身斗篷 $\Omega\setminus\mathcal{O}$内与 ε一致，而 $\varepsilon_{\mathrm{ref}}$在障碍物 $\mathcal{O}$ 内具有与频率无关的介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\cdot,\ \omega_0)$（这对应于图 3 左侧的情形）。因此，对于这一参考情形，我们回到了此前相同的假设，因为参考介电率在障碍物内无色散，并且 [根据（8.144）在 $\omega=\omega_0$] 处求值后满足（3.16），其中 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x})=\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega_0)$。我们用 $F_{V_0,\ \mathrm{ref}\ \infty}$ 表示其在 $|\omega|\to\infty$ 时沿“正”虚轴趋近的极限，该极限由定理47 中的（7.85）定义。最后指出，根据构造，$F_{V_0,\ \mathrm{ref}}(\omega_0)=F_{V_0}(\omega_0)$。

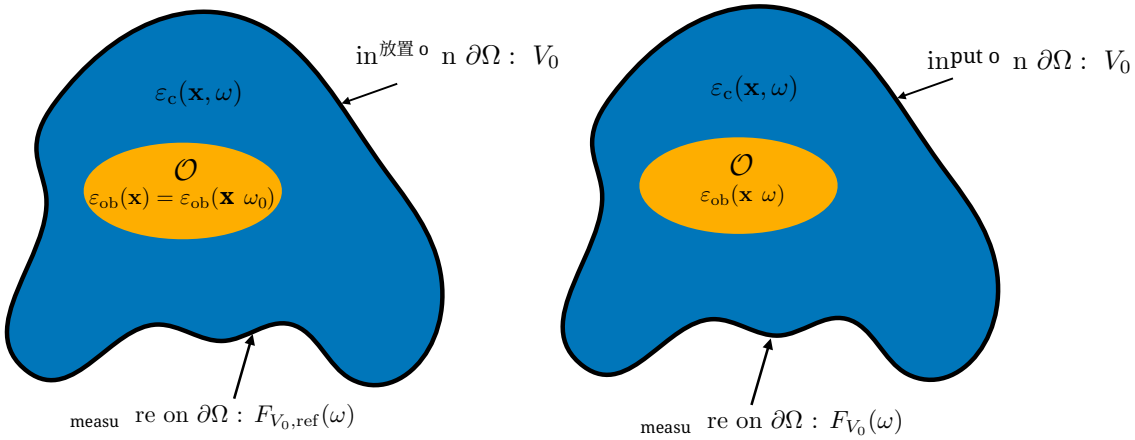

图3：两种情形的比较。两者的区别在于，左图中的障碍物在 $[\omega_-,\omega_+]$ 处不具有色散性，而右图中的障碍物具有色散性。在左图中，$\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega)$ 的取值使得 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}):=\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\mathbf{x}\ \omega_0)$ 在 $\mathcal{O}$和 $[\omega_-,\omega_+]$处成立，其中 $\varepsilon_{\mathrm{ob}}(\cdot,\omega_0)$ 是右图中色散障碍物在参考频率 $\omega_0\in[\omega_-,\omega_+]$下的介电常数，此时会出现近似隐身。因此，这两种物理设置在 ω_0处相同。

推论65. 设障碍物满足 一阶 Sobolev 空间, H2 和 H4 *(*其中 $\mathcal{O}$ 替代 $\Omega\setminus\mathcal{O}$*)* 以及关系式 (8.143)。假设隐身装置满足假设 H1–H6 且在频率范围内无损 $[\omega_-,\omega_+]$ *(*即 H8 成立*)*。此外，假设 V_0 在以下情况下为实值函数：H7不成立（即隐身斗篷包含非互易材料）。那么，如果存在一个频率 $\omega_0\in[\omega_-,\omega_+]$ 使隐身斗篷在 ω_0处实现近似隐身，即存在 $\eta>0$ 使得

$$|F_{\tilde{V}_0}(\omega_0)|\le\eta\,G^{\mathrm{vac}}_{\tilde{V}_0},\quad\forall\tilde{V}_0\in H^{1/2}(\partial\Omega) \tag{8.150}$$

那么，对于每个 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 满足 $F_{V_0,\text{参见}\,\infty} > 0$,

$$F_{V_0}(\omega) \le F_{V_0,\mathrm{ref},\infty}(\omega) \le (-F_{V_0,\mathrm{ref},\infty} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}})\,\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega^2} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \quad \textit{if} \quad \omega \in [\omega_-,\omega_0], \tag{8.151}$$

$$F_{V_0}(\omega) \ge F_{V_0,\mathrm{ref},\infty}(\omega) \ge (F_{V_0,\mathrm{ref},\infty} + \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}})\,\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2} - \eta\, G_{V_0}^{\mathrm{vac}} \quad \textit{if} \quad \omega \in [\omega_0,\omega_+]. \tag{8.152}$$

此外，若 $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是仿射的，即对于满足 *H7* 的固定 $e_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$， $V_0 = -e_0 \cdot x|_{\partial\Omega}$ （否则假设 $e_0 \in \mathbb{R}^d$，即 *H7* 不成立），则可以在不等式 *(8.151)* 和 *(8.152)* 中用 *(8.123)* 替换 $F_{V_0,\mathrm{ref}\,\infty}$[]。

证明。 利用引理 64中证明的障碍物介电常数的单调性，以及 $\varepsilon(\cdot,\omega)$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega$在隐身斗篷上重合这一事实，可得

$$\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\mathbf{x},\omega) \le \varepsilon(\mathbf{x},\omega), \qquad \forall \omega_0,\omega \in [\omega_-,\omega_+] \mid \omega_0 \le \omega, \text{ and a.e } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{8.153}$$

$$\varepsilon(\mathbf{x},\omega) \le \varepsilon_{\mathrm{ref}}(\mathbf{x},\omega), \qquad \forall \omega_0,\omega \in [\omega_-,\omega_+] \mid \omega \le \omega_0, \text{ and a.e } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8.154}$$

此外，读者可验证，由 (8.143)、(8.144) 和 H6 可知，对所有$\omega \in [\omega_-,\omega_+]$， $\varepsilon(\cdot,\omega)$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega)$ 按定义 (5.65) 的意义是一致正的。因此，结合狄利克雷极小化原理 (5.66以及单调性 (8.153) 和 (8.154) 可得，对所有 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$:

$$\langle \Lambda_{\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega)} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le \langle \Lambda_{\varepsilon(\cdot,\omega)} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad \forall \omega_0,\omega \in [\omega_-,\omega_+] \mid \omega_0 \le \omega,$$
$$\langle \Lambda_{\varepsilon(\cdot,\omega)} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le \langle \Lambda_{\varepsilon_{\mathrm{ref}}(\cdot,\omega)} V_0, \overline{V_0}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \forall \omega_0,\omega \in [\omega_-,\omega_+] \mid \omega \le \omega_0.$$

因此，根据 F_{V_0} 和$F_{V_0,\ \mathrm{ref}}$ 的定义（8.148）和（8.149），可立即推出

$$F_{V_0}(\omega) \le F_{V_0,\mathrm{ref},\infty}(\omega) \text{ if } \omega_- \le \omega \le \omega_0 \quad \text{and} \quad F_{V_0}(\omega) \ge F_{V_0,\mathrm{ref},\infty}(\omega) \text{ if } \omega_0 \le \omega \le \omega_+.$$

假设 $F_{V_0,\ \mathrm{ref}\,\infty} > 0$，则将推论 58 应用于障碍物上介电常数为常数的参考函数$F_{V_0,\ \mathrm{ref}}$，即可得到（8.151）和（8.152）中的另一个不等式。 □

总之，第 8.3 节中关于在 ω_0处的近似隐身或隐身的所有结果仍然成立（系数改为 $F_{V_0,\mathrm{ref}}$ ∞ ，而非$F_{V_0,\infty}$）。特别是，如果在 ω_0处实现隐身，就可以取极限 $\eta \searrow 0$ ，并在界（8.151）和（8.152）中取 $\eta = 0$ 。当输入场 V_0 为仿射函数时，可得到定量界（8.124）和（8.125）；这些界涉及物理量，表明在区间 $[\omega_-,\omega_+]$ 上，除 ω_0 之外的频率也能实现隐身。此外，对于仿射输入 V_0，近似隐身的结果仍然适用。也就是说，在这种情况下，界（8.126）和（8.128）以及不等式（8.127）和（8.129）同样成立。

A 附录：辅助结果

A.1 命题证明 19

证明。 对于给定的 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$，存在唯一的 $u_{V_0} \in H^1(\Omega)$ 满足拉普拉斯方程的狄利克雷问题，即 $\Delta u_{V_0} = 0$ 在 Ω 内且 $u_{V_0} = V_0$ 在 $\partial\Omega$ 上。这定义了一个

有界线性算子 $P_\Omega \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^1(\Omega))$，其定义为 $P_\Omega(V_0) = u_{V_0}$(例如，参见 [104]第 46 页上的定理 3.14)。接着，由于 $\mathbf{a} \in M_d(L^\infty(\Omega))$，定义两个算子 $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)\ H^{-1}(\Omega))$ 和 $\mathbb{B} \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^{-1}(\Omega))$ 如下：

$$\langle \mathbb{A}v, \overline{w}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{a}\nabla v \cdot \overline{\nabla w}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{and} \quad \langle \mathbb{B}V_0, \overline{w}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \mathbf{a}\nabla \mathcal{P}_\Omega(V_0) \cdot \overline{\nabla w}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

对所有 $v,\ w \in H_0^1(\Omega)$ 以及所有 $V_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$。由柯西–施瓦茨不等式可容易证明 $\|\mathbb{A}\| \le \|\mathbf{a}\|_\infty$，并且 $\|B\| \le \|\mathbf{a}\|_\infty \|P_\Omega\|$。此外，容易证明 $u = \mathcal{P}_\Omega(V_0) + \tilde{u}_{V_0} \in H^1(\Omega)$ 是狄利克雷问题（3.23）的解，当且仅当 $\tilde{u}_{V_0} \in H_0^1(\Omega)$ 满足线性系统：$\mathbb{A}\tilde{u}_{V_0} = \mathbb{B}V_0$. 下一步是证明算子 $\mathbb{A}$ 是可逆的（作为 Lax-Milgram 引理的推论，我们在此回顾其证明）。

利用一致强制性假设（2.9）以及 Poincar´e 不等式可得 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{A}v\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \ge |\langle \mathbb{A}v, \overline{v}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \\
&\ge \left|\mathrm{Im}\left[e^{\mathrm{i}\gamma}\langle \mathbb{A}v, \overline{v}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right]\right| = \left|\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\gamma}\int_\Omega \mathbf{a}\nabla v \cdot \overline{\nabla v}\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\right| = \int_\Omega \mathfrak{I}(e^{\mathrm{i}\gamma}\mathbf{a})\nabla v \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\ge c\|\nabla v\|_{\mathcal{H}}^2 \ge C\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \qquad \text{with } C = c/2\ \min(1, C(\Omega)),
\end{aligned}$$

其中，C ´ $\|\mathbb{A}v\|_{H^{-1}} \ge C\|v\|_{H^1}$ $\forall v \in$ (Ω) 是与 Ω 相关的庞加莱常数。因此，(Ω) H_0^1 $\mathbb{A}$ (Ω)(Ω)。所以，具有单射性且值域为闭集。

为证明 $\mathbb{A}$ 的满射性，引入 $\mathbb{A}$ 的伴随算子：$\mathbb{A}^\dagger \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)\ H^{-1}(\Omega))$，将 $H_0^1(\Omega)$ 与其双对偶等同（更多细节见 [92], 第 42–43 页），从而 $\mathbb{A}^\dagger$ 由以下关系定义

$$\langle \mathbb{A}^\dagger v, \overline{w}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle v, \overline{\mathbb{A}w}\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} = \overline{\langle \mathbb{A}w, \overline{v}\rangle}_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, v,\ w \in H_0^1(\Omega).$$

采用与上文相同的论证，也可证明 $\|\mathbb{A}^\dagger v\|_{H^{-1}(\Omega)} \ge C\|v\|_{H^1(\Omega)}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$。因此 $\mathbb{A}^\dagger$ 是单射，故 $\mathbb{A}$ 是满射。由此可得 $\mathbb{A}$ 是可逆的，并且$\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)\ H_0^1(\Omega))$。因此，狄利克雷问题（3.23）的解 $u \in H^1(\Omega)$ 唯一，且由 $u = u_{V_0} + \tilde{u}_{V_0} = (\mathbb{A}^{-1}B + P_\Omega)V_0$给出。

接下来，容易证明，由 $\mathbb{D}$: $u \mapsto \mathrm{a}\nabla u$ 给出的“位移算子”属于 $\mathcal{L}(\mathcal{V}, H_{\mathrm{div}}(\Omega))$，其中 $\mathcal{V}$ 是 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间，由 $\mathcal{V} := \{u \in H^1(\Omega)\ \ |\nabla \cdot \mathrm{a}\,\nabla u = 0\}$ 定义。此外，它满足 $\|\mathbb{D}\| \le \|\mathrm{a}\|_{\infty\circ}$ 最后，通过定义法向迹算子 $\gamma_{\mathbf{n}}\colon \mathrm{v} \mapsto \underline{\mathrm{v}} \cdot \mathrm{n} \in \mathcal{L}(H_{div}(\Omega)\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$（例如参见 [58] 第 27 页的定理 2.5），可知 $\Lambda_a = \gamma_{\mathbf{n}}\mathbb{D}(A^{-1}B + P_\Omega) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 由关系式 (3.24) 定义良好。 □

A.2 关于逆算子的强收敛

我们回顾以下定义，摘自 [124, 第七章，第 182–183]。

定义 66。 设 E、F 是两个巴拿赫空间，$(\mathbb{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 中的一个算子序列，且 $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(E,F)$。称 $(\mathbb{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 强收敛到 $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(E,F)$ 当且仅当

$$\forall u \in E, \quad \|\mathbb{T}_n u - \mathbb{T}u\|_F \to 0 \quad as \quad n \to +\infty.$$

引理 67。 设 E、 F 是两个巴拿赫空间， $\mathbb{T}$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 中的一个可逆算子，且$(\mathbb{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 中的一个可逆算子序列，使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{T}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} < +\infty. \tag{A.155}$$

那么，如果 $(\mathbb{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 强收敛于 $\mathbb{T}$，则有 $(\mathbb{T}_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ 强收敛于 $\mathbb{T}^{-1}$。

证明。 我们首先指出，由于算子 $\mathbb{T}_n \in \mathcal{L}(E, F)$是可逆的，因此根据逆映射定理（见 [124] 第 83 页的定理 III.11），其逆算子 $\mathbb{T}_n^{-1}$是有界的，因而属于 $\mathcal{L}(F, E)$。此外，结合（A.155），我们在此假设这些逆算子关于 n是一致有界的。然后，利用以下恒等式：

$$\mathbb{T}_n^{-1}v - \mathbb{T}^{-1}v = \mathbb{T}_n^{-1}\left((\mathbb{T}-\mathbb{T}_n)\,\mathbb{T}^{-1}\,v\right), \quad \forall v \in F. \tag{A.156}$$

因此，由（A.156）以及$(\mathbb{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 强收敛于 $\mathbb{T}$ 可知，存在$C > 0$ 使得

$$\|\mathbb{T}_n^{-1}v - \mathbb{T}^{-1}v\|_E \le C\,\|(\mathbb{T}-\mathbb{T}_n)\,\mathbb{T}^{-1}\,v\|_E \to 0 \ \text{ as } n \to +\infty.$$

□

A.3 巴拿赫空间中的 Herglotz 函数

本节将第 2.2节中关于标量值和基体值 Herglotz 函数的讨论推广到巴拿赫空间上的算子值 Herglotz 函数。

首先，回顾这类函数的希尔伯特空间定义，以及一个众所周知的引理（例如，见 [56]），该引理将针对矩阵值赫尔格洛茨函数陈述的定义8 和引理 9推广到了算子值 Herglotz 函数的情形。

定义 68。 设 $\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间。解析函数 $h\colon\ \mathbb{C}^+ \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是算子值 *Herglotz* 函数，当且仅当

$$\Im[h(z)] \ge 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

引理 69。 设 $\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间，其内积为 $(\cdot,\cdot)$。算子值函数 $h:\ \mathbb{C}^+ \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是赫尔格洛茨函数，当且仅当对每个 $u \in \mathcal{H},\ \ z \mapsto (h(z)u, u)$ 都是赫尔格洛茨函数。

现在，我们将定义 68 和引理 69中的算子值 Herglotz 函数从希尔伯特空间推广到巴拿赫空间。这个推广受到 D. Alpay、O. Timoshenko 和 D. Volok 的研究启发 [3, 4]，他们对 Carath´eodory 函数进行了类似的推广。我们的动机在于，作为频率函数的狄利克雷到诺伊曼映射是这样一种算子值 Herglotz 函数，其定义空间为巴拿赫空间及其（共轭）对偶空间

$$\mathcal{B} = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \mathcal{B}^\dagger = H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_c = \{\ell_c : \ell \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}, \tag{A.157}$$

其中，我们将逆共轭映射定义为

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ni \ell \mapsto \ell_c \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_c,\ \ell_c(v) = \ell(\overline{v}),\ \forall \ell \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$
$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_c \ni f \mapsto f_c \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ f_c(v) = f(\overline{v}),\ \forall f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)_c, v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

因此，在这种情况下， $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}^\dagger$ 的对偶配对，以及 $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 与 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ 的对偶配对之间的关系变为

$$[f,v]_{\mathcal{B}} = f(v) = f_c(\overline{v}) = \langle f_c, \overline{v}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},\ \forall f \in \mathcal{B}^\dagger, v \in \mathcal{B},$$

$$[\ell_c,v]_{\mathcal{B}} = \ell_c(v) = \ell(\overline{v}) = \langle \ell, \overline{v}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},\ \forall \ell \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

定义 70。 设 $\mathcal{B}$ 为复巴拿赫空间， $\mathcal{B}^\dagger$ 为反线性有界函数空间（即共轭对偶空间），并将 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}^\dagger$ 的对偶配对记为

$$[f,b]_{\mathcal{B}} := f(b),\ \forall b \in \mathcal{B}, f \in \mathcal{B}^\dagger.$$

对于元素 $A \in \mathcal{L}$（$\mathcal{B}$， $\mathcal{B}^\dagger$），将其伴随算子 $A^\times \in \mathcal{L}$（$\mathcal{B}^{\dagger\dagger}$， $\mathcal{B}^\dagger$）定义为

$$A^\times(g)(b) = g(Ab),\ \forall g \in \mathcal{B}^{\dagger\dagger}, b \in B;$$

令 $C \in \mathcal{L}$（$\mathcal{B}$， $\mathcal{B}^{\dagger\dagger}$）表示典范嵌入，即

$$C(b)(g) = \overline{g(b)},\ \forall b \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{B}^\dagger;$$

其共轭伴随 $A^\dagger \in \mathcal{L}$（$\mathcal{B}$， $\mathcal{B}^\dagger$）定义为

$$A^\dagger := A^\times \circ C,$$

其满足

$$[A^\dagger b, c]_{\mathcal{B}} = (A^\dagger b)(c) = (A^\times C(b))(c) = C(b)(Ac) = \overline{(Ac)(b)} = \overline{[Ac,b]_{\mathcal{B}}};$$

A 的实部 $\mathfrak{R}$（A）和虚部 $\mathfrak{I}$（A）定义为

$$\mathfrak{R}(A) := \frac{1}{2}(A + A^\dagger),\ \mathfrak{I}(A) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^\dagger);$$

如果算子 A 是半正定的，我们记作 $A \geq 0$，则

$$[Ab,b]_{\mathcal{B}} \geq 0,\ \forall b \in \mathcal{B}.$$

定义 71. 解析函数 $h\colon \mathbb{C}^+ \to \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^\dagger)$ 是算子值 *Herglotz* 函数，当且仅当

$$\mathfrak{I}[h(z)] \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

引理 72. 设 $\mathcal{B}$ 是复巴拿赫空间。算子值函数 $h\colon \mathbb{C}^+ \to \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^\dagger)$是赫尔格洛茨函数，当且仅当对每个 $u \in \mathcal{B}$， $z \mapsto [h(z)u,u]_{\mathcal{B}}$ 都是赫尔格洛茨函数。

证明.（⇒）：显然。（⇐）：根据假设以及复向量空间上半双线性型的极化恒等式 [131, p. 25], 可知，对于每个 $u,v \in \mathcal{B}$， $z \mapsto [h(z)u,v]_{\mathcal{B}}$ 都是$\mathbb{C}^+$ 上的解析函数，因此，根据 [75, 定理 3.12，第 152-153] 页， $h\colon \mathbb{C}^+ \to \mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^\dagger)$是解析的。接下来，对于任意的 $z \in \mathbb{C}^+, u \in \mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Im}[h(z)u,u]_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}([h(z)u,u]_{\mathcal{B}} - \overline{[h(z)u,u]_{\mathcal{B}}}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}([h(z)u,u]_{\mathcal{B}} - [h(z)^\dagger u,u]_{\mathcal{B}}) \\ &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(h(z) - h(z)^\dagger)u,u\right]_{\mathcal{B}} = [\mathfrak{I}[h(z)]u,u]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

这意味着 $\mathfrak{I}[h(z)] \geq 0$。至此，引理的证明完成。 □

结合引理72、命题46 以及（A.157）立即可得本附录的以下主要结果的证明。

命题 73. 在假设 H1、H5和H6下，函数 $\omega \in \mathbb{C}^+ \mapsto \Lambda_{\omega\varepsilon(\cdot,\omega)} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega)\ H^{-1/2}(\partial\Omega))$ 是算子值 *Herglotz* 函数。

请注意，在我们关于狄利克雷到诺伊曼算子值 Herglotz 函数的设定中，$\mathcal{B} = H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是自反 Banach 空间（因为它是希尔伯特空间），因此 $\mathcal{B}$ 可与其二重对偶 $\mathcal{B}^{\dagger,\dagger}$ 通过 C 来识别；后者是巴拿赫空间之间的反线性等距同构。事实上，我们还可以进一步说明，因为 $(H^{1/2}(\partial\Omega)\ L^2(\partial\Omega)\ H^{-1/2}(\partial\Omega))$ 构成一个 Gelfand 三元组，也称为缀合希尔伯特空间；Gelfand 三元组的定义和性质见 [43, 128] 。关于其在偏微分方程中的应用示例，参见 [25, 第 136–137], ；关于其在边界 Sobolev 空间中的应用，参见 [58, 第 8]。另外，我们还可以进一步考虑与拟 Gelfand 三元组相关联的、更一般的算子值 Herglotz 函数框架，定义见 [128]；不过，详细研究这一方向超出了本文的范围。

最后需要指出的是，研究狄利克雷到诺伊曼映射还有一种算子理论方法，其中会用到 Gelfand 三元组，即边界三元组 [15, 14] ，该方法已用于研究椭圆型偏微分方程的反问题 [26, 16]。我们的论文结果能否应用于这一背景，值得进一步探讨。鉴于算子值 Herglotz 函数在其中发挥着重要作用（见 [14]），我们推测本附录会有所助益。

致谢

三位作者感谢明尼阿波利斯的 Institute for Mathematics and its Applications 在 2016 年秋季举办 Mathematics and Optics 项目期间接待他们访问，并由此启动了本项目。他们也感谢 Banff International Research Station 和 Centre International de Rencontres Math´ematiques – Marseille Luminy 分别于 2019 年和 2022 年在“Herglotz–Nevanlinna Theory Applied to Passive, Causal and Active Systems”及“Herglotz–Nevanlinna Functions and their Applications to Dispersive Systems and Composite Materials”会议期间接待他们访问，并使这项工作得以进一步推进。GWM 和 AW 还分别由衷感谢艾克斯-马赛大学和 Fresnel Institute 于 2022 年和 2024 年聘请他们担任为期一个月的客座教授和客座讲师，其间这项工作取得了显著进展。GWM 感谢 National Science Foundation 通过 DMS-1814854 和 DMS-2107926 两项资助提供支持。AW 感谢 Air Force Office of Scientific Research 通过 FA9550-15-1-0086 号资助提供支持，感谢 National Science Foundation 通过 DMS-2410678 号资助提供支持，并感谢 Simons Foundation 通过 MPS-TSM-00002799 号资助提供支持。

参考文献

[1] M. I. Abdelrahman, Z. Hayran, A. Chen, 和 F. Monticone。基于快光介质的宽带隐形的物理限制。*Nat. Commun.*，12(1):3041，2021年5月。

[2] N. I. Akhiezer 和 I. M. Glazman。《希尔伯特空间上线性算子理论》。Dover Publications, Inc.，1993年。[3] D. Alpay、O. Timoshenko 和 D. Volok。巴拿赫空间框架下的 Carath´eodory 函数。《线性代数及其应用》，425(2):700–713，2007年。[4] D. Alpay、O. Timoshenko 和 D. Volok。局部凸拓扑向量空间中的 Carath´eodory–Fej´er 插值。《线性代数及其应用》，431(8):1257–1266，2009年。[5] A. Al´u 和 N. Engheta。利用等离激元和超材料涂层实现透明性。《物理评论E》，72(1):0166623，2005年7月。[6] H. Ammari、G. Ciraolo、H. Kang、H. Lee 和 G. W. Milton。Neumann–Poincar´e型算子的谱理论及异常局域共振导致隐身的分析。《数学分析与应用档案》，208(2):667–692，2013年5月。[7] C. Amrouche、P. G. Ciarlet 和 C. Mardare。关于 Jacques-Louis Lions 的一个引理及其与其他基本结果的关系。《纯粹与应用数学杂志》，104(2):207–226，2015年。[8] K. Ando、H. Kang 和 H. Liu。有限频率下的等离激元共振：对直径极小夹杂物的准静态近似的验证。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，76(2):731–749，2016年。[9] G. Angeris、J. Vu˘ckovi´c 和 S. Boyd。光子设计的启发式方法与性能界。《光学快报》，29(2):2827–2854，2021年1月。[10]F. Assous、P. Ciarlet Jr. 和 S. Labrunie。《计算电磁学的数学基础》，应用数学科学第198卷。施普林格，瑞士，Cham，2018年。[11] G. Bao、H. Liu 和 J. Zou。对完整麦克斯韦方程实现近似隐身：利用一般导电层隐去有源内容物。《纯粹与应用数学杂志》，101(5):716–733，2014年。[12] K. Beard。《有效介质理论中Z问题变分原理的松弛》。博士论文，佛罗里达理工学院，2022年5月。[13] K. Beard、A. Stefan、J. Viator、R. 和 A. Welters。离散电网络问题的有效算子及其变分原理。《数学物理学杂志》，64(7):073501，2023年7月。[14] J. Behrndt、S. Hassi 和 H. de Snoo。《边值问题、Weyl函数与微分算子》，数学专著第108卷。Birkhauser，施普林格，瑞士，Cham，2020年。[15] J. Behrndt 和 T. Micheler。Lipschitz区域上的椭圆微分算子与抽象边值问题。《泛函分析杂志》，267(10):3657–3709，2014年。[16] J. Behrndt 和 J. Rohleder。一个带部分数据的 Calder´on 型反问题。《偏微分方程通讯》，37(6):1141–1159，2012年。[17] C. M. Bender。《PT对称性：量子与经典物理中的PT对称性》。世界科学出版社，2019 年。

[18] C. Berg。Stieltjes–Pick–Bernstein–Schoenberg 及其与完全单调性的联系。载于 J. Mateu 和 E. Porcu（编），《正定函数：从 Schoenberg 到时空挑战》，第 15–45 页。Editorial Universitat Jaume I，数学系，西班牙卡斯特利翁-德拉普拉纳，2008年。[19] A. Bernland、A. Luger 和 M. Gustafsson。无源系统的求和规则与约束。《J. Phys. A: Math. Theor.》，44(14):145205，2011年4月。[20] J. G. Berryman 和 R. V. Kohn。电阻抗断层成像的变分约束。《物理评论快报》，65(3):325–328，1990年7月。[21] H. Bhatia、G. Norgard、V. Pascucci 和 P.-T. Bremer。亥姆霍兹-霍奇分解——综述。《IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.》，19(8):1386–1404，2013年。[22]A. Bonnet-BenDhia、L. Chesnel 和 P. Ciarlet Jr.。电介质与超材料之间标量界面问题的 T-强制性。《ESAIM Math. Model. Numer. Anal.》，46:1363–1387，2012年。[23] L. Borcea。电阻抗断层成像。《Inverse Probl.》，18(6):R99–R136，2002年10月。[24] L. Borcea、G. A. Gray 和 Y. Zhang。电阻抗断层成像的变分约束数值解。《Inverse Probl.》，19(5):1159–1184，2003年9月。[25] H. Brezis。《泛函分析、Sobolev 空间与偏微分方程》。施普林格，2011年。[26] M. Brown、M. Marletta、S. Naboko 和 I. Wood。非自伴算子的边界三元组与 M 函数及其在椭圆型偏微分方程和块算子矩阵中的应用。《J. Lond. Math. Soc.》，77(3):700–718，2008年。[27] S. Brˆul´e、E. H. Javelaud、S. Enoch 和 S. Guenneau。地震超材料实验：塑造表面波。《物理评论快报》，112:133901，2014年3月。[28] A. Buffa、H. Ammari 和 J. C. N´ed´elec。麦克斯韦方程组涡流模型的合理性证明。《工业与应用数学学会应用数学杂志》，60(5):1805–1823，2000年。[29] W. Cai、U. K. Chettiar、A. V. Kildishev、V. M. Shalaev 和 G. W. Milton。散射最小化的非磁性隐身衣。《Appl. Phys. Lett.》，91(11):111105，2007年9月。[30] M. Cassier、T. DeGiovanni、S. Guenneau 和 F. Guevara Vasquez。主动热隐身与模拟。《Proc. R. Soc. A.》，477(2249):20200941，2021年。[31] M. Cassier、T. DeGiovanni、S. Guenneau 和 F. Guevara Vasquez。复波数下二维亥姆霍兹方程的主动外部隐身及其在热隐身中的应用。《Philos. Trans. R. Soc. A》，380(2237):20220073，2022 年。[32] M. Cassier 和 P. Joly。分析色散介质中电磁波传播的算子方法。第一部分：一般结果。载于《算子理论》。施普林格，第 2 版，即将于2026年出版。arXiv 预印本见 https://arxiv.org/pdf/ 2504.00239。

[33] M. Cassier、P. Joly 和 M. Kachanovska。色散电磁波的数学模型：综述。计算数学及其应用，74(11):2792–2830，2017年。[34] M. Cassier、P. Joly 和 L. A. Rosas Mart´ınez。耗散广义洛伦兹材料中麦克斯韦方程组解的长时间行为（I）：基于频率相关李雅普诺夫函数的方法。应用数学与物理杂志，74(3):115–145，2023年。[35] M. Cassier、P. Joly 和 L. A. Rosas Mart´ınez。耗散广义洛伦兹材料中麦克斯韦方程组解的长时间行为（II）：模态方法。《纯粹与应用数学杂志》，201:103720，2025年。[36] M. Cassier 和 G. W. Milton。赫尔格洛茨函数的界与宽带被动准静态隐身的基本极限。《数学物理学杂志》，58(7):071504，2017年7月。[37] M. Cassier、A. Welters 和 G. W. Milton。时谐麦克斯韦方程组的狄利克雷到诺伊曼映射的解析性。载于 G. W. Milton（编），将复合材料理论拓展至其他科学领域，第 4 章，第 95–121 页。Milton–Patton出版社，2016年。[38] J. Cham。过去十年十大物理学发现。自然·物理，11(10):799–799，2015年10月。[39] P. Chao、B. Strekha、R. Kuate Defo、S. Molesky 和 A. W. Rodriguez。电磁学中的物理极限。《自然·物理评论》，4(8):543–559，2022年8月。[40] H. Chen、Z. Liang、P. Yao、X. Jiang、H. Ma 和 C. T. Chan。拓展电磁隐身斗篷的带宽。《物理评论 *B*》，76(24):241104(R)，2007年12月。[41] M. Cheney、D. Issacson 和 J. C. Newell。电阻抗断层成像。*SIAM*评论，41(1):85–101，1999年。[42] L. Chesnel、J. Heleine 和 S. A. Nazarov。利用薄外部谐振器实现声学被动隐身。应用数学与物理杂志，73(3)，2022年6月。[43] P. Cojuhari 和 A. Gheondea。紧密嵌入的希尔伯特空间三元组。积分方程与算子理论，81(1):1–33，2015年。[44] R. Courant 和 D. Hilbert。《数学物理方法》，第 *1* 卷。Wiley，1953年。[45] C. Craeye 和 A. Bhattacharya。基于波包论证的隐身带宽经验法则。*IEEE* 天线与传播汇刊，60(7):3516–3520，2012年。[46] R. Craster、A. Diatta、S. Guenneau 和 H. Hutridurga。线性弹性中的近似隐身。《多尺度建模与仿真》，19(2):633–664，2021年。[47] R. Craster 和 S. Guenneau。《声学超材料：负折射、成像、透镜成像与隐身》。《材料科学丛书》。施普林格荷兰，2013年。[48] S. A. Cummer 和 D. Schurig。实现声学隐身的一种途径。《新物理学杂志》，9(3):45，2007年3月。

[49] R. Dautray 和 J. L. Lions。《科学与技术的数学分析与数值方法：第3卷，谱理论及其应用》。Springer-Verlag，柏林，1980年。[50] G. F. Dell'Antonio、R. Figari 和 E. Orlandi。通过正交投影研究具有线性响应的非均匀或随机介质。《亨利·庞加莱研究所年刊》A辑，44(1):1–28，1986年。[51] G. F. Dell'Antonio 和 V. Nesi。复合材料有效介电常数的一般表示。《数学物理学杂志》，29(12):2688–2694，1988年12月。[52]L. S. Dolin。关于比较具有非均匀各向异性填充的三维电磁系统的可能性。《高等院校学报：无线电电子学》，4(5):964–967，1961年。英文译本见 http://www.math.utah.edu/~milton/DolinTrans2.pdf。[53] R. Duggan、H. Moussa、Y. Ra'di、D. L. Sounas 和 A. Al`u。有源结构中超光速传播的稳定性界限。《自然通讯》，13(1):1115，2022年3月。[54] R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Musslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides。非厄米物理与PT对称性。《自然·物理》，14(1):11–19，2018年1月。[55] S. Gertler、Z. Kuang、C. Christie、H. Li 和 O. D. Miller。许多光子设计问题都是稀疏二次约束二次规划。《科学进展》，11(1):eadl3237，2025年。[56] F. Gesztesy、N. J. Kalton、K. A. Makarov 和 E. Tsekanovskii。算子值 Herglotz 函数的一些应用。载于 D. Alpay 和 V. Vinnikov 编，《算子理论、系统理论及相关主题》，第271–321页，巴塞尔，2001年。Birkh¨auser。[57] F. Gesztesy 和 E. Tsekanovskii。论矩阵值赫尔格洛茨函数。《数学新闻》，218(1):61–138，2000年。[58] V. Girault 和 P.-A. Raviart。《Navier–Stokes方程的有限元逼近》，施普林格数学丛书第5卷。Springer Verlag，1986年。[59] Y. Grabovsky。《复合材料：数学理论与精确关系》。IOP出版社，布里斯托尔，英国，2016年。[60] Y. Grabovsky。书评：将复合材料理论拓展至其他科学领域。《SIAM评论》，60(2):475–481，2017年。[61] Y. Grabovsky 和 N. Hovsepyan。上半平面内解析延拓的最优误差估计。《纯粹与应用数学通讯》，74(1):140–171，2021年。[62] A. Greenleaf、M. Lassas 和 G. Uhlmann。无法通过电阻抗断层成像检测到的各向异性电导率。《生理测量》，24(2):413–419，2003年4月。[63] A. Greenleaf、M. Lassas 和 G. Uhlmann。关于Calder´on反问题的非唯一性。《数学研究快报》，10(5):685–693，2003年。

[64] F. Guevara Vasquez、G. W. Milton 和 D. Onofrei。二维拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的主动外部隐身。*Phys. Rev. Lett.*，103(7):073901，2009年8月。[65] F. Guevara Vasquez、G. W. Milton 和 D. Onofrei。宽带外部隐身。*Opt.Express*，17(17):14800–14805，2009年8月。[66] M. Gustafsson、K. Schab、L. Jelinek 和 M. Capek。吸收与散射的上界。*New J. Phys.*，22(7):073013，2020年9月。[67] M. Gustafsson 和 D. Sj¨oberg。无源超材料的求和规则与物理界限。*New J. Phys.*，12(4):043046，2010年4月。[68]H. Hashemi、C.-W. Qiu、A. P. McCauley、J. D. Joannopoulos 和 S. G. Johnson。孤立物体隐身的直径-带宽乘积限制。*Phys. Rev. A*，86(1):013804，2012年。[69] M. Hori 和 S. Nemat-Nasser。线性和非线性非均质固体整体性质的普适界限。*J. Eng. Mater. Tech.*，117(4):412–432，1995年10月。[70] R. A. Horn 和 C. R. Johnson。《矩阵分析》。*Matrix Analysis*。剑桥大学出版社，第2版，2013年。[71] J. D. Jackson。《经典电动力学》。*Classical Electrodynamics*。John Wiley & Sons, Inc.，纽约州纽约市，第3版，1999年。[72] L. Jelinek、M. Gustafsson、M. Capek 和 K. Schab。单色无源隐身斗篷性能的基本界限。*Opt. Express*，29(15):24068–24082，2021年7月。[73] I. S. Kac 和 M. G. Kre˘ın。R函数——将上半平面映射到自身的解析函数。*Amer. Math. Soc. Transl.(2)*，103(1):1–18，1974年。[74] E. Kallos、C. Argyropoulos、Y. Hao 和 A. Al´u。非单色照明下隐身装置频率响应的比较。*Phys. Rev. B*，84:045102，2011年。[75] T. Kato。《线性算子的扰动理论》。*Perturbation Theory for Linear Operators*。数学经典。Springer-Verlag，柏林—海德堡，1995年。[76] M. Kerker。隐形物体。*J. Opt. Soc. Am.*，65(4):376–379，1975年4月。[77] R. V. Kohn、D. Onofrei、M. S. Vogelius 和 M. I. Weinstein。通过变量变换实现亥姆霍兹方程的隐身。《纯粹与应用数学通讯》，63(8):973–1016，2010年8月。[78] R. V. Kohn、H. Shen、M. S. Vogelius 和 M. I. Weinstein。通过变量变换实现电阻抗层析成像中的隐身。《反问题》，24(1):015016，2008年。[79] M. G. Kre˘ın 和 A. A. Nudel'man。《马尔可夫矩问题与极值问题》。美国数学学会数学专著译丛第50卷，普罗维登斯，罗得岛州，1974年。[80] Z. Kuang 和 O. D. Miller。通过局域守恒定律得到光–物质相互作用的计算界限。*Phys. Rev. Lett.*，125:263607，2020年12月。

[81]Y. Lai、H. Chen、Z.-Q. Zhang 和 C. T. Chan。可使隐身壳层外一定距离处的物体隐形的互补介质隐形斗篷。物理评论快报，102(9):093901，2009年3月。[82] Y. Lai、J. Ng、H. Chen、D. Han、J. Xiao、Z.-Q. Zhang 和 C. Chan。幻象光学：将一个物体光学变换为另一个物体。物理评论快报，102(25):253902，2009年6月。[83] L. D. Landau、E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevskiĭ。连续介质电动力学，理论物理学教程第8卷。培格曼出版社有限公司，英国牛津，第2版，1984年。[84] U. Leonhardt。光学共形映射。《科学》，312(5781):1777–1780，2006年6月。[85] U. Leonhardt 和 T. Tyc。通过非欧几里得隐形实现宽带隐形。《科学》，323(5910):110–112，2009年1月。[86] J. Li 和 J. B. Pendry。地毯下隐身：一种新的隐身策略。物理评论快报，101(20):203901，2008年11月。[87] Ø. Lind-Johansen、K. Seip 和 J. Skaar。有限带宽下的完美透镜。《数学物理学杂志》，50(1):012908，2009年1月。[88] H. Liu 和 H. Sun。通过FSH衬层增强近似隐形斗篷的效果。《纯粹与应用数学杂志》，99(1):17– 42，2013年。[89] Z. Luo、W. Ma、A. So、Y. Ye 和 S. Zhang。二次优化问题的半定松弛。《*IEEE*信号处理杂志》，27(3):20–34，2010年。[90] E. H. Mansfield。平板中的中性孔洞：与未切割平板弹性等效的加固孔洞。《力学与应用数学季刊》，6(3):370–378，1953年3月。[91] L. Mattner。积分号下的复微分。《新数学档案》，5/2(2):32–35，2001年。[92] W. C. H. McLean。强椭圆系统与边界积分方程。剑桥大学出版社，2000年。[93] R. C. McPhedran 和 G. W. Milton。反常共振、相关隐身效应及超透镜综述。《物理学报告》，21(4-5):409–423，2020年。[94] D. A. B. Miller。论完美隐身。《光学快报》，14(25):12457–12466，2006年。[95] G. W. Milton。多组分复合材料、电网络与新型连分数。I。《数学物理通讯》，111(2):281–327，1987年。[96] G. W. Milton。多组分复合材料、电网络与新型连分数。II。《数学物理通讯》，111(3):329–372，1987年。[97] G. W. Milton。关于刻画复合材料可能有效张量集合：变分法与平移法。《纯粹与应用数学通讯》，43(1):63– 125，1990年。

[98] G. W. Milton。两相体电学与弹性响应的普适界限，以及其在利用边界测量限定体积分数方面的应用。《力学与物理学固体杂志》，60(1):139–155，2012年。[99] G. W. Milton。复合材料理论。SIAM，费城，宾夕法尼亚州，2022 年。重印本，原版由剑桥大学出版社于2002年出版。[100] G. W. Milton、D. J. Eyre 和 J. V. Mantese。有限频率范围内的克拉默斯–克罗尼希关系：色散界限。物理评论快报，79(16):3062–3065，1997年10月。[101] G. W. Milton 和 R. V. Kohn。各向异性复合材料有效模量的变分界。《力学与物理学固体杂志》，36(6):597–629，1988年。[102] G. W. Milton 和 N.-A. P. Nicorovici。与异常局域共振相关的隐身效应。《英国皇家学会会刊*A*辑》，462(2074):3027–3059，2006年5月。[103] G. W. Milton（编）。将复合材料理论拓展至其他科学领域。Milton–Patton出版社，邮政信箱581077，盐湖城，UT 85148，美国，2016年。可从bookbaby.com获取。[104] P. B. Monk。麦克斯韦方程组的有限元方法。克拉伦登出版社，纽约，2003年。[105] F. Monticone 和 A. Al´u。电磁隐身的物理界限及超导隐身斗篷的潜力。《光子学与纳米结构：基础与应用》，12(4):330–339，2014年。[106] F. Monticone 和 A. Al´u。揭示隐形：被动隐身的物理界限。《光学》，3(7):718–724，2016年。[107] S. Nemat-Nasser 和 M. Hori。微观力学：非均质材料的整体性质，北荷兰应用数学与力学丛书第37卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1993年。[108] R. Nevanlinna。斯蒂尔吉斯矩问题的渐近展开。《芬兰科学院学报*A*辑》，18，1922年。[109] H.-M. Nguyen。变号系数亥姆霍兹方程的极限吸收原理与适定性。《纯粹与应用数学杂志》，106:342–374，2016年。[110] H.-M. Nguyˆen。通过异常局域共振使任意物体隐形：隐身斗篷与物体无关。《*SIAM*数学分析杂志》，49(4):3208–3232，2017年。[111] L. H. Nguyˆen。准静态区域内利用互补介质实现隐身。《亨利·庞加莱年鉴´e *(C)*，33(6):1509–1518，2016年。[112] N. A. Nicorovici、R. C. McPhedran 和 G. W. Milton。部分共振复合材料的光学与介电性质。《物理评论*B*辑》，49(12):8479–8482，1994年3月。

[113] N.-A. P. Nicorovici、G. W. Milton、R. C. McPhedran 和 L. C. Botten。通过反常共振实现二维可极化离散系统的准静态隐身。《光学快报》，15(10):6314–6323，2007年5月。[114] B. Nistad 和 J. Skaar。有源介质的因果性与电磁性质。*Phys.Rev. E*，78:036603，2008年9月。[115] A. N. Norris。声学隐身理论。*Proc. R. Soc. A.*，464(2097):2411–2434，2008年。[116] A. N. Norris、F. A. Amirkulova 和 W. J. Parnell。有源弹性动力学隐身。*Math.Mech. Solids*，19(6):603–625，2014年8月。[117] A. N. Norris 和 A. L. Shuvalov。弹性隐身理论。*Wave Motion*，48(6):525–538，2011年9月。.[118] J. O'Neill、O. Selsil、R. C. McPhedran、A. B. Movchan 和 N. V. Movchan。薄弹性板中弯曲波的夹杂物有源隐身。《力学与应用数学季刊》，68(3):263–288，2015年6月。[119] M.-J. Y. Ou 和 A. Luger。Herglotz–Nevanlinna函数在材料科学中的应用，II：扩展应用与广义理论。载于 M. I. Espa˜nol、M. Lewicka、L. Scardia 和 A. Schl¨omerkemper 编，材料科学数学研究，第461–499页。施普林格国际出版公司，沙姆，2022 年。[120] J. B. Pendry。负折射可实现完美透镜。物理评论快报，85(18):3966–3969，2000年10月。[121] J. B. Pendry 和 S. A. Ramakrishna。利用负折射聚焦光线。*J. Phys.Condens. Matter*，15(37):6345–6364，2003年9月。[122] J. B. Pendry、D. Schurig 和 D. R. Smith。控制电磁场。《科学》，312(5781):1780–1782，2006年6月。[123] V. Pivovarchik、N. Rozhenko 和 C. Tretter。Stieltjes弦星形图的Dirichlet–Neumann逆谱问题。《线性代数及其应用》，439(8):2263–2292，2013年。[124] M. Reed 和 B. Simon。《泛函分析》。《现代数学物理方法》。学术出版社，股份有限公司，1980年。[125] R. Schittny、M. Kadic、S. Guenneau 和 M. Wegener。变换热力学实验：塑造热流。物理评论快报，110(10):195901，2013年5月。[126] D. Schurig、J. J. Mock、B. J. Justice、S. A. Cummer、J. B. Pendry、A. F. Starr 和 D. R. Smith。微波频率下的超材料电磁隐身斗篷。《科学》，314(5801):977–980，2006年10月。[127] G. Schwarz。霍奇分解——求解边值问题的一种方法。《数学讲义》。施普林格柏林海德堡，2006年。[128] N. Skrepek。拟Gelfand三元组。*Integr. Equat. Oper. Theory*，97(1):1–38，2025年。

[129] C. Sohl、M. Gustafsson 和 G. Kristensson。非均匀障碍物宽带散射的物理限制。J. Phys. A: Math. Theor.，40(36):85–88，2007年10月。[130] B. Strekha、A. Amaolo、J. Mohajan、P. Chao、S. Molesky 和 A. W. Rodriguez。带宽积分被动隐身的限制。Phys. Rev. A，110:063513，2024年12月。[131]G. Teschl。《量子力学的数学方法：附薛定谔算子应用》。数学研究生读物。美国数学学会，第二版，2014年。[132] A. E. Thaler。介质体中夹杂物体积的界及异常局域共振导致的隐身。博士论文，犹他大学，2014年。[133] K. L. Tsakmakidis、O. Reshef、E. Almpanis、G. P. Zouros、E. Mohammadi、D. Saadat、F. Sohrabi、N. Fahimi-Kashani、D. Etezadi、R. W. Boyd 和 H. Altug。利用快光隐身斗篷实现超宽带三维隐形。Nat. Commun.，10(1):4859，2019 年10月。[134] A. Welters。复合材料数学理论中的有效算子：希尔伯特空间框架。载于《算子理论》。施普林格，第二版，预计于2026年出版。arXiv预印本见 https://arxiv.org/pdf/2512.09860。[135] A. Welters、Y. Avniel 和 S. G. Johnson。被动线性介质中的光速限制。Phys. Rev. A，90(2):023847，2014年8月。[136] H. Weyl。位势理论中的正交投影方法。Duke Math. J.，7(1):411–444，1940年。[137] O. Wiener。混合体理论：关于定常流场。第一篇：力、极化和能量的平均值定理。Abh. Math.-Phys. Kl. K ¨onigl. S ¨achs. Ges. Wiss.，32:509–604，1912年。[138] A. H. Zemanian。《连续线性系统的可实现性理论》。学术出版社，股份有限公司，纽约，1972年。[139] F. Zhang，编。《舒尔补及其应用》，数值方法与算法第4卷。施普林格，2005年。