arXiv:2601.02174v1 [math.OA] 5 Jan 2026

Lamperti 算子、扩张理论及其在非交换遍历理论中的应用

洪贵祥、刘伟、Samya Kumar Ray 和徐邦

Abstract. 本文针对非交换情形下的定量均值遍历定理，构建了一个新颖的框架，重点研究可和群与半 L_p群的作用。我们证明了由多项式体积增长群的作用所产生的遍历平均在固定的非交换 $1 < p < \infty$空间上的平方函数不等式。为此，我们建立了非齐次空间上非交换平方函数的两个端点估计。我们的方法依赖于半交换非齐次调 ´和分析，包括针对非光滑核的非倍增 Calderon-Zygmund 论证和 BMO 空间理论、关于赋有非倍增测度的群中的球与立方体的算子值不等式，以及可和群作用的经典转移方法的非交换推广。作为应用，我们为由非交换 L_p空间上 Lamperti 表示所产生的模表示正幂对应的遍历平均建立了定量遍历定理，从而推广了 [81]中的一些结果。为获得算子半群的定量遍历定理，本文探讨了一个开放问题：如何将 Fackler-Gl¨uck 的膨胀定理从单个算子推广到巴拿赫空间上的交换元组，包括非交换 L_p空间。事实上，我们的方法为交换算子族提供了真正的联合 N膨胀，统一并推广了 Sz.-Nagy–Foia¸s 和 Ak¸coglu–Sucheston 针对一类自然的相互交换的压缩算子元组所建立的经典膨胀定理，并推广了 Fackler-Gl¨uck 关于相互交换的压缩算子元组的抽象膨胀定理。这使我们能够为 $\mathbb{R}_+^d$上的一大类算子半群获得定量遍历定理。

1. Introduction

自 20 世纪 30 年代创立以来，群作用的遍历理论研究经历了非凡的发展历程。Birkhoff [9] 和 von Neumann [85] 的奠基性工作确立了单参数流的遍历定理，为 Wiener 将结果推广到多个交换流以及 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{Z}^d$ [90]上的球平均奠定了基础。Calder´on [15], 率先研究非阿贝尔群作用的遍历定理，并针对满足倍增条件的单位元紧对称邻域递增族上的平均建立了相关结果。受 Calder´on 结果的启发，人们对各种群作用的遍历定理进行了广泛研究。一个值得一提的例子是 Breuillard [11]的工作（另见 Tessera [82]），该工作证明，由任意固定的字度量定义的球序列若具有多项式增长，则满足倍增条件。这一发现导出了相应的球平均遍历定理，并肯定地解决了 Calder´on [15]提出的一个长期开放问题。对于可和群作用，Lindenstrauss [55]建立了沿温和 Følner 序列取平均的逐点遍历定理。更多信息及其他推广结果，请参阅综述文献 [4, 63]。

Date:2026年1月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号46L52；次要分类号46L51、46L53、46L55。*Key words and phrases.* 定量点态遍历定理，非倍增度量测度空间，多项式增长群，非交换平方函数，非交换 L_p-空间，膨胀。

遍历理论与冯·诺伊曼代数之间的深刻联系可追溯至算子环理论，并推动了非交换遍历理论中的一系列重要成果。Kov ℤacs 和 Sz´ucs ¨针对 [51] -作用的均值遍历定理的早期研究，后来由 Lance [54] 加以拓展；Conze 和 Dang Ngoc 将其显著推广至可和群 [21]，而 Yeadon 则推广至正 Dunford-Schwartz 算子 [86, 88]。关于均值遍历定理的全面综述，请参阅 [39, 40]。与此同时，非交换 L_p-空间中的逐点遍历定理最初是在 $p=\infty$ [54, 53, 21, 89] 和$p=1$ [86]上建立的。Junge 和 Xu 取得了重大突破，将这些结果推广至所有 $1<p<\infty$ [47]，由此推动了大量后续研究（例如，参见 [3, 7, 34, 37, 56]）。近期进展已超越这一框架。Hong、Liao 和 Wang [29] 证明了多项式增长群的遍历定理，而 Cadilhac 和 Wang [14] 则利用拟铺砌和非交换 Calder´on-Zygmund 方法，建立了可和群沿正则滤子 Følner 序列作用时的逐点收敛性。

最近，Hong、Liu 和 Xu [31] 在非交换框架下建立了首个定量平均遍历定理，具体研究了幂有界可逆算子和 Lamperti 压缩算子的情形。为恰当地陈述 [31],的主要结果，我们首先回顾一些必要的概念。设 $\mathcal{M}$ 是一个赋有正规半有限忠实迹 τ的半有限冯·诺伊曼代数。对于 $1\le p<\infty$，记 $L_p(\mathcal{M})$ 为相应的非交换 L_p-空间，记 $L_p(\mathcal{M};\ \ell_2^{rc})$ 为相应的 Hilbert 值空间（精确定义见第 2 节）。考虑作用于 T 上的有界可逆算子 $L_p(\mathcal{M})$。相应的遍历平均 $M_n(T)$ 定义为

$$M_n(T)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}T^k,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

[31]建立的首个关于幂有界可逆算子的定量平均遍历定理如下所述。

定理 A ([31])。设 $1<p<\infty$。假设

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|T^k:L_p(\mathcal{M})\to L_p(\mathcal{M})\|<\infty.$$

那么存在一个只依赖于 p 的正常数 C_p，使得

$$\sup\left\|\left(M_{n_i}(T)x-M_{n_{i+1}}(T)x\right)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\le C_p\|x\|_{L_p(\mathcal{M})},\forall x\in L_p(\mathcal{M}),\tag{1.1}$$

其中上确界取遍所有正整数的递增子列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$。

[31] 的第二个主要结果为 Lamperti 算子建立了一个定量均值遍历定理。回顾一下，$L_p(\mathcal{M})$上的有界算子 T 称为 Lamperti 算子，若对于 $\mathcal{M}$ 中任意两个满足 $ef=0$ 的 τ-有限投影 e 和 f，以下正交条件成立

$$(Te)^*Tf=Te(Tf)^*=0.$$

以下结果表述为 [31, 定理 1.4]。

定理 B ([31])。令 $1<p<\infty$。假设 T 属于该类

$$\mathfrak{S}=\overline{\mathrm{conv}}^{\mathrm{SOT}}\{S:L_p(\mathcal{M})\to L_p(\mathcal{M})\ \text{Lamperti contractions}\},\tag{1.2}$$

即 $L_p(\mathcal{M})$ 上所有 Lamperti 压缩算子的强算子拓扑闭凸包。于是存在一个正常数 C_p，仅取决于 p，使得对于每个正整数递增序列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\left\|\left(M_{n_i}(T)x-M_{n_{i+1}}(T)x\right)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\le C_p\|x\|_{L_p(\mathcal{M})}\ \forall x\in L_p(\mathcal{M}).$$

本文的主要目的是将定量平均遍历定理的研究拓展至非交换情形，尤其关注可和群和半群的作用。在全文中，设 G 表示一个配备左不变 Haar 测度 m 的局部紧群。回顾一下，对于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$，映射 $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 称为一个作用，若对于每个 $u \in G$， $\alpha_u: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个保持 $*$ 的自同构；并且对于所有 s， $u \in G$， $\alpha_s \circ \alpha_u = \alpha_{su}$。此外，若对所有 $u \in G$ 都有 $\tau \circ \alpha_u = \tau$，则称 α 为保持 τ 的作用，或称为由保持 τ 的自同构构成的作用，记作 $\alpha \curvearrowright (\mathcal{M}, \tau)$。众所周知，保持 τ 的作用 α 在所有非交换 $L_p(\mathcal{M})$-空间上都可等距延拓，其中 $1 \le p \le \infty$ （例如，参见 [47, 引理 1.1]）。以下是我们的主要结果之一。

定理 1.1。设 G 为一个具有多项式增长的群，并带有对称紧生成集 V。定义遍历平均

$$A_n(\alpha)x = \frac{1}{m(V^n)} \int_{V^n} \alpha_g x dm(g), \ x \in L_p(\mathcal{M}), n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

以下陈述成立：

(i) 固定 $1 < p < \infty$。设 α 是 G 在L_p上的强连续且一致有界的作用$\mathcal{M}$。则存在一个常数 $C_p > 0$ 使得

$$\sup_{(n_i)_i} \|(A_{n_{i+1}}x - A_{n_i}x)_i\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C_p \|x\|_p, \ \forall x \in L_p(\mathcal{M}),$$

其中，上确界取遍所有递增子列 $(n_i)_i \subseteq \mathbb{N}$。

(ii) 设 α 是 G 在 $\mathcal{M}$ 上的强连续作用，该作用通过保持 τ的自同构作用于 $\mathcal{M}$。则存在一个常数 $c_p > 0$ 使得

$$\sup_{(n_i)_i} \|(A_{n_{i+1}}x - A_{n_i}x)_i\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le c_p \|x\|_p, \ \forall x \in L_p(\mathcal{M}),$$

其中上确界按上述方式取值。

注 1.2. 当 $G = \mathbb{Z}$， $V = \{-1, 1\}$ 且 $A_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} T^k$时，定理 1.1的 (i) 部分可推出 **定理 A**。因此，我们的结果可视为非交换 $L_p(\mathcal{M}$ 空间上多项式增长群的有界表示的定量平均遍历定理。该结果受到 Hong、Liao 和 Wang 关于群作用的非交换极大遍历定理的奠基性贡献的启发 [29] 。此外，我们强调，定理 1.1 不仅适用于多项式增长群，还可推广到更一般的几何群，包括配备齐性度量的齐性群，例如 $\mathbb{R}^n$ 以及海森堡群 $\mathbb{H}^n$。

我们的第二个主要结果确立了 Lamperti 表示的定量平均遍历定理。回顾一下，若强连续且一致有界的作用 α 属于 G且作用于 $L_p(\mathcal{M})$，则称其为 Lamperti 表示，当且仅当 α_g 对每个 $g \in G$都是 Lamperti 算子。基于这类算子的典范分解定理（命题 7.4），我们构造了相应的模表示 $|\alpha|$ ，并证明以下结果，将 Templeman 的经典工作推广到非交换情形，并在这一结构化情形下大幅加强了可由 **定理 B** 推出的结果 $p = \gamma$.

定理 1.3. 设 $\mathcal{M}$ 为有限 *von Neumann* 代数， G 为具有对称紧生成集 V.的多项式增长群。假设 α 是 G 在 $L_p(\mathcal{M})$上的强连续且一致有界的 *Lamperti* 表示，其中 $1 < p < \infty$。令 $A_n(\alpha)$ 由 （*1.3*） 定义。那么对于任意 $1 \le \gamma < \infty$ 和 $\mu = \frac{p}{\gamma}$，存在 $C_{p,\gamma} > 0$ 使得

$$\sup_{(n_i)_i} \left\| \left(A_{n_{i+1}}(|\alpha|^{(\mu)})x - A_{n_i}(|\alpha|^{(\mu)})x\right)_i \right\|_{L_\gamma(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C_{p,\gamma} \|x\|_\gamma, \quad \forall x \in L_\gamma(\mathcal{M}).$$

其中，上确界取遍所有递增序列$(n_i)_i \subset \mathbb{N}$。

现在我们将注意力转向 Lamperti 算子半群。令 $1 \le p < \infty$. Denote$\mathbb{R}_+^d := \{(t_1, \dots, t_d) : t_i \ge 0,\ 1 \le i \le d\}$. 设 α 是 $\mathbb{R}_+^d$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的强连续一致有界作用。对任意 $t > 0$, 定义

$$A_t(\alpha)x := \frac{1}{t^d} \int_0^t \cdots \int_0^t \alpha_{(s_1,\dots,s_d)}(x)\, ds_1 \dots ds_d, \quad x \in L_p(\mathcal{M}).$$

定理 1.4. 设 $1 < p \ne 2 < \infty$ 和 $\alpha : \mathbb{R}_+^d \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个强连续压缩半群，且对所有 $k \in \mathbb{N}$，压缩算子交换元组 $\mathbf{T}_{1k} := (\alpha_{(\frac{1}{k},\dots,0)} \cdots, \alpha_{(0,\dots,\frac{1}{k})})$ 都存在到某个其他非交换 L_p-空间的联合膨胀，那么

$$\sup_{(t_i)_i} \left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x\right)_i \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C \|x\|_p, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}). \tag{1.4}$$

其中上确界取遍所有递增序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$

回顾一下，在 [31, 定理 1.4]（定理 B）中，我们为 Lamperti 压缩算子的绝对凸包建立了一个定量遍历定理。证明这类定量遍历不等式的一项基本方法，是将这类压缩算子膨胀为等距算子，这一点已在更早的 [33] 中实现。然而，对于一般的压缩半群，即使在希尔伯特空间的情形下，也没有可用的此类膨胀定理。关于这一方向，已知的最佳结果涉及有序阿贝尔半群上的压缩半群，该结果建立于 [60]。根据 Sz.-Nagy–Foia¸s 和 And¨o [80, 5]，的经典膨胀定理，可以将以 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}^2$ 为指标的压缩半群膨胀为等距算子半群。然而，正如 [83, 84] 所示，这种方法在三个变量时就已失效（另见 [28]，其中列举了许多反例）。为各种压缩算子交换元组建立膨胀定理，仍是算子理论中一个活跃的研究领域。关于这一主题的全面综述及若干未解决问题，可参见 Shalit 的综述 [78]。对于经典 L_p-空间上 $1 < p < \infty$ 的压缩算子，最重要的膨胀定理由 Ak¸coglu 和 Sucheston [2]，提出；该定理进而导出了这一类压缩算子的极大遍历定理。据我们所知，除了 [61, 62] 中的一些较弱膨胀结果外，对于具有 $1 < p < \infty$ 的 L_p-空间上的压缩算子元组，并不存在一般性的膨胀定理。关于经典 L_p-空间上的膨胀，更多内容可参见 [49, 25, 26, 66, 67, 68, 69] 及其中的参考文献。非交换 L_p-空间中的情形则更为微妙：正如 Junge 和 Le Merdy [45]，所示，在这种情形下不存在 Ak¸coglu–Sucheston 膨胀定理的合理类比。针对单个 $1 < p < \infty$ 的非交换 L_p-空间上压缩算子的首个膨胀定理，是在 [33] 中构造的。在一篇重要论文中，Fackler 和 Gl¨uck [24] 为一般巴拿赫空间证明了若干膨胀定理。他们的结果将 Sz.-Nagy–Foia¸s 和 Ak¸coglu–Sucheston 膨胀定理统一在一个抽象框架之下。然而，他们的结果仅限于单变量情形，无法导出关于交换元组的任何膨胀定理。事实上，正如作者自己指出的[24, 第 8] 节：“.....我们不知道能否从我们的同时膨胀结果导出可交换膨胀定理。”本文将他们的主定理推广到交换元组的情形。具体而言，我们建立了以下结果。

定理 B.1. 固定 $p \in (1, \infty)$，并设 $\mathcal{X}$ 是一个在有限个 ℓ_p-和下保持稳定的巴拿赫空间类。设 $X \in \mathcal{X}$，且 $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ 是 X 上一组两两可交换的有界线性算子族，并且它们在 $\mathcal{X}$ 中存在联合同时 N-膨胀。那么，每个算子元组 $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$，其中每个 T_i 都属于 $1 \le i \le n$ 时 $\mathcal{T}_i$ 的凸包，也存在 $\mathcal{X}$ 中的联合 N-膨胀。

未作说明的记号请参见第 8 节。作为一个直接推论，我们得到如下结果：设 $1 < p < \infty$，并假设对每个 $i = 1, \dots, n$，$\mathcal{U}_i$ 都是一族两两

可交换的 等距算子 作用于一个非交换 L_p-空间（或希尔伯特空间） $L_p(\mathcal{M})$。若$\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$ 是一个由算子组成的 n-元组，且每个 T_i 都属于 凸包 中的 $\mathcal{U}_i$，那么 $\mathbf{T}$ 对任意 联合 N-膨胀 都可在一个更大的非交换 L_p-空间（或希尔伯特空间）上实现。这一定理似乎即使在希尔伯特空间的背景下也是新的，应当引起算子理论学家的独立关注。作为一项应用，我们在定理 1.4 中证明了一个关于 $\mathbb{R}_+^d$ 上算子半群的定量遍历定理。

我们证明定理 1.1 的方法，是采用 [29, 31] 中发展起来的半交换调和分析与非交换 Calder´on 转移方法。为此，我们先引入一些记号。设 d 是 G 上的不变度量。对于 $r>0$ 和 $h\in G$，定义球 $B(h,r)=\{g\in G:\, d(g,h)\le r\}$；当 $h=e$ 时，我们将 B_r 简记为 e，其中 e 是 G 的单位元。令 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ 表示在 $\mathcal{M}$ 中具有 τ-有限支撑的算子集合。对于 $r>0$ 和 $f\colon G\to\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$，哈代–利特尔伍德平均算子定义为

$$M_r f(h)=\frac{1}{m(B(h,r))}\int_{B(h,r)} f(g)dm(g). \tag{1.5}$$

我们还回顾一下，若 G 存在 Følner 序列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，则称其为可和；也就是说，对于每个 $g\in G$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m((F_n g)\triangle F_n)}{m(F_n)}=0, \tag{1.6}$$

其中 $\triangle$ 表示两个集合通常意义下的对称差。我们的第二个结果是如下所述的转移原理。下文中，我们将配备张量迹 $\varphi=\int_G\otimes\tau$ 的 $\mathcal{N}=L_\infty(G)\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 记作。

定理 1.5。 设 G 为配备不变度量 d的可和群。对于 $1\le p<\infty$和 $x\in L_p(\mathcal{M})$，定义遍历平均 A_r 为

$$A_r x=\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}\alpha_g x dm(g),\ r>0.$$

(i) 设 $1<p<\infty$，并设 α 是 G 在 $L_p(\mathcal{M})$上的强连续且一致有界作用。假设存在正常数 C_p 使得

$$\|(M_{r_i}f-M_{r_{i+1}}f)_i\|_{L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\le C_p\|f\|_p,\ \forall f\in L_p(\mathcal{N}).$$

则存在一个绝对常数 $C>0$ 使得

$$\|(A_{r_i}x-A_{r_{i+1}}x)_i\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\le CC_p\|x\|_p,\ \forall x\in L_p(\mathcal{M}).$$

(ii) 设 $1\le p<\infty$，并设 α 是 G 在 $\mathcal{M}$ 上的强连续作用，该作用由 $\mathcal{M}$的 τ-保持自同构诱导。假设存在正常数 C_p' 使得

$$\|(M_{r_i}f-M_{r_{i+1}}f)_i\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\le C_p'\|f\|_p,\ \forall f\in L_p(\mathcal{N}),$$

则存在一个绝对常数 $C'>0$ 使得

$$\|(A_{r_{i+1}}x-A_{r_i}x)_i\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\le C'C_p'\|x\|_p,\ \forall x\in L_p(\mathcal{M}).$$

注 1.6。 如果 $G=\mathbb{Z}$，那么定理 1.5(i) 恢复了 [31, 命题 1。6]此外，当 $\mathcal{M}$是交换代数时，定理 1.5(ii) 即使在交换情形下似乎也是新的。这一迁移原理与 [29] 和 [31], 中的略有不同，因为它源自 Nevo 关于群作用的遍历定理的奠基性工作 [63]。

另一方面，众所周知，如果 G 是一个具有多项式体积增长的群，那么它是可和的（参见 [27]）。特别地，由 G 上的任意字度量生成的球族 $\{B_r\}_{r>0}$ 构成一个 Følner 序列（参见 [11, 82]）。

利用定理 1.5 ，我们只需证明相应算子值平方函数的强型（p,p）和弱型（1,1）估计。有趣的是，我们可以在更一般的背景下研究这类平方函数的有界性理论。为此，如果存在一个整数 $D>0$ ，使得对于每个球 $B(h,r)$，都可以用至多 D 个球 $B(h_i,r/2)$ 覆盖，则称（G,d）具有几何倍增性质，即

$$B(h,r)\subseteq \bigcup_{1\le i\le D} B(h_i,r/2). \tag{1.7}$$

设 $r_0>0$ 和 $\epsilon\in(0,1]$。若存在常数 $K>0$，使得对于所有 $h\in G$, $r\in(r_0,\infty)$ 以及 $s\in(0,r]$，则称这对 (G,d,m) 满足 (ϵ,r_0)-环域衰减性质。

$$m(B(h,r+s))-m(B(h,r))\le K\left(\frac{s}{r}\right)^{\epsilon} m(B(h,r)). \tag{1.8}$$

现在我们给出第三个结论。关于 BMO 空间的定义，读者可参见第 5 节。

定理 *1.7.* 假设 (G,d,m) 满足 *(1.7)* 和 *(1.8)*。设 M_r 是由 *(1.5)* 定义的平均算子。设 $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}\subseteq(r_0,\infty)$ 是一个递增序列，并对每个 i 定义 $T_i=M_{r_{i+1}}-M_{r_i}$。那么对于 $1\le p\le\infty$ ，以下断言成立，其中正常数 C_p 与 T_i 和 f 无关：

(i) 对于 $p=1$,

$$\|(T_if)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\le C_p\|f\|_1,\ \forall f\in L_1(\mathcal{N});$$

(ii) 对于 $p=\infty$,

$$\Big\|\sum_{i:i\in\mathbb{N}} T_if\otimes e_{1i}\Big\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{A})}+\Big\|\sum_{i:i\in\mathbb{N}} T_if\otimes e_{i1}\Big\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{A})}\le C_p\|f\|_\infty,\ \forall f\in L_\infty(\mathcal{N});$$

(iii) 对于 $1<p<\infty$,

$$\|(T_if)_{i\in\mathcal{N}}\|_{L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\le C_p\|f\|_p,\ \forall f\in L_p(\mathcal{N}),$$

其中 $\mathcal{A}=\mathcal{N}\overline{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)$ 配备张量迹 $\varphi\otimes tr$ ，而 tr 是 $\mathcal{B}(\ell_2)$上的典范迹。

这里，BMO($\mathcal{A}$) 表示二进 BMO 空间，其定义见小节 5.1。这里 G 的群结构并非必不可少；事实上，定理 1.7 可推广至一般度量测度空间。此外，当 $1\le p\le 2$时，定理 1.7 对任意正则博雷尔测度仍然成立 $1\le p\le 2$(参见第 4 节)。相比之下，条件 (1.8) 与 G的几何结构有内在联系。典型例子包括配备字度量的多项式增长群以及长度空间。更多细节参见 [30] 。

注 1.8。 我们指出，前述所有定理中出现的无穷求和，都应理解为通过标准的逼近论证（例如参见 [44, 第 6.A 节]） ，由相应的有限求和一致有界性所得到的结果。因此，和 [36, 31], 一样，若无歧义，本文将不再说明无穷级数的收敛性。

本文结构安排如下。在第2节，我们回顾非交换 L_p-空间和希尔伯特值 L_p-空间的定义。随后，我们介绍 Hyt¨onen 和 Kairema [38] 在度量空间中构造的“二进立方体”，并给出一些技术引理。本节还介绍近期在 ′中得到的非倍增测度下非交换 Calder [13]on-Zygmund 分解的内容。最后，我们讨论环域衰减性质，并给出满足条件（1.7）和（1.8）的一些例子。特别地，我们验证了赋予字度量的多项式增长群满足倍增测度

性质、（ϵ,1）-环域衰减性质以及（1.6）。因此，定理1.1 由定理1.5 和1.7得以成立。第4 节用于证明定理*3.1*和定理3.1 及定理3.2中所述的弱型（1,1）估计，而定理3.1 和3.2的 BMO 估计证明见第5节。第6节中，我们证明定理1.5。在第7节中，我们证明 Lamperti 表示的模的正次幂的定量遍历定理。第8 节用于证明我们的膨胀定理。最后，在第9节中，我们说明如何通过离散化，推出关于 $\mathbb{R}_+^d$ 上的半群的定量遍历定理。

在本文中，记 C 为一个正常数，它可以随行而变化；记 c_p 和 C_p 为正常数，它们可能依赖于下标。此外，记号 $X \lesssim Y$ 表示对于某个无关紧要的常数 $C > 0$，有 $X \le CY$；而 $X \approx Y$ 表示 $X \lesssim Y$ 和 $Y \lesssim X$ 同时成立。

完成本文的初稿后，我们得知，导出定理1.7 第 (iii) 部分的一些中间结果已由 [8]独立得到。

2. Preliminaries and some technical lemmas

2.1. 非交换 L_p空间。

在本文中，设 $\mathcal{M}$ 是一个配备了正规半有限忠实（*n.s.f.*）迹 τ 的冯·诺伊曼代数，且 $\mathcal{M}_+$ 是 $\mathcal{M}$的正部。记 $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{M}$中的单位元。给定 $x \in \mathcal{M}_+$， x的支撑记为 $s(x)$，定义为 $\mathcal{M}$ 中满足 $xa = x = ax$的最小投影 a。我们将所有满足 $\tau(s(x)) < \infty$的 $x \in \mathcal{M}_+$ 构成的集合记为 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_+}$，并将 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}_+}$的线性张成记为 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$。于是， $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$的一个关于 $*$稠密的 w^*子代数。设 $1 \le p < \infty$，非交换 L_p空间 $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ 定义为 $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ 关于范数完备化所得的空间

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{where } |x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $p = \infty$，我们将 $L_\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ 赋予算子范数。

设 $L_0(\mathcal{M})$ 为由 τ-可测 算子构成的 $*$-代数。非交换弱 L_p-空间 $L_{p,\infty}(\mathcal{M})$ 定义为所有 $x \in L_0(\mathcal{M})$ 的集合，并赋予以下有限拟范数

$$\|x\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda \tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|))^{\frac{1}{p}}.$$

特别地，对于弱 L_1-空间，有如下基本事实（参见 [79]）：对于任意 $x_1, x_2 \in L_{1,\infty}(\mathcal{M})$ 和 $\lambda > 0$,

$$\tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(|x_1 + x_2|)) \le \tau(\chi_{(\lambda/2,\infty)}(|x_1|)) + \tau(\chi_{(\lambda/2,\infty)}(|x_2|)). \tag{2.1}$$

关于非交换 L_p-空间和弱 L_p-空间的更多说明，请参见 [73, 23]。

2.2. 非交换希尔伯特值 L_p-空间。

设 $1 \le p < \infty$ and (x_n) 是 $L_p(\mathcal{M})$ 中的一个有限序列。定义

$$\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^r)} = \Big\| \Big(\sum_n |x_n^*|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p, \quad \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)} = \Big\| \Big(\sum_n |x_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p.$$

令 $L_p(\mathcal{M};\ell_2^r)$（分别地， $L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)$）表示 $L_p(\mathcal{M})$ 中所有有限序列关于 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^r)}$（分别地，$\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)}$）的完备化。混合空间 $L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})$ 定义如下：

- 若 $1 \le p < 2$，令

$$L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc}) = L_p(\mathcal{M};\ell_2^r) + L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)$$

赋予和范数

$$\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} = \inf\{\|(y_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^r)} + \|(z_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)}\},$$

其中，下确界取遍所有分解 $x_n = y_n + z_n$ in $L_p(\mathcal{M})$。

- 若 $2 \le p \le \infty$，令

$$L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc}) = L_p(\mathcal{M};\ell_2^r) \cap L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)$$

配备交范数

$$\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} = \max\{\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^r)}, \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^c)}\}.$$

显然，$L_2(\mathcal{M};\ell_2^r) = L_2(\mathcal{M};\ell_2^c) = L_2(\mathcal{M};\ell_2^{rc})$。将 L_p-范数替换为弱 L_p-范数，也可以使用上述过程定义非交换 Hilbert 值弱L_p-空间。例如，$L_{1,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})$ 定义为

$$\|(x_n)\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} = \inf_{x_n=y_n+z_n}\{\|(y_n)\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^r)} + \|(z_n)\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^c)}\}.$$

关于这类空间的性质，请参阅 Pisier-Xu 的著作 [73] 。特别是，以下非交换 Khintchine 不等式将被频繁使用，参见 [57, 58, 70, 12]以了解证明。

命题 2.1。 设(ε_n) 是概率空间 $(\Omega\ P)$上的 *Rademacher*序列。设 $1 \le p < \infty$ 且(x_n) 是 $L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})$中的一个序列。则存在两个正常数 c_p 和 c_p'，使得

$$c_p\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le \left\|\sum_n \varepsilon_n x_n\right\|_{L_p(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{M}))} \le c_p'\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}.$$

将 L_p-空间替换为 $L_{1,\infty}$-空间后，上述估计仍然成立。

我们还需要另一类非交换 Hilbert 值 L_p-空间。设 $(\Sigma,\ \mu)$ 为一个 σ-有限测度空间，且 $0 < p \le \infty$。列空间 $L_p(\mathcal{M};L_2^c(\Sigma))$ 由满足以下条件的算子值函数 f 构成：其范数（当 $0 < p < 1$ 时为 p-范数）有限。范数定义如下

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{M};L_2^c(\Sigma))} = \left\|\int_\Sigma f^*(w)f(w)d\mu(w)\right\|_p.$$

对我们而言，关键性质是下面的 H¨older 不等式（例如，参见 [59, 命题 1.1]）。

命题 2.2. 设 $0 \le p$、 q、 $r \le \infty$ 满足$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$。那么,- 对于任意 $f \in L_p(\mathcal{M};\ L_2^c(\Sigma))$ 和 $g \in L_q(\mathcal{M};\ L_2^c(\Sigma))$，以下不等式成立

$$\left\|\int_\Sigma f^*(w)g(w)\,d\mu(w)\right\|_r \le \left\|\left(\int_\Sigma |f(w)|^2\,d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \left\|\left(\int_\Sigma |g(w)|^2\,d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q.$$

2.3. **‘二进立方体’与边界性质**。

在本小节中，我们重新考察在满足几何倍增条件 (1.7) 和 (ϵ, r_0)-环域衰减性质 (1.8) 的度量空间 (G,d,m) 上构造的“二进立方体”。注意，(G,d,m) 未必是测度倍增空间。因此，这些“二进立方体”不再具有在倍增度量测度空间中构造的 Christ 型二进立方体所具有的边界性质（参见 [17, 定理 11 (3.6)]）。借助 [30],中有关二进立方体、球及其特定配置的边界条件的精细引理，我们推导出若干关键技术引理，以证明定理 3.1 和定理 3.2。这些引理可视为向量值非齐次调和分析中的结果，其底层巴拿赫空间是非交换 L_p 空间。由于这些估计较为精细，本文将始终固定若干常数——包括 $k_1, n_0, n_1, c_0, C_0, C_1, L_0, L_1, \delta$——它们取决于条件 (1.7)、(1.8) 以及构造方式。

众所周知，几何倍增性质蕴含倍增测度性质（参见 [19]）。因此，满足条件 (G,d,m) 的度量空间可能构成非倍增测度空间，其中这些条件为 (1.7) 和 (1.8)。然而，直接计算可知，(1.8) 蕴含以下性质：对于任意 $h\in G$ 和 $r_0<r\le R<\infty$,

$$\frac{m(B(h,R))}{m(B(h,r))}\lesssim\Big(\frac{R}{r}\Big)^{\epsilon}. \tag{2.2}$$

此估计将在后文中应用。此外，几何倍增条件立即蕴含以下性质。

命题 2.3。 设(G,d) 满足几何倍增性质，即条件(1.7)。对于任意半径为 $R>0$ 的球 $B(h,R)$ 以及任意的 $0<r\le R$，存在一个有限集合，以至多 $D^{[\log_2(R/r)]+1}$ 个半径为 r的球覆盖 $B(h,R)$ 。

几何倍增空间中的以下二进立方体系统由[38,定理 2.2]构造。

命题 2.4。 设 (G,d) 满足几何倍增性质，即条件 (1.7)。固定常数 $0<c_0<C_0<\infty$ 和 $\delta>1$，使得

$$18C_0\delta^{-1}\le c_0.$$

对于每个 $k\in\mathbb{Z}$ 和 $\{z_\alpha^k\in G$，令 I_k 为指标集：$\alpha\in I_k,k\in\mathbb{Z}\}$ 为相应的点集，且具有以下性质

$$d(z_\alpha^k,z_\beta^k)\ge c_0\delta^k\ (\alpha\ne\beta),\ \min d(w,z_\alpha^k)<C_0\delta^k,\ \forall\ w\in G,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

设定 $a_0:=c_0/3$ 和 $C_1:=2C_0$。那么，存在一族集合 $\{Q_\alpha^k\}_{\alpha\in I_k}$，与指标集 $\{z_\alpha^k\}_{\alpha\in I_k}$相关联，并满足以下性质：

(i) $\forall\ k\in\mathbb{Z},\ \cup_{\alpha\in I_k}Q_\alpha^k=G$；(ii) 若 $k\ge l$，则 $Q_\alpha^l\subset Q_\beta^k$ 或 $Q_\alpha^l\cap Q_\beta^k=\emptyset$；(iii) 对每个$(k,\alpha)$以及每个 $n>k$，都存在唯一的 Q_β^n 使得 $Q_\alpha^k\subset Q_\beta^n$；对于 $n=k+1$，元素 Q_β^{k+1} 被指定为 Q_α^k的父立方体，记作 $\widehat{Q}_\alpha^k$。(iv) $B(z_\alpha^k,a_0\delta^k)\subseteq Q_\alpha^k\subseteq B(z_\alpha^k,C_1\delta^k)$。

我们强调，几何倍增性质保证了（2.3）中第二个不等式的成立，而通过命题 [17, 定理 11 (3.6)]构造的二进立方体并不总是满足小边界性质（见）。此外，Hong 和 Liu [30] 还确立了这些立方体不同的边界性质。为实现我们的目标，我们综合了以下四个命题，它们见于 [30, 引理 2.6–2.7 和 2.9–2。10]。

命题 2.5。固定 $0<c_0<C_0<\infty$ 和 $\delta>1$，它们满足命题 *2.4*中的条件。定义

$$L_0=[\log_\delta(12/c_0)]+1,L_1=[\log_\delta(36r_0/c_0)]+1.$$

设 k、$L\in\mathbb{Z}$满足 $L_0<L<k+L_0-L_1$和 $\alpha\in I_k$。存在一个常数 $\eta>0$，它与 k、L 以及“二进立方体” Q_α^k 无关，使得

$$m\big(\{g\in Q_\alpha^k:d(h,G\setminus Q_\alpha^k)\le\delta^{k-L}\}\big)\lesssim\delta^{-L\eta}m(Q_\alpha^k),$$
$$m\big(\{g\in G\setminus Q_\alpha^k:d(h,Q_\alpha^k)\le\delta^{k-L}\}\big)\lesssim\delta^{-L\eta}m(Q_\alpha^k).$$

命题 2.6。给定一个球 B_r 和一个“二进立方体” Q_α^k，定义

$$\mathcal{H}(B_r,Q_\alpha^k)=\{h\in Q_\alpha^k:B(h,r)\cap(Q_\alpha^k)^c\ne\emptyset\}.$$

令 $n_0=$最大值$\{L_1-L_0,0\}$。那么对于每个 $n>n_0$，$k>L_0$ 和 Q_α^{n+k}，有

$$m(\mathcal{H}(B_{\delta^n},Q_\alpha^{n+k}))\lesssim\delta^{-k\eta}m(Q_\alpha^{n+k}).$$

命题 2.7. 设 $r \geq 2r_0$ 和 $s \in (0, r]$，则

$$m(B(h, r+s) \setminus B(h, r-s)) \lesssim \left(\frac{s}{r}\right)^{\epsilon} m(B(h, r)).$$

命题 2.8。令 A 是 G 上的一个可测集，定义

$$\mathcal{I}_1(A, k) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I_k \\ \partial A \cap Q_\alpha^k \neq \emptyset}} Q_\alpha^k.$$

and

$$\mathcal{I}(A, k) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I_k \\ \partial A \cap Q_\alpha^k \neq \emptyset}} Q_\alpha^k \cap A,$$

其中 ∂A 表示 A 的边界。令

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : \delta^n \geq 2r_0\}, k_1 = \max\{k \in \mathbb{Z} : 2C_1\delta^k \leq 1\}.$$

假设 $n > n_1$ 和 $k < k_1$，则对于任意 $h \in G$，有

$$\sup_{r \in [\delta^n, \delta^{n+1}]} \frac{m(\mathcal{I}_1(B(h, r), n+k))}{m(B(h, r))} \lesssim \delta^{\epsilon k}$$

$$\sup_{r \in [\delta^n, \delta^{n+1}]} \frac{m(\mathcal{I}(B(h, r), n+k))}{m(B(h, r))} \lesssim \delta^{\epsilon k}.$$

基于上述四个命题，我们得到以下技术引理。

引理 2.9。令 (G, d) 满足几何倍增性质 (1.7)。则对于 $f \in L_p(\mathcal{N})$ 满足 $p \in [1, \infty]$,

$$\sup_{r>0} \|M_r f\|_p \leq D^{1/p} \|f\|_p,$$

其中 M_r 定义于(1.5)。

证明。对于 $p = 1$，我们有

$$\|M_r f\|_{L_1(\mathcal{N})} = \|M_r f\|_{L_1(G; L_1(\mathcal{M}))} \leq \int_G \frac{1}{m(B(h, r))} \int_{B(h,r)} \|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})} dm(g) dm(h).$$

注意到，根据 [1, 定理 3.5]

$$\int_G \frac{1}{m(B(h, r))} \int_{B(h,r)} \|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})} dm(g) dm(h) \leq D \|f\|_{L_1(\mathcal{N})}.$$

因此，对于所有 $r > 0$，有 $\|M_r\|_{L_1(\mathcal{N}) \to L_1(\mathcal{N})} \leq D$。另一方面，对于所有$r > 0$，有 $\|M_r\|_{L_\infty(\mathcal{N}) \to L_\infty(\mathcal{N})} \leq 1$。于是，由插值论证（参见 [73]）可得，对于所有 $p \in [1, \infty]$，有 $\|M_r\|_{L_p(\mathcal{N}) \to L_p(\mathcal{N})} \leq D^{1/p}$。□

引理 2.10。定义

$$M_{r,n+k} f(h) = \frac{1}{m(B(h, r))} \int_{\mathcal{I}(B(h,r), n+k)} f(g) dm(g)$$

and

$$M^1_{r,n+k} f(h) = \frac{1}{m(B(h, r))} \int_{\mathcal{I}_1(B(h,r), n+k)} f(g) dm(g).$$

设 $p\in[1,2]$。假设 $n>n_{r_0}$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，则

$$\sup_{r\in[\delta^n,\delta^{n+1}]}\Big(\|M_{r,n+k}f\|_p+\|M^1_{r,n+k}f\|_p\Big)\lesssim D^{1/p}(1+\delta^k)^{\epsilon/p}\|f\|_p. \tag{2.4}$$

此外，若 $n>n_1$, $k<k_1$，则

$$\sup_{r\in[\delta^n,\delta^{n+1}]}\Big(\|M_{r,n+k}f\|_p+\|M^1_{r,n+k}f\|_p\Big)\lesssim D^{1/p}\delta^{\epsilon k/p}\|f\|_p. \tag{2.5}$$

证明。我们先证明第一个不等式。对于 $p=1$, $n>n_{r_0}$ 和 $r\in[\delta^n,\delta^{n+1}]$，由于$\mathcal{I}_1(B(h,\ r)\ n+k)\subseteq B(h,\ r+2C_1\delta^{n+k})$，由（2.2）可得

$$\frac{m(\mathcal{I}_1(B(h,r),k+n))}{m(B(h,r))}\le\frac{m(B(h,r+2C_1\delta^{n+k}))}{m(B(h,r))}\lesssim(1+\delta^k)^\epsilon. \tag{2.6}$$

接着，我们再次应用 [1, 定理 3.5]，从而推得

$$\begin{aligned}\|M^1_{r,n+k}f\|_1&\lesssim\int_G\frac{1}{m(B(h,r))}\int_{B(h,r+2C_1\delta^{n+k})}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&\lesssim\int_G\frac{(1+\delta^k)^\epsilon}{m(B(h,r+2C_1\delta^{n+k}))}\int_{B(h,r+2C_1\delta^{n+k})}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&\le D(1+\delta^k)^\epsilon\|f\|_1.\end{aligned} \tag{2.7}$$

对于 $p=2$，根据闵可夫斯基不等式和柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k)}f(g)dm(g)\Big\|^2_{L_2(\mathcal{M})}\le\Big(\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k)}\|f(g)\|_{L_2(\mathcal{M})}dm(g)\Big)^2\\&\le m(\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k))\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k)}\|f(g)\|^2_{L_2(\mathcal{M})}dm(g).\end{aligned} \tag{2.8}$$

根据（2.6）以及引理 2.9的证明，最终得到

$$\begin{aligned}\|M^1_{r,n+k}f\|_2^2&\le\int_G\frac{m(\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k))}{m(B(h,r))^2}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k)}\|f(g)\|^2_{L_2(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&\lesssim\int_G\frac{(1+\delta^k)^\epsilon}{m(B(h,r+2C_1\delta^{n+k}))}\int_{B(h,r+2C_1\delta^{n+k})}\|f(g)\|^2_{L_2(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&\lesssim D(1+\delta^k)^\epsilon\|f\|^2_{L_2(\mathcal{N})}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

上述两个估计对于 $M_{r,\ n+k}f$ 同样成立。因此，通过插值论证（参见 [73]），第一个不等式得证。

对于 $n>n_1$ 和 $k<k_1$，与情形 $n>n_{r_0}$ 相比，需要进行更精细的分析。注意到，对于 $r\in[\delta^n,\delta^{n+1}]$, 包含关系 $\mathcal{I}_1(B(h,\ r)\ n+k)\subseteq B(h,\ r+2C_1\delta^{n+k})\setminus B(h,\ r-2C_1\delta^{n+k})$ 成立。定义 $A(h)$ 为环带 $A(h)=B(h,\ r+2C_1\delta^{n+k+1})\setminus B(h,\ r-2C_1\delta^{n+k+1})$。

当 $p=1$时，应用（2.7）中的论证和 Fubini 定理，我们得到

$$\begin{aligned}\|M^1_{r,n+k}f\|_1&\lesssim\int_G\frac{1}{m(B(h,r))}\int_{A(h)}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&=\int_G\int_G\frac{\chi_{A(g)}(h)}{m(B(h,r))}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(h)dm(g).\end{aligned} \tag{2.10}$$

由 [30],中的估计 (4.6) 可知

$$\int_G\frac{\chi_{A(g)}(h)}{m(B(h,r))}dm(h)\lesssim Dr^{\epsilon k}. \tag{2.11}$$

结合（2.10）与（2.11），我们得出

$$\sup_{r\in[\delta^n,\delta^{n+1}]}\|M^1_{r,n+k}f\|_1 \lesssim D\delta^{\epsilon k}\|f\|_1. \tag{2.12}$$

我们考虑 $p=2$的情形。从（2.9）可得

$$\|M^1_{r,n+k}f\|_2^2 \le \int_G \frac{m(\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k))}{m(B(h,r))^2}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r),n+k)}\|f(g)\|^2_{L_2(\mathcal{M})}dm(g)dm(h) \tag{2.13}$$

命题 2.8 表明

$$\frac{m(\mathcal{I}_1(B(h,r),k+n))}{m(B(h,r))} \lesssim \delta^{\epsilon k}. \tag{2.14}$$

将（2.13）与（2.14）结合，并应用（2.9）中的推理，可得

$$\|M^1_{r,n+k}f\|_2^2 \lesssim D\delta^{\epsilon k}\|f\|_2^2.$$

同样的论证也适用于 $M_{r,\ n+k}f$因为 $\mathcal{I}(B(h,\ r)\ k+n)\subseteq\mathcal{I}_1(B(h,\ r)\ k+n)$。因此，插值论证给出了第二个不等式。□

引理 2.11。 设 $n>n_{r_0}$。设 $(r_i)_i$ 是属于$[\delta^n,\delta^{n+1}]$的正数递增序列。那么

$$\|\sum_i \varepsilon_i(M_{r_i}f-M_{r_{i+1}}f)\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} \lesssim D\delta^{\epsilon}\|f\|_{L_1(\mathcal{N})},$$

其中，(ε_i) 是概率空间$(\Omega\ P)$上的 *Rademacher* 序列。

证明。 注意到

$$\begin{aligned} M_{r_i}f(h)-M_{r_{i+1}}f(h) &= \Big(\frac{1}{m(B(h,r_i))}-\frac{1}{\mu(B(h,r_{i+1}))}\Big)\int_{B(h,r_i)}f(g)dm(y)\\ &\quad+\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\int_{B(h,r_{i+1})\setminus B(h,r_i)}f(g)dm(y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

因此，根据闵可夫斯基不等式，

$$\begin{aligned} &\|M_{r_i}f-M_{r_{i+1}}f\|_{L_1(\mathcal{N})}\\ &\le\int_G\Big(\frac{1}{m(B(h,r_i))}-\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\Big)\int_{B(h,r_i)}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\ &\quad+\int_G\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\int_{B(h,r_{i+1})\setminus B(h,r_i)}\|f(y)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h). \end{aligned}$$

然后对所有 i 求和，得到

$$\sum_i\|M_{r_i}f-M_{r_{i+1}}f\|_{L_1(\mathcal{N})}\le\int_G\frac{2}{m(B(h,\delta^n))}\int_{B(h,\delta^{n+1})}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h).$$

结合 (2.2) 与引理2.9，可得

$$\begin{aligned} &\int_G\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{B(h,\delta^{n+1})}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\ &\lesssim\delta^{\epsilon}\int_G\frac{1}{m(B(h,\delta^{n+1}))}\int_{B(h,\delta^{n+1})}\|f(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\ &\lesssim D\delta^{\epsilon}\|f\|_1, \end{aligned}$$

引理得证。 □

2.4. **非交换 Calderón-Zygmund 分解**。

在本小节中，我们介绍近期在 [13]中提出的、针对非倍增测度的非交换 Calder´on-Zygmund 分解。为介绍这一分解，我们先陈述非交换情形下由此得到的鞅。对于 $k \in \mathbb{Z}$, 我们将由'二进立方体' $\{Q_\alpha^k : \alpha \in I_k\}$生成的 σ-代数记为$\mathcal{F}_k$ 。令 $\mathcal{F} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_k$。设 $\mathcal{N}_k = L_\infty(G, \mathcal{F}_k, m)\bar{\otimes}\mathcal{M}$。显然，$(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$是 $\mathcal{N} = L_\infty(G, m)\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 的递减 von Neumann 子代数序列，并且 $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{N}_k$ 在 $\mathcal{N}$中弱*稠密。设 $(\mathsf{E}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是关于过滤 $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 的 $\mathcal{N}$ 的条件期望序列。此外，令 $p \in [1, \infty)$ 和 $f \in L_p(\mathcal{N})$，我们有

$$\mathsf{E}_k f = \sum_{\alpha\in I_k} f_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k}, \tag{2.16}$$

其中，$\chi_{Q_\alpha^k}$ 是 Q_α^k 的示性函数，并且

$$f_{Q_\alpha^k} = \frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k} f(w)dm(w).$$

容易看出 $\mathsf{E}_k \circ \mathsf{E}_j = \mathsf{E}_{\max(k,j)}$。令 $f \in L_p(\mathcal{N})$，容易验证 $(\mathsf{E}_k f)_k$是一个 L_p-逆向鞅，即

$$\sup_k \|\mathsf{E}_k f\|_p \le \|f\|_p. \tag{2.17}$$

为简便起见，我们用 f_k 代替 $\mathsf{E}_k f$。

根据 [18], 中的论证，我们假设 $m(G) = \infty$。定义 $L_1(\mathcal{N})_+$的一个稠密子集

$$\mathcal{N}_{c,+} = L_1(\mathcal{N}) \cap \{f | f \in \mathcal{N}_+, \overrightarrow{\text{supp}} f \text{ is compact}\},$$

其中 $\overrightarrow{\text{supp}} f = \text{supp}\|f\|_{L_1(\mathcal{M})}$。固定 $f \in \mathcal{N}_{c,+}$ 和 $\lambda > 0$。由此假设以及 [64, 引理 3.1], 中所述的论证，可得存在 $m_\lambda(f) \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k > m_\lambda(f)$ 均有 $f_k \le \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$。以下 Cuculescu 定理 [22] 可见于 [64, 引理 3.1]。

引理 2.12. 给定 $f \in \mathcal{N}_{c,+}$，令$(f_k)_k$ 为关于过滤$(\mathcal{N}_k)_k$的相应鞅。固定 $\lambda > 0$，存在一个 $m_\lambda(f) \in \mathbb{N}$ 以及由下式给出的递增投影序列$(q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$q_k = \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathcal{N}}, & k > m_\lambda(f); \\ \chi_{(0,\lambda]}(f_k), & k = m_\lambda(f); \\ \chi_{(0,\lambda]}(q_{k+1}f_k q_{k+1}), & k < m_\lambda(f). \end{cases}$$

使得

(i) q_k 是 $\mathcal{N}_k$ 中的一个投影，且与 $q_{k+1}f_k q_{k+1}$对易；(ii) 对每个 $k \in \mathbb{Z}$，均有 $q_k f_k q_k \le \lambda q_k$；(iii) 令 $q = \bigwedge_k q_k$，则

$$\|q f_k q\|_{\mathcal{N}} \le \lambda \text{ and } \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - q) \le \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{2.18}$$

更具体地说，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们有如下 q_k 表达式，

$$q_k = \sum_{\alpha\in I_k} q_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k},$$

其中，$q_{Q_\alpha^k}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个投影，由下式定义

$$q_{Q_\alpha^k} = \begin{cases} \mathbf{1}_{\mathcal{M}}, & \text{if } k > m_\lambda(f); \\ \chi_{(0,\lambda]}(f_{Q_\alpha^k}), & \text{if } k = m_\lambda(f); \\ \chi_{(0,\lambda]}(q_{\widehat{Q}_\alpha^k} f_{Q_\alpha^k} q_{\widehat{Q}_\alpha^k}), & \text{if } k < m_\lambda(f). \end{cases}$$

根据 Cuculescu 构造，可以看出这些投影满足

$$q_{Q_\alpha^k} \text{ commutes with } q_{\widehat{Q}_\alpha^k} f_{Q_\alpha^k} q_{\widehat{Q}_\alpha^k}, \quad q_{Q_\alpha^k} \le q_{\widehat{Q}_\alpha^k}, \quad q_{Q_\alpha^k} f_{Q_\alpha^k} q_{Q_\alpha^k} \le \lambda q_{Q_\alpha^k}. \tag{2.19}$$

设 $p_k = q_{k+1} - q_k$，则

$$p_k = \sum_{\alpha\in I_k} (q_{\widehat{Q}_\alpha^k} - q_{Q_\alpha^k})\chi_{Q_\alpha^k} := \sum_{\alpha\in I_k} p_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k}, \quad \text{and} \quad \sum_k p_k = \mathbf{1}_{\mathcal{N}} - q. \tag{2.20}$$

现在给出 [13] 中的非交换 Calder´on-Zygmund 分解 .

命题 2.13。 沿用 *Cuculescu* 构造中的记号，并设 $f \in \mathcal{N}_{c,\ +}$。设

$$\begin{aligned} g &:= qfq + \sum_k \mathsf{E}_{k+1}(p_k f p_k), \\ b_d &:= \sum_k b_{d,k} = \sum_k \big(p_k f p_k - \mathsf{E}_{k+1}(p_k f p_k)\big), \\ b_{off} &:= \sum_k b_{off,k} = \sum_k \big(q_k f p_k + p_k f q_k\big). \end{aligned}$$

Then

(i) $f = g + b_d + b_{off}$; (ii) $\|g\|_1 \le \|f\|_1$ 和 $\|g\|_2^2 \le 6\lambda\|f\|_1$; (iii) 对每个 $k \in \mathbb{Z}$,

$$b_{d,k} = \sum_{\alpha\in I_k} b_{d,Q_\alpha^k} := \sum_{\alpha\in I_k} \Big(p_{Q_\alpha^k} f p_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k} - \frac{m(Q_\alpha^k)}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)} p_{Q_\alpha^k} f_{Q_\alpha^k} p_{Q_\alpha^k}\Big)\chi_{\widehat{Q}_\alpha^k}$$

and

$$\int_G b_{d,Q_\alpha^k} = 0, \quad \|b_d\|_1 \le \sum_k \sum_{\alpha\in I_k} \|b_{d,Q_\alpha^k}\|_1 \le 2\|f\|_1$$

(iv) 对每个 $k \in \mathbb{Z}$,

$$b_{off,k} = \sum_{\alpha\in I_k} b_{off,Q_\alpha^k} := \sum_{\alpha\in I_k} (p_{Q_\alpha^k} f q_{Q_\alpha^k} + q_{Q_\alpha^k} f p_{Q_\alpha^k})\chi_{Q_\alpha^k}$$

and

$$\int_G b_{off,Q_\alpha^k} = 0.$$

下面的引理将用于弱型 (1,1) 估计。

引理 2.14. 令

$$\widetilde{Q}_\alpha^k = \{w \in G : d(w, z_\alpha^k) \le 4C_1\delta^{k+1}\}.$$

定义 $k_2 =$ 最小值$\{k :\ a_0\delta^k > \gamma\}$ 且

$$\zeta = \mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \Big(\bigvee_{k>k_2}\bigvee_{\alpha\in I_k} p_{Q_\alpha^k}\chi_{\widetilde{Q}_\alpha^k}\Big) \bigvee \Big(\bigvee_{k\le k_2}\bigvee_{\alpha\in I_k} p_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k}\Big).$$

Then

(i) $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta) \lesssim \frac{2(K+1)(4C_1\delta/a_0)^\epsilon}{\lambda}\|f\|_1$;

(ii) *for every* $k > k_2$

$$\zeta(h) b_{d,k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h) = 0, \quad \zeta(h) b_{off,k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h) = 0;$$

并且对于每个 $k \le k_2$

$$\zeta(h) b_{d,k}(g)\chi_{Q_\alpha^k(h)}(g)\zeta(h) = 0, \quad \zeta(h) b_{off,k}(g)\chi_{Q_\alpha^k(h)}(g)\zeta(h) = 0,$$

其中，$Q_\alpha^k(h)$ 表示包含 h 的 $\mathcal{F}_k$ 中的“二进立方体” Q_α^k。

证明。注意到

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{N}}-\zeta) &\le \sum_{k>k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\varphi(p_{Q_\alpha^k}\chi_{\widetilde{Q}_\alpha^k})+\sum_{k<k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\varphi(p_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k})\\ &\le \sum_{k>k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\tau(p_{Q_\alpha^k})\frac{m(\widetilde{Q}_\alpha^k)}{m(Q_\alpha^k)}m(Q_\alpha^k)+\sum_{k\le k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\tau(p_{Q_\alpha^k})m(Q_\alpha^k)\\ &\lesssim (4C_1\delta/a_0)^\epsilon\sum_{k>k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\tau(p_{Q_\alpha^k})m(Q_\alpha^k)+\sum_{k\le k_2}\sum_{\alpha\in I_k}\tau(p_{Q_\alpha^k})m(Q_\alpha^k)\\ &\lesssim \frac{(4C_1\delta/a_0)^\epsilon}{\lambda}\|f\|_1,\end{aligned}$$

其中，在第三个不等式中我们使用了命题 2.4(iv) 和 (2.2)，在最后一个不等式中使用了 (2.20) 和 (2.18)。估计 (i) 得证。

对于断言 (ii)，我们首先关注情形 $k>k_2$。由命题 2.13(iii)，项 $b_{d,k}$ 可分解为 $b_{d,k}=\sum_{\alpha\in I_k}b_{d,Q_\alpha^k}$，其中每个 b_{d,Q_α^k} 的支撑都包含于 $\widehat{Q}_\alpha^k$。不失一般性，假设存在一个 $\alpha\in I_k$，使得 $B(h,2C_1\delta^{k+1})\cap\widehat{Q}_\alpha^k\neq\emptyset$。取 $g\in B(h,2C_1\delta^{k+1})\cap\widehat{Q}_\alpha^k$。根据命题 2.4(iv)，我们有

$$d(h,z_\alpha^k)\le d(h,g)+d(g,\hat{z}_\alpha^k)+d(\hat{z}_\alpha^k,z_\alpha^k)\le 4C_1\delta^{k+1}.$$

由此得到 $h\in\widetilde{Q}_\alpha^k$。由于 $p_{Q_\alpha^k}\le\mathbf{1}_{\mathcal{M}}-\zeta(h)$，我们立即得到 $\zeta(h)\le\mathbf{1}_{\mathcal{M}}-p_{Q_\alpha^k}$。因此，

$$\begin{aligned}&\zeta(h)b_{d,Q_\alpha^k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h)\\ &=\zeta(h)(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}-p_{Q_\alpha^k})b_{d,Q_\alpha^k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)(\mathbf{1}_{\mathcal{M}}-p_{Q_\alpha^k})\zeta(h)=0\end{aligned}$$

已经证明了消失性质 $\zeta(h)b_{d,k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h)=0$。注意，每个$b_{off,Q_\alpha^k}$ 都支撑在 Q_α^k 上。按照证明 b_{d,Q_α^k} 时采用的相同方法，我们证明了消失性质 $\zeta(h)b_{off,Q_\alpha^k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h)=0$。由此可得，非对角项的消失性质 $\zeta(h)b_{off,k}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+1})}(g)\zeta(h)=0$ 已经得到证明。

剩下需要证明情形 $k\le k_2$ 下的断言 (ii)。固定 h。令 Q_α^k 表示 $\mathcal{F}_k$ 中包含 h 的唯一二进立方体。由 $\zeta\le\mathbf{1}_{\mathcal{N}}-p_{Q_\alpha^k}\chi_{Q_\alpha^k}$ 可知，容易验证 $\zeta(h)b_{d,Q_\alpha^k}(g)\chi_{Q_\alpha^k}(h)(g)\zeta(h)=\zeta(h)b_{off,Q_\alpha^k}(h)(g)\zeta(h)=0$。因此 $\zeta(h)b_{d,k}(g)\chi_{Q_\alpha^k}(h)(g)\zeta(h)=\zeta(h)b_{off,k}(g)\chi_{Q_\alpha^k}(h)(g)\zeta(h)=0$。证明完毕。□

3. Proof Strategy of Theorem 1.7

下面我们着重证明定理 1.7。受变分不等式研究的启发（例如参见 [10]），我们考虑的平方函数可以拆分为“长部分”和“短部分”。更确切地说，对于区间 $I_i=[r_i,r_{i+1})$，有以下两种情形：

- 情形 1：I_i 不包含“二进点” δ^k，也就是说，对于任意 $k\in\mathbb{N}$, $\delta^k\notin I_i$；
- 情形 2：I_i 至少包含一个“二进点” δ^k，其中 $k\in\mathbb{N}$。

这里 $\delta>1$ 是一个依赖于 G 的常数，将在命题 2.4中确定。根据上述分类，我们将区间 $I_i=[r_i,r_{i+1})$划分为互不相交的部分

$$[r_i,r_{i+1})=[r_i,\tilde{r}_i)\cup[\tilde{r}_i,\tilde{\tilde{r}}_i)\cup[\tilde{\tilde{r}}_i,r_{i+1}),\tag{3.1}$$

其中 $\tilde{r}_i$ 且 $\tilde{r}_i$ 由以下规则确定：若 I_i 属于情况 1，则设为 $\tilde{r}_i=\tilde{r}_i=r_{i+1}$；若 I_i属于情况 2，则设为 $\tilde{r}_i=\delta^{k_i}:=\min\{\delta^k:\delta^k\in I_i\}$ 和 $\tilde{\tilde{r}}_i=\delta^{l_i}:=\max\{\delta^k:\delta^k\in\bar{I}_i\}$ 其中

$\mathcal{I}_i$ 是.....的闭包 I_i。根据（3.1），现在我们引入关于 $\{[r_i, r_{i+1})\}_i$:

- S 由所有区间组成， I_i 这些区间属于情况 1，或者 $[r_i, \tilde{r}_i)$ ， $[\tilde{r}_i, r_{i+1})$ 在（3.1）中。
- L 由所有区间组成， $[\tilde{r}_i, \tilde{r}_i)$ 在（3.1）中。

于是，根据上述区间分解以及弱 L_1-范数的拟三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\|(M_{r_i}f - M_{r_{i+1}}f)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \le 3\|(M_{r_i}f - M_{\tilde{r}_i}f)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\\ &+ 3\|(M_{\tilde{r}_i}f - M_{\tilde{\tilde{r}}_i}f)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} + 3\|(M_{\tilde{\tilde{r}}_i}f - M_{r_{i+1}}f)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\\ &\le 3\|(M_{\tilde{r}_i}f - M_{\tilde{\tilde{r}}_{i:}}f)_{i:[\tilde{r}_i,\tilde{\tilde{r}}_i)\in L}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} + 6\|(M_{s_i}f - M_{\tilde{s}_i}f)_{i:[s_i,\tilde{s}_i)\in\mathrm{S}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}.\end{aligned}$$

首先考虑项 $\|(M_{\tilde{r}_i}f - M_{\tilde{\tilde{r}}_{i:}}f)_{i:[\tilde{r}_i,\tilde{\tilde{r}}_i)\in L}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}$。根据该定律，我们写作 $[\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) = [\delta^{k_i}, \delta^{l_i})$ ，并进行分解

$$M_{\delta^{k_i}}f - M_{\delta^{l_i}}f = M_{\delta^{k_i}}f - \mathsf{E}_{k_i}f + \mathsf{E}_{k_i}f - \mathsf{E}_{l_i}f + M_{\delta^{l_i}}f - \mathsf{E}_{l_i}f,$$

其中 $(\mathsf{E}_k f)_k$ 是第2节中定义的条件期望序列。因此，存在一个正整数序列 $k_1 < l_1 \le k_2 < l_2 < \cdots \le k_i < l_i \le \cdots$ 使得

$$\begin{aligned}&\|(M_{\tilde{r}_i}f - M_{\tilde{\tilde{r}}_{i:}}f)_{i:[\tilde{r}_i,\tilde{\tilde{r}}_i)\in L}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \le 3\|(M_{\delta^{k_i}}f - \mathsf{E}_{k_i}f)_i\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\\ &+ 3\|(\mathsf{E}_{k_i}f - \mathsf{E}_{l_i}f)_i\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} + 3\|(M_{\delta^{l_i}}f - \mathsf{E}_{l_i}f)_i\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\\ &\le 6\|(M_{\delta^n}f - \mathsf{E}_n f)_{n>n_{r_0}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} + 3\|(\mathsf{E}_{k_i}f - \mathsf{E}_{l_i}f)_i\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})},\end{aligned}$$

其中， n_{r_0} 是唯一满足 $\delta^{n_{r_0}} < r_0 \le \delta^{n_{r_0}+1}$ 的整数，最后一个不等式由 $n \mapsto (\sum_{i=0}^n |x_i|^2)^{1/2}$ 递增这一事实得出。于是可得

$$\begin{aligned}&\|(M_{r_i}f - M_{r_{i+1}}f)_{i\in\mathbb{N}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \le 6\|(M_{s_i}f - M_{\tilde{s}_i}f)_{i:[s_i,\tilde{s}_i)\in\mathrm{S}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\\ &+ 9\|(\mathsf{E}_{k_i}f - \mathsf{E}_{l_i}f)_i\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} + 18\|(M_{\delta^n}f - \mathsf{E}_n f)_{n>n_{r_0}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

利用上述论证，不难看出，(3.2) 对 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{A})}$ 也成立，只是常数可能不同，这是由三角不等式得到的。另一方面，$(\mathsf{E}_{k_i}f - \mathsf{E}_{l_i}f)_i$ 构成一个新的鞅差序列，而鞅差版本的定理 1.7已在 [74], 中得到证明，另见 [72, 75]。

因此，只需估计“长部分” $(M_{\delta^n}f - \mathsf{E}_n f)^{n>n_{r_0}}$ 和“短部分” $(M_{s_i}f - M_{\tilde{s}_i}f)_{i:[s_i,\tilde{s}_i)\in\mathrm{S}}$。我们先处理“长部分”，并进一步推导一个更一般的结果。

定理 3.1. 令 $1 \le p \le \infty$。定义算子

$$Lf = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(M_{\delta^{n+n_{r_0}}}f - \mathsf{E}_{n+n_{r_0}}f),$$

其中 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 ℓ_∞ 中的有界数列。则以下断言成立，且存在一个与 L_n 和 f 无关的正常数 C_p :

(i) 对于 $p = 1$,

$$\|Lf\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N})} \le C_p\|f\|_1,\ \forall f \in L_1(\mathcal{N});$$

(ii) 对于 $p = \infty$,

$$\|Lf\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{N})} \le C_p\,\|f\|_\infty,\ \forall f \in L_\infty(\mathcal{N});$$

(iii) 对于 $1 < p < \infty$,

$$\|Lf\|_{L_p(\mathcal{N})} \le C_p\|f\|_p,\ \forall f \in L_p(\mathcal{N}).$$

接下来考虑“短部分”。符号滥用之下，我们按顺序将序列 $\{s_0, \tilde{s}_0, s_1, \tilde{s}_1, \cdots, s_i, \tilde{s}_i, \cdots\}$ 重写为 $\{s_1, s_2, \cdots, s_i, s_{i+1}, \cdots\}$；然后将这些区间的集合

$[s_i, s_{i+1})$记作 S。我们将每个区间 $[s_i, s_{i+1})$简记为 i，并将所有此类 i组成的集合记作 $\mathcal{S}$。设 $T_i = M_{s_i} - M_{s_{i+1}}$，并令$(T_i f)_{i\in\mathcal{S}}$表示$(M_{s_i} f - M_{s_{i+1}} f)_{i:[s_i,s_{i+1})\in \mathrm{S}}$。由于映射 $n \mapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$ 是递增的，只需证明以下结果。

定理 3.2. 设 $1 \le p \le \infty$。设 T_i 和 $\mathcal{S}$ 如上所定义。则存在一个正常数 C_p，它与 T_i 和 f无关，使得以下断言成立：

(i) 对于 $p = 1$,

$$\|(T_i f)_{i\in\mathcal{S}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \le C_p \|f\|_1,\ \forall f \in L_1(\mathcal{N});$$

(ii) 对于 $p = \infty$,

$$\Big\|\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i f \otimes e_{1i}\Big\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{A})} + \Big\|\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i f \otimes e_{i1}\Big\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{A})} \le C_p \|f\|_\infty,\ \forall f \in L_\infty(\mathcal{N});$$

(iii) 对于 $1 < p < \infty$,

$$\|(T_i f)_{i\in\mathcal{S}}\|_{L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \le C_p \|f\|_p,\ \forall f \in L_p(\mathcal{N}).$$

注 3.3. 在定理 3.1中，当（v_n）是一个拉德马赫序列（ε_n）时，由非交换 Khintchine 不等式（见命题 2.1），定理 3.1(i) 和 (iii) 立即推出以下两个不等式：

$$\|(M_{\delta^n} f - \mathsf{E}_n f)_{n>n_{r_0}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \lesssim \|f\|_1 \quad \text{and} \quad \|(M_{\delta^n} f - \mathsf{E}_n f)_{n>n_{r_0}}\|_{L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})} \lesssim \|f\|_p.$$

我们还注意到，尽管定理 3.1（ii）并未给出“长部分”（$M_{\delta^n} f - \mathsf{E}_n f)_{n>n_{r_0}}$的 BMO 估计。虽然这一估计与定理 3.2（ii）中的估计类似，但我们将在第5.1小节中作详细分析。

定理 3.1 最初由 Jones 和 Rosenblatt [42, 在交换情形下证明。随后，第四位作者将这一结果推广到了 2]的平移作用的算子值情形。定理 3.2 源于第一、第二和第四位作者关于定量平均遍历不等式的工作 [31], ，该工作建立在 Jones 等人对遍历平均平方函数不等式的研究之上 [41]。这两个定理对这些早期结果作了显著的精化和推广。

定理 3.1 和 3.2 的证明策略借鉴了 [31, 87]中的一些思路。然而，条件（1.8）和（1.7）并不能保证空间（G, d, m）是一个倍增度量测度空间，这带来了新的挑战。例如，用于建立 L_p高指标 $2 < p < \infty$ 的估计 [87] 的对偶论证并不奏效。命题2.4 中构造的“二进立方体”可能不具备小边界性质（参见 [17, 定理 11]。此外，针对齐性空间的非交换 Calder´on-Zygmund 分解也不够充分。因此，我们的分析需要仔细地对立方体和球进行几何处理，并结合非交换非倍增 Calder´on-Zygmund 理论。

4. Proof of Theorem 3.1 and 3.2: Weak type $(1,1)$ estimates

本节将证明定理 *3.1* 和 3.2 的弱型 (1,1) 估计。我们先证明“长部分”对应的估计，即定理 3.1；定理 <style id='?'>3.2<style id='?'>（“短部分”）的相应结果则可通过以下引理，仿照“长部分”的证明得出。

引理 4.1。 设 $(\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{S}}$是在固定概率空间上的 *Rademacher* 序列 $(\Omega\ P)$ 且 T_i且 $\mathcal{S}$ 由定理 *3.2*定义。定义

$$\mathcal{T} f = \sum_{i\in\mathcal{S}} \varepsilon_i T_i f.$$

Then

$$\|(T_i f)_{i\in\mathcal{S}}\|_{L_{1,\infty}(\mathcal{N};\ell_2^{cr})} \approx \|\mathcal{T} f\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})},$$

其中 $L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N}$ 是配备迹 $\widetilde{\varphi} = \varphi \otimes P$ 的张量 *von Neumann* 代数。

上述引理是非交换 Khintchine 不等式（命题 2.1）的直接推论。

证明弱型 (1, 1) 估计的过程现已成为标准做法。令 $f \in L_1(\mathcal{N})$。由于f 可以分解为四个正元素的线性组合，即 $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$，其中 $f_j \geq 0$且 $\|f_j\|_1 \leq \|f\|_1$对应于 $j = 1$、2、3、4，因此只需假设 f为正元来证明弱型 (1, 1) 估计。此外，$\mathcal{N}_{c,+}$在 $L_1(\mathcal{N})_+$中稠密，因此我们只需考虑 $f \in \mathcal{N}_{c,+}$。现在固定 $f \in \mathcal{N}_{c,+}$ 和 $\lambda > 0$。下文中，符号 T 表示算子 L 或 $\mathcal{T}$，而 φ_1 表示迹 φ 或 $\widetilde{\varphi}$。结合分布不等式 (2.1) 与非交换 Calder´on-Zygmund 分解（命题 2.13），我们得到

$$\varphi_1(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Tf|)) \leq \varphi_1(\chi_{(\lambda/3,\infty)}(|Tg|)) + \varphi_1(\chi_{(\lambda/3,\infty)}(|Tb_d|)) + \varphi_1(\chi_{(\lambda/3,\infty)}(|Tb_{off}|)).$$

因此，根据引理4.1，（*1*, 1）弱型估计（$T_i f$）$_i$归结为证明

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Tb_d|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \\
&\varphi_1(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Tb_{off}|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \qquad (4.1)\\
&\varphi_1(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Tg|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

4.1. **定理3.1(i) 的证明**。

我们先给出以下估计：设 $L_n = M_{\delta^{n+n_{r_0}}} - \mathsf{E}^{n+n_{r_0}}$且 $n_2 = \max\{n_{r_0}, n_1, k_2\}$，其中 k_2 是引理2.14中定义的常数。则有

$$\Big\| \sum_{0<n\leq n_2-n_{r_0}} v_n L_n f \Big\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} \lesssim \|f\|_1. \qquad (4.2)$$

显然，

$$\Big\| \sum_{0<n\leq n_2-n_{r_0}} v_n L_n f \Big\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} \leq \Big\| \sum_{0<n\leq n_2-n_{r_0}} v_n L_n f \Big\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})},$$

并利用 L_1 范数$\|\cdot\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\otimes\mathcal{N})}$的三角不等式，可得

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{0<n\leq n_2-n_{r_0}} v_n L_n f \Big\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} &\leq \|(v_n)_n\|_{\ell^\infty} \sum_{0<n\leq n_2-n_{r_0}} \|L_n f\|_1 \\
&\leq (n_2 - n_{r_0})(D+1)\|(v_n)_n\|_{\ell^\infty}\|f\|_1,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理2.9 和（2.17）得出。因此，（4.2）得证。

根据 (4.2)，我们可以将分析限制在算子 $Lf = \sum_{n>n_2} v_n(M_{\delta^n} f - \mathsf{E}_n f)$ 上。此外，根据 (4.1)，仍需证明

$$\varphi(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Lb_d|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \qquad (4.3)$$

$$\varphi(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Lb_{off}|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \qquad (4.4)$$

$$\varphi(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Lg|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \qquad (4.5)$$

4.1.1. **对角项的弱型估计 b_d：** (4.3)。

利用引理 中引入的投影 ζ 2.14，我们将 Lb_d 分解如下

$$Lb_d = (\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta)Lb_d(\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta) + \zeta Lb_d(\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta) + (\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta)Lb_d\zeta + \zeta Lb_d\zeta.$$

引理2.14(i) 表明

$$\begin{aligned}\varphi\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|Lb_d|)\big) &\lesssim \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{N}} - \zeta) + \varphi\big(\chi_{(\lambda/4,\infty)}(|\zeta Lb_d\zeta|)\big)\\ &\lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} + \varphi\big(\chi_{(\lambda/4,\infty)}(|\zeta Lb_d\zeta|)\big).\end{aligned} \tag{4.6}$$

因此，只需证明以下界

$$\varphi\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\zeta Lb_d\zeta|)\big) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{4.7}$$

估计 (4.7)的证明。 注意到

$$\begin{aligned}\varphi\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\zeta Lb_d\zeta|)\big) &\le \frac{\|\zeta Lb_d\zeta\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})}}{\lambda}\\ &\le \frac{\|(v_n)_n\|_{\ell^\infty}\sum_{n>n_2}\|\zeta(M_{\delta^n}b_d - \mathsf{E}_n b_d)\zeta\|_1}{\lambda}.\end{aligned}$$

为完成证明，只需证明等式

$$\sum_{n>n_2}\|\zeta(M_{\delta^n}b_d - \mathsf{E}_n b_d)\zeta\|_1 \lesssim \|f\|_1. \tag{4.8}$$

在建立（4.8）之前，我们先断言

$$\forall n > n_2,\ \zeta\mathsf{E}_n b_d\zeta = 0. \tag{4.9}$$

事实上，应用命题 2.13，我们写作 $b_d = \sum_k b_{d,k} = \sum_k (p_k f p_k - \mathrm{E}_{k+1}(p_k f p_k))$。因此，若我们证明了 $\forall k, \zeta\mathrm{E}_n b_{d,k}\zeta = 0$，那么该断言便得证。为证明这一事实，我们将 k分为两种情形：$k < n$ 和 $k \ge n$。对于 $k < n$，直接应用条件期望性质（见第 2.4 小节）可得 $\mathrm{E}_n b_{d,k} = \mathrm{E}_n(p_k f p_k) - \mathrm{E}_n(\mathrm{E}_{k+1}(p_k f p_k)) = \mathrm{E}_n(p_k f p_k) - \mathrm{E}_n(p_k f p_k) = 0$。对于 $k \ge n$，根据 n_2 的定义可知 $k > k_2$。根据条件期望 E_n 的定义（见 (2.16)），我们注意到

$$\begin{aligned}&\zeta(h)\mathsf{E}_n(b_{d,k})(h)\zeta(h)\\ &= \sum_{\alpha\in I_n}\frac{1}{m(Q_\alpha^n)}\int_{Q_\alpha^n}\zeta(h)b_{d,k}(g)\zeta(h)dm(g)\chi_{Q_\alpha^n}(h).\end{aligned} \tag{4.10}$$

注意，对任意 $h \in Q_\alpha^n$，命题 2.4(iv)结合直接计算可得，对所有 $g \in Q_\alpha^n$, $d(g,h) \le d(g,z_\alpha^n) + d(z_\alpha^n, h) \le 2C_1\delta^n$。这直接推出包含关系 $Q_\alpha^n \subseteq B(h, 2C_1\delta^n)$。利用引理 2.14(ii)，我们立即得到消失性质 $\zeta\mathrm{E}_n b_{d,k}\zeta = 0$，从而完成断言 (4.9) 的证明。

应用断言（4.9）、（4.8）后，只需证明以下不等式

$$\sum_{n>n_2}\|\zeta M_{\delta^n}b_d\zeta\|_1 \lesssim \|f\|_1. \tag{4.11}$$

按照命题 2.13中的分解，我们写作 $b_d = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in I_k} b_{d,\ Q_\alpha^k}$。应用 L_1-范数的三角不等式，我们证明 (4.11) 的证明可归结为验证

$$\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in I_{k+n}}\|\zeta M_{\delta^n}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\zeta\|_1 \lesssim \|f\|_1. \tag{4.12}$$

定义

$$k_3=\min\{k\in\mathbb{N}:\ C_1\delta^{k+1}>2\ \&\ 2C_1\delta^{-k+1}<1\},\ k_4=\max\{k_2,k_3\}.$$

我们将证明

$$\|\zeta M_{\delta^n}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\zeta\|_1\lesssim a(k)\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_1, \tag{4.13}$$

其中

$$a(k)=\begin{cases}0, & k>k_4;\\ D, & -k_4\le k\le k_4;\\ D\delta^{\epsilon k}, & k<-k_4.\end{cases}$$

暂时假设这一结果成立，我们可以将4.12与4.13结合引理2.13 (iii) 立即推出。更准确地说，

$$\begin{aligned}\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in I_{k+n}}\|\zeta M_{\delta^n}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\zeta\|_1&\lesssim\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in I_{k+n}}a(k)\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_1\\&\le\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)\Big)\Big(\sum_n\sum_{\alpha\in I_n}\|b_{d,Q_\alpha^n}\|_1\Big)\\&\lesssim\|f\|_1.\end{aligned}$$

现在我们继续证明4.13。

情形 $k>k_4$。由引理 2.14(ii) 的证明，我们有 $\zeta(h)b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+n+1})}(g)\zeta(h)=0$。这立即推出

$$\begin{aligned}&\zeta(h)M_{\delta^n}(b_{d,Q_\alpha^{k+n}})(h)\zeta(h)\\&=\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{B(h,\delta^n)}\zeta(h)b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+n+1})}(g)\zeta(h)dm(g)\\&=0.\end{aligned}$$

所需结果得以证明。

情形 $-k_4\le k\le k_4$。由引理 2.9，可得

$$\|\zeta M_{\delta^n}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\zeta\|_1\le D\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_1.$$

情形 $k<-k_4$. 令 $\mathcal{I}(B(h,r)\ Q)=\{Q\cap B(h,r):\ Q\cap\partial B(h,r)\ne\emptyset\}$. 注意到 $b_{d,Q_\alpha^{k+n}}$的支撑包含于 $\widehat{Q}_\alpha^{k+n}$，且满足消失性质 $\int_{\widehat{Q}_\alpha^{k+n}}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}=0$。于是

$$M_{\delta^n}(b_{d,Q_\alpha^{k+n}})(h)=\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{\mathcal{I}(B(h,\delta^n),\widehat{Q}_\alpha^{k+n})}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)dm(g).$$

注意到 $\mathcal{I}(B(h,\delta^n)\ \widehat{Q}_\alpha^{k+n})\subseteq\{g:\ \ \delta^n-2C_1\delta^{n+k+1}\le d(g,h)\le\delta^n+2C_1\delta^{n+k+1}\}$。由式 (2.12) 可知

$$\begin{aligned}&\|\zeta M_{\delta^n}(b_{d,Q_\alpha^{k+n}})\zeta\|_{L_1(\mathcal{N})}\le\|M_{\delta^n}(b_{d,Q_\alpha^{k+n}})\|_{L_1(\mathcal{N})}\\&\le\int_G\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{\delta^n-2C_1\delta^{n+k+1}\le d(g,h)\le\delta^n+2C_1\delta^{n+k+1}}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\&\lesssim D\delta^{\epsilon k}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_{L_1(\mathcal{N})},\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

4.1.2. **非对角项的弱型估计 b_{off}：** (4.4)。

我们的目标是证明以下不等式

$$\varphi\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\zeta L b_{off}\zeta|)\big) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{4.14}$$

现在我们已准备好证明估计（4.14）。

估计（**4.14**）的证明。 类似于（4.7）的估计，只需证明

$$\sum_{n>n_2} \|\zeta(M_{\delta^n} b_{off} - \mathsf{E}_n b_{off})\zeta\|_1 \lesssim \|f\|_1. \tag{4.15}$$

在建立（4.15）之前，我们引入一个类似于（4.9）的类似命题

$$\forall n > n_2,\ \zeta \mathsf{E}_n b_{\text{off}} \zeta = 0. \tag{4.16}$$

该命题可直接由（4.9）的证明得到，只需将 b_{off} 分解为 $b_{off} = \sum_k b_{off,\ k} = \sum_k \big(q_k f p_k + p_k f q_k\big)$；为简洁起见，详细验证略去。

给定表达式 $b_{off} = \sum_k b_{off,\ k} = \sum_k \big(q_k f p_k + p_k f q_k\big)$ 并利用命题（4.16），采用与（4.11）类似的方法，我们可得，要证明估计（4.15），只需证明不等式

$$\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in I_{k+n}} \|\zeta M_{\delta^n} b_{off,k+n}\zeta\|_1 \lesssim \|f\|_1. \tag{4.17}$$

注意到（2.20）蕴含

$$\sum_n \|p_n f p_n\|_1 \le \|f\|_1, \tag{4.18}$$

由此可得，要证明（4.17），只需证明

$$\|\zeta M_{\delta^n} b_{off,k+n}\zeta\|_1 \lesssim a(k)\lambda^{\frac12}\|p_{k+n}\|_1^{\frac12}\|p_{k+n} f p_{k+n}\|_1^{\frac12}, \tag{4.19}$$

其中

$$a(k) = \begin{cases} 0, & k > k_4; \\ D(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}, & -k_4 \le k \le k_4; \\ D\delta^{\epsilon k}, & k < -k_4. \end{cases}$$

暂且假设该结果成立。结合（2.20）和（2.18），以及不等式（4.18），可立即得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\zeta M_{\delta^n} b_{off,k+n}\zeta\|_1 &\lesssim \sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\lambda^{\frac12}\|p_{k+n}\|_1^{\frac12}\|p_{k+n} f p_{k+n}\|_1^{\frac12} \\
&\le \lambda^{\frac12}\Big(\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\|p_{k+n}\|_1\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n>n_2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\|p_{k+n} f p_{k+n}\|_1\Big)^{\frac12} \\
&\lesssim \lambda^{\frac12}\frac{\|f\|_1^{\frac12}}{\lambda^{\frac12}}\|f\|_1^{\frac12} \\
&= \|f\|_1.
\end{aligned}$$

现在我们继续证明（4.19）。

情形 $k > k_4$。由命题 2.13(iii)，我们表示 $b_{off,k+n} = \sum_{\alpha\in I_{k+n}} b_{off,Q_\alpha^{k+n}}$，注意到对于每个$b_{off,\ Q_\alpha^{k+n}}$，

$$\zeta(h) M_{\delta^n}(b_{off,Q_\alpha^{k+n}})(h)\zeta(h) = \frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{B(h,\delta^n)} \zeta(h) b_{off,Q_\alpha^{k+n}}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+n+1})}(g)\zeta(h)dm(g).$$

应用引理 2.14(ii)，我们得到单位元 $\zeta(h)^{b_{off,Q_\alpha^{k+n}}}(g)\chi_{B(h,2C_1\delta^{k+n+1})}(g)\zeta(h) = 0$。结合前面的结果，我们推出 $\zeta(h)M_{\delta^n}(^{b_{off,Q_\alpha^{k+n}}})(h)\zeta(h) = 0$，这进而意味着 $\zeta M_{\delta^n} b_{off,k+n}\zeta = 0$。因此，所需结果得证。

情形 $-k_4 \le k \le k_4$。回忆一下，$b_{off,\ k+n} = q_{k+n}fp_{k+n} + p_{k+n}fq_{k+n}$，并且根据对称性，我们只需考虑项 $\|\zeta M_{\delta^n}(p_{k+n}fq_{k+n})\zeta\|_1$。注意

$$M_{\delta^n}(p_{k+n}fq_{k+n})(w) = \frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,\delta^n),k+n)} \mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(w,\delta^n)}q_{k+n})(g)dm(g).$$

令 $g(y) = f(y)\chi_{B(w,\delta^n)}(y)$，则由 (2.4) 对于 $p = 1$，可得

$$\|M_{\delta^n}(p_{k+n}fq_{k+n})\|_1 \le D(1+\delta^{k_4})^\epsilon \|p_{k+n}g_{k+n}q_{k+n}\|_1. \tag{4.20}$$

利用条件期望E_n 是正算子这一事实以及引理 2.12(ii)，得到

$$\begin{aligned} |q_{k+n}g_{k+n}p_{k+n}| &\le (p_{k+n}g_{k+n}p_{k+n})^{\frac{1}{2}}\|q_{k+n}g_{k+n}q_{k+n}\|_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \\ &\le (p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n})^{\frac{1}{2}}\|q_{k+n}f_{k+n}q_{k+n}\|_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \lambda^{\frac{1}{2}}(p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

由等式 $\|p_{k+n}g_{k+n}q_{k+n}\|_1 = \|q_{k+n}g_{k+n}p_{k+n}\|_1$，结合 (4.20)、(4.21) 和命题 2.2，可推出

$$\begin{aligned} \|\zeta M_{\delta^n}(p_{k+n}fq_{k+n})\zeta\|_1 &\le D(1+\delta^{k_4})^\epsilon\|p_{k+n}g_{k+n}q_{k+n}\|_1 \\ &\le D(1+\delta^{k_4})^\epsilon\lambda^{\frac{1}{2}}\|p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n}\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\le D(1+\delta^{k_4})^\epsilon\lambda^{\frac{1}{2}}\|p_{k+n}\|_1^{\frac{1}{2}}\|p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n}\|_1^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由 E_{k+n} 的保迹性质，可得 $\|p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n}\|_1 = \|p_{k+n}fp_{k+n}\|_1$，从而证明了所需估计。

情形 $k < -k_4$。通过扩展用于情形 $-k_4 \le k \le k_4$的论证，我们可以将证明调整为对 $p = 1$，以 (2.4) 替换为 (2.5，最终得到

$$\|M_{\delta^n}(q_{k+n}fp_{k+n})\|_1 \le D\delta^{\epsilon k}\|q_{k+n}g_{k+n}p_{k+n}\|_1.$$

于是，(4.19) 得证。 □

4.1.3. **好函数** g **的弱型估计：** (4.5)。

为了建立好部分的估计，我们需要以下命题。

命题 4.2. 设 $h \in L_2(\mathcal{N})$。则

$$\|Lh\|_{L_2(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} \lesssim \|h\|_2.$$

此处采用的证明策略与 [87, 引理 3。1]非常接近。需要强调的是，命题 2.5 和 2.6 中规定的边界条件是这一证明框架不可或缺的要素。为简洁起见，我们省略详细的证明步骤，并请读者参阅相关文献。

估计 (4.5) 的证明。 利用切比雪夫不等式、命题 4.2 和命题 2.13(ii)，我们得到

$$\varphi(\chi_{(\lambda/2,\infty)}(|Lg|)) \le \frac{\|Lg\|_2^2}{\lambda^2} \lesssim \frac{\|g\|_2^2}{\lambda^2} \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda},$$

至此，证明完成。 □

如前所述，根据引理4.1，定理 3.2(i) 的证明基本遵循定理 3.1(i) 的框架，只针对具体假设做了些许调整。然而，项 b_{off} 的处理方式与 (4.4) 的处理方式有显著差异。下面给出详细推导，并概述关键步骤。

4.2. **定理3.2(i) 的证明**。

定义 $\mathcal{S}_n = \{i : [r_i, r_{i+1}) \subseteq [\delta^n, \delta^{n+1})\}$。显然 $\mathcal{S} = \cup_{n>n_{r_0}} \mathcal{S}_n$。然后利用引理2.11，可知

$$\sum_{n_{r_0}<n\le n_2} \| \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_i T_i f\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})} \le (n_2 - n_{r_0}) D \|f\|_1.$$

根据前面的估计，只需考虑算子 $\mathcal{T}f = \sum_{n>n_2} \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_i T_i f$。此外，由于（4.1），只要证明

$$\widetilde{\varphi}(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\mathcal{T} b_d|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \tag{4.22}$$

$$\widetilde{\varphi}(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\mathcal{T} b_{off}|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda} \tag{4.23}$$

$$\widetilde{\varphi}(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\mathcal{T} g|)) \lesssim \frac{\|f\|_1}{\lambda}. \tag{4.24}$$

我们先处理项（4.22）。

4.2.1. **对角项的弱型估计 b_d：** (4.22)。

注意到（4.22）可化为

$$\frac{\| \sum_{i\in\mathcal{S}} \varepsilon_i \zeta T_i b_d \zeta\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})}}{\lambda} \lesssim \|f\|_1.$$

此外，应用 L_1 范数 $\|\cdot\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\otimes\mathcal{N})}$ 的三角不等式，只需证明

$$\frac{\sum_{n>n_2} \| \sum_{i\in\mathcal{S}_n} \varepsilon_i \zeta T_i b_d \zeta\|_{L_1(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})}}{\lambda} \lesssim \|f\|_1. \tag{4.25}$$

估计 （4.25）的证明。仿照（4.7）中的推理，要证明（4.25），只需验证

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_n} \|\zeta(M_{r_i} b_{d,Q_\alpha^{k+n}} - M_{r_{i+1}} b_{d,Q_\alpha^{k+n}})\zeta\|_1 \lesssim a(k) \|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_1, \tag{4.26}$$

其中

$$a(k) = \begin{cases} 0, & k > k_4; \\ D\delta^{\epsilon}, & -k_4 \le k \le k_4; \\ D\delta^{\epsilon k}, & k < -k_4. \end{cases}$$

现在我们继续证明（4.26）。

情形 $k > k_4$。仿照估计（4.13）中情形 $k > k_4$ 的证明，我们得到，对于所有 $r \in [\delta^n, \delta^{n+1}]$，$\zeta M_r b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}} \zeta = 0$，从而得到以下估计：$\forall i \in \mathcal{S}_n, \zeta(M_{r_i} b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}} - M_{r_{i+1}} b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}})\zeta = 0$。

情形 $-k_4 \le k \le k_4$。所需估计是引理 2.11的直接推论。

情形 $k<-k_4$。由于 $b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}}$ 支撑于 $\widehat{Q}_\alpha^{k+n}$ 且 $\int_{\widehat{Q}_\alpha^{k+n}} b_{d,\ Q_\alpha^{k+n}}=0$，因此

$$M_{r_i}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(h)=\int_{\mathcal{I}(B(h,r_i),\widehat{Q}_\alpha^{k+n})} b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)dm(g).$$

此外，(2.15) 得出如下不等式：

$$\begin{aligned}
&\|\zeta(h)(M_{r_i}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}-M_{r_{i+1}}b_{d,Q_\alpha^{k+n}})(h)\zeta(h)\|_{L_1(\mathcal{M})}\\
&\le \|M_{r_i}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(h)-M_{r_{i+1}}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(h)\|_{L_1(\mathcal{M})}\\
&\le \Big(\frac{1}{m(B(h,r_i))}-\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\Big)\int_{\mathcal{I}(B(h,r_i),\widehat{Q}_\alpha^{k+n})}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)\\
&\quad+\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\int_{\mathcal{I}(B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1}),\widehat{Q}_\alpha^{n+k})}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).
\end{aligned}\tag{4.27}$$

令 $i_0\in\mathcal{S}_n$ 使得 $\mathcal{I}(B(h,r_i)\ \widehat{Q}_\alpha^{n+k})\neq\emptyset$（若不存在这样的 i_0，则所需估计成立）。显然，$\cup_{i:\mathcal{I}(B(h,r_i)\ \widehat{Q}_\alpha^{n+k})\neq\emptyset}\mathcal{I}(B(h,r_i)\ \widehat{Q}_\alpha^{n+k})\subseteq B(h,r_{i_0}+2C_1\delta^{n+k+1})\setminus B(h,r_{i_0}-2C_1\delta^{n+k+1})$ 且 $\mathcal{I}(B(h,r_i)\ \widehat{Q}_\alpha^{k+n})\subseteq B(h,r_{i_0}+2C_1\delta^{n+k+1})\setminus B(h,r_{i_0}-2C_1\delta^{n+k+1})$。对 (4.27) 中所有 i 求和，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|\zeta(M_{r_i}b_{d,Q_\alpha^{k+n}}-M_{r_{i+1}}b_{d,Q_\alpha^{k+n}})\zeta\|_{L_1(\mathcal{N})}\\
&\lesssim\int_G\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\int_{B(h,r_{i_0}+2C_1\delta^{n+k+1})\setminus B(h,r_{i_0}-2C_1\delta^{n+k+1})}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)dm(h)\\
&\lesssim D\delta^{\epsilon k}\|b_{d,Q_\alpha^{k+n}}\|_{L_1(\mathcal{N})},
\end{aligned}$$

其中 t 最后一个不等式由（2.2）及（2.12）的证明得出。证明至此完成 . □

4.2.2. **非对角项的弱型估计** b_{off}**：** (4.23)。

（4.23）的处理方法与（4.4）有显著差异。与（4.4）不同，我们的分析采用 L_2-范数方法。证明的关键在于以下几乎正交原理的一个版本（例如，参见 [30, 32]）。

引理 4.3. 设 $(T_{n,i})_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}}$ 是作用于 $L_2(\mathcal{N})$上的有界线性算子序列。设 $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$和$(v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L_2(\mathcal{N})$ 中的两个算子序列，满足 $f=\sum_k u_k$ 和 $\sum_k\|v_k\|_2^2<\infty$。假设对每个 $n>N$，存在一个正序列 $(\sigma(k))_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $\sigma=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)<\infty$，使得

$$\|(T_{n,i}(u_{k+n}))_i\|_{L_2(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}^2\le a(k)\|v_{k+n}\|_1,$$

then

$$\sum_{n>N}\|(T_{n,i}(f))_i\|_{L_2(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}^2\le\sigma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|v_k\|_1.$$

证明。根据已有条件，对 $L_2(\mathcal{N};\ell_2^{rc})$-范数使用三角不等式，并对 ℓ_2-范数使用杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n>N}\|(T_{n,i}(f))_i\|_{L_2(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}^2&\le\sum_{n>N}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|(T_{n,i}(u_{k+n}))_i\|_{L_2(\mathcal{N};\ell_2^{rc})}\Big)^2\\
&\le\sum_{n>N}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)^{\frac12}\|v_{k+n}\|_1^{\frac12}\Big)^2
\end{aligned}$$

$$\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)\Big)^2 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|v_k\|_1\Big),$$

至此证明完毕。 □

现在我们继续证明（4.23）。

（4.23）的证明。结合切比雪夫不等式以及 ε_i 的正交性，（4.23）归结为证明

$$\widetilde{\varphi}\big(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\zeta T b_{off}\zeta|)\big) \leq \frac{\sum_{n>n_2}\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|\zeta T_i b_{off}\zeta\|_2^2}{\lambda^2}.$$

只需证明

$$\sum_{n>n_2}\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|\zeta T_i b_{off}\zeta\|_2^2 \lesssim \lambda\sum_n \|p_n f p_n\|_1 \tag{4.28}$$

因为根据（2.20）

$$\sum_n \|p_n f p_n\|_1 \leq \|f\|_1.$$

为证明（4.28），如命题 2.13 中所述，我们首先将 $b_{off} = \sum_k b_{off}$ 表示为 $k = \sum_k \big(q_k f p_k + p_k f q_k\big)$。令 $(T_{n,\,i})_{n,\,i} = (M_{r_{i+1}} - M_{r_i})_{i\in\mathcal{S}_n}$，$N = n_2$，$u_k = b_{off,\,k}$ 并令 $v_k = p_k f p_k$ 在引理4.3中，则只需证明

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|M_{r_{i+1}}b_{off,k+n} - M_{r_i}b_{off,k+n}\|_2^2 \leq \lambda a(k)\|p_{k+n}fp_{k+n}\|_1, \tag{4.29}$$

其中

$$a(k) = \begin{cases} 0, & k > k_4; \\ D(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}, & -k_4 \leq k \leq k_4; \\ D\delta^{\epsilon k}, & k < -k_4. \end{cases}$$

现在我们转而证明（4.29）。

情形 $k > k_4$。所需估计可直接由估计（4.19）中给出的 $k > k_4$ 情形的证明得到。

情形 $-k_4 \leq k \leq k_4$。回顾 $b_{off,\,k+n} = q_{k+n}fp_{k+n} + p_{k+n}fq_{k+n}$，由对称性，我们只需考虑项 $p_{k+n}fq_{k+n}$。根据（2.15），我们首先设

$$M_i^1 f(h) = \Big(\frac{1}{m(B(h,r_i))} - \frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\Big)\int_{B(h,r_i)} f(g)dm(g)$$
$$M_i^2 f(h) = \frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\int_{B(h,r_{i+1})\setminus B(h,r_i)} f(g)dm(g).$$

因此，

$$\|M_{r_{i+1}}p_{k+n}fq_{k+n} - M_{r_i}p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2 \leq 2\|M_i^1 p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2 + 2\|M_i^2 p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2.$$

我们首先关注项 $\|M_i^1 p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2$。注意到

$$\int_{B(h,r_i)} p_{k+n}(g)f(g)q_{k+n}(g)dm(g) = \int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i),k+n)} \mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(h,r_i)}q_{k+n})(g)dm(g),$$

并类比式（4.21），我们推得

$$\begin{aligned}|q_{k+n}g_{k+n}p_{k+n}|^2 &\le p_{k+n}g_{k+n}p_{k+n}\|q_{k+n}g_{k+n}q_{k+n}\|_{\mathcal{M}}\\ &\le p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n}\|q_{k+n}f_{k+n}q_{k+n}\|_{\mathcal{M}}\\ &\le \lambda p_{k+n}f_{k+n}p_{k+n}.\end{aligned}$$

结合（2.6）和（2.8）以及上述观察，我们推得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\Big\|\int_{B(h,r_i)}p_{k+n}(g)f(g)q_{k+n}(g)dm(g)\Big\|_{L_2(\mathcal{M})}^2\\ &\lesssim \lambda(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i),k+n)}\|\mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(w,r_i)}p_{k+n})(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).\end{aligned}\tag{4.30}$$

由于 f是正的，且 $\mathcal{I}_1(B(h,\ r_i)\ k+n)\in\mathcal{F}_{k+n}$，因此根据$\mathsf{E}_{k+n}$的定义，可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i),k+n)}\|\mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(h,r_i)}p_{k+n})(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g)\\ &\le\int_{B(h,r_i)}p_{k+n}(g)f(g)p_{k+n}(g)dm(g).\end{aligned}\tag{4.31}$$

结合（2.2）、（4.30）和（4.31）可得

$$\begin{aligned}\|M_i^1p_{k+n}fq_{k+n}(h)\|_{L_2(\mathcal{M})}^2 &\lesssim \lambda(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}\Big(\frac{1}{m(B(h,r_i))}-\frac{1}{m(B(h,r_{i+1}))}\Big)\\ &\quad\times\int_{B(h,\delta^{n+1})}\|p_{k+n}(g)f(g)p_{k+n}(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).\end{aligned}$$

对上述不等式 $i\in\mathcal{S}_n$ 求和，并应用（2.2）和引理2.9，得到

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|M_i^1p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2\lesssim\lambda D(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}\|p_{k+n}fp_{k+n}\|_1.$$

前面的论证应用于项 $\|M_i^2p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2$时仍然成立。简要说明如下。主要观察是 $\mathcal{I}_1(B(h,\ r_i)\setminus B(h,\ r_{i-1})\ k+n)\subseteq\mathcal{I}_1(B(h,\ r_i)\ k+n)\cup\mathcal{I}_1(B(h,\ r_{i-1})\ k+n)$以及

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\Big\|\int_{B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1})}p_{k+n}(g)f(g)q_{k+n}(g)dm(g)\Big\|_{L_2(\mathcal{M})}^2\\ &\lesssim\lambda(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1}),k+n)}\|\mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1})}p_{k+n})(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).\end{aligned}$$

因此，将上述不等式对 $i\in\mathcal{S}_n$ 求和，可得

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\|M_i^2p_{k+n}fq_{k+n}\|_2^2\lesssim\lambda D(1+\delta^{k_4})^{\epsilon}\|p_{k+n}fp_{k+n}\|_1.$$

所需估计得证。

情形 $k<-k_4$。情形 $-k_4\le k\le k_4$ 的论证在此仍然成立。注意，利用 (2.14)、(2.8) 和 (4.21)，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\Big\|\int_{B(h,r_i)}p_{k+n}(y)f(g)q_{k+n}(g)dm(g)\Big\|_{L_2(\mathcal{M})}^2\\ &\lesssim\lambda\delta^{k\epsilon}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i),k+n)}\|\mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(h,r_i)}p_{k+n})(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\Big\|\int_{B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1})} p_{k+n}(y)f(g)q_{k+n}(g)dm(g)\Big\|_{L_2(\mathcal{M})}^2$$
$$\lesssim \lambda\delta^{k\epsilon}\int_{\mathcal{I}_1(B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1}),k+n)}\|\mathsf{E}_{k+n}(p_{k+n}f\chi_{B(h,r_i)\setminus B(h,r_{i-1})}p_{k+n})(g)\|_{L_1(\mathcal{M})}dm(g).$$

因此，我们已证明 (4.29)，证明至此完成。 □

4.2.3. **好函数的弱型估计** g**:** (4.24)。

在证明（4.24）之前，我们需要以下命题。

命题 4.4. 设 $h\in L_2(\mathcal{N})$。则

$$\|\mathcal{T}h\|_{L_2(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})}\lesssim\|h\|_2.$$

该命题对应于希尔伯特值平方函数不等式，其证明采用了与经典情形类似的方法（例如参见 [30]）。为简洁起见，我们省略细节。

估计 (4.24)的证明。 沿用（4.5）的证明思路，应用切比雪夫不等式和命题 4.4可得

$$\widetilde{\varphi}(\chi_{(\lambda,\infty)}(|\mathcal{T}g|))\le\frac{\|\mathcal{T}g\|_{L_2(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{N})}^2}{\lambda^2}=\frac{\left\|\left(\sum_{n>n_2}\sum_{i\in\mathcal{S}_n}|T_if|^2\right)^{\frac12}\right\|_2^2}{\lambda^2}\lesssim\frac{\|g\|_2^2}{\lambda^2}\lesssim\frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

□

5. Proof of Theorem 3.1 and 3.2: (L_∞, BMO) and strong type (p, p) estimates

在本节中，我们分别证明定理 L_∞，BMO) 和强型 (p, p) 估计中所述的结论3.1 和 3.2。

5.1. (L_∞，BMO) 估计。

设 $\mathcal{A}$ 为赋有迹 φ的冯·诺伊曼代数。设 $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 为由第$\mathcal{N}$ 2.4 小节给出的过滤$\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 。显然，($\mathcal{A})_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{A}$的过滤。根据符号滥用，我们仍记 E_k 为关于 $\mathcal{A}_k$的条件期望。下面回顾与过滤 $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$相关的非交换 BMO 空间的定义。

$$\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})=\{f\in L_\infty(\mathcal{A}):\|f\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})}=\sup_k\|\mathsf{E}_k(|f-\mathsf{E}_{k+1}f|^2)\|_\infty^{1/2}<\infty\}$$
$$\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})=\{f\in L_\infty(\mathcal{A}):\|f\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})}=\|f^*\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})}<\infty\}.$$

空间 BMO($\mathcal{A}$) 定义为

$$\mathrm{BMO}(\mathcal{A})=\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})\cap\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A}),$$

赋予交范数

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathcal{A})}=\max\{\|f\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})},\|f\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})}\}. \tag{5.1}$$

直接计算可得以下 BMO 范数表达式

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})}&=\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|f(h)-f_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12},\\ \|f\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})}&=\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|f^*(h)-f^*_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

现在我们继续证明定理 3.1（ii）。

定理 3.1 (*ii*) 的证明。设 $f \in L_\infty(\mathcal{A})$。根据 BMO 空间的定义，只需证明

$$\|Lf\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} \lesssim \|f\|_\infty \tag{5.3}$$

and

$$\|Lf\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})} \lesssim \|f\|_\infty. \tag{5.4}$$

只需证明（5.3）。为此，假设（5.3）成立。根据 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})} = \|f^*\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})}$，可得

$$\|Lf\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})} = \|(Lf)^*\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} = \|Lf^*\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} \lesssim \|f^*\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

由此得证（5.4）。

We e下面证明（5.3）。利用平方函数的算子凸性 $w \mapsto |w|^2$，对任意 $c \in \mathcal{A}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\left|f(h)-f_{\widehat{Q}_\alpha^k}\right|^2 dm(h) &\le \frac{2}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\left|f(h)-c\right|^2 d\mu(h) + 2|f_{\widehat{Q}_\alpha^k}-c|^2 \\ &\le \frac{2}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\left|f(h)-c\right|^2 dm(h) + \frac{2}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\left|f(h)-c\right|^2 dm(h).\end{aligned}$$

结合上述估计与（5.2），可得

$$\begin{aligned}\|Lf\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} \lesssim \sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(&\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}|Lf-c|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12} \\ &+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}|Lf-c|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\Big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

固定二进立方体 Q_β^k 后，我们回顾一下，$\widehat{Q}_\beta^k$ 是 Q_β^k 的父立方体，且 $k_2 = \min\{k:\ a_0\delta^k > r_0\}$。令 $\widetilde{Q}_\beta^k = \{h \in G:\ d(h,\ z_\beta^k) \le 4C_1\delta^{k+1}\}$。然后定义

$$Q_\beta^{k*} = \begin{cases} \widetilde{Q}_\beta^k, & k > k_2; \\ Q_\beta^k, & k \le k_2, \end{cases}$$

并将 f 分解为

$$f = f\mathbb{1}_{Q_\beta^{k*}} + f\mathbb{1}_{G\setminus Q_\beta^{k*}} := f_1 + f_2.$$

再次利用平方函数 $w \mapsto |w|^2$ 的算子凸性，我们得到

$$|Lf-c|^2 \le 2|Lf_1|^2 + 2|Lf_2-c|^2. \tag{5.6}$$

将（5.5）与（5.6）结合起来，（5.3）便归结为证明以下两个等式

$$\begin{aligned}\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(&\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12} + \Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\Big) \\ &\lesssim \|f\|_\infty\end{aligned} \tag{5.7}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(&\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}|Lf_2(h)-c|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12} + \Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}|Lf_2(h)-c|^2 dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\Big) \\ &\lesssim \|f\|_\infty.\end{aligned} \tag{5.8}$$

现在我们转而关注（5.7）。已知冯·诺伊曼代数的元素$\mathcal{M}$ 可通过右乘或左乘视为 $L_2(M)$ 上的有界线性算子。根据命题 4.2，我们得到

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{Q_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}} &= \sup_{\|a\|_{L_2(\mathcal{M})}\le 1}\tau\bigg(\int_{Q_\alpha^k}|Lf_1(h)a|^2dm(h)\bigg)\\ &\le \sup_{\|\|_{L_2(\mathcal{M})}\le 1}\tau\bigg(\int_G|L(f_1a)(h)|^2dm(h)\bigg)\\ &\lesssim \sup_{\|a\|_{L_2(\mathcal{M})}\le 1}\|f_1a\|^2_{L_2(G;L_2(\mathcal{M}))}\\ &\lesssim m(Q_\beta^{k\,*})\|f\|_\infty^2.\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\Big\|\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}\lesssim m(Q_\beta^{k\,*})\|f\|_\infty^2.$$

应用（2.2）后，上述两个不等式推出

$$\Big\|\int_{Q_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}+\Big\|\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}|Lf_1(h)|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\lesssim\Big(\frac{m(Q_\beta^{k\,*})}{m(Q_\alpha^k)}+\frac{m(Q_\beta^{k\,*})}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\Big)^{\frac12}\|f\|_\infty\lesssim\|f\|_\infty,$$

从而证明了（5.7）。

剩下要证明（5.8）。令 $c=Lf_2(z_\beta^k)$，我们将（5.8）归结为证明

$$\sup_{h\in\widehat{Q}_\beta^k}\Big\|Lf_2(h)-Lf_2(z_\beta^k)\Big\|_{\mathcal{M}}\lesssim\|f\|_\infty. \tag{5.9}$$

事实上，建立了这一估计后，我们得到

$$\begin{aligned}&\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|Lf_2(h)-c\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|Lf_2(h)-c\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\Big)\\ &\le 2\Big(\sup_{h\in\widehat{Q}_\beta^k}\Big\||Lf_2(h)-Lf_2(z_\beta^k)|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\Big)^{\frac12}\\ &\lesssim\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

注意到

$$Lf_2(h)-Lf_2(z_\beta^k)=\sum_{n>n_{r_0}}v_n\big(M_{\delta^n}f_2(h)-\mathsf{E}_nf_2(h)-(M_{\delta^n}f_2(z_\beta^k)-\mathsf{E}_nf_2(z_\beta^k))\big).$$

令 $n_3=\max\{n_{r_0},k_2+[\log_\delta 2C_1\delta]+1\}$。我们将 n 分为两种情形：$n_{r_0}<n\le n_3$ 和 $n>n_3$。对于 $n_{r_0}<n\le n_3$，由 L_∞-范数的三角不等式可得

$$\begin{aligned}&\Big\|v_n\big(M_{\delta^n}f_2(h)-\mathsf{E}_nf_2(h)-(M_{\delta^n}f_2(z_\beta^k)-\mathsf{E}_nf_2(z_\beta^k))\big)\Big\|_{\mathcal{M}}\\ &\le\sum_{n_{r_0}<n\le n_3}\|(v_n)_n\|_{\ell^\infty}\|M_{\delta^n}f_2(h)-\mathsf{E}_nf_2(h)-(M_{\delta^n}f_2(z_\beta^k)-\mathsf{E}_nf_2(z_\beta^k))\Big\|_{\mathcal{M}}\\ &\lesssim\sum_{n_{r_0}<n\le n_3}\sup_{h\in\widehat{Q}_\beta^k}\big(\|M_{\delta^n}f_2(h)\|_{\mathcal{M}}+\|\mathsf{E}_nf_2(h)\|_{\mathcal{M}}\big)\\ &\lesssim(n_3-n_{r_0})\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

剩下需要处理的是情形 $n>n_3$。我们首先断言

$$\mathsf{E}_nf_2(h)-\mathsf{E}_nf_2(z_\beta^k)=0,\ \forall h\in\widehat{Q}_\beta^k. \tag{5.10}$$

设 $Q_\alpha^n \ni h$。若 $n \le k$，则根据命题 2.4(ii)，有 $Q_\alpha^n \subseteq \widehat{Q}_\beta^k$。注意到 $k > n_3 > k_2$，可以立即验证 $Q_\alpha^n \subseteq \widehat{Q}_\beta^k \subseteq \widetilde{Q}_\beta^k$。因此，根据 f_2 的定义，我们有 $\mathrm{E}_n f_2(h) = \mathrm{E}_n f_2(z_\beta^k) = 0$。若 $n > k$，再次利用命题 2.4(ii)，可得 $\widehat{Q}_\beta^k \subseteq Q_\alpha^n$，于是对所有 $h \in \widehat{Q}_\beta^k$，$\mathrm{E}_n f_2(h)$ 都是一个常数算子，且 $\mathrm{E}_n f_2(h) - \mathrm{E}_n f_2(z_\beta^k) = 0$，这就证明了该断言。

在这一断言下，(5.9) 可归结为证明以下不等式。

$$\sum_{n>n_3} \left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} \lesssim \|f\|_\infty. \tag{5.11}$$

令 $n_4 = \min\{n : \delta^n > 2C_1\delta^{k+1}\}$。我们分析两种情形：$n_3 \ge n_4$ 和 $n_3 < n_4$。

情形 $n_3 \ge n_4$。应用 (2.15)，得到

$$\begin{aligned}
&M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \\
&= \frac{1}{m(B(h,\delta^n))}\Big(\int_{B(h,\delta^n)} f_2(g)dm(g) - \int_{B(z_\beta^k,\delta^n)} f_2(g)dm(g)\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{1}{m(B(h,\delta^n))} - \frac{1}{m(B(z_\beta^k,\delta^n))}\Big)\int_{B(z_\beta^k,\delta^n)} f_2(g)dm(g).
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} \\
&\le \frac{m(B(h,\delta^n)\triangle B(z_\beta^k,\delta^n))}{m(B(h,\delta^n))^2}\|f\|_\infty + \Big|\frac{m(B(z_\beta^k,\delta^n))}{m(B(h,\delta^n))} - 1\Big|\|f\|_\infty \\
&\le 2\frac{m(B(h,\delta^n)\triangle B(z_\beta^k,\delta^n))}{m(B(h,\delta^n))}\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&B(h,\delta^n)\triangle B(z_\beta^k,\delta^n) \\
&\subseteq \Big(B(h,d(h,z_\beta^k)+\delta^n)\setminus B(h,\delta^n)\Big) \cup \Big(B(z_\beta^k,d(h,z_\beta^k)+\delta^n)\setminus B(z_\beta^k,\delta^n)\Big),
\end{aligned}$$

并且对每个 $h \in \widehat{Q}_\beta^k$，$d(h, z_\beta^k) \le 2C_1\delta^{k+1}$。于是有 $B(z_\beta^k, \delta^{n_3}) \subseteq B(h, \delta^{n_3} + 2C_1\delta^{k+1})$。此外，对于 $n > n_3$，则 $\delta^n > \delta^{n_3} > 2C_1\delta^{k+1}$。利用 (2.2)，得到

$$\frac{m(B(z_\beta^k,\delta^n))}{m(B(h,\delta^n))} \le \frac{m(B(h,\delta^n + 2C_1\delta^{k+1})}{m(B(h,\delta^n))} \le 2^\epsilon(K+1).$$

此外，上述两个观察结果和条件（1.8）可得

$$\frac{m(B(h,\delta^n)\triangle B(z_\beta^k,\delta^n))}{m(B(h,\delta^n))} \lesssim \left(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\right)^\epsilon.$$

由此可知，对于每个 $h \in \widehat{Q}_\beta^k$

$$\left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} \lesssim \left(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\right)^\epsilon \|f\|_\infty. \tag{5.12}$$

我们得出结论

$$\sum_{n>n_3} \left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} \lesssim \sum_{n>n_3} \left(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\right)^\epsilon \|f\|_\infty \lesssim \|f\|_\infty,$$

这就证明了（5.11）。

情形 $n_3 < n_4$。注意，在此情形下，我们有 $2C_1\delta^{k+1} \geq \delta^{n_4-1} \geq \delta^{n_3}$。这一事实推出$k \geq k_2$。因此 $f_2 = f\mathbb{1}_{G\setminus\widetilde{Q}_\beta^k}$。我们对每个 $n_3 < n < n_4$ 进行证明

$$M_{\delta^n} f_2(h) = 0, \ \forall h \in \widehat{Q}_\beta^k. \tag{5.13}$$

事实上，对每个 $h \in \widehat{Q}_\beta^k$ 和 $g \in B(h, \delta^n)$，都有

$$d(g, z_\beta^k) \leq d(g,h) + d(h, z_\beta^k) \leq \delta^n + 2C_1\delta^{k+1} \leq 4C_1\delta^{k+1}.$$

由此可得，对每个 $h \in \widehat{Q}_\beta^k$，都有 $B(h, \delta^n) \subseteq \widetilde{Q}_\beta^k$，从而证明了（5.13）。此外，将（5.13）与前面的证明结合起来，还可推出

$$\sum_{n>n_3} \left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} = \sum_{n\geq n_4} \left\| M_{\delta^n}(f_2)(h) - M_{\delta^n}(f_2)(z_\beta^k) \right\|_{\mathcal{M}} \lesssim \|f\|_\infty,$$

这就证明了（5.11）。

□

在证明定理 3.1(ii) 之前，我们先引入一些额外的记号。令 $\mathcal{A} = \mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)$ 为配备张量积迹 $\psi = \varphi \otimes tr$ 的冯·诺伊曼代数，其中 tr 是 $\mathcal{B}(\ell_2)$ 上的典范迹。令 $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 为第 2.4 小节所给出的 $\mathcal{N}$ 的一个过滤。设 $\mathcal{A}_k = \mathcal{N}_k\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)$。我们注意到，$(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成了 $\mathcal{A}$的一个过滤。令 E_k 为关于 $\mathcal{A}_k$的条件期望。相应的 BMO 范数定义如（5.1）所示。类似于（5.2），我们有

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} &= \sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}} \left\| \frac{1}{m(Q_\alpha^k)} \int_{Q_\alpha^k} \left| f(h) - f_{\widehat{Q}_\alpha^k} \right|^2 dm(h) \right\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})} &= \sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}} \left\| \frac{1}{m(Q_\alpha^k)} \int_{Q_\alpha^k} \left| f^*(h) - f^*_{\widehat{Q}_\alpha^k} \right|^2 dm(h) \right\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

定理 3.2(ii) 的证明。令 $f \in L_\infty(\mathcal{A})$。回顾 $T_i = M_{r_{i-1}} - M_{r_i}$ 和 $\mathcal{S} = \cup_{n>n_{r_0}} \mathcal{S}_n$，其中 $\mathcal{S}_n = \{i : [r_{i-1}, r_i) \subseteq [\delta^n, \delta^{n+1})\}$。由于对于每个算子 T_i 都满足 $(T_i(f))^* = T_i(f^*)$，因此 $T_i(f) \otimes e_{1i} = \big(T_i(f^*) \otimes e_{i1}\big)^*$。结合 (5.4) 的证明，$(L_\infty, \mathrm{BMO})$ 估计对于 $(T_i)_{i\in\mathcal{S}}$ 可由下面两个不等式得到

$$\left\| \sum_{i\in\mathcal{S}} T_i f \otimes e_{i1} \right\|_{\mathrm{BMO}_c(\mathcal{A})} \lesssim \|f\|_\infty \tag{5.15}$$

and

$$\left\| \sum_{i\in\mathcal{S}} T_i f \otimes e_{i1} \right\|_{\mathrm{BMO}_r(\mathcal{A})} \lesssim \|f\|_\infty. \tag{5.16}$$

我们现在证明（5.15）。证明与（5.3）的证明非常相似，只需进行一些小的调整；为完整起见，现给出证明概略。

令 $f = f_1 + f_2$，其中 $f_1 = f\mathbb{1}_{Q_\beta^{k*}}$ 且 $f_2 = f\mathbb{1}_{G\setminus Q_\beta^{k*}}$。按照 (5.3) 的结构，(5.15) 的证明可归结为验证：

$$\begin{aligned} \sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}} \inf_{c\in\mathcal{A}} \Big(& \left\| \frac{1}{m(Q_\alpha^k)} \int_{Q_\alpha^k} \left| \sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1)(h) \otimes e_{i1} \right|^2 dm(h) \right\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac{1}{2}} \\ & + \left\| \frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)} \int_{\widehat{Q}_\alpha^k} \left| \sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1)(h) \otimes e_{i1} \right|^2 dm(h) \right\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac{1}{2}} \Big) \\ & \lesssim \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{5.17}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(&\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_2)(h)\otimes e_{i1}-c\Big|^2dm(h)\Big\|^{\frac12}_{\mathcal{M}\bar\otimes\mathcal{B}(\ell_2)}\\&+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_2)(h)\otimes e_{i1}-c\Big|^2dm(h)\Big\|^{\frac12}_{\mathcal{M}\bar\otimes\mathcal{B}(\ell_2)}\Big)\\&\lesssim\|f\|_\infty.\end{aligned}\tag{5.18}$$

注意到 $|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_if\otimes e_{i1}|^2=\sum_{i\in\mathcal{S}}|T_if|^2\otimes e_{11}$。由此可得

$$\Big\|\int_G\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_if(h)\otimes e_{i1}\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}\bar\otimes\mathcal{B}(\ell_2)}=\Big\|\int_G\sum_{i\in\mathcal{S}}\Big|T_if(h)\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}}.$$

如上所述，(5.17) 的证明沿用了(5.7) 的证明思路；验证留给读者完成。(5.18) 的证明与(5.8) 类似。现在我们强调关键步骤。

令 $c=\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_2)(z_\beta^k)\otimes e_{i1}$，我们将注意力限制在情形 $n_3\geq n_4$，即$\delta^{n_3}>2C_1\delta^{k+1}$，因为情形 $n_3<n_4$ 可通过类似的推理得到。因此，只需证明对所有 $h\in\widehat{Q}_\beta^k$

$$\Big(\sum_{i\in\mathcal{S}}\Big\|\big|M_{r_{i-1}}(f_2)(h)-M_{r_i}(f_2)(h)-\big(M_{r_{i-1}}(f_2)(z_\beta^k)-M_{r_i}(f_2)(z_\beta^k)\big)\big|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\Big)^{\frac12}\lesssim\|f\|_\infty.$$

我们将证明一个更强的结果。

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in\mathcal{S}_n}\Big\|\big|M_{r_{i-1}}(f_2)(h)-M_{r_i}(f_2)(h)-\big(M_{r_{i-1}}(f_2)(z_\beta^k)-M_{r_i}(f_2)(z_\beta^k)\big)\big|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\\&\lesssim\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^\epsilon\|f\|_\infty^2.\end{aligned}\tag{5.19}$$

将 $i\in\mathcal{S}_n$ 分为两种情形： $J_1=\{i:\ r_i-r_{i-1}\leq(2C_1\delta^{k+1})^\epsilon/\delta^{(\epsilon-1)n}\}$ 以及 $J_2=\{i:\ r_i-r_{i-1}>(2C_1\delta^{k+1})^\epsilon/\delta^{(\epsilon-1)n}\}$。

我们首先处理情形 $i\in J_1$。注意，对于每个 $z\in\widehat{Q}_\beta^k$，2.15）以及平方函数的算子凸性 $w\to|w|^2$ 给出

$$\begin{aligned}\big|M_{r_{i-1}}(f_2)(z)-M_{r_i}(f_2)(z)\big|^2&\lesssim\big|1-\frac{m(B(z,r_{i-1}))}{m(B(z,r_i))}\big|^2\|f\|_\infty^2\\&\leq\Big|\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac1u du\Big|^2\|f\|_\infty^2.\end{aligned}$$

此外，由 H¨older 不等式和条件（1.8），可得

$$\begin{aligned}\Big|\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac1u du\Big|^2&\leq\Big(m(B(z,r_i))-m(B(z,r_{i-1}))\Big)\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac{1}{u^2}du\\&\lesssim\Big(\frac{r_i-r_{i-1}}{r_{i-1}}\Big)^\epsilon\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac{m(B(z,\delta^{n+n_{t_0}+1}))}{u^2}du\\&\leq\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^{2\epsilon}\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac{m(B(z,\delta^{n+n_{t_0}+1}))}{u^2}du.\end{aligned}$$

因此，

$$\left|M_{r_{i-1}}(f_2)(z)-M_{r_i}(f_2)(z)\right|^2\lesssim\|f\|_\infty^2\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^{2\epsilon}\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac{m(B(z,\delta^{n+1}))}{u^2}du.$$

此外，再次利用平方函数的算子凸性 $w\to|w|^2$ 以及 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in J_1}\Big\|\left|M_{r_{i-1}}(f_2)(h)-M_{r_i}(f_2)(h)-M_{r_{i-1}}(f_2)(z_\beta^k)+M_{r_i}(f_2)(z_\beta^k)\right|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\\
&\lesssim\|f\|_\infty^2\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^{2\epsilon}\sup_{z\in\widehat{Q}_\beta^k}\sum_{i\in J_1}\int_{m(B(z,r_{i-1}))}^{m(B(z,r_i))}\frac{m(B(z,\delta^{n+1}))}{u^2}du\\
&\le\|f\|_\infty^2\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^{2\epsilon}\sup_{z\in\widehat{Q}_\beta^k}\int_{m(B(z,\delta^n))}^{m(B(z,\delta^{n+1}))}\frac{m(B(z,\delta^{n+1}))}{m(B(z,\delta^n))^2}du\\
&\lesssim\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\Big)^{2\epsilon}\|f\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

对于情形 $i\in J_2$。注意到这些数 $\#\{J_2\}\le(\delta-1)\delta^{\epsilon n}/(2C_1\delta^{k+1})^\epsilon$。然后结合平方函数的算子凸性 $w\to|w|^2$ 与 (5.12)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in J_2}\Big\|\left|M_{r_{i-1}}(f_2)(h)-M_{r_i}(f_2)(h)-M_{r_{i-1}}(f_2)(z_\beta^k)+M_{r_i}(f_2)(z_\beta^k)\right|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\\
&\le 2\sum_{i\in J_2}\Big(\Big\|\left|M_{r_i}(f_2)(h)-M_{r_i}(f_2)(z_\beta^k)\right|^2\Big\|_{\mathcal{M}}+\Big\|\left|M_{r_{i-1}}(f_2)(h)-M_{r_{i-1}}(f_2)(z_\beta^k)\right|^2\Big\|_{\mathcal{M}}\Big)\\
&\lesssim\frac{\delta^{\epsilon n}}{(2C_1\delta^{k+1})^\epsilon}\Big(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^{n+n_{t_0}}}\Big)^{2\epsilon}\|f\|_\infty^2\\
&\le\left(\frac{2C_1\delta^{k+1}}{\delta^n}\right)^{\epsilon}\|f\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

结合情形 $i\in J_1$ 和 $i\in J_2$的估计，得证 (5.19)。

还需证明 (5.16)。类似于 (5.15)，只需证明以下两个不等式。

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_1^*)(h)\otimes e_{1i}\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac12}\\
&\qquad+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_1^*)(h)\otimes e_{1i}\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac12}\Big)\\
&\lesssim\|f\|_\infty.
\end{aligned}\tag{5.20}$$

and

$$\begin{aligned}
&\sup_{Q_\alpha^k\in\mathcal{F}}\inf_{c\in\mathcal{A}}\Big(\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_2^*)(h)\otimes e_{1i}-c\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac12}\\
&\qquad+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_2^*)(h)\otimes e_{1i}-c\Big|^2dm(h)\Big\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}^{\frac12}\Big)\\
&\lesssim\|f\|_\infty.
\end{aligned}\tag{5.21}$$

我们只需证明（5.20），因为（5.21）可以按前述方法处理。注意

$$\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i(f_1^*)\otimes e_{1i}\Big|^2=\sum_{i,j\in\mathcal{S}}T_i(f_1)T_j(f_1^*)\otimes e_{ij}.$$

此外，$\sum_{i,\ j\in\mathcal{S}} T_i(f_1)T_j(f_1^*)\otimes e_{ij}$ 可视为作用在 $\ell_2(L_2(\mathcal{M}))$ 上的正算子。令 $\Lambda=\sum_{i,\ j\in\mathcal{S}} T_i(f_1)T_j(f_1^*)\otimes e_{ij}$。于是

$$\begin{aligned}
\|\Lambda\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)} &= \sup_{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1}\langle \Lambda a, a\rangle\\
&= \sup_{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1}\tau\Big[\Big(\sum_i a_i^*\otimes e_{1i}\Big)\Lambda\Big(\sum_j a_j\otimes e_{j1}\Big)\Big]\\
&= \sup_{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1}\int_G \tau(|\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1^*)(h)a_i|^2)dm(h)\\
&= \sup_{\substack{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1\\ \|g\|_{L_2(\mathcal{A})}\le 1}}\Big[\int_G \tau\Big(\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1^*)(h)a_i g(h)\Big)dm(h)\Big]^2\\
&= \sup_{\substack{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1\\ \|g\|_{L_2(\mathcal{A})}\le 1}}\Big[\int_G \tau\Big(\sum_{i\in\mathcal{S}} f_1^*(h)a_i T_i g(h)\Big)dm(h)\Big]^2\\
&\le \sup_{\substack{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1\\ \|g\|_{L_2(\mathcal{A})}\le 1}}\|(T_i g)_{i\in\mathcal{S}}\|^2_{L_2(\mathcal{A};\ell_2^{rc})}\|(f_1^* a_i)_{i\in\mathcal{S}}\|^2_{L_2(\mathcal{A};\ell_2^{rc})}\\
&\lesssim \sup_{\|a\|_{\ell_2(L_2(\mathcal{M}))}\le 1}\int_G \tau\sum_{i\in\mathcal{S}}|f_1^*(h)a_i|^2 dm(h)\\
&\le \mu(Q_\beta^{k\,*})\|f\|_\infty^2,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 μ 是平移不变测度这一性质得出，而倒数第二个不等式则由命题 4.2得出。根据这一估计，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big\|\frac{1}{m(Q_\alpha^k)}\int_{Q_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1^*)(h)\otimes e_{1i}\Big|^2 dm(h)\Big\|^{\frac12}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}\\
&\quad+\Big\|\frac{1}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\int_{\widehat{Q}_\alpha^k}\Big|\sum_{i\in\mathcal{S}} T_i(f_1^*)(h)\otimes e_{1i}\Big|^2 dm(h)\Big\|^{\frac12}_{\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2)}\Big)\\
&\lesssim \Big(\frac{m(Q_\beta^{k\,*})}{m(Q_\alpha^k)}+\frac{m(Q_\beta^{k\,*})}{m(\widehat{Q}_\alpha^k)}\Big)^{\frac12}\|f\|_\infty\\
&\lesssim \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

这就证明了（5.20）。

□

注 5.1。令 $L_n f=M_{\delta^{n+n_{r_0}}}f-\mathrm{E}_{n+n_{r_0}}f$。$(L_\infty,\ \mathrm{BMO})$ 估计

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} L_n f\otimes e_{1n}\Big\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{R})}+\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} L_n f\otimes e_{n1}\Big\|_{\mathrm{BMO}_d(\mathcal{R})}\le C_p\|f\|_\infty,\ \forall f\in L_\infty(\mathcal{N});$$

可采用与定理 3.2（ii）中类似的方法证明，其中将用到消去命题（5.10）。证明从略。

5.2. **强类型** $(p,\ p)$ **估计**。

我们通过证明它们各自的强型（$p,\ p$）估计，完成定理 3.1 和3.2 的证明。具体而言，下面的命题将验证定理 3.1（iii）和定理 3.2（iii）。

命题 5.2。 设 $1<p<\infty$。那么 L 作为从 $L_p(\mathcal{N})$ 到 $L_p(\mathcal{N})$ 的算子是有界的，并且 $(S_i)_i$ 作为从 $L_p(\mathcal{N})$ 到 $L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})$ 的算子是有界的。

证明。 我们的证明聚焦于算子 L。结合，估计 L 与命题 4.2，通过实插值[73]，我们得到 L的强型 (p,p) 估计。类似地，通过应用命题 4.2 以及 $(L_\infty$,BMO) 估计，我们通过复插值 [46]得出 $2<p<\infty$ 的强型 (p,p) 估计 。

剩下需要估计 $(S_i)_i$。令 $\mathcal{T}=\sum_{i\in\mathcal{S}}\varepsilon_i T_i$。对于 $1<p<2$，通过结合 $\mathcal{T}$的弱型 (1, 1) 估计与命题 4.4，利用实插值 [73]，我们推得 $\mathcal{T}$从 $L_p(\mathcal{N})$ 到 $L_p(L_\infty(\Omega)\bar{\otimes}\mathcal{N})$ 有界。因此，应用非交换 Khintchine 不等式（命题 2.1），可得 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 从 $L_p(\mathcal{N})$ 到$L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})$ 有界。

现在我们转向情形 $2<p<\infty$。定义算子 $\mathcal{T}_c f=\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i f\otimes e_{i1}$ 和$\mathcal{T}_r f=\sum_{i\in\mathcal{S}}T_i f\otimes e_{1i}$。根据命题 4.4 以及 ($L_\infty$, BMO) 估计， $\mathcal{T}_c$ 和 $\mathcal{T}_r$ 都可通过复插值 [46]从 $L_p(\mathcal{N})$ 有界映射到 $L_p(\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{B}(\ell_2))$。因此，对于所有 $2<p<\infty$，$(T_i)_{i\in\mathcal{S}}$从 $L_p(\mathcal{N})$ 到 $L_p(\mathcal{N};\ell_2^{rc})$ 是有界的。□

我们强调，非交换 Khintchine 不等式（命题 2.1）的使用使定理 3.1 能够将 Hong 和 Xu 的主要结果 [36] 推广到一般度量空间框架。这一推广通过采用非交换 Doob 不等式 [43,定理 0。2], 并借鉴 [36, 推论 1 的证明。4], 中的方法，以及利用 [35, 命题 2。3]中的结构性洞见来实现。因此，定理 3.1 为算子值极大函数建立了弱型 (1,1) 和强型 (p,p) 估计。通过我们的替代方法，这恢复了最初在 [29]中通过随机二进系统分析证明的结果。随后，通过应用 Calder´on 转移原理的非交换推广（详见 [29]），可以得到多项式群作用的极大遍历不等式。最后，应用 Banach 原理可得到如下逐点遍历定理。

推论 5.3。 设 G 由对称紧子集 V 生成，且具有多项式增长。设 m 是 G上的 *Haar* 测度。假设 α 是 G 在相应的L_p-空间 $L_p(\mathcal{M})$ 上的作用。定义遍历平均

$$A_n x=\frac{1}{m(V^n)}\int_{V^n}\alpha_h x\,dm(h).$$

(i) 固定 $1<p<\infty$。若 α 是 G 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的强连续且一致有界作用，则遍历序列 $(A_{\delta^n}x)_n$ 对 $x\in L_p(\mathcal{M})$ 双侧几乎一致收敛。(ii) 若 α 是 G 在 $\mathcal{M}$ 上的强连续作用，且通过保持 τ的自同构作用，使得 α 对所有 $1\le p\le\infty$延拓为空间 $L_p(\mathcal{M})$ 上的等距作用，则遍历序列 $(A_{\delta^n}x)_n$ 对所有 $1\le p<\infty$在 $x\in L_p(\mathcal{M})$ 上几乎一致收敛。

我们注意到，推论 5.3 是 [29, 定理 12],中主要结果的一个具体实例，读者可以参阅 [29] 其中关于未定义术语（如极大不等式和双侧几乎一致收敛）的定义。

6. Proof of Theorem 1.5

本节探讨 Coifman 和 Weiss [20]所确立的经典转移原理的非交换类比。回顾一下，在局部紧群 G 中，若一列具有正 Haar 测度的紧集 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足：对每个 $g\in G$,

$$\lim_i\frac{m((F_n g)\triangle F_n)}{m(F_n)}=0,$$

或者等价地，对 G中的所有紧集 K，

$$\lim_n \frac{m(F_nK)}{m(F_n)} = 1. \tag{6.1}$$

群 G 若存在 Følner 序列，则称其为可和群。

6.1. **强型不等式**。

强型（p,p）不等式的转移原理需要仔细考虑有界线性算子扩张。这一基础性结果可直接由非交换 Khintchine 不等式（命题 2.1）推出，这是泛函分析领域专家所熟悉的标准工具。由于详细证明可作为高阶读者的练习，故此处略去。

引理 6.1. 设 $1 \le p < \infty$。假设 T 是 $L_p(\mathcal{M})$上的有界线性算子。那么 T可扩张为 $L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})$上的有界算子。

定理 *1.5* (*i*) 的证明。设 $p \in (1,\infty)$ 和 $x \in L_p(\mathcal{M})$。根据注 1.8中所述的标准逼近论证，只需证明对于任意给定的整数 i_0,

$$\|(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \|x\|_{L_p(\mathcal{M})}. \tag{6.2}$$

设 α 是 $L_p(M)$ 上的一个强连续且一致有界的 G 作用。固定 $x \in L_p(\mathcal{M})$ 和一个紧集 A。设 K 是满足 $B_{r_{i_0+1}} \subseteq K$ 的紧集。定义取值于 $L_p(\mathcal{M})$ 的函数 F_{AK}，其定义域为 G，如下:

$$F_{AK}(g) = \chi_{AK}(g)\alpha_g x.$$

由 d 的度量不变性，我们有 $hB_r = B(h,\ r)$，对所有 $h \in G$ 均成立。此外，由于 m 是 Haar 测度，可得 $\forall h \in G,\ m(B_r) = m(B(h,\ r))$。由此得到关于 $1 \le i \le i_0+1$ 的以下结果:

$$\alpha_h A_{r_i}x = \frac{1}{m(B_{r_i})}\int_{B_{r_i}} \alpha_h\alpha_g x dm(g) = \frac{1}{m(B_{r_i})}\int_{B_{r_i}} F_{AK}(hg)dm(g) = M_{r_i}F_{AK}(h). \tag{6.3}$$

因此，我们得到

$$\alpha_h(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x) = M_{r_i}F_{AK}(h) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(h).$$

结合引理 6.1 与 α_g 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的一致有界性假设，具体而言，$\sup_{g\in G}\|\alpha_g\|_{L_p(\mathcal{M})\to L_p(\mathcal{M})} < \infty$，我们得到以下估计:

$$\begin{aligned}\|(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} &\lesssim \|(\alpha_g A_{r_i}x - \alpha_g A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\\ &= \|(M_{r_i}F_{AK}(g) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(g))_{1\le i\le i_0}\|_{L_p(\mathcal{M};\ \ell_2^{rc})}.\end{aligned}$$

此外 此外，应用平移作用的强型 ($p,\ p$) 平方函数不等式

可得

$$\|(M_{r_i}F_{AK} - M_{r_{i+1}}F_{AK})_{1\le i\le i_0}\|_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \|F_{AK}\|_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})}.$$

现在我们证明（6.2）。结合 Fubini 定理与非交换 Khintchine 不等式（命题 2.1），可得 $L_p(L_\infty(G)\otimes\mathcal{M};\ell_2^{rc}) \approx L_p(G;L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc}))$。因此,

$$\begin{aligned}&\|(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}\\ &\lesssim \frac{1}{m(A)}\int_A \|(M_{r_i}F_{AK}(g) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(g))_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}dm(g)\\ &\le \frac{1}{m(A)}\int_G \|(M_{r_i}F_{AK}(g) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(g))_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}dm(g)\end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{m(A)}\|(M_{r_i}F_{AK}-M_{r_{i+1}}F_{AK})_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})}$$
$$\lesssim \frac{1}{m(A)}\|F_{AK}\|^p_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})} \lesssim \frac{m(AK)}{m(A)}\|x\|_p^p.$$

由于 G 是一个可和群，由（6.1），对于任意 $\varepsilon>0$，我们可以选取一个子集 $A\subset G$ 使得$m(AK)/m(A)\le(1+\varepsilon)$。令 ε 趋于 0，即得（6.2）的证明。□

注 6.2. 我们的转移原理可自然推广到向量值情形。具体而言，设 $\mathbb{B}$ 是具有 $p\ge 2$ 的 p-一致凸巴拿赫空间。对于任意 $x\in\mathbb{B}$，我们定义平均算子 $A_r x = \frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}\alpha_g x dm(g)$，其中 α_g 表示满足 $\sup_{g\in G}\|\alpha_g\colon \mathbb{B}\to\mathbb{B}\|<\infty$ 的 G-作用。定义 $L^p(G;\mathbb{B})$ 上的向量值平均算子 $\mathcal{A}_r$ 如下：

$$\mathcal{A}_r f(h)=\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r} f(hg)dm(g),\ \forall f\in L^p(G;\mathbb{B}).$$

对转移原理的证明方法稍作修改，便可建立以下范数估计之间的蕴含关系。由变分范数估计

$$\sup_{(r_i)}\Big(\sum_i \|\mathcal{A}_{r_{i+1}}f-\mathcal{A}_{r_i}f\|^p_{L^p(G;\mathbb{B})}\Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|f\|^p_{L^p(G;\mathbb{B})}, \tag{6.4}$$

我们可以推出相应的估计

$$\sup_{(r_i)}\Big(\sum_i \|A_{r_{i+1}}x-A_{r_i}x\|^p_{\mathbb{B}}\Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|x\|_{\mathbb{B}}. \tag{6.5}$$

据我们所知，不等式 (6.5) 最初由 Jones 等人建立 [41]于希尔伯特空间中，其中 $A_n x=\sum_{i=1}^n T^n x$ 满足 T 为等距映射。Avigad 和 Rute 将其推广到 p-一致凸巴拿赫空间时，[6] 要求 T 上下均幂有界。此外，Avigad 和 Rute 利用 (6.5) 给出了遍历平均序列中 ε-波动次数的上界 $(A_{n_i}x)_i$。更多详情请参见 [6,第 5 节和 6]。

另一方面，若 G 是一个具有对称紧生成集的多项式增长群，或者更一般地，满足定理 1.7 的条件，则根据 6.4 中发展的方法以及命题 [6]，中确立的边界性质，2.5 和 2.6 中的结论在此情形下成立。因此，由前述转移原理可得 6.5。此外，运用 [30]和 [32]，中的方法，我们得到以下向量值变分不等式：设 $\mathbb{B}$ 是一个 p-一致凸巴拿赫空间。那么对所有$p_0>p$ 和 $1<q<\infty$,

$$\Big\|\sup_{(r_i)}\Big(\sum_i \|\mathcal{A}_{r_{i+1}}f-\mathcal{A}_{r_i}f\|^{p_0}_{\mathbb{B}}\Big)^{\frac{1}{p_0}}\Big\|_q \lesssim \|f\|_{L^q(G;\mathbb{B})}$$

6.2. **弱型不等式。**

现在，我们研究与 $\mathcal{M}$上的强连续作用 α_h 相关的弱型 $(p,\ p)$不等式的转移原理，其中 α_h 由 $\mathcal{M}$上的保 τ自同构诱导。众所周知，对于所有$1\le p\le\infty$，α_h 都扩张为 $L_p(\mathcal{M})$上的等距作用。我们的分析关键依赖于关于自同构的基本结果（见 [71]中的命题 3.3）。

命题 6.3。 [71, 命题 3。3] 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 α 是 $*$上的一个自同构 $\mathcal{M}$。那么，对于任意 $a \in L_0(\mathcal{M})$ 自伴的博雷尔函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 且在 $\mathbb{R}$ 的有界子集上有界，

$$\alpha(f(a)) = f(\alpha(a)).$$

现在我们继续证明定理 1.5（ii）。

定理 *1.5*（*ii*）的证明。令 $1 \le p < \infty$。采用前一小节中概述的方法，只需证明：对于任意固定整数 i_0，以下弱型估计成立

$$\|(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \|x\|_{L_p(\mathcal{M})}. \tag{6.6}$$

由于每个元素 $x \in \mathcal{M}$ 都可以表示为四个正元素的线性组合，因此只需对非负 x证明该不等式。此外，选取一个紧集K，使得 $B_{r_{i_0+1}} \subseteq K$。令 A 为一个紧集。定义 $L_p(\mathcal{M})$值函数 $F_{AK}(g) = \chi_{AK}(g)\alpha_g x$。类似于（6.3），我们得到，对于所有 $h \in G$ 和 $1 \le i \le i_0+1$，$\alpha_h A_{r_i}x = M_{r_i}F_{AK}(h)$以及 $\alpha_h(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x) = M_{r_i}F_{AK}(h) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(h)$。此外，利用平移作用满足弱型（$p$，$p$）平方函数不等式这一假设，我们得到

$$\|(M_{r_i}F_{AK} - M_{r_{i+1}}F_{AK})_{1\le i\le i_0}\|_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \|F_{AK}\|_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})}. \tag{6.7}$$

为证明（6.6），我们首先考虑情形 $2 \le p < \infty$。为简便起见，令

$$a_i(h) = M_{r_i}F_{AK}(h) - M_{r_{i+1}}F_{AK}(h) \text{ and } b_i = A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x.$$

于是，对于每个 $h \in G$，都有 $\alpha_{h^{-1}}a_i(h) = b_i$。令 $\lambda > 0$。根据命题 6.3 以及自同构 α_h保持迹的性质，我们推得

$$\begin{aligned}
\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|b_i|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big) &= \frac{1}{m(A)}\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|b_i|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big)dm(h)\\
&= \frac{1}{m(A)}\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|\alpha_{h^{-1}}a_i(h)|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big)dm(h)\\
&= \frac{1}{m(A)}\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|a_i(h)|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big)dm(h).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

将前述等式两边同乘 λ^p，随后对λ取上确界，并应用富比尼定理可得

$$\|(b_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^c)} \le \frac{1}{m(A)}\|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)}.$$

注意到 $\alpha_h^* = \alpha_{h^{-1}}$，并在前述不等式中用 a_i^* 替换 a_i，可得到以下结果

$$\|(b_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^r)} \le \frac{1}{m(A)}\|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^r)}.$$

结合上述估计与（6.7），我们得到

$$\begin{aligned}
\|(b_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} &\lesssim \frac{1}{m(A)}\|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \frac{1}{m(A)}\|F_{AK}\|^p_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})}\\
&= \frac{m(AK)}{m(A)}\|x\|^p_{L_p(\mathcal{M})} \lesssim \|x\|^p_{L_p(\mathcal{M})},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由（6.1）以及与强型不等式证明中类似的论证得出。

要完成证明，还需针对情形 建立（6.6）。我们沿用情形 $2 \le p < \infty$ 中定义的记号 a_i 和 b_i。令 $\varepsilon > 0$，根据范数的定义$\|\cdot\|_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})}$，存在一个因子分解 $a_i = f_i + g_i$ 使得

$$\begin{aligned} &\|(f_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^r)} + \|(g_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} \\ &\lesssim \|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})} + \varepsilon^p. \end{aligned} \tag{6.9}$$

由于 $b_i = \alpha_{h^{-1}} a_i\ (h)$，并应用与（6.8）中相同的方法，我们推导出以下结果

$$\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|b_i|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big) = \frac{1}{m(A)}\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|a_i(h)|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big)dm(h)$$

and

$$\tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|b_i^*|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big) = \frac{1}{m(A)}\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{i_0}|a_i^*(h)|^2\Big)^{\frac12}\Big)\Big)dm(h).$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\|(b_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \\ &\lesssim \frac{1}{m(A)}\|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} + \frac{1}{m(A)}\|(a_i^*)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)}. \end{aligned}$$

由于 $a_i = f_i + g_i$，通过应用弱 L_p 范数$\|\cdot\|_{L_{p\text{的拟三角不等式},\ \infty}(L_\infty(G)\otimes\mathcal{M};\ \ell_2^c)}$ 结合（6.9）和（6.7），我们得到

$$\begin{aligned} m(A)\|(b_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} &\lesssim \|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} + \|(a_i^*)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} \\ &\lesssim \|(f_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} + \|(g_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} \\ &\quad + \|(f_i^*)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} + \|(g_i^*)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^c)} \\ &\lesssim \|(a_i)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M};\ell_2^{rc})} + \varepsilon^p \\ &\lesssim \|F_{AK}\|^p_{L_p(L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})} + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$\|(A_{r_i}x - A_{r_{i+1}}x)_{1\le i\le i_0}\|^p_{L_{p,\infty}(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \lesssim \frac{m(AK)}{m(A)}\|x\|_p^p \lesssim \|x\|_p^p,$$

至此，证明完成。 □

注 6.4。我们提出一种替代方法来证明（6.6），对于 $p = 1$。回顾一下，a_i 和 b_i 的定义已在上文给出。根据非交换 Khintchine 不等式（见命题 2.1），只需证明

$$\|\sum_{i=1}^{i_0}\varepsilon_i b_i\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{M})} \lesssim \|x\|_{L_1(\mathcal{M})}. \tag{6.10}$$

按照（6.8）中的相同论证，我们得到

$$\int_\Omega \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\sum_{i=1}^{i_0}\varepsilon_i(t)b_i\Big)\Big)dm(h)dP(t) = \frac{1}{m(A)}\int_\Omega\int_A \tau\Big(\chi_{(\lambda,\infty)}\Big(\sum_{i=1}^{i_0}\varepsilon(t)a_i(h)\Big)\Big)dm(h)dP(t).$$

由（6.7）和命题 2.1 可得

$$\|\sum_{i=1}^{i_0}\varepsilon_i b_i\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}\mathcal{M})} \le \frac{1}{m(A)}\|\sum_{i=1}^{i_0}\varepsilon_i a_i\|_{L_{1,\infty}(L_\infty(\Omega)\overline{\otimes}L_\infty(G)\overline{\otimes}\mathcal{M})}$$

$$\lesssim \frac{m(AK)}{m(A)}\|x\|_{L_1(\mathcal{M})}$$
$$\lesssim \|x\|_{L_1(\mathcal{M})},$$

这就证明了（6.10）。

7. Lamperti representation

定义 7.1。 设 $1 \le p < \infty$。称 $L_p(\mathcal{M})$ 上的有界线性算子 T 为 *Lamperti* 算子，如果对于所有 τ- 有限投影 $e, f \in \mathcal{M}$，满足 $ef = 0$，都有

$$(Te)^*(Tf) = 0 \qquad and \qquad (Te)(Tf)^* = 0.$$

定理 7.2。 [33] 设 $1 \le p < \infty$，并设 $T\colon L_p(\mathcal{M},\tau) \to L_p(\mathcal{M},\tau)$ 是范数为 $\|T\|_{p\to p}^p = C$ 的 *Lamperti* 算子。则存在唯一的：部分等距算子 $w \in \mathcal{M}$、与 $\mathcal{M}$ 关联的正自伴算子 b，以及正规 *Jordan* $*$-同态 $J : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使得以下结论成立：

(1) $w^*w = J(1) = s(b)$，其中 $s(b)$ 表示 b 的支撑。此外，若 T 为正，则 $w = J(1) = s(b)$。*(2)* b 的每个谱投影都与所有 $x \in \mathcal{M}$ 的 $J(x)$ 交换。*(3)* 对所有 $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$，都有

$$T(x) = w\, b\, J(x). \tag{7.1}$$

(4) 对所有 $x \in \mathcal{M}_+$, $\tau\big(b^p\, J(x)\big) \le C^p\, \tau(x)$。

注 7.3. 在定理 (7.2) 中，式 (7.1) 中的分解将称为算子 T.的 *Lamperti* 分解

命题 7.4. 设 $1 \le p < \infty$，并令 $T\colon L_p(\mathcal{M}) \to L_p(\mathcal{M})$ 为一个 *Lamperti* 算子，其分解为 $T = wbJ$。定义算子 $|T|$ 如下：

$$|T|(x) := bJ(x), \qquad x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}.$$

则 $|T|$ 可扩张为 $L_p(\mathcal{M})$上的一个正 *Lamperti* 算子，并且对所有 $x \in L_p(\mathcal{M})$，都有 $|Tx| = ||T|x| = |T||x|$。此外，

$$\|T\|_{p\to p} = \||T|\|_{p\to p}.$$

证明。 取 $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$。则

$$(Tx)^*(Tx) = J(x)^*bw^*wbJ(x) = J(x)^*b^2J(x) = |bJ(x)|^2 = \big(|T|x\big)^*\big(|T|x\big).$$

这里，第二个等式用到了定理 7.2的第 (1) 和 (2) 部分。由平方根的唯一性可得

$$|Tx| = |\,|T|x\,| = |T||x|, \qquad x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}. \tag{7.2}$$

因此，

$$\|Tx\|_p = \||T|x\|_p, \qquad x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}.$$

因此，$|T|$ 唯一地延拓为定义在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的有界算子。根据构造，$|T|$ 是正的，并且它仍是一个 Lamperti 算子（详情见注 3.4]），其中 $\|T\|_{p\to p} = \||T|\|_{p\to p}$.

最后，为了证明7.2 对任意 $x \in L_p(\mathcal{M})$，取一个序列 $(x_n) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ 使得 $\|x_n - x\|_p \to 0$。由映射 $x \mapsto |x|$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ [50, 16], 的连续性可推出

$$|Tx| = \lim_{n\to\infty} |Tx_n| = \lim_{n\to\infty} ||T|x_n| = ||T|x|.$$

这就证明了该结论。 □

注 7.5. 对于 *Lamperti* 算子 T 作用于 $L_p(\mathcal{M})$，命题 $|T|$ 中定义的算子(7.4) 称为 T.的模

设 G 是一个局部紧群，且 $1 \le p < \infty$. 设 α 是 G 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的强连续一致有界作用。若对于所有 $g \in G.$, α 都是（正）Lamperti 算子，则称 α 是（正）Lamperti 的

命题 7.6。设 $1 \le p < \infty$，并设 $\alpha: \ G \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个 *Lamperti* 表示。则映射

$$g \mapsto |\alpha|_g := |\alpha_g|$$

仍然是一个 *Lamperti* 表示。

证明。首先，回顾一下 α 是一个表示，因此对于所有的 g, $h \in G$ 和 $x \in L_p(\mathcal{M})$,

$$\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x).$$

根据命题（7.4），对于每个正元 $x \in L_p(\mathcal{M})_+$，有

$$|\alpha_g(\alpha_h(x))| = |\alpha_g|\,|\alpha_h|\,x,$$

and

$$|\alpha_{gh}(x)| = |\alpha_{gh}|\,x.$$

结合这两个等式可得

$$|\alpha_g|\,|\alpha_h|\,x = |\alpha_{gh}|\,x, \qquad \forall\, x \in L_p(\mathcal{M})_+.$$

由于正元素张成 $L_p(\mathcal{M})$，这个单位元等式可推广到所有 $x \in L_p(\mathcal{M})$，因此我们得到

$$|\alpha_g|\,|\alpha_h| = |\alpha_{gh}|,$$

这表明 $g \mapsto |\alpha_g|$ 是一个表示。

剩下需要验证强连续性。由于 α 是强连续的，对于任意 $x \in L_p(\mathcal{M})$,

$$\|\alpha_g(x) - x\|_p \to 0 \quad \text{as } g \to e.$$

In 特别地，这对 $x \in L_p(\mathcal{M})_+$也成立。但由映射 $x \mapsto |x|$ 的连续性，我们得到

$$\big\|\,|\alpha_g(x)| - x\big\|_p \to 0 \quad \text{as } g \to e.$$

由于 $|\alpha_g(x)| = |\alpha_g|(x)$，我们得到

$$\|\,|\alpha_g|(x) - x\|_p \to 0, \text{ for all} x \in L_p(\mathcal{M})_+.$$

因此 $g \mapsto |\alpha_g|$ 是强连续的。这就完成了命题的证明。 □

下面的引理允许我们将 Lamperti 表示（7.1）扩展到有限情形下的所有可测算子。

引理 7.7 ([33])。设 $\mathcal{M}$ 是有限 *von Neumann* 代数，且 τ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规忠实迹态。设 $1 \le p < \infty$。设 T: $L_p(\mathcal{M}) \to L_p(\mathcal{M})$ 是一个正 *Lamperti* 算子，其分解为

$$T(x) = b\,J(x), \qquad x \in \mathcal{M}.$$

那么 J 和 T 可连续延拓为定义在 $L_0(\mathcal{M})$ 上的映射，其中采用依测度收敛拓扑。此外，

$$T(x) = b\,J(x), \qquad x \in L_0(\mathcal{M}).$$

引理 7.8. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限 *von Neumann* 代数，设 $1 \le p < \infty$，并设 α: $G \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个正 *Lamperti* 表示，其分解为 $\alpha_g = b_g J_g$，其中 $g \in G$。那么，对所有 $g, h \in G$,

$$b_g J_g(b_h) = b_{gh} \quad \textit{and} \quad J_g \circ J_h = J_{gh}.$$

证明. 由于每个 α_g 都可逆，因此 b_g 和 b_h 的支撑均为满支撑 1（参见 [33, 命题 6.1]）。此外， $J_g(b_h)$ 的支撑与 b_h 的支撑相同（参见 [33, 命题 6.1]的证明）。对于任意 $x \in L_p(\mathcal{M})$，对所有 $g, h \in G$ 恒成立的恒等式 $\alpha_g(\alpha_h x) = \alpha_{gh}x$ 等价于

$$b_g J_g(b_h)\, J_g J_h(x) = b_{gh} J_{gh}(x), \qquad g, h \in G,$$

其中我们用到了定理（7.2）的第（2）和第（3）部分。注意， $b_g J_g(b_h)$ 是 $L_0(\mathcal{M})$ 中的一个正元，其支撑为 1，因为 b_g 和 $J_g(b_h)$ 均为满支撑正元，且二者可交换。此外， $J_g J_h$ 仍是一个正规 Jordan $*$-同态。因此，由 Lamperti 分解的唯一性（定理（7.2））可得结论。 □

命题 7.9. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限 *von Neumann* 代数，设 $1 \le p < \infty$，且设 $\alpha\colon G \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个具有分解 $\alpha_g = b_g J_g$ （对应于 $g \in G$）的正 *Lamperti* 表示。令 $\gamma \ge 1$，并设 $\mu = \frac{p}{\gamma}$。定义 $\alpha_g^{(\mu)}$如下：

$$\alpha_g^{(\mu)}(x) := b_g^{\mu} J_g(x), \qquad x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}.$$

则有以下结论：

(1) 映射 $\alpha^{(\mu)}\colon G \to \mathcal{L}(L_\gamma(\mathcal{M}))$，由 $\alpha^{(\mu)}(g) := \alpha_g^{(\mu)}$ 给出，是 G 在 $L_\gamma(\mathcal{M})$ 上的 *Lamperti* 表示。

(2)

$$\sup_{g\in G} \|\alpha_g^{(\mu)}\|_{\gamma\to\gamma} = \sup_{g\in G} \|\alpha_g\|_{p\to p}.$$

证明。对于 $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$，我们有

$$\|\alpha_g^{(\mu)}(x)\|_\gamma^\gamma = \tau(b_g^{\mu\gamma} J_g(|x|^\gamma)) = \tau(b_g^p J_g(|x|^\gamma)) \le \|\alpha_g\|_{p\to p}^p\, \tau(|x|^\gamma) = \|\alpha_g\|_{p\to p}^p \|x\|_\gamma^\gamma.$$

这里，第一个等式由 [33, 引理 41], 得到，而不等式由定理（7.2）得出。因此，每个 $\alpha_g^{(\mu)}$都是有界 Lamperti 算子，并且

$$\sup_{g\in G} \|\alpha_g^{(\mu)}\|_{\gamma\to\gamma} < \infty.$$

此外，直接验证可知

$$\sup_{g\in G} \|\alpha_g^{(\mu)}\|_{\gamma\to\gamma} = \sup_{g\in G} \|\alpha_g\|_{p\to p}.$$

现在证明 $g \mapsto \alpha_g^{(\mu)}$ 是群同态。对于任意 $x \in L_p(\mathcal{M})$,

$$\alpha_g^{(\mu)}(\alpha_h^{(\mu)}(x)) = b_g^{\mu} J_g(b_h^{\mu} J_h(x)) = b_g^{\mu} J_g(b_h^{\mu}) J_g J_h(x).$$

因此， $\alpha_g^{(\mu)}\alpha_h^{(\mu)} = \alpha_{gh}^{(\mu)}$ 当且仅当

$$b_g^{\mu} J_g(b_h^{\mu}) = b_{gh}^{\mu} \quad \text{and} \quad J_g J_h = J_{gh},$$

对于所有 g, $h \in G$。由于每个 J_g 都是关于依测度收敛连续的正规 Jordan $*$-同态，因此我们有

$$(b_g J_g(b_h))^{\mu} = b_g^{\mu} J_g(b_h^{\mu}).$$

该结果随即由引理 7.8 得出。连续性 $g \mapsto \alpha_g^{(\mu)}$由 [76, 定理 3。2] 以及 [77,推论 2。10] 得出。 □

设 $\alpha : G \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个一致有界的 Lamperti 表示，且 G 是一个带有对称紧生成集 V. 的多项式增长群。定义遍历平均

$$A_n(\alpha)x = \frac{1}{m(V^n)} \int_{V^n} \alpha_g(x)\, dm(g), \quad x \in L_p(\mathcal{M}),\ n \in \mathbb{N}.$$

以下定理推广了 [81] 中的定理 3.5。

推论 7.10。设 $\mathcal{M}$ 是一个有限 *von Neumann* 代数，G 是一个具有对称紧生成集 V. 的多项式增长群。固定 $1 < p < \infty$。设 α 是 G 在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的强连续且一致有界的 *Lamperti* 表示。设 $1 \le \gamma < \infty$ 且 $\mu = \frac{p}{\gamma}$。则存在一个常数 $C_{p,\gamma} > 0$，使得

$$\sup_{(n_i)_i} \left\| \left(A_{n_{i+1}}(|\alpha|^{(\mu)})x - A_{n_i}(|\alpha|^{(\mu)})x \right)_i \right\|_{L_\gamma(\mathcal{M};\ell_2^{r^c})} \le C_{p,\gamma} \|x\|_\gamma, \quad \forall x \in L_\gamma(\mathcal{M}).$$

其中，上确界取遍所有递增子列$(n_i)_i \subset \mathbb{N}$。

8. Dilations of Families of Operators

我们先讨论单个算子的膨胀，然后将这一概念扩展到多个算子或算子族同时作用的情形。

定义 8.1. 设 $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ 是巴拿赫空间 X 上的有界线性算子集合。若 $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ 两两可交换，则称它们为两两可交换 。

$$TS = ST \qquad for\ all\ T \in \mathcal{T}_i,\ S \in \mathcal{T}_j,\ 1 \le i \ne j \le n.$$

定义 8.2. 设 $\mathcal{X}$ 是一类巴拿赫空间，并固定 $X \in \mathcal{X}$。

(a) 设 $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ 是作用在 X 上的交换 n 元算子组，即对所有 $1 \le i、\ j \le n$ 均有 $T_iT_j = T_jT_i$。我们称 $\mathbf{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 中存在联合膨胀，若存在 $Y \in \mathcal{X}$、压缩映射

$$J : X \to Y, \qquad Q : Y \to X,$$

以及一个交换的 n 元等距算子组 $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) \subseteq \mathcal{L}(Y)$，使得对所有多重指标 $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$,

$$T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} = Q\, U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n} J.$$

(b) 设 $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ 是作用在 X 上的两两可交换的算子族。我们称 $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ 在 $\mathcal{X}$ 中存在联合同时膨胀，若存在 $Y \in \mathcal{X}$、压缩映射

$$J : X \to Y, \qquad Q : Y \to X,$$

并且对每个 $1 \le i \le n$ 和 $T \in \mathcal{T}_i$，存在一个等距映射 $U_T \in \mathcal{L}(Y)$，使得:

(a) 对于每个有限序列 $T_1, \dots, T_m$，若 $T_k \in \mathcal{T}_{j_k}$，则存在某个 $1 \le j_k \le n$，使得

$$T_1 \cdots T_m = Q\, U_{T_1} \cdots U_{T_m} J,$$

(b) 并且当 $T \in \mathcal{T}_i$、$S \in \mathcal{T}_j$ 且 $i \ne j$ 时，$U_T U_S = U_S U_T$。

定义 8.3. 设 $\mathcal{X}$ 为一类巴拿赫空间，并固定 $X \in \mathcal{X}$。

(a) 设 $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ 是作用在 X 上的交换 n 元算子组。若存在 $Y \in \mathcal{X}$ 和压缩映射，则称 $\mathbf{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 中存在联合 N- 膨胀

$$J : X \to Y, \qquad Q : Y \to X,$$

以及一组交换的 n 元等距算子 $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) \subseteq \mathcal{L}(Y)$，使得对于所有满足 $\sum_{k=1}^n i_k \le N$ 的多重指标 $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$,

$$T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n} = Q\, U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n} J.$$

(b) 设 $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ 是作用在 X 上的两两可交换的算子族。若存在 $Y \in \mathcal{X}$ 和压缩映射，则称 $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ 存在联合同时 N- 膨胀于 $\mathcal{X}$

$$J : X \to Y, \qquad Q : Y \to X,$$

并且，对每个 $1 \le i \le n$ 和 $T \in \mathcal{T}_i$，存在一个等距映射 $U_T \in \mathcal{L}(Y)$，使得:

(a) 对于每个有限序列 $T_1, \ldots, T_m$，若满足 $0 \le m \le N$ 和 $T_k \in \mathcal{T}_{j_k}$（其中某个 $1 \le j_k \le n$），则有

$$T_1 \cdots T_m = Q\, U_{T_1} \cdots U_{T_m} J,$$

（*b*）以及 $U_T U_S = U_S U_T$ 当 $T \in \mathcal{T}_i$、$S \in \mathcal{T}_j$ 且满足 $i \neq j$时。

注 8.4。 情形 $n = 1$ 包含在上述定义 (8.1) 和 (8.3)之中。在这种情况下，交换条件是空泛成立的，因此只需说一个算子（或一个算子族）允许进行膨胀或 N-膨胀，或 同时膨胀或同时N-膨胀于 $\mathcal{X}$中，并省略“联合”一词。

注 8.5。 请注意，定义 (8.1) 和 (8.3) 自然推广了 [24] 中引入的相应单变量概念。

定义 8.6。 设 $\mathcal{X}$ 是一类巴拿赫空间。若 $\mathcal{X}$ 在有限 ℓ_p-和下封闭，则称之为此类。对于每个 $X \in \mathcal{X}$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$，有限直和 $\ell_p^n(X)$ 也属于 $\mathcal{X}$。

F或为简化记号，我们将集合 $\{1, \ldots, n\}$ 记作 $[n].$。定义函数集合

$$\mathcal{A} := \{\alpha : [N] \to [m]\}. \tag{8.1}$$

对于 $\alpha \in \mathcal{A}$，以及 $(\lambda_i)_{i=1}^m \in [0,1]^m$ 集合

$$\Lambda(\alpha) := \prod_{k=1}^{N} \lambda_{\alpha(k)}.$$

令 σ: $[N] \to [N]$为 N-循环 $(1 \ldots N)$。 以下引理的证明见[24,定理 4.1]的证明

引理 8.7。 令 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}(X)$ 且令 $T_i \in \mathcal{T}$对于 $1 \le i \le m.$。则对所有 $0 \le n \le N$，我们有单位元恒等式

$$T^n = \sum_{\alpha \in A} \frac{\Lambda(\alpha)}{N} \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} T_{\alpha(\sigma^{k-1}(j))}, \tag{8.2}$$

其中 $(\lambda_i)_{i=1}^m \in [0,1]^m$ 以及 $T = \sum_{i=1}^m \lambda_i T_i$.

定理 (B.1)的证明。 由于 $(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n)$ 具有联合同时扩张，不妨设每个 $\mathcal{T}_i$ 均由等距算子组成。

对于每个 i，我们可以写成

$$T_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} T_{i,j},$$

其中 $\lambda_{i,\ j} \in [0,1]$ 且 $\sum_{j=1}^m \lambda_{i,\ j} = 1$，其中 $T_{i,\ j} \in \mathcal{T}_i$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义函数集 $\mathcal{A}_i :=\ = \mathcal{A}$，其中 $mathcal A$ 与（8.1）中的相同。对于 $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$，令

$$\Lambda(\alpha_i) := \prod_{k=1}^{N} \lambda_{i,\alpha_i(k)}.$$

于是可以验证

$$\sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}_i} \Lambda(\alpha_i) = 1. \tag{8.3}$$

定义

$$Y := \ell_p^{N^n m^{nN}}(X).$$

由于 $\mathcal{X}$ 在有限个 ℓ_p-和下保持稳定，因此有 $Y \in \mathcal{X}$。

定义 $J: X \to Y$ 为

$$(Jx)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} = \left(\frac{\prod_{i=1}^n \Lambda(\alpha_i)}{N^n}\right)^{1/p} x,$$

其中 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathcal{A}^n$ 且 $(i_1,\dots,i_n) \in [N]^n$。

我们验证 J 是一个等距映射:

$$\|Jx\|_p^p = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \frac{\prod_{i=1}^n \Lambda(\alpha_i)}{N^n} \|x\|_X^p.$$

$(i_1,\dots,i_n)$ 上的内层求和有 N^n 项，因此与分母抵消。利用 (8.3),

$$\|Jx\|_p^p = \left(\prod_{i=1}^n \sum_{\alpha_i \in \mathcal{A}_i} \Lambda(\alpha_i)\right) \|x\|_X^p = \|x\|_X^p.$$

因此 J 是一个等距映射。设 $q \in (1,\infty)$ 满足 $1/p + 1/q = 1$。定义算子Q: $Y \to X$ 为

$$Qy := \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left(\frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right)^{1/q} y_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)},$$

for

$$y = \left(y_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathcal{A}^n,\,(i_1,\dots,i_n)\in[N]^n}.$$

现在我们证明是一个Q压缩映射。

由三角不等式可得

$$\|Qy\| \le \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left(\frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right)^{1/q} \left\|y_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|.$$

应用指数为 p 和 q 的 Hölder 不等式，得到

$$\|Qy\| \le \left(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right)^{1/q} \left(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|y_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|^p\right)^{1/p}.$$

现在注意，由 (8.3)

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n} \cdot N^n = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j) = 1.$$

因此，我们得到

$$\|Qy\| \le \left(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|y_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|^p\right)^{1/p} = \|y\|_Y.$$

因此， Q 是一个压缩映射。

对于 $1 \le r \le n$，定义 $U_r: Y \to Y$为

$$(U_r x)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} := T_{r,\alpha_r(i_r)}\, x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,i_n)}, \tag{8.4}$$

其中

$$x = \left(x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n,\ (i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,N\}^n} \in Y,$$

且 σ: $\{1,\dots,N\} \to \{1,\dots,N\}$表示 N-循环 $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ N)$。

取定 $r \in \{1,\dots,n\}$。由各个 U_r 的线性可知，$T_{r,j}$ 以及如（U_r 8.4）中所定义的 的线性是显然的。我们来验证 U_r 是一个等距映射。回忆

$$\|x\|_Y^p = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|_X^p,$$

并且根据假设，对于所有 $1 \le j \le m$，每个 $T_{r,j}$ 都是 X 上的等距映射。因此

$$\begin{aligned}\|U_r x\|_Y^p &= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|\left(U_r x\right)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|_X^p \\ &= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|T_{r,\alpha_r(i_r)}\, x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,i_n)}\right\|_X^p \\ &= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,i_n)}\right\|_X^p,\end{aligned}$$

这里利用了 $T_{r,\alpha_r(i_r)}$ 是等距映射这一点，将其移入范数中。现在注意到映射

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\ i_1,\dots,i_n) \longmapsto (\alpha_1,\dots,\alpha_n,\ i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,i_n)$$

是有限指标集 $\mathcal{A}^n \times [N]^n$ 上的一个双射，因为它在除第r个 i坐标之外的所有坐标上都是单位元，而在该坐标上应用置换 σ。因此，上面的双重求和等于

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \sum_{(i_1,\dots,i_n)} \left\|x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}\right\|_X^p = \|x\|_Y^p.$$

因此，对所有 $x \in Y$， $\|U_r x\|_Y = \|x\|_Y$，所以 U_r 是等距映射。

现在我们证明，对于 $r \ne s$， U_r与 U_s可交换。取定 $r \ne s$和一个指标 $((\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n))$。我们计算 $U_r U_s x$对应的坐标。首先，

$$(U_s x)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} = T_{s,\alpha_s(i_s)}\, x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_s),\dots,i_n)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\big(U_r(U_s x)\big)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} &= T_{r,\alpha_r(i_r)}\big(U_s x\big)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,i_n)} \\ &= \big(T_{r,\alpha_r(i_r)}\, T_{s,\alpha_s(i_s)}\big)\, x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,\sigma(i_s),\dots,i_n)}.\end{aligned}$$

交换 r 和 s 的角色可得

$$\big(U_s(U_r x)\big)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} = \big(T_{s,\alpha_s(i_s)} T_{r,\alpha_r(i_r)}\big)\, x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,\sigma(i_r),\dots,\sigma(i_s),\dots,i_n)}.$$

根据假设，族 $\mathcal{T}_1$、……、$\mathcal{T}_n$ 两两可交换，因此 $\mathcal{T}_r$ 中的每个算子都与 $\mathcal{T}_s$ 中的每个算子可交换。特别地，

$$T_{r,\alpha_r(i_r)} T_{s,\alpha_s(\sigma(i_r))} = T_{s,\alpha_s(\sigma(i_r))} T_{r,\alpha_r(i_r)}.$$

因此，这两个坐标值

$$\big(U_r(U_s x)\big)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)} \quad \text{and} \quad \big(U_s(U_r x)\big)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(i_1,\dots,i_n)}$$

相等 。由于这对每个指标都成立，我们得出 $U_r U_s x = U_s U_r x$ 对所有 1
$x \in Y$，也就是说，
$U_r U_s = U_s U_r$.

接下来我们证明，对于任意满足 $j_1 + \cdots + j_n = N,$的 $0 \le j_1,\dots,j_n \le N$，我们有如下单位元

$$T_1^{j_1} \dots T_n^{j_n} x = Q U_1^{j_1} \dots U_n^{j_n} J x, \text{for all } x \in X. \tag{8.5}$$

为了描述膨胀算子的作用，令

$$x = \big(x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\,(i_1,\dots,i_n)}\big).$$

那么，对于固定的 $r \in \{1, \dots, n\}$， U_r 的迭代作用为

$$\left(U_r^{j_r} x\right)_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\,(i_1,\dots,i_n)} = \left(\prod_{l_r=1}^{j_r} T_{r,\,\alpha_r\left(\sigma^{\,i_r-1}(l_r)\right)}\right) x_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\,(i_1,\dots,\sigma^{j_r}(i_r),\dots,i_n)}. \tag{8.6}$$

上文使用了以下事实： $\sigma^{k-1}(j) = \sigma^{j-1}(k)$ 对所有 j， $k \in \{1, \dots, N\}$.

$$\begin{aligned} QU_1^{j_1} \cdots U_n^{j_n} Jx &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}^n} \sum_{i\in[N]^n} \left(\frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right)^{1/q} \left(\frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right)^{1/p} \left(\prod_{r=1}^{n} \prod_{l_r=1}^{j_r} T_{r,\,\alpha_r\left(\sigma^{\,i_r-1}(l_r)\right)}\right) x \\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{A}^n} \sum_{i\in[N]^n} \left(\frac{\prod_{j=1}^n \Lambda(\alpha_j)}{N^n}\right) \left(\prod_{r=1}^{n} \prod_{l_r=1}^{j_r} T_{r,\,\alpha_r\left(\sigma^{\,i_r-1}(l_r)\right)}\right) x \\ &= \prod_{r=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha_r\in\mathcal{A}} \sum_{i_r\in[N]} \frac{\Lambda(\alpha_r)}{N} \prod_{l=1}^{j_r} T_{r,\,\alpha_r\left(\sigma^{\,i_r-1}(l)\right)} \Big) x \\ &= T_1^{j_1} \dots T_n^{j_n} x. \end{aligned} \tag{8.7}$$

上文使用引理（8.7）得到了（8.7）。 □

推论 8.8。 设 $p \in (1、\ \infty)$ 以及 $(\mathcal{U}_1、\ \dots、\ \mathcal{U}_n)$ 是作用在 $L_p(\mathcal{M})$ 上的由等距算子组成的两两可交换族的元组。那么，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，算子元组 $\mathbf{T} = (T_1、\ \dots、\ T_n)$，其中 T_i 属于 $\mathcal{U}_i$ 的凸包，且 $1 \le i \le n$，也都在更大的非交换 L_p-空间上具有联合N-膨胀。

注 8.9。 如 [24]，中一样，可以使用超积论证，为这类交换元组的强算子拓扑极限得到联合膨胀；这一点将在其他地方讨论。

9. Quantitative ergodic theorem for semigroup of operators

令 $1 \le p < \infty$. 我们记 $\mathbb{R}_+^d := \{(t_1、\ \dots\dots、\ t_d) : t_i \ge 0, \quad 1 \le i \le d\}$. 令 $\alpha : \mathbb{R}_+^d \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 为一个强连续一致有界算子半群。对任意$t > 0$，定义

$$A_t(\alpha)x := \frac{1}{t^d} \int_0^t \cdots \int_0^t \alpha_{(s_1,\dots,s_d)}(x)\, ds_1 \dots ds_d, \quad x \in L_p(\mathcal{M}).$$

对于算子交换元组 $\mathbf{T} = (T_1、\ \dots\dots、\ T_d)$，其中 $\mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$，我们定义

$$A_n(\mathbf{T})x := \frac{1}{n^d} \sum_{j_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_d=0}^{n-1} T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}(x), \quad x \in L_p(\mathcal{M}).$$

命题 9.1。 设 $\alpha : \mathbb{R}_+^d \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个强连续一致有界算子半群，且存在正常数 $C > 0$，使得对所有非负整数 $\mathbf{k} : = (k_1、\ \dots\dots、\ k_d)$

$$\sup_{(n_i)_i} \left\| \left(A_{n_{i+1}}(\mathbf{T}_{\frac{1}{\mathbf{k}}})x - A_{n_i}(\mathbf{T}_{\frac{1}{\mathbf{k}}})x\right)_i \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C \|x\|_p, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}). \tag{9.1}$$

其中上确界取遍所有正整数的递增序列$(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (0、\ \infty)$ 以及 $\mathbf{T}_{\frac{1}{\mathbf{k}}} : = (\alpha_{(\frac{1}{k},\dots,0)} \cdots、\ \alpha_{(0,\dots,\frac{1}{k})})$。那么

$$\sup_{(t_i)_i} \left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x\right)_i \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C \|x\|_p, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}). \tag{9.2}$$

其中上确界取遍所有递增序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (0、\ \infty)$

证明。 设 $0 < t_1 < \cdots < t_m$ 是一个有限递增序列。只需证明 (9.2)，且其中的常数与所选序列无关。对于任意 $t > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，令 $n_k(t) := \lfloor kt \rfloor$，其中 $\lfloor s \rfloor$ 表示不超过 s的最大整数。

我们首先证明以下逼近结论。对于每个 $t > 0$ 和 $x \in L_p(\mathcal{M})$，我们断言

$$\left\| A_{n_k(t)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_t(\alpha)x \right\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \to \infty. \tag{9.3}$$

事实上，由于 α的强连续性和一致有界性，黎曼积分

$$\int_0^t \cdots \int_0^t \alpha_{(s_1,\ldots,s_d)}(x)\, ds_1 \cdots ds_d$$

可由黎曼和逼近

$$\frac{1}{k^d} \sum_{j_1=0}^{n_k(t)-1} \cdots \sum_{j_d=0}^{n_k(t)-1} \alpha_{\left(\frac{j_1}{k},\ldots,\frac{j_d}{k}\right)}(x) = A_{n_k(t)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x.$$

由于 $|n_k(t)/k - t| \to 0$ 当 $k \to \infty$时，(9.3)中的收敛性得证。

为此，利用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \\
&\quad \le \left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x - \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right)\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \\
&\qquad + \left\| \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})}.
\end{aligned}$$

根据命题的离散假设，即（9.2），第二项有如下界 $C\|x\|_p$。因此，

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \\
&\quad \le \left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x - \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right)\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} + C\|x\|_p.
\end{aligned}$$

现在处理误差项。由非交换 Khintchine 不等式以及收敛性（9.3），可得

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x - \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right)\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \\
&\quad \lesssim \left\| \sum_i \varepsilon_i \otimes \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x - \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right)\right) \right\|_{L_p(L_\infty(\Omega)\,\overline{\otimes}\,\mathcal{M})} \\
&\quad \le \sum_i \left\| A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x - \left(A_{n_k(t_{i+1})}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x - A_{n_k(t_i)}(\mathbf{T}_{1/\mathbf{k}})x\right) \right\|_p \longrightarrow 0, \quad \text{as } k \to \infty.
\end{aligned}$$

结合上述估计并令 $k \to \infty$，可得

$$\left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x\right)_{i=0}^{m-1} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C\|x\|_p.$$

由于常数 C 与有限序列 $(t_i)_{i=0}^m$无关，故（9.1）中的所需上确界界成立。证明完毕。□

如下引理的证明与 [31, 引理 7.3]类似，很容易得出。

引理 9.2。 令 $1 < p < \infty$，并令 $\mathbf{U} = (U_1、\ldots\ldots、U_n)$ 为作用在 $L_p(\mathcal{M})$上的可交换等距算子组。令 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为任意递增正整数序列。则

$$\left\| \left(A_{n_i}(\mathbf{U})x - A_{n_{i+1}}(\mathbf{U})x\right)_{i\in\mathbb{N}} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C_p \|x\|_{L_p(\mathcal{M})}, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}).$$

将上述引理与 [31, 定理 1 的证明4] 中的类似计算相结合，我们得到以下结论。

推论 9.3。设 $1 < p < \infty$ 和 $\mathbf{S} := (S_1, \dots, S_n)$ 是算子 $\mathbf{T}$ 在推论 (8.8)中所述条件下的强极限，则

$$\left\| \left(A_{n_i}(\mathbf{S})x - A_{n_{i+1}}(\mathbf{S})x \right)_{i\in\mathbb{N}} \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C_p \|x\|_{L_p(\mathcal{M})}, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}),$$

其中$(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是任意递增正整数序列。

作为引理（9.2）、（8.8）及上述推论的应用，我们可以利用命题（9.1）证明一大类半群满足定量遍历定理。不过，我们陈述以下一般事实；当然，该结论对由 Lamperti 压缩算子构成的单参数半群，或由推论（9.2）得出的压缩算子多参数半群也成立。

推论 9.4。设 $1 < p \neq 2 < \infty$ 和 $\alpha : \mathbb{R}_+^d \to \mathcal{L}(L_p(\mathcal{M}))$ 是一个强连续压缩半群，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，压缩算子交换元组 $\mathbf{T}_k := (\alpha_{(\frac{1}{k},\dots,0)}, \dots, \alpha_{(0,\dots,\frac{1}{k})})$ 都存在到某个其他非交换 L_p-空间的联合膨胀；则

$$\sup_{(t_i)_i} \left\| \left(A_{t_{i+1}}(\alpha)x - A_{t_i}(\alpha)x \right)_i \right\|_{L_p(\mathcal{M};\ell_2^{rc})} \le C \|x\|_p, \quad \forall x \in L_p(\mathcal{M}). \tag{9.4}$$

其中，上确界取遍所有递增序列 $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$

致谢： 第一作者部分获得国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12071355、12325105、12031004、W2441002）。第三位作者感谢 DST-INSPIRE 教师奖学金 DST/INSPIRE/04/2020/001132、总理青年研究人员资助计划 ANRF/ECRG/2024/000699/PMS，以及 ANRF/ARGM/2025/000895/MTR 的支持。

References

[1] J. M. Aldaz，几何倍增度量空间上平均算子的有界性，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **44** (2019)，第1期，497-503。[2] M. A. Akcoglu，M，L. Sucheston，巴拿赫空间上正压缩算子的膨胀。Canad. Math. Bull. 20 (1977)，第3期，285–292。[3] C. Anantharaman-Delaroche，关于非交换空间上自由群作用的遍历定理，Probab. Theory Related Fields **135** (2006)，第4期，520-546。[4] C. Anantharaman，J.-P. Anker，M. Babillot，A. Bonami，B. Demange，S. Grellier，F. Havard，P. Jaming，E. Lesigne，P. Maheux，J.-P. Otal，B. Schapira 和 J.-P. Schreiber，群作用的遍历定理，Monographies de L'Enseignement Math´ematique，第41卷，L' Enseignement Math´ematique，日内瓦，2010。[5] T. Ando，关于一对交换收缩算子。塞格德数学学报 24 1963 88–90。[6] J. Avigad，J. Rute，一致凸巴拿赫空间中的振荡与均值遍历定理，《遍历理论与动力系统》**35** (2015)，第4期，1009-1027。[7] T. N. Bekjan，正压缩算子的非交换极大遍历定理，《泛函分析杂志》**254** (2008)，第9期，2401-2418。[8] P. Bikram 和 D. Saha。群度量测度空间相关的平方函数极大不等式与定量平均遍历定理，arXiv:2506.18589，2025。[9] G. Birkhoff，遍历定理的证明，Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** (1931)，656-660。[10] J. Bourgain，算术集合的逐点遍历定理，Publ. Math. IHES. **69** (1989)，5-41。[11] E. Breuillard，多项式增长局部紧群的几何与大球的形状，Groups Geom. Dyn. **8** (2014)，第3期，669-732。[12] L. Cadilhac，插值空间中的非交换 Khintchine 不等式，数学进展 **352** (2019) 265-296。[13] L. Cadilhac，J. M. Conde-Alonso，J. Parcet，群代数中的谱乘子与非交换 Calder´on-Zygmund 理论，《纯粹与应用数学杂志》(9) **163** (2022) 450-472。[14] L. Cadilhac，S. Wang，可和群的非交换极大遍历不等式，arXiv:2206.12228。

[15] A. Calder´on，一般遍历定理，《数学年刊》58 (1953)，182-191。[16] M. Caspers，D. Potapov，F. Sukochev，D. Zanin，绝对值映射的弱型估计，《算子理论杂志》73 (2015)，第2期，361-384。[17] M. Christ，一个 $T(b)$定理，附关于解析容量与柯西积分的注，《数学讨论》60/61 (1990)，第2期，601-628。[18] J. M. Conde-Alonso，L. D. L´opez-S´anchez，超越倍增测度的算子值二进调和分析，《美国数学会会刊》，144 (2016)，第3869-3885页。[19] R. R. Coifman，G. Weiss，某些齐次空间上的非交换调和分析。 ´某些奇异积分的研究，《数学讲义》第242卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1971。[20] R. R. Coifman，W. Weiss，分析中的传递方法，美国数学科学会议委员会第31号，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[21] J. P. Conze，N. Dang-Ngoc，非交换动力系统的遍历定理，《数学发明》46 (1978)，1-15。[22] I. Cuculescu，冯·诺伊曼代数上的鞅，《多元分析杂志》1 (1971) 17-27。[23] T. Fack，H. Kosaki，可测算子的广义 s-数，《太平洋数学杂志》123 (1986) 269-300。[24] S. Fackler，J. Gl¨uck，构造巴拿赫空间上膨胀的工具箱，《伦敦数学会会刊》118 (2019)，第2期，416-440。[25] G. Fendler，正压缩算子单参数半群的膨胀，巴拿赫空间，Canad. J. Math. 49 (1997)，第4期，736-748。[26] G. Fendler，正压缩算子的连续单参数半群在 L^p空间上的膨胀与转移，《萨尔大学年刊》数学系列9 (1998)，第1期，iv+97。[27] Y. Guivarc'h，调和函数的多项式增长与周期，《法国数学科学通报》101 (1973)，353-379。[28] R. Gupta，S. K. Ray。关于 N. Th. Varopoulos 的一个问题及常数 $C_2(n)$。《傅里叶研究所年刊》。第68卷。第6期。2018。[29] G. Hong，B. Liao，S. Wang，与倍增条件相关的非交换极大遍历不等式，《杜克数学杂志》170 (2021)，第2期，205-246。[30] G. Hong，W. Liu，多项式增长群作用的定量遍历定理，《遍历理论与动力系统》46 (2026)，128-181。[31] G. Hong，W. Liu，B. Xu，定量平均遍历不等式：作用于单个非交换 L_p 空间的幂有界算子，《泛函分析杂志》286 (2024)，第1期，110190。[32] G. Hong，T. Ma，微分算子与半群的向量值 q-变差 I，《数学杂志》286 (2017) 89-120。[33] G. Hong，S. K. Ray，S. Wang，非交换L_p空间上一些正算子的极大遍历不等式，《伦敦数学会杂志》108 (2023)，第1期，362-408。[34] G. Hong，M. Sun，非交换多参数维纳-温特纳型遍历定理，《泛函分析杂志》275 (2018)，第5期，1100-1137。[35] G. Hong，S. Wang，X. Wang，非交换傅里叶级数的逐点收敛，《美国数学会回忆录》302 (2024)，第1520号，v+86 页。[36] G. Hong，B. Xu，遍历理论中平方函数的非交换弱型 (1, 1) 估计，《泛函分析杂志》280 (2021)，第9期，108959。[37] Y. Hu，一些群作用的极大遍历定理，《泛函分析杂志》254 (2008)，第5期，1282-1306。[38] T. Hyt¨onen，A. Kairema，倍增度量空间中的二进立方体系统，《数学讨论》126 (2012)，第1期，1-33。[39] R. Jajte，非交换概率中的强极限定理，《数学讲义》第1110卷，施普林格出版社，柏林，1985。[40] R. Jajte，非交换 L_2空间中的强极限定理，《数学讲义》第1477卷，施普林格出版社，柏林，1991。[41] R. Jones，I. Ostrovskii，J. Rosenblatt，遍历理论中的平方函数，《遍历理论与动力系统》16 (1996)，267-305。[42] R. Jones，J. Rosenblatt，微分变换与遍历变换，《数学年刊》323 (2002)，525-546。[43] M. Junge，非交换鞅的杜布不等式，《纯粹与应用数学杂志》549 (2002)，149-190。[44] M. Junge，C. Le Merdy，Q. Xu，非交换 L_p空间上的 H^∞ 泛函演算与平方函数，Ast´erisque. 305 (2006) vi+138 页。[45] M. Junge，M，C. Le Merdy，非交换 L_p 空间上的膨胀与刚性分解。《泛函分析杂志》 249 1 2007 220 252 。( ): - M. Junge, M. Musat，约翰-尼伦伯格定理的一个非交换[46]版本，《美国数学会汇刊》359 (2007)，第1期，115-142。

[47] M. Junge, Q. Xu，非交换极大遍历定理，《美国数学会杂志》20 2, 385 2007 439 ( )，第 - 期。[48] M. Junge, Q. Xu，非交换 Burkholder/Rosenthal 不等式 II：应用，以色列数学杂志 167 (2008年), 227-282。[49] C.-H. Kan, Lamperti 算子的遍历性质，《加拿大数学杂志》30 (1978年), 第 6 期, 1206-1214。[50] H. Kosaki，关于映射 $\phi \mapsto |\phi|$ 从 W^*-代数的预对偶空间出发的连续性，《泛函分析杂志》59 (1984年), 第 1 期, 123-131。[51] I. Kov´acs, J. Sz¨ucs，冯·诺伊曼代数中的遍历型定理，塞格德数学学报 27 (1966年), 233-246。[52] U. Krengel，关于遍历定理中的收敛速度，数学月刊 86 (1978/79年), 第 1 期, 3-6。[53] B. K¨ummerer，一条非交换个体遍历定理，《数学发明》46 (1978年), 139-145。[54] E. C. Lance，凸集与算子代数的遍历定理，《数学发明》37 (1976年) 201-214。[55] E. Lindenstrauss，可和群的逐点定理，《数学发明》146 (2001年), 第 2 期, 259-295。[56] S. Litvinov，一条非交换 Wiener-Wintner 定理，Illinois J. Math. 58 (2014年), 第 3 期, 697-708。[57] F. Lust-Piquard，Khintchine 不等式在 C_p $(1 < p < \infty)$ 中，巴黎科学院报告 S´系列 I 数学 303 (1986年), 第 7 期, 289-292。[58] F. Lust-Piquard, G. Pisier，非交换 Khintchine 不等式与 Paley 不等式，数学档案 29 (1991年), 第 2 期, 241-260。[59] T. Mei，算子值 Hardy 空间，《美国数学会回忆录》188 (2007年) vi+64 页。[60] W. Mlak，有序群情形下的酉扩张，波兰数学年刊，第 17 卷。波兰科学院数学研究所，1965年。[61] S. Mondal, S. Palai, S. K. Ray，H^∞ 交换 Ritt 算子的函数演算，arXiv:2505.05788。[62] P. Mohanty, S. K. Ray，Ritt 算子的联合函数演算。《积分方程与算子理论》91 (2019年), 第 2 期，论文编号 14，共 18 页。[63] A. Nevo，群作用的逐点遍历定理，《动力系统手册》第 1B 卷，871-982，爱思唯尔公司，阿姆斯特丹，2006年。[64] J. Parcet，奇异积分的伪局部化与非交换 Calder´on-Zygmund 理论，《泛函分析杂志》256 (2009年) 509-593。[65] A. L. T. Paterson，可平均性，《数学调查与专著》第 29 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1988年。[66] V. V. Peller，J. von Neumann 不等式在空间 L^p上的类比，苏联科学院通报 231 (1976年), 第 3 期, 539-542。[67] V. V. Peller，根据乘子范数估计 L^p 空间中的算子多项式，斯捷克洛夫数学研究所论文集（列宁格勒分部）65 (1976年), 132-148, 205-206。[68] V. V. Peller，J. von Neumann 不等式的类比、压缩算子的等距扩张以及可测函数空间中通过等距算子进行的逼近，斯捷克洛夫数学研究所论文集 155 (1981年), 103-150, 185。[69] V. V. Peller，Schatten-von Neumann 类上算子多项式的估计，《苏联数学》26 (1984年), 2167-2168。[70] G. Pisier，非交换向量值 L_p-空间与完全 p-可和映射，Ast´erisque 247 (1998年), vi+131。[71] B. de Pagter, F. Sukochev，非交换算子空间中的交换子估计与 $\mathbb{R}$-流，爱丁堡数学会会刊 50 (2007年) 293-324。[72] G. Pisier, Q. Xu，非交换鞅不等式，数学物理通讯 189 (1997年), 第 3 期, 667-698。[73] G. Pisier, Q. Xu，非交换 L^p 空间，《巴拿赫空间几何手册》第 2 卷，1459-1517，北荷兰出版社，2003 年。[74] N. Randrianantoanina，非交换鞅的平方函数不等式，以色列数学杂志 140 (2004年), 333-365。[75] N. Randrianantoanina，非交换鞅的弱型不等式及其应用，伦敦数学会会刊 91 (2005年), 第 2 期, 509-542。[76] ´E. Ricard，非交换 L_p 上的分数次幂，适用于 $p < 1$，数学进展 333 (2018年), 194-211。[77] ´E. Ricard，反交换子的一个 L_p-不等式，《积分方程与算子理论》93 (2021年), 第 1 期，论文编号 7，共 8 页。[78] O. M. Shalit，扩张理论：导览。算子理论、泛函分析与应用。查姆：施普林格国际出版公司，2021年。551-623。[79] F. Sukochev, D. Zanin，自由概率论中的 Johnson-Schechtman 不等式。《泛函分析杂志》263 (2012年), 第 10 期, 2921-2948。[80] B. Sz.-Nagy, C. Foias，《希尔伯特空间算子的调和分析》，北荷兰出版社，1970年。

[81] A. Templeman，可和群的有界 Lamperti 表示的逐点遍历定理，Proc. Amer. Soc. 143 (2015年), 第 11 期, 4989-5004。[82] R. Tessera，倍增度量测度空间及多项式增长群中的球面体积，Bull. Soc. Math. France 135 (2007年), 第 1 期, 47-64。[83] N. T. Varopoulos，关于 von Neumann 不等式及张量积度量理论在算子理论中的应用，《泛函分析杂志》16 (1974年), 83-100。[84] N. T. Varopoulos，希尔伯特空间上的交换压缩算子族。Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 21 (1976年), 第 9 期, 1283-1285。[85] J. von Neumann，拟遍历假设的证明，Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18 1, 70 1932 82 ( )，第 - 期。[86] F. J. Yeadon，半有限冯·诺伊曼代数的遍历定理 I，《伦敦数学会杂志》16 (1977) 326-332。[87] B. Xu，平均算子的非交换微分变换，《算子理论杂志》90 (2023年), 第 1 期, 3-24, 2023。[88] F. J. Yeadon，半有限冯·诺伊曼代数的遍历定理 II，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 88 (1980年), 第 1 期, 135-147。[89] T. E. Walker，冯·诺伊曼代数上的自由群作用的遍历定理，《泛函分析杂志》150 (1997年), 第 1 期 , 27-47。[90] N. Wiener，遍历定理，《杜克数学杂志》 5 (1939 年), 第 1 期 , 1-18。

Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*Email address*: gxhong@hit.edu.cnSchool of Mathematics,
Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130,China*Email address*: lwei@swufe.edu.cnThe Institute of Mathematical Sciences, Chennai,
India and Homi Bhabha National Institute,Mumbai, India,*Email address*: samya@imsc.res.in
School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China*Email address*: bangxu@xmu.edu.cn