arXiv:2601.02180v1 [math.AG] 5 Jan 2026

曲线的实动机ζ函数的极点

´THEO JAUDON

ABSTRACT. 对于给定的实多项式函数 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$，我们关联实拓扑 ζ 函数 $Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 和 $Z^{\pm}_{top,\,0}(f;\ s) \in \mathbb{Q}(s)$，它们与 Denef 和 Loeser 在复数情形中定义的拓扑 zeta 函数类似。这些函数是 [Fic05a]和 [Cam17]中研究的实动机 ζ 函数的特化。因此，这些函数及其极点集是吹胀-Nash 等价的不变量。我们采用 [Vey95], 的方法，研究这些实拓扑 zeta 函数以及实动机 ζ 函数的极点，其中 f 是一个二元实多项式。

INTRODUCTION

设 $f : (\mathbb{C}^d,\ 0) \to (\mathbb{C},\ 0)$ 是一个复解析函数芽。在 [DL91], 中，Denef 和 Loeser 将一个有理函数 $Z_{top,\,0}(f;\ s) \in \mathbb{Q}(s)$ 与 f 关联，称为 f的局部拓扑 ζ 函数。若 $\sigma : (X,\ \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{C}^d,\ 0)$ 是一个解析修改，使得除子 $\mathrm{div}(f \circ \sigma)$ 与 $\sigma^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d)$ 同时具有正规交叉，则局部拓扑 ζ 函数定义为

$$Z_{top,0}(f;s) = \sum_{I \subset J} \chi(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}$$

其中，整数 $(\nu_i,\ N_i)_{i \in I}$是消解的数值数据，而 $(E_I^0)_{I \subset J}$表示将 $(f \circ \sigma)^{-1}(0) = \bigcup_{j \in J} E_j$ 分解为光滑子簇的典范分层。

作者通过将 $Z_{top,}0(f;\ s)$ 解释为某个 p-进 Igusa 函数的特定极限，证明了上述表达式与所选消解无关。如今，人们可以利用弱分解定理 [AKMW02]，或将 $Z_{top,}0(f;\ s)$ 视为动机 ζ 函数$Z_{mot}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$ 的特化，来证明其与所选消解无关；该动机 ζ 函数是在内蕴意义下定义的（例如参见 [DL98]）。
尽管名称给人这样的暗示，$Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 是 f在原点邻域内的一个解析不变量，但通常并不是拓扑不变量（反例见 [BCNLH02b] ）。

根据定义，$Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 的极点集合包含于集合

$$\{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J\ \} \subset \mathbb{Q}_{<0}.$$

然而，这份候选极点列表通常包含大量伪极点，而要确定其中哪些是真正的 $Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 极点，是一个非常困难的问题。在这方面，单值化猜想 [Vey25] 预测，$Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 的极点必须满足某个拓扑条件，从而能够缩小 $Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 真正极点的范围。

定理 0.1 ([Mil68])**.** 对于 $a \in \{f = 0\}$，设 $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$，令 $D_\delta^* \subset \mathbb{C}$ 表示半径为 δ 的穿孔开圆盘，并令 $B_{a,\varepsilon} \subset \mathbb{C}^d$ 表示以 a 为中心、半径为 ε 的闭球。限制映射

$$f : f^{-1}(D_\delta^*) \cap B_{a,\varepsilon} \to D_\delta^*$$

是一个局部平凡的光滑纤维化。其纤维记作$\mathcal{F}_{f,a}$，称为 f 在 a 处的米尔诺纤维。它是一个维数为 $2(d-1)$ 的紧致可定向光滑流形，带有边界。此外， $\pi_1(D_\delta^*)$ 的一个生成元诱导出一个几何单值变换同胚 $T : \mathcal{F}_{f,a} \to \mathcal{F}_{f,a}$，进而诱导出唯一的代数单值算子

$$T^* : H^*(\mathcal{F}_{f,a}; \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,a}; \mathbb{C})$$

.

猜想 0.2（单值化猜想，弱版本）。设 s_0 是 $Z_{top,0}(f; s)$ 的一个极点。那么，对于某个原点邻域内的 $x_0 \in \{f = 0\}$，$e^{2i\pi s_0}$ 是单值化 T_{x_0} : $H^*(\mathcal{F}_{f,x_0}; \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,x_0}; \mathbb{C})$ 的一个特征值。

该猜想的强版本预言，$Z_{top,0}(f; s)$ 的每个极点，甚至更强地说， $Z_{mot}(f; \mathbb{L}^{-s})$ 的每个极点，都是 f 的 Bernstein-Sato 多项式 $b_{f,0}(s)$ 的根。根据 Malgrange 和 Kashiwara 的研究，我们知道 $b_{f,0}(s)$ 的每个根都会导出单值化的一个特征值。

尽管单值化猜想即使在弱版本下仍未得到广泛解决，但它已在某些特殊情形中得到证明，例如：

- 曲线的情形 [Loe88],
- 齐次曲面的情形 [BCNLH02a],
- 超平面配置的情形 [BMT11],
- 四个变量的牛顿非退化超曲面奇点的情形 [ELT22]。

对于曲线，Veys 在 [Vey95]中给出了以下判据，用于从消解图中的候选极点集合中过滤出真正的极点。更准确地说，取 $f \in \mathbb{C}[x, y]$，令σ : （X， σ^{-1}（0）） $\to$ （$\mathbb{C}^2$，0）为 的典范嵌入解消，并记 f为 $\bigcup_{j\in J} E_j$ 该
$\sigma^{-1}(f^{-1}(0))$ 分解为不可约分支。

定理 0.3 ([Vey95] 定理 4.3)。 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。那么，当且仅当对于与其他分支至少相交 *3* 次的例外曲线 E_i，有 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ ；或者对于 f 的严格变换中的不可约分支 E_i，有 $s_0 = -\frac{1}{N_i}$ 时， s_0 是$Z_{top,0}(f; s)$ 的一个极点。该结果对动机 ζ 函数 $Z_{mot,0}(f; \mathbb{L}^{-s})$ 同样成立。

另一方面，动机型 ζ 函数也在实几何中得到了研究，例如见 [KP03], [Fic05a], [Fic05b], 和 [Cam17]。例如，为了获得吹胀-Nash 等价的不变量，Fichou 使用虚拟 Poincar´e 多项式 [MP03] 来定义与 Nash 函数芽 $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ [Fic05a]相关联的 ζ 函数 $Z(f; T)$ $\in \mathbb{Z}[u, u^{-1}][[T]]$ 以及带符号 ζ 函数 $Z^{\pm}(f; T)$。对于这些 ζ 函数，也有 Denef-Loeser 型公式，表明这些函数是有理函数，即属于 $\mathbb{Z}[u, u^{-1}](T)$。特别是，在这种情形下研究 ζ 函数的极点仍然是有意义的。

在 [Cam17] 和 [Fic05a], 中，作者采用 Nash 框架，这使得相关动机 ζ 函数的系数属于弧对称集的格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{AS})$ [Kur88]。为简单起见，本文仅考虑多项式函数 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，因此仍处于实代数簇范畴中。

本文的结构安排如下。第一节回顾代数情形下实动机 ζ 函数的构造。随后，我们定义实拓扑 ζ 函数

$Z_{top,0}(f;\ s)$ $Z^{\pm}_{top,0}(f;\ s)$ $\in \mathbb{Q}(s)$，它们有时更适合用于研究极点，并且是上文所介绍的复拓扑 ζ 函数的实数类比。这些实拓扑 ζ 函数是实动机 ζ 函数的特化，因此是吹胀-Nash 等价的不变量。

在第二节中，我们完整描述了曲线的实拓扑与动机朴素 ζ 函数的极点。为此，我们沿用 [Vey95] 的方法，并将 Veys 的论证调整到实情形。更确切地说，我们首先研究给定候选极点对应的一个分支的贡献，并利用消解的实对偶图证明不同贡献不会相互抵消。这使我们得以确立定理2.19，该定理给出了一个数值判据，用于从消解图中筛选出真正的极点。特别地，我们证明如下结果。

定理 0.4（= 定理 *2.19*）。设 $f \in \mathbb{R}[x,y]$, $\sigma: (X, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, 0)$ 为 f 和 $Z_{top,0}(f;\ s)$ 的典范嵌入解消，并令 f 表示与 $s_0 \in \mathbb{Q}$ 相关联的实拓扑 *zeta* 函数。那么，$Z_{top,0}(f;\ s)$ 的极点为 $s_0 = -\frac{1}{N_i}$，当且仅当对于严格变换 E_i 的某个不可约分支，有 $\overline{E_i}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$；或者对于满足 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$ 的某条例外曲线 E_i，有 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$。等价地，有

$$Poles(Z_{top,0}(f;s)) = Poles(Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J_{\mathbb{R}}\ \}$$

其中 $J_{\mathbb{R}}$ 记实轨迹非空的 $(f\circ\sigma)^{-1}(0) = \bigcup_{j\in J} E_j$ 的分支集合.

在第三节中，我们研究曲线情形下带符号实拓扑与动机 ζ 函数的极点。所采用的方法与第二节相同，但计算给定候选极点的贡献更加复杂。特别地，我们证明（推论3.10）

$$\mathrm{Poles}(Z^{\pm}_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}\ \}.$$

在带符号的情形中，可能发生抵消，因此拓扑ζ函数与动机 ζ 函数的极点并不总是一致（见例 3.15 ），这与朴素情形不同。因此，为了更精确地研究极点，我们考察虚拟 Poincar´é 多项式层面的贡献。特别地，我们证明如下结论。

定理 0.5 (= 推论 3.17)**.** 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。假设恰好存在一个 $i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}$ 使得以下条件之一成立： E_i 是满足$(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$ 且 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 的例外曲线；或者 E_i 是严格变换的一个不可约分支，且 $s_0 = -\frac{1}{N_i}$。那么， s_0 是 $Z^{\pm}_{\beta,0}(f;\ u^{-s})$的一个极点。

在上述每个候选极点至多有一个非零贡献的情况下，可得

$$Poles(Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s})) = Poles(Z_{\beta,0}(f;u^{-s})) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}\ \}.$$

最后，我们提出一种解释：这些实 zeta 函数的极点可用单值化作用于 f 实点集上靠近原点的某一点处的米尔诺纤维时的特征值来理解。

致谢。 本文是作者博士论文的一部分。作者感谢导师 Goulwen Fichou 在本文准备过程中提供的建议与支持。

1. Real motivic zeta functions

本文所说的 $\mathbb{R}$ 上的代数簇，是指有限型的约化概形；而“实代数簇”一词专用于 [BCR 98] 中定义的簇。若 X 是 $\mathbb{R}$ 上的代数簇，则其实闭点集 $X(\mathbb{R})$ 自然带有实代数簇结构，进而也带有实解析空间结构。反过来，若 Y 是实代数簇，则存在一个 $\mathbb{R}$ 上的代数簇 X（通常不唯一），使得 $X(\mathbb{R})$ 与 Y 作为实代数簇同构。然而， $\mathbb{R}$ 上代数簇的范畴与实代数簇的范畴并不等价，因为后者具有严格更多的态射。例如，这一更大的态射类意味着每个拟射影实代数簇都是仿射的（[BCR98] 定理 3.4.4）。最后，若 X 是 $\mathbb{R}$ 上的代数簇，我们用 $X(\mathbb{C})$ 表示其复化的复点集。

定义 1.1. 我们将 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{R}})$（分别将 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$）记为由代数簇（分别为实代数簇）的同构类生成的自由阿贝尔群，并对以下形式的所有关系取商：只要 Y 是 X 的闭子簇，便有 $[X]-[Y]-[X\setminus Y]$。我们通过规定 $[X]\times[Y]=[X\times Y]$，赋予 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{R}})$ 和 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 环结构，并将 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{R}})$（分别将 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$）称为代数簇的格罗滕迪克环（分别为实代数簇的格罗滕迪克环）。存在一个自然的环态射 $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{R}})\to K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$，它将 $[X]$ 映到 $[X(\mathbb{R})]$。最后，我们将 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 关于仿射直线的类 $\mathbb{L}=[\mathbb{R}]$ 所作的局部化记为 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$。

定义 1.2. 对于 $n\geq 1$，我们用 $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中截断至阶 n、且从原点出发的形式弧空间，即

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)=\{\ \gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d \text{ formal arcs } \mid \gamma(0)=0\ \}/\sim$$

其中当且仅当 $\gamma_1(t)=\gamma_2(t) \pmod{t^{n+1}}$ 时 $\gamma_1\sim\gamma_2$。换言之

$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)=\{\ \gamma(t)=\sum_{i=1}^{n}a_it^i \mid (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{nd}\ \}\simeq\mathbb{R}^{nd}.$$

现在我们考虑在原点处消失的 $f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$，并用 $f_{\mathbb{C}}$ 表示其复化，即将多项式 f 视为 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d]$ 中的元素。

定义 1.3. 我们用 $\mathcal{X}_n(f)$ 表示所有与超曲面 $\{f=0\}$ 的接触阶等于 n 的弧 $\gamma\in\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)$ 的集合，即

$$\mathcal{X}_n(f)=\{\ \gamma\in\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)\mid \mathrm{ord}_t(f\circ\gamma)=n\ \}$$

并用 $\mathcal{X}_n^{\pm}(f)\subset\mathcal{X}_n(f)$ 表示子集

$$\mathcal{X}_n^{\pm}(f)=\{\ \gamma\in\mathcal{X}_n(f)\mid (f\circ\gamma)(t)=\pm t^n+o(t^{n+1})\ \}.$$

这些集合 $\mathcal{X}_n(f)$ 与 $\mathcal{X}_n^{\pm}(f)$ 是 Zariski-可构造的（即局部闭子集的并），位于 $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0)\simeq\mathbb{R}^{nd}$。特别地， $\mathcal{X}_n(f)$ 与 $\mathcal{X}_n^{\pm}(f)$ 定义了 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 的元素。这些可构造集细化了 Fukui 不变量（相应地，带符号的 Fukui 不变量），其研究见于 [IKK02] 与 [Fuk97]。

注 1.4。我们要强调的是，在环 $K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 中，我们考虑的是定义在 $\mathbb{R}$ 上的代数簇的实点。例如，如果 $f=x^2+y^2$ 有

$$\mathcal{X}_2(f)\simeq\{\ (a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^4\mid a_1^2+b_1^2\neq 0\ \}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$

因此在 $K_0(\mathbb{R}Var)$ 中有 $[\mathcal{X}_2(f)] = \mathbb{L}^2(\mathbb{L}^2-1)$。对于复化 $f_{\mathbb{C}}$，有

$$\mathcal{X}_2(f_{\mathbb{C}}) =\simeq \{\ (a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{C}^4 \mid a_1^2+b_1^2\neq 0\ \}\simeq \mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\setminus\{xy=0\}$$

使得 $\mathcal{X}_2(f_{\mathbb{C}}) = \mathbb{L}^2(\mathbb{L}^2-2\mathbb{L}+1)$ 属于 $K_0(Var_{\mathbb{C}})$。

定义1.5。与 f 相关联的实局部和朴素动机ζ函数是形式幂级数

$$Z_{mot,0}(f;T)=\sum_{n\geq 1}[\mathcal{X}_n(f)]\mathbb{L}^{-nd}T^n\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[[T]].$$

因此，它是（在 1.13的意义下）$\{f=0\}$ 在原点邻域内的实点的不变量。带符号 ζ 函数定义为

$$Z^{\pm}_{mot,0}(f;T)=\sum_{n\geq 1}[\mathcal{X}^{\pm}_n(f)]\mathbb{L}^{-nd}T^n\in\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[[T]].$$

为了获得更具体的不变量，拥有实代数簇的动机测度，即 $K_0(\mathbb{R}Var)\to A$ 的环同态，是很有用的。迄今为止已知的实代数簇最精细的可加可乘不变量是虚拟 Poincaré 多项式。

定理*1.6*（[*MP*03] 推论*2.2*）。*存在唯一的环同态* $\beta: K_0(\mathbb{R}Var)\to\mathbb{Z}[u]$，*使得* $\beta(X)=\sum \dim(H_i(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))u^i$，*其中* X *是光滑且紧致的。通过在* $u=-1$*处计算* $\beta(X)$，*可以*i*得到* X *的紧支撑欧拉示性数。*

例 1.7. 实射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 是光滑且紧致的，因此 $\beta(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))=1+u$。利用可加性，例如可以推得 $\beta(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\setminus\{\text{个点}\})=u+1-k$。注意，虚庞加莱多项式 并非实代数簇的拓扑不变量（见[MP03]例 2.7）。

注 1.8. 一旦有一个环态射 $\varphi: K_0(\mathbb{R}Var)\to A$ 满足 $\varphi(\mathbb{L})\neq 0$，它便诱导出一个态射 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[[T]]\to A[\varphi(\mathbb{L})^{-1}][[T]]$，从而对与 f 相关联的动机 ζ 函数进行特化。例如，若 $\chi_c: K_0(\mathbb{R}Var)\to\mathbb{Z}$ 表示紧支撑欧拉示性数，就得到如下特化

$$Z_{\chi_c,0}(f;T)=\sum_{n\geq 1}\chi_c(\mathcal{X}_n(f))(-1)^{-nd}T^n\in\mathbb{Z}[[T]]$$

其研究见 [KP03]。若 $\beta: K_0(\mathbb{R}Var)\to\mathbb{Z}[u]$ 表示虚庞加莱多项式，则得到如下特化

$$Z_{\beta,0}(f;T)=\sum_{n\geq 1}\beta(\mathcal{X}_n(f))u^{-nd}T^n\in\mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$$

该内容曾在 [Fic05a]中进行研究。

记号1.9。设 $\sigma: (X,\ \sigma^{-1}(0))\to(\mathbb{R}^d,\ 0)$ 是一个代数修改（即一个适当的双有理映射，在 f 的零点集之外为同构），使得因子$\sigma^*(\operatorname{div}(f))=\operatorname{div}(f\circ\sigma)$ 和 $\sigma^*(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d)$ 同时具有正规交叉。

这意味着，对于每个 $p\in\sigma^{-1}(f^{-1}(0))$，都存在一个以 p 为中心的局部坐标系 $(y_1,\ldots,y_d)$，使得 $f(\sigma(y_1,\ldots,y_d))=uy_1^{N_1}\ldots y_d^{N_d}$，其中 $u(p)\neq 0$，且 $\operatorname{jac}\ \sigma=vy_1^{\nu_1-1}\ldots y_d^{\nu_d-1}$，其中 $v(p)\neq 0$。根据广中平祐定理 [Hir64]，这种修改总是存在的；我们也称 $\sigma:(X,\sigma^{-1}(0))\to(\mathbb{R}^d,0)$ 是 f 的嵌入消解。

有了嵌入消解之后，我们用 $\bigcup E_j$ 表示 $\sigma^{-1}(f^{-1}(0))$ 按不可约$_{j\in J}$分支的分解；根据定义，E_j 是 X 中彼此横截地相交的光滑不可约超曲面。接着，我们用$\bigsqcup E_I^0$ 表示将$I\bigcup E_j$ 分解为光滑子簇的典范分层，其中 I 遍历 J 的所有非空子集，且$_{j\in J}E_I^0 = \bigcap E_i \setminus \bigcup E_{j\circ}$ 最后，消解的数值数据是整数 $N_i =^{i\in I}$ $_{j\in J\setminus I}\mathrm{mult}_{E_i}(f\circ\sigma)$ 和 $\nu_i = 1+\mathrm{mult}_{E_i}(\mathrm{jac}\ \sigma)$；它们可在上述局部坐标系中计算，且不依赖于所选坐标。换言之，有

$$\mathrm{div}(f\circ\sigma) = \sum_{j\in J} N_j E_j \text{ and } K_X = \sum_{j\in J}(\nu_j - 1)E_j.$$

注意，如果 E_i 是严格变换的不可约分支，那么 $\nu_i = 1$；当 f 是约化的时，我们还有 $N_i = 1$。

存在一个 Denef-Loeser 型公式，可根据上述嵌入消解，用 f 表示实动机 ζ 函数。

定理 1.10 （[Fic05a] 命题 4.2。）。设 σ:（X，$\sigma^{-1}(0)$）$\to$（$\mathbb{R}^d$，0） 是 f的嵌入消解。使用 *1.9*中的记号，有

$$Z_{mot,0}(f;T) = \sum_{\emptyset\neq I\subset J} (\mathbb{L}-1)^{|I|}[E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}$$

注 1.11。 f 的动机 ζ 函数因此是一个有理函数；更准确地说，$Z_{mot,\ 0}(f;\ T)$ 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}[T][_{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}^{1}]_{i\in I}$。特别地，$[\mathcal{X}_n(f)]$ 的序列由有限量的数据决定。

另一方面，这也证明上述表达式与所选的消解无关，因为 $Z_{mot,0}(f;\ T)$ 是在 1.5 中内在定义的。

为表达带符号 ζ 函数的有理性，我们必须如下引入分层 E_I^0 的覆盖 $\widetilde{E}^{0,\ \pm}_{I}$。 E_I^0 的每一点都有一个开仿射邻域 U，在该邻域上$f\circ\sigma = u\prod y_i^{N_i}$，其中 u 是一个单位。然后我们定义集合$_{i\in I}$

$$R_U^{\pm} = \{\ (x,t)\in(E_I^0\cap U)\times\mathbb{R}\mid t^m u(x) = \pm 1\ \}$$

其中 $m = \gcd(N_i)$。簇 $\widetilde{E}^{0,\ \pm}_{I}$ 是通过沿开集 $E_I^0\cap U$ 粘合 $R_U^{\pm}$ 得到的。于是有一个覆盖 $\widetilde{E}^{0,\ \pm}_{I}\to E_I^0$，它在欧几里得拓扑下局部平凡。为简便起见，我们将上述覆盖 $\widetilde{E}^{0,\ \pm}_{I}\to E_I^0$ 在$E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)$ 上的限制记为 $\widetilde{E}^{0,\ \pm}_{I}\cap\sigma^{-1}(0)$。

定理 1.12 ([Fic05a] 命题 4.4)。 设 $\sigma:(X,\sigma^{-1}(0))\to(\mathbb{R}^d,0)$ 是 f 的嵌入消解。则有

$$Z^{\pm}_{mot,0}(f;T) = \sum_{\emptyset\neq I\subset J}(\mathbb{L}-1)^{|I|-1}[\widetilde{E}_I^{0,\pm}\cap\sigma^{-1}(0)]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}.$$

研究这些实几何中的 ζ 函数的主要动机之一，是它们为吹胀-Nash 等价下 Nash 函数芽的分类提供了不变量。

定理 1.13 ([Fic05a] 定理 4.9.)。 函数 $Z_{\beta,\,0}(f;\ \ T)$ 和 $Z^{\pm}_{\beta\,,\,0}(f;\ \ T)$ 是吹胀-*Nash* 等价的不变量。

例如，通过虚Poincar$Z_{\beta,\,0}$ 多项式 $Z^{\pm}_{\beta\,,\,0}$ 定义的ζ函数被用于 [Fic05a] 中对二元Brieskorn多项式进行分类，并在 [Fic08] 中对吹胀-Nash等价下的简单奇点芽进行分类。类似地，动机 ζ 函数被用于 [Cam18] 中，将任意变量的Brieskorn多项式按吹胀-Nash等价进行分类（这与弧解析等价一致）。

注 1.14。 从现在起，我们总是首先在概形意义下取一个嵌入消解 $\sigma:(X,\ \sigma^{-1}(0))\to(\mathbb{A}^d_{\mathbb{R}},\ 0)$。然后，通过考虑实点上的诱导态射 $(X(\mathbb{R})\ \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R}^d,\ 0)$，我们便可以在实代数簇的范畴中工作。为强调这一点，我们将写作

$$Z_{mot,0}(f;T)=\sum_{\emptyset\neq I\subset J}(\mathbb{L}-1)^{|I|}[E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}.$$

在之后计算实代数曲线的交数时，需要采用这种概形观点，并同时考虑实点和复点。注意，复化 $f_{\mathbb{C}}$ 的动机 ζ 函数于是由下式给出

$$Z_{mot,0}(f_{\mathbb{C}};T)=\sum_{\emptyset\neq I\subset J}(\mathbb{L}-1)^{|I|}[E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)(\mathbb{C})]\prod_{i\in I}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}.$$

定义 1.15 （zeta 函数的极点）。 考虑在虚 Poincar´é 多项式层面定义的 ζ 函数$Z_{\beta,\,0}$。根据有理性公式，可以写成 $Z_{\beta,\,0}(f;\ T)\ =\ ^{P_{(T)}}{}_{Q(T)}$其中 $P(T)\ Q(T)\ \in\mathbb{Z}[u,u^{-1}][T]$。环 $\mathbb{Z}[u,u^{-1}]$是 $\bigcup\mathbb{Z}[\overline{u^{\frac{1}{k}},u^{-\frac{1}{k}}}$的子环，因此对于任意 $s\in\mathbb{Q}$，ζ 函数 $Z_{\beta,\,0}\in\bigcup\mathbb{Z}[\overline{u^{\frac{1}{k}},u^{-\frac{1}{k}}}][T]$可以在 $T=u^{-s}$处取值，这与 Igusa zeta 函数的类比是自然的。由此得到

$$Z_{\beta,0}(f;u^{-s})=\sum_{\emptyset\neq I\subset J}(u-1)^{|I|}\beta(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})\prod_{i\in I}\frac{u^{-(\nu_i+sN_i)}}{1-u^{-(\nu_i+sN_i)}}$$

也可以写成

$$Z_{\beta,0}(f;u^{-s})=\sum_{\emptyset\neq I\subset J}\beta(E_I^0\cap\sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})\prod_{i\in I}\frac{u-1}{u^{(\nu_i+sN_i)}-1}.$$

我们称 $s_0\in\mathbb{Q}$ 是 Z_{β},0$(f;\ u^{-s})$ 的一个极点，当且仅当 u^{-s_0} 是 Z_{β},0$(f;\ T)$ 的一个极点。等价地， $s_0\in\mathbb{Q}$ 是 Z_{β},0$(f;\ u^{-s})$ 的一个极点，当且仅当存在 P、$Q\in\mathbb{Z}[u,u^{-1}][T]$，使得 Z_{β},0$(f;\ T)\ =\ ^{P}(T)\ Q(T)$,并且 $P(u^{-s_0})\ \neq\ 0$ 以及 $Q(u^{-s_0})\ =0$。动机 ζ 函数的极点定义更加微妙，这是因为目前尚不清楚环 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 是否为整环。例如，已知环 $K_0(Var_{\mathbb{C}})$ 和 $K_0(\mathbb{R}Var)$ 不是整环（见 [Poo02], [Fic17]）。关于这一语境下极点的精确定义，请参阅 [RV03] 的第 4 节。我们仅指出，由于 Z_{β},0(f,u^{-s}) 是 Z_{mot},0$(f,\mathbb{L}^{-s})$ 的特化，因此 Z_{β},0(f,u^{-s}) 的任何极点也是 Z_{mot},0$(f,\mathbb{L}^{-s})$ 的极点。带符号 ζ 函数的极点以完全类似的方式定义。

我们对实动机 ζ 函数的极点的研究，一方面是由于这些极点的集合构成吹胀-Nash 等价的一个不变量，

另一方面则是因为在复数情形下，这些极点（至少在猜想层面上）具有重要的拓扑学解释。

例 1.16. 取 $f = x^3 + y^3$。原点处的爆破给出了 f 的嵌入消解，并可得到

$$Z_{\beta,0}(f;T) = u(u-1)\frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3} + (u-1)^2\frac{u^{-2}T^3}{1-u^{-2}T^3}\frac{u^{-1}T}{1-u^{-1}T}$$

因此，候选极点为 -1和 $-\frac{2}{3}$。化简后，得到

$$Z_{\beta,0}(f;u^{-s}) = \frac{(u-1)u^{-(2+3s)}(u-u^{-(s+1)})}{(1-u^{-(2+3s)})(1-u^{-(s+1)})}.$$

在 $s=-1$和 $s=-\frac{2}{3}$处计算分子，分别得到 $(u-1)^2u$和 $(u-1)(u-u^{-\frac{1}{3}})$，两者均非零。因此，$Z_{\beta,0}(f;u^{-s})$ 的极点确实为 -1和 $-\frac{2}{3}$。

设 $\sigma : (X, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^d_{\mathbb{R}}, 0)$ 是 f 的嵌入消解。类比复数情形，自然会为 f 关联一个所谓的实拓扑ζ函数 $Z_{top,0}(f;s)$，它属于 $\mathbb{Q}(s)$。

定义1.17. 我们将 $\mu : K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var}) \to \mathbb{Z}$ 记为可加不变量，它定义为虚拟 Poincar´e 多项式 $\beta : K_0(\mathbb{R}\mathrm{Var}) \to \mathbb{Z}[u]$与将 u 映至 1 的求值映射 $\mathbb{Z}[u] \to \mathbb{Z}$ 的复合。

注 1.18. 请注意， μ 既不是欧拉示性数（它不是实代数簇的可加不变量），也不是紧支撑欧拉示性数（后者是将 β 与在 -1处的求值映射复合所得）。特别地， μ 不是拓扑不变量。

定义1.19. 我们将 f 的实局部拓扑ζ函数定义为

$$Z_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} \mu(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))\prod_{i\in I}\frac{1}{\nu_i + sN_i} \in \mathbb{Q}(s).$$

带符号拓扑ζ函数定义为

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} \mu(\widetilde{E}_I^{0,\pm} \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))\prod_{i\in I}\frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

注 1.20. 实拓扑ζ函数可定义为

$$Z_{top,0}(f;s) = \lim_{u\to 1} Z_{\beta,0}(f;u^{-s})$$

其中，对1.15 中的表达式作一阶展开可知，形如 $\frac{u-1}{u^{\nu_i+sN_i}-1}$的项在 u 趋近于 1 时趋于$\frac{1}{\nu_i+sN_i}$。特别地，$Z_{top,0}(f;s)$ 是在虚拟 Poincar´e 多项式层面定义的 ζ 函数的特化。因此，$Z_{top,0}(f;s)$ 满足以下性质：

- 函数 $Z_{top,0}(f;s)$ 是良定义的，即它不依赖于所选的消解，因为 $Z_{\beta,0}(f;u^{-s})$ 按照 1.5 中的方式内在地定义。
- 函数 $Z_{top,0}(f;s)$ 是吹胀-Nash 等价的不变量。
- 有如下包含关系

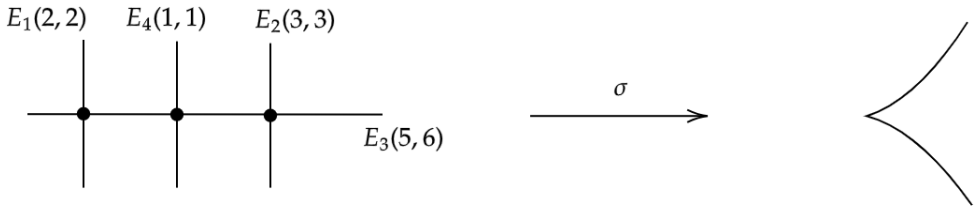
$$\mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{\beta,0}(f;u^{-s})) \subset \mathrm{Poles}(Z_{mot,0}(f;\mathbb{L}^{-s})).$$

根据 1.15，$Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s})$ 的极点与 $(u-1)Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s})$ 的极点相同。我们还可以将带符号拓扑ζ函数定义为

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s)=\lim_{u\to 1}(u-1)Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s})$$

由此可知，上述性质对带符号拓扑ζ函数也成立。我们将看到，对于曲线，朴素ζ函数的极点所满足的上述包含关系实际上都是等式；而对于带符号 ζ 函数，即使在曲线情形下，这些包含关系也可能是严格的。最后需要指出，与复数情形一样，“拓扑 zeta 函数”这个名称或许并不完全恰当，因为$Z_{top,\ 0}$ 并非拓扑不变量。此外，这些函数不同于 Koike 和 Parusi´nski 在 [KP03]中研究的拓扑ζ函数。

例 1.21。取 $f=y^2-x^3$。经过三次连续吹胀，可得到 f 的嵌入消解，其带有数值数据 $E_i(\nu_i,\ N_i)$ 的消解图如下所示。



由此可得

$$Z_{top,0}(f;s)=\frac{1}{2+2s}+\frac{1}{3+3s}-\frac{1}{5+6s}+\frac{1}{(2+2s)(5+6s)}+\frac{1}{(3+3s)(5+6s)}+\frac{1}{(1+s)(5+6s)}$$

化简后可得

$$Z_{top,0}(f;s)=\frac{5+4s}{(s+1)(5+6s)}.$$

因此，$Z_{top,0}(f;\ s)$ 的极点为 -1和 $-\frac{5}{6}$。

注 1.22. 更一般地，若 $f:(\mathbb{R}^d,0)\to(\mathbb{R},0)$ 是一个 Nash 函数芽，则也可以为其关联一个实拓扑ζ函数以及带符号拓扑ζ函数。事实上，根据 [Fic05a]，的推论 2.4，存在唯一的态射 $\beta:K_0(\mathcal{AS})\to\mathbb{Z}[u]$，它将虚拟 Poincar´e 多项式延拓到弧对称集的格罗滕迪克环 [Kur88]。因此，还可以得到ζ函数 $Z_{\beta,0}(f;\ T)$ $Z^{\pm}_{\beta,0}(f;\ T)\in\mathbb{Z}[u,u^{-1}](T)$，并且可以类似地定义

$$Z_{top,0}(f;s)=\lim_{u\to 1}Z_{\beta,0}(f;u^{-s})\quad\text{and}\quad Z^{\pm}_{top,0}(f;s)=\lim_{u\to 1}(u-1)Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s}).$$

如1.19所示，也可以用 Nash 修改 $\sigma:\ (X,\ \sigma^{-1}(0))\to(\mathbb{R}^d,\ 0)$ 来表示或定义 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 和 $Z^{\pm}_{top,\ 0}(f;\ s)$，使得 $\sigma^*(\mathrm{div}(f))$ 与 $\sigma^*(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d)$ 同时具有正规交叉。

2. Poles of the real naive zeta function for curves

本节将完整描述 $f \in \mathbb{R}[x,y]$时实朴素ζ函数的极点，正如 [Vey95] 在复数情形下对拓扑 zeta 函数所做的那样。我们的目标是给出一个类似的数值判据，以从典范嵌入解消的消解图中识别出 f的真正极点。

我们首先研究给定候选极点对应的单个分支 E_i 的贡献。然后，利用消解的实总对偶图，我们将证明来自不同分支的非零贡献不会彼此抵消。本节主要是将 Veys 的结果推广到实情形。

注 2.1。现取 $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 和 $\sigma\colon (X,\sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^d_{\mathbb{R}},\ 0)$ 为 f 的一个嵌入消解。令 $J_{\mathbb{R}}$ 表示实轨迹非空的分支集合，即，

$$J_{\mathbb{R}} = \{\ j \in J \mid E_j\ (\mathbb{R}) \neq \emptyset\ \}$$

并令 $I \subset J$。假设存在 $i \in I$ 使得 $i \notin J_{\mathbb{R}}$。那么

$$E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) \subset E_i(\mathbb{R}) = \emptyset$$

因此 $\beta(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) = 0$，进而 $\mu(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) = 0$。换言之，我们也可以写成

$$Z_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J_{\mathbb{R}}} \mu(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i\in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

这意味着，$Z_{top,0}(f;\ s)$ 的候选极点集合，因而 $Z_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$ 的候选极点集合，为

$$\{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J_{\mathbb{R}}\ \}.$$

还要注意，$Z_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$ 的候选极点集合总是包含在$\{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J\ \}$ $Z_{mot,0}(f_{\mathbb{C}};\mathbb{L}^{-s})$ 的候选极点集合中。

例 2.2. (1) $Z_{top,0}(f;\ s)$ 的极点集合通常不同于 $Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)$ 的极点集合。例如，若 $f = x^{2k} + y^{2k}$ 且 $k \geq 2$，对原点进行爆破可得到 f 的嵌入消解，其中 f 的严格变换没有实点。因此，

$$Z_{top,0}(f;s) = \frac{2}{2+2ks}$$

而 $Z_{top,0}(f;\ s)$ 的唯一极点是 $-\frac{1}{k}$。另一方面，对于复化$f_{\mathbb{C}}$，严格变换是 $2k$ 条复直线的并，因此

$$Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s) = \frac{2-2k}{2+2ks} + \frac{2k}{(1+s)(2+2ks)} = \frac{2+2s-2ks}{(s+1)(2+2ks)}$$

它有极点 -1和 $-\frac{1}{k}$。另请注意，$-\frac{1}{k}$是 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 和$Z_{top,\ 0}(f_{\mathbb{C}};s)$ 的一个公共极点，但这两个函数在该极点处的留数并不相等。

(2) 可能出现这样的情况：$Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 和 $Z_{top,\ 0}(f_{\mathbb{C}};\ s)$ 有一个公共极点，但该极点在两个函数中的阶不同。例如，当 $f = x^2 + y^2$ 时，有

$$Z_{top}(f;s) = \frac{2}{2+2s} = \frac{1}{1+s}$$

而

$$Z_{top}(f_{\mathbb{C}};s) = \frac{2}{(2+2s)(1+s)} = \frac{1}{(1+s)^2}.$$

2.1. **对一项贡献的研究。**
我们简要回顾一下，如何为定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意光滑代数曲面 X 赋予一个双线性交叉形式。我们用 Pic(X) 表示 X的皮卡群，它可以视为除子模线性等价（即模主因子）所得的群。

若 C，$C' \subset X$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 和 $p \in C \cap C'$上的两条代数曲线，则 C 与 C' 在 p 处的交点重数定义为

$$(C \cdot C')_p = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{O}_{X,p}}{(g,h)}$$

其中 g，h 是 C 和 C' 在 p的邻域内的局部方程。我们主要会用到这样一个事实：当 C 和 C' 在点 p处横截相交时，交点重数 $(C \cdot C')_p$ 等于 p 的剩余域作为 $\mathbb{R}$-向量空间的维数。特别地，当 p 是实点时，$(C \cdot C')_p = 1$；当 p 是复点时，$(C \cdot C') = 2$。若 C 和 C'没有共同的不可约分支，则定义 C 与C' 的交数为

$$(C \cdot C') = \sum_{p \in C \cap C'} (C \cdot C')_p$$

由此可进一步定义一个对称双线性交叉形式

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ ([D],[D']) & \longmapsto & (D \cdot D') \end{array}$$

从现在起，我们固定 $f \in \mathbb{R}[x,y]$ 并令 $\sigma : (X, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, 0)$ 为 f的典范嵌入消解。和前面一样，我们用 $\sum N_j E_j$ 表示由$j \in J$诱导的主因子

$f \circ \sigma$，其中 E_j 是 X 上的光滑不可约曲线，且彼此横截相交。注意，σ 是有限次爆破的复合，始于对原点的爆破，因此 $\sigma^{-1}(0)$是这一连续爆破解所产生的例外曲线之并。使用前面引入的记号，我们已经看到

$$Z_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J_{\mathbb{R}}} \mu(E_I^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

但由于 E_i 同时具有正规交叉，因此只要 $|I| > 2$，就有 $E_I^0 = \emptyset$，于是

$$Z_{top,0}(f;s) = \sum_{i \in J_{\mathbb{R}}} \frac{\mu(E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))}{\nu_i + sN_i} + \sum_{\{i,j\} \subset J_{\mathbb{R}}} \frac{\mu(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))}{(\nu_i + sN_i)(\nu_j + sN_j)}.$$

这里，$\beta(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))$，进而 $\mu(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))$，等于 E_i 与 E_j的实交点数。

由上述表达式可知，$Z_{top,\ 0}(f;\ s)$的任一极点的阶数至多为2。

命题2.3。 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。那么，s_0是$Z_{top,\ 0}(f;\ s)$的二阶极点，当且仅当存在互不相同的 i、$j \in J_{\mathbb{R}}$，使得 E_i 与 E_j 在一个实点相交，并且满足$s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i} = -\frac{\nu_j}{N_j}$。

证明。 根据 $Z_{top}(f;\ s)$ 的表达式，可得

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^2 Z_{top}(f;s)=\sum_{\{i,j\}\subset J_{\mathbb{R}}}\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^2\frac{\mu(E_i(\mathbb{R})\cap E_j(\mathbb{R}))}{(\nu_i+sN_i)(\nu_j+sN_j)}$$

如果 $s_0\neq -\frac{\nu_i}{N_i}$ 或 $s_0\neq -\frac{\nu_j}{N_j}$，那么 $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^2\frac{\mu(E_i\cap E_j(\mathbb{R}))}{(\nu_i+sN_i)(\nu_j+sN_j)}=0$。现在，当 $i,j\in J$ 互不相同且满足 $s_0=-\frac{\nu_i}{N_i}=-\frac{\nu_j}{N_j}$ 时，可得

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^2\frac{\mu(E_i(\mathbb{R})\cap E_j(\mathbb{R}))}{(\nu_i+sN_i)(\nu_j+sN_j)}=\frac{\mu(E_i(\mathbb{R})\cap E_j(\mathbb{R}))}{N_iN_j}\geq 0$$

当且仅当 E_i 与 E_j 在一个实点处相交时，不等式是严格的。由于 $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)^2 Z_{top}(f;s)$ 是这些项之和，结果即得。□

注 2.4。让我们在此注中考虑两个特殊情形。假设 f 已经是正规交叉的，即对于某个 N，$M\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}^*$，它与 $\lambda x^N y^M$ 解析等价。那么

$$Z_{top,0}(f;s)=\frac{1}{(1+sN)(1+sM)}=Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)$$

现在假设存在一条例外曲线 E_i，使得 $(E_i\cdot\sum E_j)=2$，并且使 $j\neq i$ 得 E_i 不在实点处与任何分支相交。这意味着，f 的典范嵌入解消通过对原点 σ 进行一次爆破即可得到：$(\mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}},E)\to(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}},0)$，由此产生唯一的例外曲线 $E_i=E$。此外，f 的严格变换是一条实轨迹为空的光滑不可约曲线，并且在一个复点处与 E 相交。在 $\mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 的仿射图 $U\simeq\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 上，有 $f(\sigma(x,y))=y^N u(x,y)$，其中

$$E\cap U=\{\,y=0\,\}\simeq\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$$

并且 $u(x,0)\in\mathbb{R}[x]$ 在 $\mathbb{R}$ 上不为零，但有两个共轭复根。因此，可以写成 $u(x,0)=(ax^2+bx+c)^M$，其中 $b^2-4ac<0$。我们还知道，E 的重数等于 f 在 0 处的代数重数，因此 $N=2M$ 并且

$$Z_{top,0}(f;s)=\frac{2}{2+Ns}=\frac{1}{1+sM}.$$

对于复化 $f_{\mathbb{C}}$，可得

$$Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)=\frac{0}{2+Ns}+\frac{2}{(2+Ns)(1+Ms)}=\frac{1}{(1+sM)^2}$$

在本节余下部分，我们将假设 f 并非如上述注所述。这意味着，对于所有 $i\in J_{\mathbb{R}}$，都有 $(E_i\cdot\sum E_j)\geq 1$；并且如果 $(E_i\cdot\sum E_j)=2$，那么 E_i 与 $\bigcup_{j\neq i}E_j$ 会在两个实点处与其他分支相交。

记号 2.5. 我们固定 $i\in J_{\mathbb{R}}$，并研究分支 E_i 对 $Z_{top,0}(f;s)$ 在候选极点 $s_0=-\frac{\nu_i}{N_i}$ 处的留数的贡献。假设对所有 $j\in J_{\mathbb{R}}\setminus\{i\}$，只要 E_i 和 E_j 在一个实点相交，就有 $\frac{\nu_i}{N_i}\neq\frac{\nu_j}{N_j}$；否则，如上所述，$s_0$ 是一个二阶极点。接下来，我们截断函数 $Z_{top,0}(f;s)$，只保留以下项

$$\frac{\mu(E_i^0\cap\sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))}{\nu_i+sN_i}+\sum_{j\neq i}\frac{\mu(E_i(\mathbb{R})\cap E_j(\mathbb{R}))}{(\nu_i+sN_i)(\nu_j+sN_j)}.$$

我们用$\mathcal{R}_{top,i}$ 表示该表达式在 s_0处的留数。因此，

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}\left(\mu(E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) + \sum_j \frac{\mu(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))}{\alpha_j}\right)$$

其中求和遍历所有满足 $E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ 的 $j \in J_{\mathbb{R}} \setminus \{i\}$，并令$\alpha_j = \nu_j - \frac{\nu_i}{N_i} N_j \in \mathbb{Q}^*$。于是，$Z_{top,0}(f; s)$ 在 s_0处的留数为

$$\mathrm{Res}(Z_{top,0}; s_0) = \sum_i \mathcal{R}_{top,i}$$

其中求和现在遍历满足 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 的 $i \in J_{\mathbb{R}}$。 —

如果 E_i 是严格变换的一个不可约分支，那么 $E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) = \emptyset$，因为$\sigma^{-1}(0)$ 是例外曲线的并。因此，

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}\sum_j \frac{\mu(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))}{\alpha_j}$$

其中求和遍历满足 $E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ 的 $j \in J_{\mathbb{R}}$。
现在假设 E_i 是一条例外曲线。设 E_i 与分支 E_1、……、E_k在 k 个实点处相交，与分支 E_{k+1}、……、E_{k+r}在 r 个复点处相交，因此 $(E_i \cdot \sum E_j) = k + 2r$。有 $E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) = E_i^0(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{k \text{ 个点}\}$，因此$j\neq i\beta(E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) = u + 1 - k$ 且 $\mu(E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) = 2 - k$。因此， E_i 对 $Z_{top}(f; s)$ 在 s_0 处的留数的贡献为

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}(2 - k + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j}).$$

注 2.6. 考虑在虚拟庞加莱多项式层面定义的 ζ 函数，其可写为

$$Z_{\beta,0}(f; u^{-s}) = \sum_{i \in J_{\mathbb{R}}} \frac{\beta(E_i^0 \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))(u-1)}{u^{(\nu_i + sN_i)} - 1} + \sum_{\{i,j\} \subset J_{\mathbb{R}}} \frac{\beta(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))(u-1)^2}{(u^{(\nu_i+sN_i)} - 1)(u^{(\nu_j+sN_j)} - 1)}.$$

由此可得 E_i对 $Z_{\beta,0}(f; u^{-s})$ 在 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 处的留数的贡献为 — by

$$\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = \frac{1}{N_i u^{\frac{\nu_i}{N_i}}}\left(\beta(E_i \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) + \sum_j \beta(E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}))\frac{u-1}{u^{\alpha_j} - 1}\right).$$

由于 $u^{\nu_i N_i}$是一个仅依赖于 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 的可逆因子，以下我们将在 $\mathcal{R}_{\beta,i}$ 的表达式中系统地省略这一项，因为这不会影响我们对极点的研究。在 E_i 为例外曲线的情况下，使用上述记号可得

$$\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = \frac{1}{N_i}(u + 1 - k + \sum_{j=1}^{k} \frac{u-1}{u^{\alpha_j} - 1})$$

它可以看作是实变量 $u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$的一个 $\mathcal{C}^\infty$ 函数。此外，当 u 趋于 1 时，该函数存在极限，根据拓扑 zeta 函数的定义，该极限为 $\lim_{u\to 1} \mathcal{R}_{\beta,i}(u) = \mathcal{R}_{top,i}$。因此，有如下包含关系

$$\mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{\beta,0}(f;u^{-s}))$$

如注 1.20中已提及。

以下命题是对 [Loe88], 引理 II.2 的改述，并针对实数框架作了调整。

命题 2.7。 采用上述记号，有

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j + 2\sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j = k + 2r - 2.$$

证明。 我们简要回顾一下 Veys 在 [Vey25]中给出的这一结果的证明。考虑赋有双线性交叉形式的 Pic(X)。由于除子 $D = \sum_{j\in J} N_j E_j$ 根据定义，是主除子，故有 $D = 0$ in Pic(X)。由此可得

$$0 = (E_i \cdot D) = \sum_{j\in J} N_j (E_i \cdot E_j) = N_i E_i^2 + \sum_{j=1}^{k} N_j + 2\sum_{j=k+1}^{k+r} N_j$$

也就是说,

$$\sum_{j=1}^{k} N_j + 2\sum_{j=k+1}^{k+r} N_j = -N_i E_i^2.$$

采用上述记号，有 $\mathrm{K}_X = \sum_{j\in J}(\nu_j - 1)E_j$，而伴随公式给出

$$-2 = \deg \mathrm{K}_{E_i} = E_i \cdot (K_X + E_i) = (\nu_i - 1)E_i^2 + \sum_{j=1}^{k}(\nu_j - 1) + 2\sum_{j=k+1}^{k+r}(\nu_j - 1) + E_i^2$$

也就是说

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j + 2\sum_{j=k+1}^{k+r} \nu_j = k + 2r - 2 - \nu_i E_i^2.$$

结合这两个等式即可得出该命题，因为 $\alpha_j = \nu_j - N_j \frac{\nu_i}{N_i}$. — □

命题 2.8 ([Loe88] 命题 II.3.1)。 对于所有 $j \in [\![1,\ k+r]\!]$，有 $-1 \le \alpha_j < 1$，当且仅当 $r = 0$ 且 $k = 1$ 时等号成立。

注 2.9。 值得一提的是，前述结果最初由 Igusa 在 [Igu85] 不可约情形下证明，后来 Loeser 将其推广到一般情形。这个命题是典范嵌入消解发挥关键作用之处。例如，从典范嵌入消解出发，若进一步爆破一个位于例外曲线上的点，就会产生一个 α_j 等于 1。

那么，以下推论几乎可以直接由前两个结果得出。

推论 2.10. *(1)* 对所有 $j \in [\![k+1, k+r]\!]$，我们有 $\alpha_j \ge 0$。*(2)* 至多存在一个 $j \in [\![1, k]\!]$ 使得 $\alpha_j < 0$。

(3) 如果 $k+2r \geq 3$，则至多存在一个 $j \in [\![1,k]\!]$ 使得 $\alpha_j \leq 0$，并且对于所有 $j \in [\![k+1, k+r]\!]$，我们有 $\alpha_j > 0$。*(4)* 假设 $k+2r \geq 3$，且存在 $\alpha_1 < 0$。那么

$$-\alpha_1 < \min_{2\leq j\leq k} \alpha_j$$

(5) 若 $k+2r = 2$，则有 $k = 2$ 且 $r = 0$ 且

$$\frac{\nu_1}{N_1} < \frac{\nu}{N} \iff \frac{\nu}{N} < \frac{\nu_2}{N_2}.$$

证明。我们只证明第四点，因为其余各点都可以用完全类似的方法证明。设 $-\alpha_1 \geq \min_{2\leq j\leq k} \alpha_j$。不失一般性，我们可以假设这个最小值由 α_2 取得。于是可得

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \sum_{j=3}^{k} \alpha_j \leq k-2$$

其中，当且仅当 $k \geq 3$ 时，后一个不等式为严格不等式。另一方面，已知

$$2\sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j \leq 2r$$

其中，当且仅当 $r \geq 1$ 时，该不等式为严格不等式。由于 $k+2r \geq 3$，这两个不等式中至少有一个是严格不等式，因此得到

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j + 2\sum_{j=k+1}^{k+r} \alpha_j < k+2r-2$$

这与命题2.7矛盾，从而完成证明。

□

定理 2.11. 使用上述记号，贡献 $\mathcal{R}_{top,\ i}$ 非零，当且仅当$(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$。在此情形下，有

(1) $\mathcal{R}_{top,\ i} > 0$ 当且仅当对于所有 $j \in [\![1,k]\!]$，都有 $\alpha_j > 0$，并且还有 $\mathcal{R}_{top,\ i} \geq \frac{2}{N_i}$。*(2)* $\mathcal{R}_{top,\ i} < 0$ 当且仅当存在 $j \in [\![1,k]\!]$ 使得 $\alpha_j < 0$。

证明。假设 $(E_i \cdot \sum E_j) = 1$。那么 E_i 与另一个分支 E_1 在一个实$j\neq i$点相交，根据命题2.7，有 $\alpha_1 = -1$。因此，

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}(1+\frac{1}{\alpha_1}) = 0.$$

假设 $(E_i \cdot \sum E_j) = 2$。那么 E_i 与其他分支 E_1，E_2 恰在两个$j\neq i$实点相交，并且同样根据命题 2.7，有 $\alpha_1+\alpha_2 = 0$。由此可得

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}) = 0.$$

k现在考虑 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$ 的情形。若对所有 $j \in [\![1,k]\!]$ 都有 $0 < \alpha_j < 1$，则 $\sum_{j=1} \frac{1}{\alpha_j} - k \geq 0$，因此可得 $\mathcal{R}_{top,i} \geq \frac{2}{N_i} > 0$。

最后，假设存在 $j \in [\![1,k]\!]$ 使得 $\alpha_j < 0$。对所有 $j \in [\![k+1,k+r]\!]$，都有 $\alpha_j > 0$，并且我们可以写成

$$N_i\mathcal{R}_{top,i} = 2-k+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_j} = (2-k-2r+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_j}+2\sum_{j=k+1}^{k+r}\frac{1}{\alpha_j})+(2r-2\sum_{j=k+1}^{k+r}\frac{1}{\alpha_j})$$

其中 $2r-2\sum_{j=k+1}^{k+r}\frac{1}{\alpha_j} = 2\sum_{j=k+1}^{k+r}(1-\frac{1}{\alpha_j}) \leq 0$。另一方面，项

$$2-k-2r+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\alpha_j}+2\sum_{j=k+1}^{k+j}\frac{1}{\alpha_j}$$

根据以下引理（令 $l = k+2r$ 和 $x_i = \alpha_i$），对应于 $\mathcal{R}_{top,\,i}(f_{\mathbb{C}})$ 的项严格为负，因此所需结果得证。□

引理 2.12 ([Vey95] 引理 2.9。)。设 $l \geq 3$ 和 $-1 \leq x_1,\dots,x_l < 1$ 为非零实数，满足 $\sum x_i = l-2$。假设存在唯一的 $i \in [\![1,l]\!]$ 使得 $x_i < 0$。那么

$$2-l+\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{x_i} < 0.$$

注 2.13。当 $(E_i \cdot \sum E_j) < 3$ 时，可以验证，E_i 在 $Z_{\beta,\,0}(f;\,u^{-s})$ 于 $-\frac{\nu_i}{N_i}$ 处的留数中的贡献 $\mathcal{R}_{\beta,\,i}$ 也为零。事实上，若 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) = 1$，则 $\alpha_1 = -1$，有一

发现

$$N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = u+1-1+\frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1} = \frac{u^{\alpha_1+1}-1}{u^{\alpha_1}-1} = 0.$$

类似地，若 $(E_i \cdot \sum E_j) = 2$，则 $\alpha_1+\alpha_2 = 0$，并且可得$_{j\neq i}$

$$N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = u+1-2+\frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1}+\frac{u-1}{u^{\alpha_2}-1} = \frac{u^{\alpha_1+\alpha_2+1}-u^{\alpha_1+\alpha_2}-u+1}{(u^{\alpha_1}-1)(u^{\alpha_2}-1)} = 0.$$

2.2. **消解的实对偶图**。

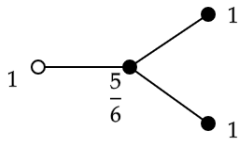
定义 2.14. 典范嵌入解消 σ 的实对偶图：$(X,\sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}},0)$，定义为顶点集为

$$\{\, i \in J_{\mathbb{R}} \mid E_i \text{ is an exceptional curve} \,\}$$

当且仅当 E_i 与 E_j 相交时，用一条边连接顶点 i 和 j（此时交点是一个实点）。在消解的实总对偶图中，记作 G，每个具有非空实轨迹的严格变换的解析不可约分支也由一个圆表示，并添加一条边将其与和它相交的唯一例外曲线连接起来。对于每个顶点 i，我们还附加数字 $\frac{\nu_i}{N_i} \in \mathbb{Q}_+$。我们将极小顶点的集合记作 $\mathcal{M}$，即

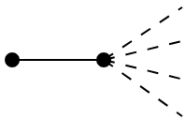
$$\mathcal{M} = \{\, i \in J_{\mathbb{R}} \mid \frac{\nu_i}{N_i} = \min_{j\in J_{\mathbb{R}}}\frac{\nu_j}{N_j} \,\}$$

例2.15。考虑例1.21中的尖点。那么，消解的实总对偶图为



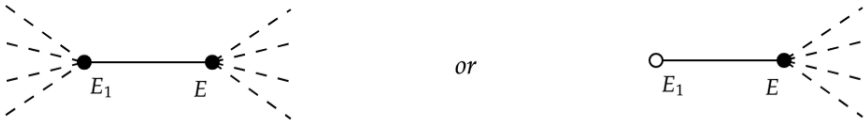
注 2.16。 众所周知，消解图的对偶图总是一棵树，即一个连通无环图。要看出这一点，可以考察消解过程中图的演变，并验证对一条例外曲线上的点进行爆破后，图仍会保持连通。要从消解图的对偶图得到消解的实总对偶图，只需添加与严格变换的解析不可约分支的非空实点集相对应的顶点，并添加表示这些分支与例外曲线之间实交点的边。特别是，这一构造表明，实总对偶图也是一棵树。

我们将把与至少一个其他分支在实点处相交的例外曲线表示为



下面的命题可由推论2.10直接得出。

命题 2.17。 假设在 G 中有



与 $\frac{\nu_1}{N_1} < \frac{\nu}{N}$。那么，对于与 E相交的任意其他分支 E_i $\frac{\nu}{N} < \frac{\nu_i}{N_i}$

通过归纳法可得以下推论。

推论 2.18. *(1)* 考虑 G 中的一条路径，它始于 $\mathcal{M}$ 中的一个顶点，并立即离开 $\mathcal{M}$。那么，数值 $\frac{\nu_i}{N_i}$ 沿该路径严格递增。*(2)* 最小部分 $\mathcal{M}$ 构成 G的一个连通子图。

定理 2.19. 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。那么，当且仅当对于严格变换 E_i 的某个不可约分支有 $s_0 = -\frac{1}{N_i}$，且满足 $E_i(\mathbb{R}) \neq \emptyset$，或者对于满足 $(E_i \cdot \sum_{j \neq i} E_j) \geq 3$ 的某个例外曲线 E_i 有 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$时，s_0 是 $Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 的极点。

在继续证明该定理之前，我们先作几点说明。

注 2.20。 (1) 请注意，要确定例外曲线 E_i 是否对候选极点 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 处的 $Z_{top,0}(f;\, s)$ 的留数有贡献，必须同时统计它与其他分支的实交点和复交点，尽管$Z_{top,0}(f;\, s)$ 是 f 的实轨迹的不变量。

(2) 上述定理2.11 在 s_0 仅有一个由例外曲线 E_i 诱导的贡献时，可直接推出。在一般情况下，我们将利用消解的实总对偶图证明， s_0 处 $Z_{top,0}(f;\, s)$ 的留数中不同贡献的符号相同，因此它们不会相互抵消。

定理 *2.19* 的证明。 条件的必要性已可由定理 2.11 得出。反过来，假设存在 $i \in J_{\mathbb{R}}$ 使得 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$，并假设分支 E_i 与其他分支 $E_1, \dots, E_k$ 在 k 处有实交点。和之前一样，记 $\alpha_j = \nu_j - \frac{\nu_i}{N_i} N_j$ 为 $j \in [\![1, k]\!]$，并区分两种情况。

第一种情况是 $-s_0 = \min_{j \in J_{\mathbb{R}}} \frac{\nu_j}{N_j}$。假设 E_i 是满足 $(E_i \cdot \sum E_j) \geq 3$ 的一条例外曲线。如果某个 α_j 为零，我们已经看到 s_0 是一个二阶极点。否则，$_{j \neq i}$所有 α_j 都严格为正，根据定理2.11， E_i 对$Z_{top,\ 0}(f;\, s)$ 在 s_0 处的留数的贡献为

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}(2 - k + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j}) \geq \frac{2}{N_i} > 0.$$

现在假设 E_i 是严格变换的一条分支。同样，如果某个 α_j 为零，那么 s_0 是一个二阶极点。否则，所有 α_j 都严格为正， E_i 对 $Z_{top,\ 0}(f;\, s)$ 在 s_0 处的留数的贡献为

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j} > 0.$$

因此，$Z_{top,\ 0}(f;\, s)$ 在 s_0 处留数的所有非零贡献都严格为正，因此 s_0 是 $Z_{top}(f;\, s)$ 的一个极点。

第二种情况是 $-s_0 > \min_{j \in J_{\mathbb{R}}} \frac{\nu_j}{N_j}$。假设 E_i 是一条满足 $(E_i \cdot \sum E_j) \geq 3$ 的例外曲线。根据假设，顶点 $i \in G$ 不在 $\mathcal{M}$中；由连通性可知，存在一条基本路径，从 $\mathcal{M}$ 的某个顶点出发并以 i为终点。根据推论 2.18，存在 $j_0 \in [\![1,\ k]\!]$，使得 $\alpha_{j_0} = \nu_{j_0} - \frac{\nu_i}{N_i} N_{j_0} < 0$。根据定理 2.11， E_i对 $Z_{top,\ 0}(f;\, s)$ 在 s_0处的留数的贡献为：

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i}(2 - k + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j}) < 0.$$

最后，如果 E_i 是严格变换的一个分支，那么根据前一个推论，我们知道所有 α_j 都严格为负。 E_i 对 $Z_{top,\ 0}(f;\, s)$ 在 s_0处的留数的贡献为

$$\mathcal{R}_{top,i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j} < 0$$

因此，对 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 在 s_0 处的留数的所有非零贡献都严格为负；于是， s_0 是 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的一个极点。□

推论 2.21。 我们有以下等式

$$Poles(Z_{top,0}(f;s)) = Poles(Z_{\beta,0}(f;u^{-s})) = Poles(Z_{mot,0}(f;\mathbb{L}^{-s})).$$

证明。 我们已经有如下包含关系

$$\mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{\beta,0}(f;u^{-s})) \subset \mathrm{Poles}(Z_{mot,0}(f;\mathbb{L}^{-s}))$$

因此，我们只需证明 $\mathrm{Poles}(Z_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s}))\ \subset \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;\ s))$。换言之，我们取一个候选极点 $s_0 \in \mathbb{Q}$，它不是 $Z_{top,0}(f;\ s)$ 的极点，并且必须验证 s_0 不是 $Z_{mot,0}(f;\ s)$ 的极点。根据定理 2.19，如果 s_0 不是 $Z_{top,0}(f;\ s)$ 的极点，那么存在一个满足 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) < 3$ 的例外曲线 E_i。

假设 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) = 1$。那么 E_i 在一个实点与另一个分支 E_1 相交，并且根据命题 2.7，有 $\alpha_1 = \nu_1 - \frac{\nu_i}{N_i} N_1 = -1$。 E_i 对 $Z_{mot,0}(f;\ T)$ 在 s_0 处留数的贡献来自于以下项

$$(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}} + (\mathbb{L}-1)^2\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1}}$$

这等于

$$\frac{\mathbb{L}(\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}(1-\mathbb{L}^{-(\nu_1+1)}T^{N_1})}{(1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i})(1-\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1})}.$$

分子是项 $1-\mathbb{L}^{-\frac{\nu_i}{N_i}N_1}T^{N_1} = 1-(\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i})^{\frac{N_1}{N_i}}$ 的倍数，而这显然又是 $1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}$ 在 $\mathrm{K}_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 中的倍数，因此 E_i 不会对 $Z_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$ 在 s_0 处的留数作出贡献。

现在假设 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) = 2$。那么 E_i 在两个实点处与其他分支 E_1, E_2 相交，并且根据命题 2.7，有 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，从而得到 $\nu_1 + \nu_2 = \frac{\nu_i}{N_i}(N_1+N_2)$。 E_i 对 $Z_{mot,0}(f;\ T)$ 在 s_0 处的留数的贡献来自于以下项

$$(\mathbb{L}-1)^2\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}} + (\mathbb{L}-1)^2\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1}} + (\mathbb{L}-1)^2\frac{\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}}\frac{\mathbb{L}^{-\nu_2}T^{N_2}}{1-\mathbb{L}^{-\nu_2}T^{N_2}}$$

which equals

$$\frac{(\mathbb{L}-1)^2\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}(1-\mathbb{L}^{-(\nu_1+\nu_2)}T^{N_1+N_2})}{(1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i})(1-\mathbb{L}^{-\nu_1}T^{N_1})(1-\mathbb{L}^{-\nu_2}T^{N_2})}$$

因此，分子是项 $1-\mathbb{L}^{-\frac{\nu_i}{N_i}(N_1+N_2)}T^{N_1+N_2} = 1-(\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i})^{\frac{N_1+N_2}{N_i}}$ 的倍数，而这显然又是 $1-\mathbb{L}^{-\nu_i}T^{N_i}$ 在 $\mathrm{K}_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 中的倍数。因此， E_i 不会对 $Z_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$ 在 s_0 处的留数作出贡献。

□

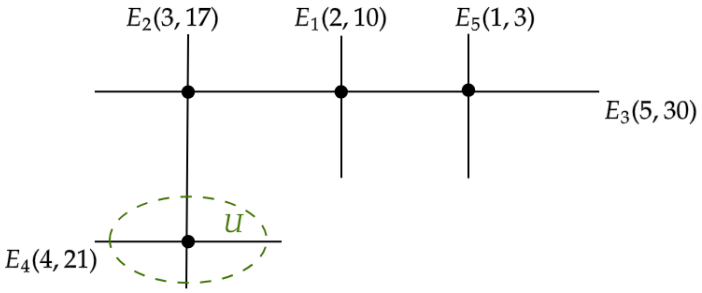
将定理2.19 与 [Vey95] 引言中提到的定理 4.3 进行比较，我们得到以下推论。

推论2.22。 有如下等式

$$Poles(Z_{top,0}(f;s)) = Poles(Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J_{\mathbb{R}}\ \}$$

对于动机 ζ 函数，同样的等式也成立。

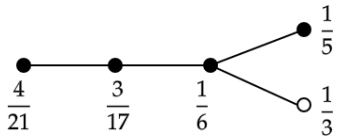
例 2.23。 取 $f = (x^2 + y^6)^2(x^2 - y^3)^3$。通过进行四次连续吹胀，我们得到 $\sigma : (X, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, 0)$ 的嵌入消解。按概形论，严格变换是两条光滑不可约曲线 E_5 和 E_6 的并，其中 E_5 仅含实点，而 E_6 不含实点。仅显示实点的消解图具有以下形式



因此，候选极点为 $-\frac{4}{21}, -\frac{3}{17}, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{30}$。 E_6 分支包含在 $E_2 \cap E_4$ 的扎里斯基开邻域 $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 中，在该邻域上， $f(\sigma(x_1, y_1)) = y_1^{21}x_1^{17}(x_1^2 + 1)^2,$ ，从而 $(E_4 \cdot \sum E_j) = (E_4 \cdot E_2) + (E_4 \cdot E_6) = 1 + 2 = 3$。根据定理 2.19， $Z_{top,0}(f; s)_{j\neq 4}$ 的极点为 $-\frac{4}{21}, -\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{5}{30}$。也可以利用消解图计算 $Z_{top,0}(f; s)$，化简后得到

$$Z_{top}(f; s) = \frac{20 + 141s + 216s^2}{(5 + 30s)(4 + 21s)(1 + 3s)}$$

这与我们对极点的研究一致。还可以验证 $\mathrm{Res}(Z_{top,0}; -\frac{5}{30}) > 0, \mathrm{Res}(Z_{top,0}; -\frac{1}{3}) < 0$ 和 $\mathrm{Res}(Z_{top,0}; -\frac{4}{21}) < 0$，这也与定理 2.19 相符。因为消解的实总对偶图为



在这个例子中， $Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}}; s)$ 的极点为 $-\frac{5}{30}, -\frac{4}{21}, -\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{2}$。 –

3. Poles of zeta functions with signs for curves

本节中，我们采用与第 2 节相同的方法，研究带符号 ζ 函数的极点。特别地，我们证明，带符号拓扑ζ函数的每个极点也是朴素拓扑 ζ 函数的极点。另一方面，拓扑 zeta 函数层面可能发生某些抵消，因此我们进一步精确研究虚拟 Poincar´e 多项式层面的留数。当给定候选极点至多有一个非零贡献时，我们给出了极点的描述。

暂且考虑 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，并令 $\sigma\colon (X,\ \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^d_{\mathbb{R}},\ 0)$ 为 f 的一个嵌入消解。根据定义，有

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J} \mu(\widetilde{E}^{0,\pm}_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i\in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}$$

并且，如果 I 不包含于 $J_{\mathbb{R}}$中，我们已经看到 $E^0_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) = \emptyset$，这意味着 $\widetilde{E}^{0,}_{\ I}{}^{\pm} \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) = \emptyset$。因此，

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J_{\mathbb{R}}} \mu(\widetilde{E}^{0,\pm}_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i\in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

注 3.1：我们分别将 f 的正部和负部记为 $P(f)$ 和 $N(f)$，即

$$P(f) = \{\ x \in X(\mathbb{R}) \mid (f\circ\sigma)(x) > 0\ \} \text{ and } N(f) = \{\ x \in X(\mathbb{R}) \mid (f\circ\sigma)(x) < 0\ \}.$$

接着，我们将子集 $J^{\pm}_{\mathbb{R}} \subset J_{\mathbb{R}}$ 定义为

$$J^{+}_{\mathbb{R}} = \{\ j \in J \mid E_j\ (\mathbb{R}) \cap \overline{P(f)} \neq \emptyset\ \} \text{ and } J^{-}_{\mathbb{R}} = \{\ j \in J \mid E_j\ (\mathbb{R}) \cap \overline{N(f)} \neq \emptyset\ \}.$$

设 $I \subset J_{\mathbb{R}}$，并假设存在 $i \in I$ 使得 $i \notin J^{+}_{\mathbb{R}}$，即 $f\circ\sigma$ 在 $E_i(\mathbb{R})$ 的某个邻域内为负。特别地，$f\circ\sigma$ 在 $E^0_I(\mathbb{R})$ 的邻域内为负。我们将看到 $\widetilde{E}^{0,}_{\ I}{}^{+}(\mathbb{R})$ 为空，因此只需在局部进行检验。设 U 为一个扎里斯基开集，使得 $f\circ\sigma = u\prod_{i\in I} y_i^{N_i}$ 在 $E^0_I \cap U$ 上成立，且 u 是一个单位，即 u 在 $E^0_I \cap U$ 上不为零。

$f\circ\sigma$ 在 $E^0_I(\mathbb{R})$的某个邻域内为负，这意味着所有 N_i 都是偶数，且 $u < 0$ 在 $E^0_I(\mathbb{R})$上。记 $m =$ 为 N_i 的最大公约数，它是偶数。因此有

$$\widetilde{E}^{0,+}_I(\mathbb{R}) \cap U \simeq R^{+}_U = \{\ (x,t) \in (E^0_I(\mathbb{R}) \cap U) \times \mathbb{R} \mid t^m u(x) = 1\ \} = \emptyset$$

因此我们可以写成

$$Z^{+}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J^{+}_{\mathbb{R}}} \mu(\widetilde{E}^{0,+}_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i\in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

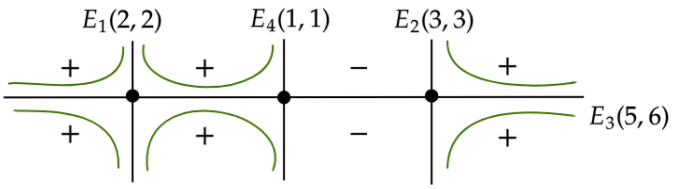
类似地，有

$$Z^{-}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J^{-}_{\mathbb{R}}} \mu(\widetilde{E}^{0,-}_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i\in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

由此可知，$Z^{\pm}_{top,0}(f;\ s)$的候选极点集合，进而 $Z^{\pm}_{mot,0}(f;\ \mathbb{L}^{-s})$)的候选极点集合为

$$\{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}\ \}.$$

例 3.2。我们考虑 $f = y^2 - x^3$ 例 1.21 中的情形。用于展示 f 的正部和负部以及覆盖 $\widetilde{E}^{0}$、$_i{}^{+}(\mathbb{R})$ 的消解图如下。



在交点 $E_i^0{}_{、j} = E_i \cap E_j$ 处，项 $\widetilde{E}^0{}_{、i}{}^{\pm}{}_{、j}(\mathbb{R})$ 由 0、1 或 2 个点组成，具体取决于 $\gcd(N_i$、$N_j)$ 的奇偶性以及 f 在 $E_i \cap E_j$ 的邻域中的符号。要计算$\widetilde{E}^0{}_{、i}{}^{\pm}(\mathbb{R})$，可以使用连续爆破解所提供的局部图表。

例如，$E_1^0(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{$ 1 点包含在单个仿射图 $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 中，其中$f(\sigma(u_1,\ v_1)) = v_1^2(1 - u_1^3 v_1)$，且 $E_1 = \{v_1 = 0\}$ 和 $w(u_1,\ v_1) = 1 - u_1^3 v_1$ 是单位，即 w在 E_1上不消失。根据定义，有

$$\widetilde{E}_1^{0,+}(\mathbb{R}) = \{\ (u_1,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 w(u_1,0) = 1\ \} = \{\ (u_1,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 = 1\ \}$$

它同构于 $\mathbb{R}$的两个不交副本。因此，$\beta(\widetilde{E}^0{}_{,\ 1}{}^{+}(\mathbb{R})) = 2u$ 和 $\mu(\widetilde{E}^0{}_{,\ 1}{}^{+}(\mathbb{R})) = 2$。其余项 $\widetilde{E}^0{}_{,\ i}{}^{+}(\mathbb{R})$ 可类似计算，得到

$$Z^+_{top,0}(f;s) = \frac{2}{2+2s} + \frac{1}{3+3s} - \frac{2}{5+6s} + \frac{2}{(2+2s)(5+6s)} + \frac{1}{(3+3s)(5+6s)} + \frac{1}{(1+s)(5+6s)}$$

which simplifies to

$$Z^+_{top,0}(f;s) = \frac{6s+7}{(s+1)(5+6s)}.$$

$Z^+_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点为 -1和 $-\frac{5}{6}$。类似地，可计算得

$$Z^-_{top,0}(f;s) = \frac{1}{3+3s} + \frac{1}{(3+3s)(5+6s)} + \frac{1}{(1+s)(5+6s)} = \frac{2s+3}{(s+1)(5+6s)}$$

因此，$Z^-_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点也为 $-1 \text{and} -\frac{5}{6}$。

注 3.3。 (1) $Z^{\pm}_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点集合可能严格包含于 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点集合。例如，若 $f \le 0$，则 $Z^+_{top,\ 0}(f;\ s) = 0$，因此 $\text{Poles}(Z^+_{top,\ 0}(f;\ s)) = \emptyset$。还可能出现 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 和 $Z^{\pm}_{top,\ 0}(f;\ s)$ 共享一个极点，但该极点在两个函数中的阶不同。

(2) 与直觉以及我们在前一个例子中观察到的情况相反，通常并非总有 $Z^+_{top,\ 0}(f;\ s) + Z^-_{top,\ 0}(f;\ s) = 2Z_{top,\ 0}(f;\ s)$。例如，考虑 $f = x^2 + y^6$。进行消解并计算覆盖$\widetilde{E}^0{}_{,\ i}{}^{\pm}(\mathbb{R})$ 后，可得

$$Z^-_{top,0}(f;s) = 0,\ Z^+_{top,0}(f;s) = \frac{4}{3+4s} \text{ while } Z_{top,0}(f;s) = \frac{3}{3+4s}.$$

3.1. **某一贡献的研究：双曲型实曲线的虚庞加莱多项式。**

从现在起，我们固定 $f \in \mathbb{R}[x,y]$ 和 $\sigma\colon (X,\ \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}},\ 0)$ 为 f 的典范嵌入解消。有

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s) = \sum_{\emptyset \neq I \subset J^{\pm}_{\mathbb{R}}} \mu(\widetilde{E}^{0,\pm}_I \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) \prod_{i \in I} \frac{1}{\nu_i + sN_i}.$$

但是 $E_I^0 = \emptyset$ 只要 $|I| > 2$，因为这些 E_i 同时是正规交叉。因此 e,

$$Z^{\pm}_{top,0}(f;s) = \sum_{i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}} \frac{\mu(\widetilde{E}^{0,\pm}_i \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))}{\nu_i + sN_i} + \sum_{\{i,j\} \subset J^{\pm}_{\mathbb{R}}} \frac{\mu(\widetilde{E}^{0,\pm}_{i,j}(\mathbb{R}))}{(\nu_i + sN_i)(\nu_j + sN_j)}.$$

为阐明这些想法并略微简化记号，我们将重点讨论正拓扑 ζ 函数 $Z^+_{top,0}(f;\ s)$。由于 $Z^-_{top,0}(f;\ s) = Z^+_{top,0}(-f;\ s)$，以下所有结果都有

该函数 $Z^{-}_{top,0}(f;\ s)$ 的类似结论。
从上述表达式中可以看出，$Z^{+}_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的任何极点的阶数至多为 2。

命题 3.4。 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。那么 s_0 是 $Z^{+}_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的阶数为2 的极点，当且仅当存在互不相同的 i、$j \in J^{+}_{\mathbb{R}}$，使得 $E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$，并且 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i} = -\frac{\nu_j}{N_j}$。 — —

证明。 证明与命题 2.3的证明相同，但要注意，$\widetilde{E}^{0,\ i\ +}_{,\ j}(\mathbb{R})$ 非空，当且仅当 $E_i(\mathbb{R}) \cap E_j$ $\mathbb{R} \cap P\ f\ \neq \emptyset$。 □

注 3.5。 让我们回到注 2.4中讨论的两个特殊情形。假设f与 $\lambda x^N y^M$解析等价，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^*$且 N，$M \in \mathbb{N}$。如果 N或 M为奇数，则

$$Z^{+}_{top,0}(f;s) = Z_{top,0}(f;s) = \frac{1}{(1+sN)(1+sM)}.$$

如果 N 和 M 都是偶数，则

$$Z^{+}_{top,0}(f;s) = 0 \text{ if } \lambda < 0, \text{ and } Z^{+}_{top,0}(f;s) = \frac{2}{1+sN} \text{ if } \lambda > 0.$$

现在，假设存在一条例外曲线 E_i 使得 $(E_i \cdot \sum E_j)\ = 2$ 并且 $_{j\neq i}$

使得 E_i 不与任何分支在实点处相交。如我们所见，在 $\mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$的一个仿射图$U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$上，可以写成 $f(\sigma($ $x,y)) = y^{2M}u(x,y)$，其中 $u(x,0)\ = (ax^2+bx+c)^M$满足 $b^2-4ac<0$。如果 $a<0$ （即，如果 $f \leq 0$），那么 $\widetilde{E}^{0}_{,i}{}^{+}(\mathbb{R})\ = \emptyset$，因此

$$Z^{+}_{top,0}(f;s) = 0$$

如果 $a>0$ （即，如果 $f \geq 0$），则

$$(\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap U)(\mathbb{R}) = \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t^{2M}(ax^2+bx+c)^M = 1\ \}.$$

变量代换 $(u,v)\ = (xt,t)$ 给出了一个同构

$$(\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap U)(\mathbb{R}) \simeq \{\ (u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid (au^2+buv+cv^2)^M = 1\ \} = \{\ (u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid au^2+buv+cv^2 = 1\ \}$$

因为 $au^2+buv+cv^2$ 在 $\mathbb{R}^2$上为正。现在，由 $au^2+buv+cv^2$ 定义的曲线是一个椭圆。特别地，它是一条与 $\mathbb{S}^1$ 同胚的光滑紧曲线，并且在v 轴上与其交于两个不同的点。因此

$$\beta((\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap U)(\mathbb{R})) = u+1-2 = u-1.$$

在 $\mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 的另一个仿射图 $V \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 上，同样有 $\beta((\widetilde{E}^{0,\ i\ +} \cap V)(\mathbb{R}))\ = u-1$，由可加性可得

$$\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i}(\mathbb{R})) = \beta((\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap U)(\mathbb{R})) + \beta((\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap V)(\mathbb{R})) - \beta((\widetilde{E}^{0,+}_{i} \cap U \cap V)(\mathbb{R}))$$

从而得到

$$\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i}(\mathbb{R})) = u-1+u-1-(u-3) = u+1.$$

注意，$\widetilde{E}^{0,\ i\ +}(\mathbb{R})$ 是一条光滑紧曲线，与 $\mathbb{S}^1$ 同胚；映射 $\widetilde{E}^{0,\ i\ +}(\mathbb{R})\ \to E^0_i(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{S}^1$ 到其自身的二重拓扑覆盖。由此可得

$$Z_{top,0}(f;s) = \frac{2}{2+2Ms} = \frac{1}{1+sM}.$$

在本节余下部分中，我们假设 f 并非如上注所述，这意味着对于所有的 $i \in J_{\mathbb{R}}$，都有 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 1$，并且如果 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) = 2$，那么 E_i 与其他分支在两个实点处相交。

记号 3.6. 与 2.5中一样，固定 $i \in J_{\mathbb{R}}^+$，并研究分支 E_i 对候选极点 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 处的 $Z^+_{top,0}(f; s)$ 的留数的贡献。我们可以假设，对于所有满足 $E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$ 的 $j \in J_{\mathbb{R}}^+ \setminus \{i\}$，都有 $\frac{\nu_i}{N_i} \neq \frac{\nu_j}{N_j}$；否则，如上所述，$s_0$ 是二阶极点。接着，我们截断函数 $Z^+_{top,0}(f; s)$，只保留以下各项

$$\frac{\mu(\widetilde{E}_i^{0,+} \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}))}{\nu_i + sN_i} + \sum_{j\neq i} \frac{\mu(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R}))}{(\nu_i + sN_i)(\nu_j + sN_j)}.$$

我们用 $\mathcal{R}^+_{top,i}$ 表示该表达式在 s_0 处的留数，也就是说，

$$\mathcal{R}^+_{top,i} = \frac{1}{N_i}\left(\mu(\widetilde{E}_i^{0,+} \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R})) + \sum_j \frac{\mu(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R}))}{\alpha_j}\right).$$

$Z^+_{top,0}(f; s)$ 在 s_0 处的留数因此为

$$\mathrm{Res}(Z^+_{top,0}; s_0) = \sum_i \mathcal{R}^+_{top,i}$$

其中求和遍历所有满足 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 的 $i \in J_{\mathbb{R}}^+$。

若 E_i 是严格变换的一个不可约分支，则 $\widetilde{E}^{0,+}_i \cap \sigma^{-1}(0)(\mathbb{R}) = \emptyset$，因为 $\sigma^{-1}(0)$ 是例外曲线的并。因此，

$$\mathcal{R}^+_{top,i} = \frac{1}{N_i} \sum_j \frac{\mu(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R}))}{\alpha_j}.$$

现在假设 E_i 是一条例外曲线，它与 k 个实点处的其他分支 $E_1, \ldots\ldots, E_k$ 相交，并且与 r 个复点处的其他分支 $E_{k+1}, \ldots\ldots, E_{k+r}$ 相交，使得 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) = k + 2r$. 于是

$$\mathcal{R}^+_{top,i} = \frac{1}{N_i}\left(\mu(\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R})) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R}))}{\alpha_j}\right)$$

其中需要注意，某些项 $\mu(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R}))$ 可能会消失。

对于在虚拟 Poincar´e 多项式层面定义的 ζ 函数，例外曲线 E_i 对 $Z^+_{\beta,0}(f; u^{-s})$ 在 $-\frac{\nu_i}{N_i}$ 处留数的贡献（相差一个仅依赖于 $-\frac{\nu_i}{N_i}$ 的可逆因子）为

$$\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = \frac{1}{N_i}\left(\beta(\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R})) + \sum_{j=1}^{k} \beta(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R}))\frac{u-1}{u^{\alpha_j}-1}\right),$$

并且它满足 $\lim_{u\to 1} \mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = \mathcal{R}^+_{top,i}$.

注 3.7. 我们已经知道 $\beta(E_i^0(\mathbb{R})) = u+1-k$，因此 $\mu(E_i^0(\mathbb{R})) = 2-k$。然而，计算 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}))$ 通常更为复杂，原因如下。设$U \simeq \mathbb{R}^2$是一个扎里斯基开集，在其上 $f(\sigma(x,y)) = u(x,y)y^{N_i}$。那么

$E_i(\mathbb{R}) \cap U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$和 $E_i^0(\mathbb{R}) \cap U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0$和 $u(x, 0) \neq 0 \}$也就是说，

$$E_i^0(\mathbb{R}) \cap U \simeq \{ x \in \mathbb{R} \mid u(x,0) \neq 0 \}.$$

根据定义，有

$$\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) \cap U \simeq \{ (x,y,t) \in (E_i^0(\mathbb{R}) \cap U) \times \mathbb{R} \mid u(x,y)t^{N_i} = 1 \}$$

也就是说，

$$\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) \cap U \simeq \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x,0)t^{N_i} = 1 \}.$$

到第一个因子的投影 $\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \cap U \to E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$于是是欧几里得拓扑下的局部平凡覆盖。粘合之后，得到一个覆盖 $\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \to E_i^0(\mathbb{R})$，它在欧几里得拓扑下局部平凡，但一般而言在扎里斯基拓扑下并非局部平凡。特别地，在格罗滕迪克环 $\mathrm{K}_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 中，$[\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R})]$ 与 $[E_i^0(\mathbb{R})]$ 之间没有明显的关系。由于虚拟 Poincar´e 多项式不是拓扑不变量，因此 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}))$ 与 $\beta(E_i^0(\mathbb{R}))$ 之间也没有明显的联系。

还需注意，底空间 $E_i^0(\mathbb{R})$ 通常并不连通，因此该覆盖的纤维通常不是常量，而是取决于 N_i 的奇偶性，以及在 $E_i^0(\mathbb{R})$ 的连通分支邻域内 f 的符号。更准确地说：

首先假设 N_i 为奇数。则投影

$$(x,t) \in \widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) \cap U \mapsto x \in E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$$

是一个正则同胚，其逆映射为 $x \mapsto (x, \sqrt[N_i]{u(x,0)^{-1}})$。由于$\beta$在正则同胚下不变（见 [MP11] 命题 4.3），故有 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \cap U) = \beta(E_i^0(\mathbb{R}) \cap U)$。由于 $E_i^0(\mathbb{R})$ 可由两个开集 U 覆盖，由可加性可得 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R})) = \beta(E_i^0(\mathbb{R}))$。

现在假设 N_i 为偶数。则投影 $\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \cap U \to E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$在 $E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$的连通分支上是零次（分别为二次）覆盖，在这些分支上，$u(x,0) < 0$（分别为 $u(x,0) > 0$）；也就是说，在 $f \circ \sigma$为负（分别为正）的区域附近的连通分支上。因此，当 N_i 为偶数时，覆盖 $\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \cap U \to E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$通常不存在整体平凡化；更进一步，即使在 $E_i^0(\mathbb{R}) \cap U$的邻域内 $f \circ \sigma$为正，覆盖 $\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}) \to E_i^0(\mathbb{R})$ 也通常不存在整体平凡化。因此，无法直接从 $\beta(E_i^0(\mathbb{R}))$ 推出 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R}))$ 的值。

命题 3.8. 假设 E_i 满足 $(E_i \cdot \sum_{j \neq i} E_j) < 3$。则 $\mathcal{R}^+_{top,i} = 0$。此外，在虚拟 *Poincar´e* 多项式的层面上，也有 $\mathcal{R}^+_{\beta\, i,}(u) = 0$。

证明。 我们首先假设 $(E_i \cdot \sum E_j) = 1$，也就是说，E_i 在一个实点处与另一个分支 $E_1{}_{j \neq i}$ 相交，并且根据命题 2.7有 $\alpha_1 = -1$ 。先假设 N_i 为奇数。正如上面的注中所述，有 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R})) = \beta(E_i^0(\mathbb{R})) = u$，且 $\widetilde{E}^{0,+}_{i\,1}$，由单个点组成，因为 $\gcd(N_i, N_1)$为奇数。因此

$$N_i \mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = u + \frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1} = \frac{u^{\alpha_1+1}-1}{u^{\alpha_1}-1} = N_i \mathcal{R}_{\beta,i}(u) = 0.$$

现在假设 N_i 为偶数。由于 $E_i \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$，经过仿射坐标变换后，我们可以假设交点 $E_1 \cap E_i$ 位于无穷远处。因此，E_i^0 包含在单个仿射图 $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 中，在该仿射图内，E_i 既不与任何分支在实点处相交，也不在复点处相交。在 U 上，因此可以写成 $f(\sigma(x,\ y)) = y^{N_i}u(x,\ y)$，从而

$$E_i^0 = E_i^0 \cap U = E_i \cap U = \{\ y = 0\ \} \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$$

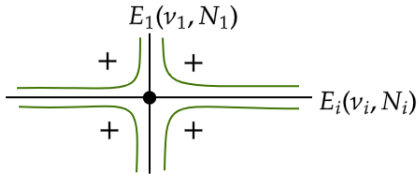
且 u 是一个单位，即 u 在 $E_i^0 \cap U$ 上不消失。等价地，多项式 $u(x,\ 0) \in \mathbb{R}[x]$ 没有实根或复根，因此 $u(x,\ 0)$ 等于某个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$。由于 $i \in J^+_{\mathbb{R}}$，我们知道 $E_i^0(\mathbb{R})$ 与 $P(f)$ 相交，从而 $\lambda > 0$。根据定义，

$$\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) = (\widetilde{E}_i^{0,+} \cap U)(\mathbb{R}) \simeq \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x,0)t^{N_i} = 1\ \}$$

也就是说，

$$\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) \simeq \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda t^{N_i} = 1\ \} = \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t = \pm\sqrt[N_i]{\lambda^{-1}}\ \} \simeq \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}.$$

由可加性可知，$\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R})) = 2u$。在交点$E_i \cap E_1$的一个邻域内，情况如下



且 $\widetilde{E}^{0,+}_{i1}$，由两个点组成。由此可得

$$N_i\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = 2u + 2\frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1} = 2\frac{u^{\alpha_1+1}-1}{u^{\alpha_1}-1} = 2N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = 0.$$

现在假设 $(E_i \cdot \sum E_j) = 2$，即 E_i 与其他分支 E_1，E_2 在$j\neq i$两个实点处相交。根据命题 2.7，有 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$。首先假设 N_i 为奇数。如上所见，有 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R})) = \beta(E_i^0(\mathbb{R})) = u - 1$，且 $\widetilde{E}^{0,+}_{i1}$，，$\widetilde{E}^{0,+}_{i2}$ 均由单个点组成。因此

$$N_i\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = u - 1 + \frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1} + \frac{u-1}{u^{\alpha_2}-1} = N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = 0.$$

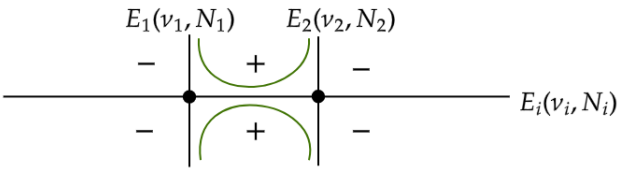
现在假设 N_i 为偶数。和之前一样，我们可以假设交点 $E_i \cap E_2$ 位于无穷远处，因此 E_i^0 包含在单个仿射图 $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ 中，在该图中 E_i 与分支 E_1 相交于一个实点。通过进行平移，我们还可以假设 $E_i \cap E_1$ 是原点。于是，在 U 上可以写成 $f(\sigma(x,\ y)) = y^{N_i}u(x,\ y)$，其中

$$E_i^0 = E_i^0 \cap U = (E_i \setminus E_i \cap E_1) \cap U = \{\ y = 0 \text{ and } x \neq 0\ \} \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

且 u 在 $E_i^0 \cap U$ 上不为零。等价地，多项式 $u(x,\ 0) \in \mathbb{R}[x]$ 仅在原点处为零（包括复根）。因此，$u(x,\ 0)$ 具有 λx^{N_1} 的形式，其中$\lambda \in \mathbb{R}^*$为某个$\lambda \in \mathbb{R}^*$。根据定义，

$$\widetilde{E}_i^{0,+}(\mathbb{R}) \simeq \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda x^{N_1}t^{N_i} = 1\ \}.$$

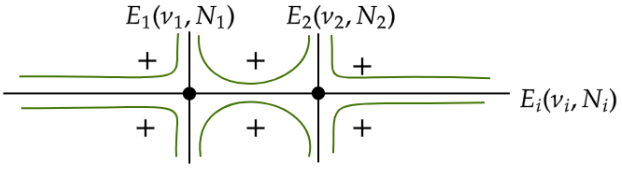
如果 N_1 为奇数，则投影 $(x,\ t) \in \widetilde{E}^{0,}{}_{i}{}^{+}(\mathbb{R}) \mapsto t \in \mathbb{R}^*$ 是一个正则同胚，其逆映射为 $t \mapsto (\sqrt[N_1]{(\lambda t^{N_i})^{-1}},\ t)$。因此，$\overline{\beta(\widetilde{E}^{0,}{}_{i}{}^{+}(\mathbb{R}))} = \beta(\mathbb{R}^*) = u-1$。覆盖 $\widetilde{E}^{0,}{}_{i}{}^{+}(\mathbb{R}) \to E_i^0(\mathbb{R})$ 如下



且 $\widetilde{E}^{0,}{}_{i1}{}^{+}$，，$\widetilde{E}^{0,}{}_{i2}{}^{+}$，两者都只由一个点组成。因此

$$N_i\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = u-1+\frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1}+\frac{u-1}{u^{\alpha_2}-1} = N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = 0.$$

若 N_1 是偶数，则 $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$ 因为 $i \in J^+_{\mathbb{R}}$，且有 $\beta(\widetilde{E}^{0,}{}_{i}{}^{+}(\mathbb{R})) = 2(u-1)$，这由以下引理 3.9 得出。覆盖 $\widetilde{E}^{0,}{}_{i}{}^{+}(\mathbb{R}) \to E_i^0(\mathbb{R})$ 如下



因此 $\widetilde{E}^{0,}{}_{i1}{}^{+}$，，$\widetilde{E}^{0,}{}_{i2}{}^{+}$，两者都由两个点组成。因此，

$$N_i\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = 2(u-1)+2\frac{u-1}{u^{\alpha_1}-1}+2\frac{u-1}{u^{\alpha_2}-1} = 2N_i\mathcal{R}_{\beta,i}(u) = 0.$$

最后，关于拓扑 zeta 函数层面的贡献，我们知道$\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u)$ 可以看作变量 $u \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$ 的 $\mathcal{C}^\infty$ 函数，并且可以连续延拓到 1，且

$$\mathcal{R}^+_{top,i} = \lim_{u\to 1}\mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = 0.$$

□

引理3.9。对于所有 m、$p \in \mathbb{N}^*$，有

$$\beta(\{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2m}t^{2p} = 1\ \}) = 2(u-1).$$

证明。我们可以对 m 使用归纳法。对于 $m=1$，有

$$\{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2t^{2p} = 1\ \} = \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid xt^p = 1\ \} \sqcup \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid xt^p = -1\ \}$$

它同构于两个 $\mathbb{R}^*$ 的不交副本，因此在这种情况下结论成立。对于 $m \geq 1$，可以类似地分解

$$\{\ (x,\ t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2m}t^{2p} = 1\ \} = \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^mt^p = 1\ \} \sqcup \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^mt^p = -1\ \}.$$

如果 m（分别地，p）为奇数，则到第一坐标（分别地，到第二坐标）的投影给出一个正则同胚

$$\{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^mt^p = \pm 1\ \} \simeq \mathbb{R}^*$$

所需结果由此得出。
若 m 和 p 均为偶数，则集合 $\{ (x,\ t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^m t^p = -1 \}$ 为空，因此

$$\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{2m} t^{2p} = 1 \} = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x^m t^p = 1 \}$$

由此可以通过归纳法得出结论。 □

与推论 2.21的证明一样，可以在环 $\mathrm{K}_0(\mathbb{R}\mathrm{Var})$ 中进行，并验证命题 3.8 中的贡献在动机设定下也都为零。

下面的推论可由命题 3.8 和定理 2.19直接得出。

推论 3.10。 正拓扑 *zeta* 函数的每个极点也是朴素拓扑 ζ 函数的极点，也就是说，有如下包含关系

$$Poles(Z^{+}_{top,0}(f;s)) \subset Poles(Z_{top,0}(f;s)) \cap \{ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{+}_{\mathbb{R}} \}$$

同理，

$$Poles(Z^{-}_{top,0}(f;s)) \subset Poles(Z_{top,0}(f;s)) \cap \{ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{-}_{\mathbb{R}} \}.$$

此外，对于动机 ζ 函数以及在虚 *Poincaré* 多项式层面定义的 ζ 函数，同样的包含关系也成立。

定理 3.11. 假设 E_i 是一条重数 N_i 为奇数的例外曲线。那么，当且仅当 $(E_i \cdot \sum_{j \neq i} E_j) \geq 3$ 时，贡献 $\mathcal{R}^{+}_{top,i}$ 非零。在这种情况下，有：

(1) 对所有 $j \in [\![1、\ k]\!]$，当且仅当 $\alpha_j > 0$ 时， $\mathcal{R}^{+}_{i} > 0$，并且我们还有 $\mathcal{R}^{+}_{i} \geq \frac{2}{N_i}$。—

(2) 当且仅当存在 $j \in [\![1、\ k]\!]$ 使得 $\alpha_j < 0$ 时， $\mathcal{R}^{+}_{i} < 0$。

此外，在虚 *Poincaré* 多项式层面，贡献 $\mathcal{R}^{+}_{\beta,i}$ 也当且仅当 $(E_i \cdot \sum E_j) \geq 3$ 时非零。$_{j \neq i}$

证明。由于 N_i 是奇数，我们在注 3.7 中已经看到 $\beta(\widetilde{E}^{0}_{,i}{}^{+}(\mathbb{R})) = \beta(E^{0}_{i}(\mathbb{R}))$。此外，每个项 $\widetilde{E}^{0}_{,i}{}^{+}{}_{,j}(\mathbb{R})$ 都由单个点组成，因为 $\gcd(N_i, N_j)$ 是奇数。因此，有 $\mathcal{R}^{+}_{\beta,i} = \mathcal{R}_{\beta,i}$，定理现由定理 2.11 得证。□

现在假设 N_i 是偶数，并记 $C = \widetilde{E}^{0}_{,i}{}^{+}(\mathbb{R})$。根据构造， C 是一条光滑的实代数曲线（这一点可以在局部验证），然而， C 通常不是紧致的。事实上，不难验证， C 是紧致的，当且仅当 E_i 不与任何分支在实点处相交。

考虑$C \hookrightarrow \widetilde{C}$，即 C 的一个光滑紧化。由虚 Poincar´e 多项式的可加性可知，

$$\beta(C) = \beta(\widetilde{C}) - \beta(\widetilde{C} \setminus C).$$

由于 C 是一条光滑紧曲线， C 在拓扑上是若干个圆的并。令 c 为这些圆的数量，也就是C的连通分支数。于是有

$$\beta(C) = c(u+1) - \beta(\widetilde{C} \setminus C) = c(u+1) + \chi_c(C).$$

C 的光滑紧化可以相当明确地描述。我们先来描述一个紧化 $C \hookrightarrow \overline{C}$。局部地，设 $U \simeq \mathbb{R}^2$ 是一个扎里斯基开集，在该开集上 $f(\sigma(x,\ y)) = u(x,\ y)y^{N_i}$，并记 $P(x) = u(x,\ 0) \in \mathbb{R}[x]$，于是

$$C \cap U \simeq \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x)t^{N_i} = 1 \}.$$

在上述局部情形下， $f \circ \sigma$ 的符号与 t 无关，而由 P的符号决定。$(E_i \cap U) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 中的 $C \cap U$ 的闭包是代数曲线

$$\{ (x, [t; y]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \mid P(x)t^{N_i} = y^{N_i} \}$$

其中，无穷远点对应于 P 的实根。随后可以沿着开集 $E_i \cap U$ 将上面的曲线粘合起来，得到 C，由此可知，全局而言， $C \setminus C$ 对应于 E_i 与其他分支的实交点数。注意，上述曲线实际上包含在对应于 $t = 1$ 的单个仿射图中，因此

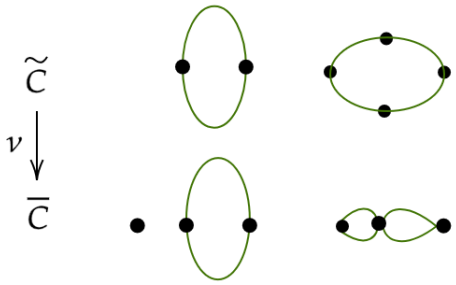
$$\overline{C} \cap U \simeq \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = y^{N_i} \}.$$

当 P 有单根时，曲线 C 是光滑的，且属于超椭圆型（除了 N_i 通常严格大于 2 这一事实）。例如， $y^8 - x(x-1)(x-2)(x-\frac{1}{2})(x+2)(x+4)$ 的实轨迹如下所示。



此外，在这种情况下， C 的连通分支数等于 $\frac{k}{2}$，其中 k是 E_i 与其他分支的实交点数（可以看出，根据命题 k 证明中的第一个等式，2.7，

现在来考虑一般情形，此时我们不再假设 P 具有单根。 C 的奇点于是（与上文一样，在局部意义下）对应于 P中重数严格大于 1 的根。例如，考虑由方程$y^8 + x(x-1)(x-3)^6(x+2)^3(x+4)^2(x-5)$在局部定义的曲线$C$ ，并记 $\nu\colon \widetilde{C} \to C$ 为其正规化。这些曲线的实轨迹如下图所示，其中我们将 P 的根描绘为C上的点，以及它们在 ν.下的原像



命题 3.12. 使用上述记号，有

$$-\chi_c(C) = \beta(\widetilde{C} \setminus C) = \sum_{j=1}^{k} \beta(\widetilde{E}_{i,j}^{0,+}(\mathbb{R})).$$

证明. 我们将计算 $\widetilde{C} \setminus C$ 中点的数量。回顾一下，对于 $j \in [\![1,\ k]\!]$, $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R}))$，当 N_j 为奇数时其值等于 1；当 N_j 为偶数时，其值为 0 或 2，具体取决于 $f \circ \sigma$ 在 $E_i \cap E_j$ 的一个邻域中的符号。可以写成

$$\overline{C} = C \sqcup \overline{C} \setminus C$$

如上所述，无穷远点，即集合 $\overline{C} \setminus C$，对应于 E_i 与其他分支的实交点。正规化 $\nu : \widetilde{C} \to C$ 在 C 的奇异点集之外是同构，特别是在 C 上是同构。因此可以写成

$$\widetilde{C} = \nu^{-1}(\overline{C}) = \nu^{-1}(C) \sqcup \nu^{-1}(\overline{C} \setminus C)$$

其中 $\nu^{-1}(C) \simeq C$ 和 $\widetilde{C} \setminus C \simeq \nu^{-1}(\overline{C} \setminus C)$。接下来需要计算 $\overline{C} \setminus C$ 中每个点在 ν 下的原像个数，这可以在局部完成。设 $p \in \overline{C} \setminus C$ 对应于 E_i 与另一分支 E_j 的一个实交点。采用上文讨论中的记号，设 U 是一个包含 $p = E_i \cap E_j$ 的扎里斯基开集，在其上

$$\overline{C} \cap U \simeq \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = y^{N_i}\ \}$$

并且 p 对应于 P 的一个实根。通过平移，我们可以假设 p 是 $\mathbb{R}^2$ 中的原点。在原点的一个邻域内，曲线 C 解析等价于方程为 $y^{N_i} = \pm x^{N_j}$ 的曲线，其正规化在不同情形下都是众所周知的。

若 N_j 为奇数，则 $\nu^{-1}(p)$ 由单个点组成，也如此 $\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})$。

现在，若 N_j 为偶数，且 C 在原点的某个邻域内与 $y^{N_i} = x^{N_j}$ 解析等价，则 $\nu^{-1}(p)$ 由两个点组成，并且 $f \circ \sigma$ 在 p的某个邻域内为正，因此 $\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})$ 也由两个点组成。

最后，假设 N_j 为偶数，且 C 在原点的某个邻域内与 $y^{N_i} = -x^{N_j}$ 解析等价。在这种情况下，$f \circ \sigma$ 在 p的某个邻域内为负，因此 $\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})$ 为空。此外，C 在原点的某个邻域内的实轨迹由单个孤立点组成，因此 $\nu^{-1}(p) = \emptyset$。□

推论 3.13. 假设 $(E_i \cdot \sum E_j) \geq 3$，并且对于所有满足 $j \neq i E_i(\mathbb{R}) \cap E_j(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$（即 $\mu(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})) \neq 0$的 $j \in [\![1, k]\!]$，都有 $\alpha_j > 0$。则 $\mathcal{R}^+_{top,i} \geq \frac{2c}{N_i} > 0$。

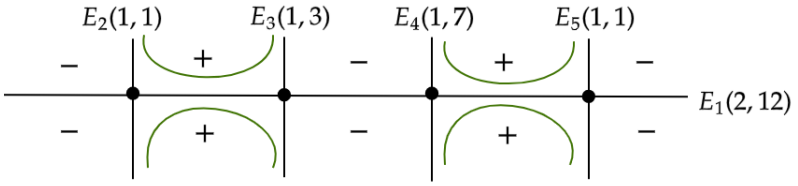
证明。 由命题3.12，可以写成

$$\mathcal{R}^+_{top,i} = \frac{1}{N_i}\left(2c + \sum_{j=1}^{k} \mu(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R}))(\frac{1}{\alpha_j} - 1)\right) \geq \frac{2c}{N_i}.$$

□

注 3.14。 一般而言，$j \in [\![1,\ k]\!]$ 使得 $\alpha_j < 0$ 且 $\mu(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})) \neq 0$存在，并不一定意味着 $\mathcal{R}^+_{top,i} < 0$，这与朴素情形不同。甚至可能出现抵消，使得拓扑层面上的贡献为零，以下例子展示了这种情况。

例 3.15. 考虑齐次多项式 $f = xy(x-y)^3(x-2y)^7$。对 f 进行嵌入消解可通过爆破原点得到，而消解图及覆盖 $\widetilde{E}^{0,+}_{,i}(\mathbb{R})$ 如下。



$\widetilde{E}^0$ 的光滑紧化$_{,1}{}^{+}(\mathbb{R})$ 有两个连通分支，并且可以得到

$$\mathcal{R}^{+}_{top,1} = \sum_{j=2}^{5} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{6}{5} + 2 - 6 + \frac{6}{5} < 0.$$

现在，若考虑 $f = xy(x-y)^3(x-2y)^9,$，消解图保持不变，但重数 N_4 和 N_1 现在分别等于 9 和 14。由此可得

$$\mathcal{R}^{+}_{top,1} = \sum_{j=2}^{5} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{7}{6} + \frac{7}{4} - \frac{7}{2} + \frac{7}{6} > 0.$$

最后，若考虑 $f = xy(x-y)(x-2y)^5,$，解图保持不变，但重数 N_1， N_2， N_3， N_4， N_5 分别为 8，1，1，5，1，因此

$$\mathcal{R}^{+}_{top,1} = \sum_{j=2}^{5} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 4 = 0.$$

特别地，$Z^{+}_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点为 -1， $-\frac{1}{5}$，而 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$ 的极点为 -1， $-\frac{1}{4}$， $-\frac{1}{5}$，并且有严格包含关系

$$\mathrm{Poles}(Z^{+}_{top,0}(f;s)) \subsetneq \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{+}_{\mathbb{R}}\ \}.$$

然而，对于虚拟 Poincar´e 多项式层面的贡献，可得

$$\mathcal{R}^{+}_{\beta,1}(u) = 2(u-1) + 3\frac{u-1}{u^{\frac{3}{4}}-1} + \frac{u-1}{u^{-\frac{1}{4}}-1} = \frac{(2u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{4}} + u^{-\frac{1}{4}} - 2)(u-1)}{(u^{\frac{3}{4}}-1)(u^{-\frac{1}{4}}-1)}$$

它并非恒等于零，尽管 $_{,}(u) = \mathcal{R}^{+}_{top,1} = 0$。特别地，$-\frac{1}{4}$ 是 $Z_{\beta,0}(f;\ u^{-s})$ 的一个极点，并且还存在严格包含

$$\mathrm{Poles}(Z^{+}_{top,0}(f;s)) \subsetneq \mathrm{Poles}(Z^{+}_{\beta,0}(f;u^{-s}))$$

这与朴素情形中的情况不同。

命题 3.16。 在虚拟 *Poincar´e* 多项式的层面上，贡献$\mathcal{R}^{+}_{\beta\ ,i}$ 非零，当且仅当 $(E_i \cdot \sum E_j)$ $\geq 3_{j\neq i}$

证明。 首先，回顾一下，在虚拟 Poincar´e 多项式层面上的贡献由下式给出

$$N_i\mathcal{R}^{+}_{\beta,i}(u) = \beta(\widetilde{E}^{0,+}_i(\mathbb{R})) + \sum_{j=1}^{k} \beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R}))\frac{u-1}{u^{\alpha_j}-1}$$

并且，根据命题 3.12，有 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{,i}(\mathbb{R})) = c(u+1) - \sum_{j=1}^{k} \beta(\widetilde{E}^{0,+}_{,j}(\mathbb{R}))$，其中 c 是 $\widetilde{E}^{0,+}_{,i}(\mathbb{R})$ 的光滑紧化的连通分支数。因此，有

$$N_i \mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = c(u+1) + \sum_{j=1}^{k} \beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i,j}(\mathbb{R})) \frac{u - u^{\alpha_j}}{u^{\alpha_j} - 1}.$$

若对于所有 $j \in [\![1,\ k]\!]$ 满足 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{,j}(\mathbb{R})) \neq 0$，我们已在前一个推论中看到 $\lim_{u\to 1} \mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = \mathcal{R}^+_{top,i} \neq 0$，特别地，由此可知 $\mathcal{R}^+_{\beta,i}$ 并非恒等于零。现在，假设存在某个 $\alpha_1 < 0$ 使得 $\beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i_1,}(\mathbb{R})) \neq 0$。为了证明 $\mathcal{R}^+_{\beta,i}$ 并非恒等于零，只需证明$\mathcal{R}^+_{\beta,i}$ 在 0 处的渐近展开的首项非零。可得

$$\frac{u - u^{\alpha_1}}{u^{\alpha_1} - 1} = \frac{u^{1-\alpha_1} - 1}{1 - u^{-\alpha_1}} = -1 - u^{-\alpha_1} + \underset{u\to 0}{o}(u^{-\alpha_1}).$$

另一方面，由于 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$，可知 $-\alpha_1 < \text{最小}_{2\leq j\leq k} \alpha_j$。根据推论 2.10，且对于 $j \in [\![1,\ k]\!]$ 有

$$\frac{u - u^{\alpha_j}}{u^{\alpha_j} - 1} = u^{\alpha_j} + \underset{u\to 0}{o}(u^{\alpha_j}) = \underset{u\to 0}{o}(u^{-\alpha_1}).$$

因此

$$N_i \mathcal{R}^+_{\beta,i}(u) = c - \beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i,1}(\mathbb{R})) - \beta(\widetilde{E}^{0,+}_{i,1}(\mathbb{R}))u^{-\alpha_1} + \underset{u\to 0}{o}(u^{-\alpha_1})$$

由此得证。 □

前一个定理使我们能够描述 $Z^+_{\beta,0}(f;\ u^{-s})$ 的极点，适用于每个候选极点至多有一个非零贡献的情形（例如，当 $f = g^r$ 解析不可约且满足 g 时，就会出现这种情况）。

推论 3.17。 设 $s_0 \in \mathbb{Q}$。假设恰好存在一个 $i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}$，使得以下条件之一成立： E_i 是满足 $(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$ 和 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 的例外曲线；或者 E_i 是严格变换的一个不可约分支，且 $s_0 = -\frac{1}{N_i}$。那么， s_0 是 $Z^{\pm}_{\beta,0}(f;\ u^{-s})$ 的一个极点。

等价地，在如上所述每个候选极点至多有一个非零贡献的情形下，命题 3.16 与第 2 节的结果共同推出

$$Poles(Z^{\pm}_{\beta,0}(f;u^{-s})) = Poles(Z_{\beta,0}(f;u^{-s})) \cap \{\ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}}\ \}.$$

注 3.18. (1) 我们不知道上述等式是否总是成立，也不知道不同非零贡献之间是否可能发生抵消。

(2) 仅凭朴素 ζ 函数和带符号 ζ 函数的极点数据，通常不足以区分两个不爆破-Nash 等价的芽，即使对于曲线也是如此。例如，若 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ and $f^{\varepsilon} = x^3 + \varepsilon y^4$，则可得

$$\mathrm{Poles}(Z^{\pm}_{top,0}(f^{\varepsilon};s)) = \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f^{\varepsilon};s)) = \{-1, -\frac{7}{12}\}$$

尽管 f^+ 和 f^- 并非爆破-Nash 等价，只需考察这两个函数带符号的 Fukui 不变量便可验证这一点。

4. Poles and monodromy eigenvalues

鉴于单值化猜想，对这些实 zeta 函数的极点作出单值化及其特征值方面的解释是很自然的。我们简要介绍猜想中出现的对象，详细介绍请参见 [Vey25] 。现在，设 $f\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ 是一个将 0 映到 0 的非恒定多项式映射，记$V \subset \mathbb{C}^d$ 为由 f 定义的超曲面，并设 $a \in V$。

命题 4.1 ([Mil68], [Vey25] 命题 2.5)**.** 记 $P_{a,i}(t)$ 为作用在 $H^i(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C})$上的单值化 T^* 的特征多项式。则

(1) 所有单值化特征值都是单位根。*(2)* 若 $f = f_1^{M_1}\dots f_r^{M_r}$是 f按不可约分支的分解，且 $m = gcd\ M_j$，则 $P_{a,0}(t) = t^m - 1$.$^{a\in\{f_j=0\}}$*(3)* 当 a 是 $\{f=0\}$的孤立临界点时，对于 $i \neq 0, d-1$，有 $H^i(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C}) = 0$。此外， $H^{d-1}(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C}) \neq 0$ 且 $P_{a,0}(t) = t-1$。*(4)* 当 a 是 $\{f=0\}$的光滑点时，对于 $i>0$，有 $H^i(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C}) = 0$，并且 $P_{a,0}(t) = t-1$。

定义 4.2。 单值化 ζ 函数定义为

$$\zeta_a(t) = \prod_{i\geq 0} P_{a,i}(t)^{(-1)^{i+1}}.$$

定理 4.3 ([A'C75] 定理 3)。 设 $\sigma\colon X \to \mathbb{C}^d$ 是 f的嵌入消解。则使用通常的记号，有

$$\zeta_a(t) = \prod_{j\in J}(t^{N_j}-1)^{-\chi(E_j^0 \cap \sigma^{-1}(a))}$$

现在假设 $f \in \mathbb{C}[x,y]$，因此 $H^*(\mathcal{F}_{f,\ a};\ \mathbb{C}) = H^0(\mathcal{F}_{f,\ a};\ \mathbb{C}) \bigoplus H^1(\mathcal{F}_{f,\ a};\ \mathbb{C})$ 且$\zeta_a(t) = P_{a,\ 1}(t)\ \underline{\quad}\ P_{a,\ 0}(t)$。单值化猜想已在曲线情形下得到证明，于是对应于以下定理。

定理 4.4。 设 s_0 是 $Z_{top,\ 0}(f;\ s)$的一个极点。则对于某个接近原点的 $a \in V$， $e^{2i\pi s_0}$ 是单值化算子 $T^*\colon\ H^*(\mathcal{F}_{f,\ a};\ \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,\ a};\ \mathbb{C})$ 的一个特征值。

在上述定理中，“接近原点”是指原点属于如下点集的扎里斯基闭包： a 满足 $e^{2i\pi s_0}$ 是 T^* 的特征值： $H^*(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C})$。

注 4.5. 必须考虑单值化在 $H^*(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C})$上的特征值，其中的点 a 不一定是原点，但离原点足够近。例如，若$f = x^3y^4$，计算可得

$$Z_{top,0}(f;s) = \frac{1}{(1+3s)(1+4s)}.$$

然而，由命题4.1 和定理4.3 可知$P_{0,0}(t) = P_{0,1}(t) = t-1$，因此$e^{-\frac{2i\pi}{3}}$和 $e^{-\frac{2i\pi}{4}}$不是单值化 T^* 的特征值： $H^*(\mathcal{F}_{f,O};\mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,O};\mathbb{C})$。相反，对于 $a \in \{x=0\}\setminus\{y=0\}$，可得$P_{a,0}(t) = t^3-1$；而对于 $a \in \{y=0\}\setminus\{x=0\}$，可得$P_{a,0}(t) = t^4-1$。

定理的证明 4.4。 一种可行的证明是 [Vey25], 所给出的证明，它使用了 Veys 判据（定理 0.3）以及 A'Campo 公式（定理 4.3）。此外，该证明

表明，如果极点 $s_0 = -\frac{\nu_i}{N_i}$ 是由一条例外曲线诱导的，那么 $e^{-\frac{2i\pi\nu_i}{N_i}}$ 是作用于 f 在原点处的米尔诺纤维上的单值化 $T^*\colon H^*(\mathcal{F}_{f,O};\mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,O};\mathbb{C})$ 的一个特征值。如果$s_0 = -\frac{1}{N_i}$ 是由严格变换的一个分支 E_i 诱导的，

那么，如上面的注中所示，可以证明 $e^{\frac{2i\pi}{N_i}}$ 是单值化$T^*\colon H^0(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C}) \to H^0(\mathcal{F}_{f,a};\mathbb{C})$在零次上的一个特征值，取点 a时可以适当选择，即取点a ，使其仅位于诱导严格变换分支 E_i 的分支 $\{f_i = 0\}$ 上。□

现在考虑在原点处消失的 $f \in \mathbb{R}[x,y]$， $\sigma\colon (X,\sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}},0)$的典范嵌入解消，以及由 f定义的曲线 $V \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$。我们已经看到

$$\mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)) \cap \{ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J_{\mathbb{R}} \}$$

并且

$$\mathrm{Poles}(Z^{\pm}_{top,0}(f;s)) \subset \mathrm{Poles}(Z_{top,0}(f_{\mathbb{C}};s)) \cap \{ -\frac{\nu_i}{N_i} \mid i \in J^{\pm}_{\mathbb{R}} \}.$$

因此，自然会尝试用单值化的特征值来表述这些包含关系。换言之，人们希望在单值化的特征值集合 $T^*\colon H^*(\mathcal{F}_{f,\,a};\ \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,\,a};\ \mathbb{C})$ 中找到一个子集，记作 E，使得对于靠近原点的 $a \in V(\mathbb{C})$，每个极点 s_0 of $Z_{top,\,0}(f;\ s)$ 都会导出一个特征值 $e^{2i\pi s_0} \in E$；带符号 ζ 函数的极点也同样如此。

命题4.6。 设 s_0 是 $Z_{top,\,0}(f;\ s)$的一个极点。那么，对于某个靠近原点的 $a \in V(\mathbb{R})$， $e^{2i\pi s_0}$ 是单值化 $T^*\colon H^*(\mathcal{F}_{f,\,a};\ \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,\,a};\ \mathbb{C})$ 的一个特征值。

证明。 下面的证明与命题4.7的证明类似。 □

现在记

$$V_+(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R}) \cap \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}} \text{ and } V_-(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R}) \cap \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < 0\}}.$$

命题4.7。 设 s_0 是$Z^{\pm}_{top,0}(f;\ s)$的一个极点。那么，对于某个靠近原点的 $a \in V_{\pm}(\mathbb{R})$， $e^{2i\pi s_0}$ 是单值变换 $T^*\colon H^*(\mathcal{F}_{f,a};\ \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,a};\ \mathbb{C})$ 的一个特征值。

证明。 由对称性，只需考虑正ζ函数的情形，因此令s_0为$Z^{+}_{top,0}(f;\ s)$ 的一个极点。将 $f = f_1^{M_1} \dots f_r^{M_r}$分解为不可约因子，并区分两种情形。首先，假设对于某个例外曲线 E_i，$E_i(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$且满足$(E_i \cdot \sum_{j\neq i} E_j) \geq 3$。那么，由定理4.4，

知道 $e^{-\frac{2i\pi\nu_i}{N_i}}$是单值化 T^*的一个特征值： $H^*(\mathcal{F}_{f,\,0};\ \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{F}_{f,\,0};\ \mathbb{C})$。此外， $E_i(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$和 $E_i(\mathbb{R})$包含于 $\sigma^{-1}(0)$ 的实轨迹中，因此 $0 \in V_+(\mathbb{R})$。现在假设 $s_0 = -\frac{1}{M_i}$ 由某个 f_i 的严格变换 E_i 诱导，其中$E_i(\mathbb{R}) \cap P(f) \neq \emptyset$。由于 σ在原点之外是一个同构，可知 f_i 的实轨迹并不约化为原点，并且

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x,y) = 0\} \cap \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}} \neq \emptyset.$$

因此，可以考虑上述集合中一个不同于原点的点 a。特别地，$a \in V_+(\mathbb{R})$ 和 $a \in \{f_i = 0\} \setminus \bigcup_{j\neq i} \{f_j = 0\}$，根据命题 4.1 可得 $P_{a,\,0}(t) = t^{M_i} - 1$，由此完成证明。

□

References

[A'C75] N. A'Campo, *La fonction zêta d'une monodromie*, 《Comment. Math. Helv.》50 (1975), 233–248。[AKMW02] D. Abramovich、K. Karu、K. Matsuki 和 J. Wlodarczyk, *Torification and factorization of birational maps* **15** **3** 2002 531 572 , 《J. Amer. Math. Soc.》第（）卷（），–。[BCNLH02a] E. Artal Bartolo、P. Cassou-Nogu`e´s、I. Luengo 和 A. Melle Hernandez., *Monodromy conjecture for some surface singularities* **35** **4** 2002 605 640 , 《Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.》（）（），–。[BCNLH02b] E. Artal Bartolo、P. Cassou-Nogu`e´s、I. Luengo 和 A. Melle Hernandez, *The denef-loeser zeta function is not a topological invariant* **65** 2002 45 54 , 《J. London Math. Soc.》（），–。[BCR98] J. Bochnak、M. Coste 和 M-F Roy, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1998。[BMT11] N. Budur、M. Mustat˘a 和 Z. Teitler, *The monodromy conjecture for hyperplane arrangements*, 《Geom. Dedicata》153 (2011), 131–137。[Cam17] J.-B. Campesato, *On a motivic invariant of the arc-analytic equivalence*, 《Annales de l'institut Fourier》67 第1期（2017），143–196。[Cam18] , *Complete classification of brieskorn polynomials up to the arc-analytic equivalence*, 《Mathematische Zeitschrift》290 第3–4期（2018），1145–1163。[DL91] J. Denef 和 F. Loeser, _____ *Caractéristiques d'euler-poincaré fonctions zêta locales et modifications analytiques* **5** 1991 705 720 , 《J. Amer. Math. Soc.》（），–。[DL98] , *Motivic igusa functions*, 《J. Alg. Geom.》7（1998），505–537。[ELT22] Alexander Esterov、Ann Lemahieu 和 Kiyoshi Takeuchi, *On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces* 24 **11** 2022 3873 3849 , 《J. Eur. Math. Soc.》（），–。[Fic05a] ~~G. F~~Fichou, *Motivic invariants of arc-symmetric sets and blow-nash equivalence*, 《Compositio Math》141（2005），~~655–688~~。[Fic05b] , *Zeta functions and blow-nash equivalence*, 《Annales Polonici Math》87（2005），111–126。[Fic08] , *Blow-nash types of simple singularities*, 《J. Math. Soc. Japan》60 第2期（2008），445–470。[Fic17] , *On relative grothendieck rings and algebraically constructible functions*, 《Mathematische Annalen》369（2017），761–795。[Fuk97] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, 《Compositio Math.》105（1997），95–107。[Hir64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, 《Ann. Math.》79（1964），109–326。[Igu85] J. Igusa, *Complex powers of irreducible algebroid curves*, 载于《Geometry today》，Giornate di Geometria，Roma 1984，Progress in Mathematics，68（1985），207–230。[IKK02] S. Izumi、S. Koike 和 T.-C. Kuo, *Computations and stability of the fukui invariant*, 《Compositio Math.》130（2002），49–73。[KP03] S. Koike 和 A. Parusinski, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, 《Ann. Inst. Fourier》53（2003），2061–2104。[Kur88] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, 《Math. Ann.》282（1988），445–462。[Loe88] F. Loeser, *Fonctions d'igusa p-adiques et polynômes de bernstein*, 《Amer. J. Math.》110（1988），1–22。[Mil68] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press，1968。[MP03] C. McCrory 和 A. Parusi´nski, *Virtual betti numbers of real algebraic varieties*, 《C. R. Acad. Sci.》336（2003），763–768。[MP11] , *The weight filtration for real algebraic varieties*, 《Math. Sci. Res. Inst. Publ.》58（2011），121–160。[Poo02] Bjorn Poonen, *The grothendieck ring of varieties is not a domain*, 《Mathematical Research Letters》9（2002），第4期，493–497。[RV03] B. Rodrigues 和 W. Veys, *Poles of zeta functions on normal surfaces*, 《Proc. London Math. ~~Soc.~~》~~87~~(1)（2003），164–196。[Vey95] W. Veys, *Determination of the poles of the topological zeta function for curves*, 《Manuscripta Mathematica》87，第4期（1995），435–448。[Vey25] , *Introduction to the monodromy conjecture*, 《Handbook of Geometry and Topology of Singularities VII》（2025），721–756。

Université de Rennes、 IRMAR - UMR 6625、 F-35000 Rennes、 France*Email address*: theo.jaudon@univ-rennes.fr