arXiv:2601.02187v1 [cond-mat.supr-con] 5 Jan 2026

# 分形超导体中的超导二极管效应：约瑟夫森结的分数阶金兹堡–朗道理论

Yuriy Yerin[1,2] 和 Iman Askerzade[2,3,4]

[1] *Istituto di Struttura della Materia of the National Research Council, via Salaria Km 29.3, I-00016 Monterotondo Stazione, Italy*

[2] *Department of Computer Engineering and Center of Excellence of Superconductivity Research, Ankara University, Ankara,* 06100, *Turkey*

[3] *Institute of Physics, H.Cavid 33, Baku, AZ1143, Azerbaijan*

[4] *Center for Theoretical Physics, Khazar University,41 Mehseti Street, Baku, AZ1096, Azerbaijan*(日期：2026年1月6日)

我们建立了一个分数阶金兹堡–朗道（GL）框架，用于描述由分形超导体或具有非局域关联的超导介质构成、并由非中心对称正常层隔开的约瑟夫森结中的非互易超导输运。我们表明，非互易性和超导二极管效应源于Lifshitz不变量与分数阶动力学的相互作用；后者可作为分形几何和有限范围记忆的一种有效且符合对称性的表述。我们采用两种互补的方法。在分数阶积分（测度加权）GL表述中，对分形空间进行空间积分可得解析解，并揭示整流如何随分形介质的维数和类利夫希茨漂移的强度变化。在通过 Agrawal 变分原理并采用左/右 Caputo 算子推导的基于分数阶导数的表述中，我们得到规范不变自由能、相应的 GL 方程以及电流密度。我们将分数阶阶数用作有效参数，以表征分形微观结构诱发的非局域效应和记忆效应；它们与特定分形几何并非一一对应。在双模平面波近似下，我们推导出简洁的电流-相位关系和二极管效率表达式，并绘制了整流幅度随分数阶动力学阶数以及利夫希茨/记忆阶数的变化图。利用 Prabhakar 函数（广义 Mittag–Leffler 函数）表示的精确单侧解进一步证实了稳健且可调的非互易性，包括近理想二极管响应。这为实现近乎完美的超导二极管提供了一条途径：通过调节分数阶阶数和利夫希茨强度，设计分形（分数阶动力学）输运，而无须引入磁场或几何棘轮。在局域动力学和类利夫希茨漂移的整数阶极限下，两种构造都退化为标准的 $\varphi_0$移位约瑟夫森关系，从而将传统结果纳入统一的分数阶金兹堡–朗道现象学框架。

## I. 引言

非互易性是物理学诸多分支中反复出现的主题。缺乏反演对称性或时间反演对称性的系统，其物理性质和特征在电流、动量或波矢反向时可能有所不同。相关实例包括光学隔离器 [1–3] 、非互易超材料 [4–6] 、磁电材料 [7–9] 以及自旋 – 轨道耦合导体 [10–12]。

在超导领域，非互易性最显著的表现是输运性质中的二极管效应，即临界电流取决于超电流的流动方向。近年来，这一现象引起了广泛关注，因为它在常规和非常规超导体以及多种超导混合结构中，将无耗散输运与整流功能结合起来。

超导系统 [13–16]。目前，这些材料和混合结构包括种类繁多的非中心对称[17–19], 手性 [20] 图案化 [21, 22], 高温 [23], 多带[24, 25] 超导体、二维电子气、半导体 [26, 27], 狄拉克材料 [28],超导体-磁体混合结构 [29–31], 约瑟夫森结（其中包含磁性原子）[32],扭转石墨烯系统 [33, 34], 以及拓扑绝缘体 [35, 36]。人们已利用多种物理情形和机制，在这些系统中实现非互易输运性质，包括基于有限库珀对动量 [37, 38], 螺旋相 [39–43], 序参量的各向异性和多分量结构 [44–48], 磁织构和磁化强度梯度 [49, 50], 屏蔽电流的存在 [51, 52], 以及与自感应场相关的超电流 [53, 54]。

因此，人们采用了多种理论方法

来描述超导二极管效应，这体现了其微观层面的丰富性，以及对称性破缺、自旋轨道耦合和电子关联之间的相互作用。在微观层面，基于 Bogoliubov–de Gennes 方程、格林函数或图解微扰理论的形式体系，能够详细描述准粒子谱和电流-相位关系，但代价是复杂性显著增加。相比之下，Ginzburg–Landau（GL）唯象理论提供了一种更简单、直观的框架[55], ，其中非互易输运的核心物理机制由序参量中对称性允许的梯度项（如 Lifshitz不变量）所表征。尽管 GL 方法不可避免地舍弃了微观细节，但其解析处理的便利性使其特别适合探究一般机制、建立与对称群的联系，并为实验观测提供定性指导。

近年来，人们开始关注通过引入分数阶微积分的概念，利用分数阶导数和积分[56, 57]来扩展 GL 理论本身。当超导凝聚体表现出反常空间关联、分形几何或非局域相互作用时，分数阶 GL 理论为传统 GL 框架提供了一种自然的扩展。不同于标准 GL方程（其中动能项涉及二阶拉普拉斯算子；对于 Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov 态，则涉及双重拉普拉斯算子），分数阶形式将该算子替换为分数阶导数或所谓的加权导数，在局域关联与非局域关联之间实现插值。这一修改直接编码了记忆效应或分形有效维数的存在，而这些特征对于某些超导材料正变得日益重要。例如，低维超导体、非均匀薄膜以及具有人工设计的纳米结构的系统，通常表现出幂律关联和序参量的非指数型恢复；这些行为可以在分数阶 GL 方法中得到自然描述。更具体地说，在推广到分数阶或分形维数情形的 GL理论框架内，分数阶微积分已经被用于描述块体超导体中的非局域效应和有效相干长度、阿布里科索夫涡旋的结构、各向异性超导介质中的非周期性涡旋物质，以及 III型超导的出现 [58–60]。

分数阶微积分也可能有助于描述非互易超导体中的输运性质，尤其是约瑟夫森效应，原因有以下几点。首先，如前所述，分数阶算子能够体现空间上的非局域性，反映出超导关联会延伸至有限的相干长度，并且在非常规或无序的约瑟夫森系统中可能涉及长程耦合 [61]。其次，分数阶算子能够自然地刻画幂律弛豫和反常标度，这些现象会出现在涡旋动力学、近邻效应以及具有分形微结构的系统中。第三，约瑟夫森效应本身具有内在的非局域性：电流-相位关系反映的是整个弱连接中的相位差，而非纯粹的局域梯度。分数阶GL算子为模拟这类分布效应提供了一种简洁且具有物理动机的方法。此外，它们还能描述偏离简单正弦电流-相位关系的情况，例如在非常规或强无序约瑟夫森结中观察到的高次谐波和反常电流-相位关系。从这一角度看，分数阶框架并非只是数学上的奇趣或思想实验，而是一种具有物理依据的扩展，有望统一解释多种已观测到的非局域和反常约瑟夫森效应。因此，在超导二极管效应的背景下，分数阶导数为描述超越采用整数维数标准GL模型的反演对称性破缺和非互易输运提供了强有力的工具。

受这些进展的启发，本文在分数阶 GL 理论框架下，探讨分形超导体之间约瑟夫森结中的超导二极管效应。通过将分数阶微积分形式引入 GL 理论，我们研究非局域序参量关联与 Lifshitz 项所体现的非中心对称超导性之间的相互作用。我们分析由此产生的电流-相位关系，提取二极管效率，并考察整流幅度对导数的分数阶阶数（分形维数）的依赖关系。在全文中，我们将分数阶阶数视为有效输运参数，用以表征分形微结构所产生的反常无标度行为；它们是替代性描述参数，而非任何特定分形的唯一标识。结果表明，分数阶化能够定性地改变约瑟夫森结的非互易响应，为调控并显著增强各类超导系统中的二极管效应提供了新途径。

## II. 模型与基本形式

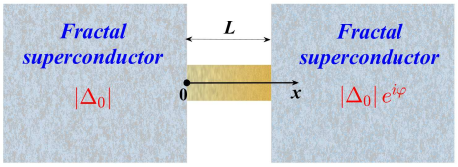



图 1. 约瑟夫森结示意图：它作为两个分形超导体之间的弱连接，由一根长度为 $L$ 的细丝连接。超导电极的分形性以无序颗粒结构的形式表示。细丝中的正常态非中心对称材料通过由粗到细的阴影效果加以强调。

约瑟夫森结被建模为一个长度为 $L$ 的弱连接，它由一个正常态介质构成，位于两个具有分形结构且彼此缺乏反演对称性的块体超导体之间（图 1）。此外，我们假设温度高于弱连接材料的临界温度，且超导序参量仅由超导电极。

我们采用基于分数阶微积分形式的两种互补 GL 方法。第一种以 GL 泛函的分数阶积分形式构建，可有效描述具有分形微观结构的介质。第二种基于 Agrawal 变分原理 [62] 和 Caputo 分数阶导数 [63],，通过引入左右微分算子，可直接推广 GL 方程以及电流密度的表达式。这两种理论工具在数学上彼此相关，共同构成一个理论框架，用于描述超导输运性质，并预测由非中心对称金属隔开的分形超导体之间的约瑟夫森结中的二极管效应。

## III. GL泛函的分数阶推广

我们引入固定 A $=0$ 下 GL泛函的分数阶推广，即不存在磁场：

$$F[\Delta] = F_0 + \int_\Omega dV_d \left[ a|\Delta(x)|^2 + \frac{1}{2} b|\Delta(x)|^4 + \gamma|\Delta'(x)|^2 - \frac{1}{2} i\varepsilon w(x) \left(\Delta(x)\Delta'^*(x) - \Delta(x)^*\Delta'(x)\right) \right], \quad (1)$$

其中 $\Delta$ 是超导序参量，$a < 0$，$b > 0$，$\gamma > 0$ 是唯象系数，$F_0$ 是正常态的自由能。下文中，我们采用简化的一维 GL泛函，并将 Rashba自旋轨道耦合和交换场 $h$的完整矢量结构替换为单个有效唯象系数 $\varepsilon$，因此，相应的 Lifshitz不变量在式（1）[64–68]中表现为标量反对称梯度项。

积分在约瑟夫森结空间 Ω 中进行，所用有效分形体积元 $dV_d$ 由 Riemann-Liouville分数阶积分定义：

$$dV_d = \frac{x^{d-1}}{\Gamma(d)} dx, \quad (2)$$

其中，我们将维数设定在区间 $0 < d \leq 1$，其中 $\Gamma(d)$ 表示伽马函数。在下文中，为避免与空间维数 $d$ 混淆，我们使用单撇号和双撇号表示关于坐标 $x$ 的导数。

将函数 $w(x)$ 引入 GL泛函的目的，源于将 Lifshitz不变量项纳入式（1）存在两种形式上自洽的方式：

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{"weighted" Lifshitz term,} \\ \frac{\Gamma(d)}{|x|^{d-1}}, & \text{"unweighted" Lifshitz term.} \end{cases} \quad (3)$$

在所谓的“加权”表述中，按照参考文献 69，GL泛函中的每一项都乘以一个特殊的反常“权重”，该权重由微分符号前的因子表示 $dx$ （见式（2））。它对应于超导介质的有效分形几何。这种处理在数学上是严谨的。

相比之下，Lifshitz项的微观起源有所不同：它源于自旋轨道耦合

与反演对称性破缺的共同作用，而非分形测度本身。从这个意义上说，Lifshitz项中出现的坐标 $x$ 应视为描述超导相纹理的有效连续坐标，而非分形积分变量。因此，将Lifshitz不变量视为GL能量中独立的“无权重”贡献，在物理上是合理的；它起到非厄米漂移项[70]的作用。换言之，尽管从分数阶微积分的角度看，“加权”Lifshitz形式很自然，但对于分形超导体之间的约瑟夫森结而言，“无权重”的Lifshitz项能提供更贴切的唯象描述，因为在这种情形下，分形性与自旋轨道耦合诱导的贡献是彼此独立的机制。这种机制分离确保了与非中心对称超导体中Lifshitz不变量的微观推导相一致；在这类推导中，线性梯度项并不伴随空间“权重”因子。

无论如何，为清晰起见，我们通过在方程 $w(x)$ 中引入函数，将这两个常见概念一并处理。

对泛函方程 (1) 连同方程 (2) 和 (3) 进行变分后，可以推导出“加权”线性化 GL 方程。

$$-\gamma\Big(\Delta''(x)+\frac{d-1}{x}\Delta'(x)\Big)+i\varepsilon\,\Delta'(x) + \frac{i\varepsilon(d-1)}{2x}\,\Delta(x)+a\,\Delta(x)=0, \tag{4}$$

及其“非加权”对应形式

$$-\gamma\left(\Delta''(x)+\frac{d-1}{x}\Delta'(x)\right)+i\varepsilon\Delta'(x)+a\Delta(x)=0. \tag{5}$$

方程 (4) 和 (5) 均可化为微分方程的标准形式，其“加权”表示的通解为：

$$\Delta^{\mathcal{W}}(x)=\Delta_0\,x^{1-\frac{d}{2}}\,\exp\!\left(\frac{i\varepsilon x}{2\gamma}\right) \times\Big[\mathcal{W}_1\,J_{\frac{d}{2}-1}(\lambda x)+\mathcal{W}_2\,Y_{\frac{d}{2}-1}(\lambda x)\Big], \tag{6}$$

其中，$J_\mu(x)$ 和 $Y_\mu(x)$ 分别为第一类和第二类贝塞尔函数；对于“非加权”形式：

$$\Delta^{\mathcal{U}}(x)=\Delta_0\,x^{-\frac{d-1}{2}}\,\exp\!\left(\frac{i\varepsilon x}{2\gamma}\right) \times\Big[\mathcal{U}_1\,M_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda x)+\mathcal{U}_2\,W_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda x)\Big], \tag{7}$$

其中，$M_{\kappa,\,\mu}(x)$ 和 $W_{\kappa,\,\mu}(x)$ 为惠特克函数，参数 $\kappa=\frac{\varepsilon}{(d-1)\,4\gamma\lambda}$ 以及系数 $\lambda=\sqrt{-\frac{a}{\gamma}+\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2}}$.

这里，$\mathcal{W}_1$，$\mathcal{W}_2$ 和 $\mathcal{U}_1$，$\mathcal{U}_2$ 分别是方程 (6) 和 (7) 中的任意常数。根据图 1所示约瑟夫森结的狄利克雷边界条件，可以确定这些常数：

$$\Delta(0)=|\Delta_0|\,,\Delta(L)=|\Delta_0|\,e^{i\varphi}. \tag{8}$$

由此得到“加权”序参量的以下表达式：

$$\mathcal{W}_1=\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\det\mathcal{W}}\Big[\Gamma\left(1-\tfrac{d}{2}\right)\cos\!\Big(\tfrac{\pi(d-1)}{2}\Big)L^{\frac{d}{2}-1}e^{\mathrm{i}\varphi_\varepsilon} + \pi\left(\tfrac{\lambda}{2}\right)^{1-\frac{d}{2}}Y_{\frac{d}{2}-1}(\lambda L)\Big], \tag{9a}$$

$$\mathcal{W}_2=\frac{\pi}{\det\mathcal{W}}\Big[\Gamma\left(\tfrac{d}{2}\right)\left(\tfrac{\lambda}{2}\right)^{1-\frac{d}{2}}J_{\frac{d}{2}-1}(\lambda L)-L^{\frac{d}{2}-1}e^{\mathrm{i}\varphi_\varepsilon}\Big], \tag{9b}$$

其中我们定义新的相位 $\varphi_\varepsilon\equiv\varphi-\varepsilon L/2\gamma$ 和行列式 $\det\mathcal{W}=\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi(d-1)}{2}\right)J_{\frac{d}{2}-1}(\lambda L) +\pi Y_{\frac{d}{2}-1}(\lambda L)$.

对于“未加权”的对应情况，我们有：

$$\mathcal{U}_1=\frac{1}{\det\mathcal{U}}\Big[\frac{\Gamma(2-d)}{\Gamma\left(\frac{3-d}{2}-\kappa\right)}L^{\frac{d-1}{2}}e^{i\varphi_\varepsilon} - (2i\lambda)^{\frac{1-d}{2}}W_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda L)\Big], \tag{10a}$$

$$\mathcal{U}_2=\frac{1}{\det\mathcal{U}}\Big[(2i\lambda)^{\frac{1-d}{2}}M_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda L)-L^{\frac{d-1}{2}}e^{i\varphi_\varepsilon}\Big], \tag{10b}$$

其中引入了另一个行列式 $\det\mathcal{U}=\Gamma(2-d)\Gamma\left(\frac{3-d}{2}-\kappa\right) M_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda L)-W_{\kappa,\frac{d}{2}-1}(2i\lambda L)$.

在 $d=1$极限下，利用惠特克函数和贝塞尔函数在$\nu=-1/2$ [71] 时与双曲函数之间的关系，可以将序参量的两个表达式，即式（6）和式（7），简化为两个指数函数的叠加。这一试探形式曾用于研究常规超导体之间的准一维约瑟夫森结，其中正常层为非中心对称金属 [67]。

由于我们的研究重点是识别约瑟夫森系统的非互易输运性质，因此我们基于 GL泛函推导出电流密度的表达式

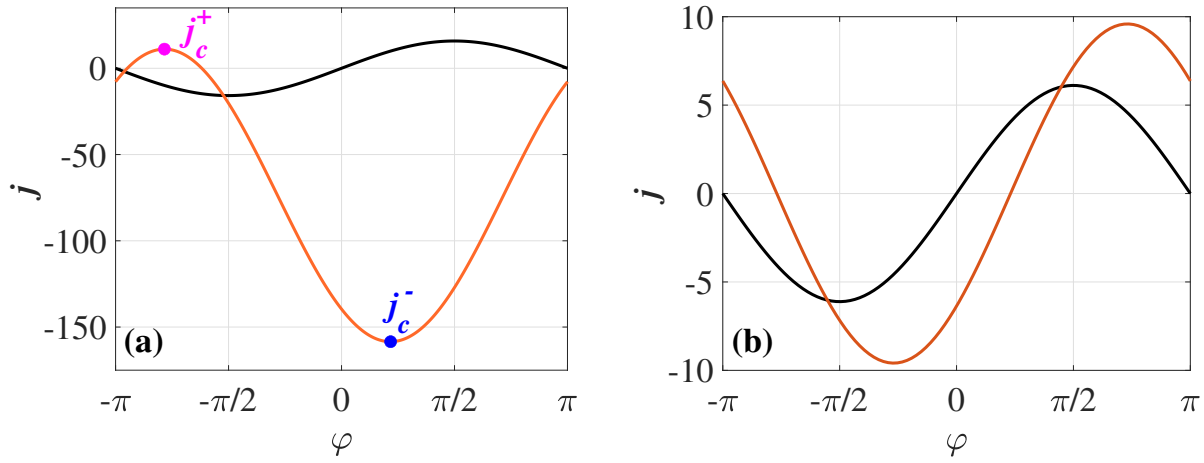



图 2. 当不存在非厄米 Lifshitz 漂移时（ $\varepsilon = 0$ ，黑线）和存在非厄米 Lifshitz 漂移时（ $\varepsilon/\sqrt{|a|\gamma} \approx 1.547$ ，橙线），在“未加权”（a）和“加权”（b）GL 形式体系下，计算得到的维数为 $d = 0.9$ 的分形超导体之间、长度为 $L = 5$ 的约瑟夫森结的电流-相位关系。图（a）中还标出了正、负临界电流的位置，以突出显示 $\eta = -0.869$ 时巨型二极管效应的出现。超电流密度的幅值以 $2e\gamma|\Delta_0|^2$ 为单位。

方程（1）。其可写为:

$$j(x) = e\,\frac{|x|^{d-1}}{\Gamma(d)}\Big[i\gamma\big(\Delta(x)\Delta^{*'}(x) - \Delta^{*}(x)\Delta'(x)\big) - \varepsilon\, w(x)\,|\Delta(x)|^2\Big]. \tag{11}$$

利用方程（11），并考虑序参量方程（6）和（7）以及由方程（9）和（10）给出的系数，我们可以得到约瑟夫森结的电流-相位关系。由于表达式非常冗长，难以进行解析分析，这里不明确写出。因此，我们采用数值分析，其中二极管整流幅度 $\eta$ 由正向 $I_c^+$和反向 $I_c^-$流动方向上的临界电流最大幅值之差确定:

$$\eta = \frac{j_c^{(+)} - |j_c^{(-)}|}{j_c^{(+)} + |j_c^{(-)}|}. \tag{12}$$

图2 展示了长度为 $L = 5$ 、单位为$\sqrt{\gamma/\|a|}$的约瑟夫森结的电流-相位关系，该关系是在分数阶GL理论的“非加权”和“加权”方法下计算得到的。如图2a所示，Lifshitz不变量与分数维的相互作用产生了非互易输运，这是分形超导体之间产生二极管效应的两个关键因素。此外，事实证明，非互易输运和二极管效应仅在“非加权”表述下实现。这种行为的起源在于序参量解的数学结构。

在加权形式下，方程（6）所对应的线性化GL 算子变为实自伴算子。结合对称的约瑟夫森边界条件，边值问题在跨越连接处反转坐标（$x \to L - x$）后保持不变，这强制电流-相位关系为奇函数 $I(\varphi) = -I(-\varphi)$，从而使正向和反向临界电流相等， $I_c^{(+)} = I_c^{(-)}$（无二极管效应）。相比之下，在非加权形式下，约化方程是非自伴的，并映射为具有非零参数的惠特克解方程（7） $\kappa$，该参数刻画了序参量分布的方向偏置。这种无法消除的偏置会对电流产生偶函数形式的$\varphi$ 贡献，因此 $I_c^{(+)} \neq I_c^{(-)}$，并出现有限的二极管效率。

所进行的傅里叶分析表明（见附录 A），后一种情况下的电流-相位关系可由如下通式表征:

$$j(\varphi) = \mathcal{A}\sin\varphi + \mathcal{B}\cos\varphi + \mathcal{C}, \tag{13}$$

以及上述偶数次-$\varphi$ 余弦项，其中 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 为谐波幅度。

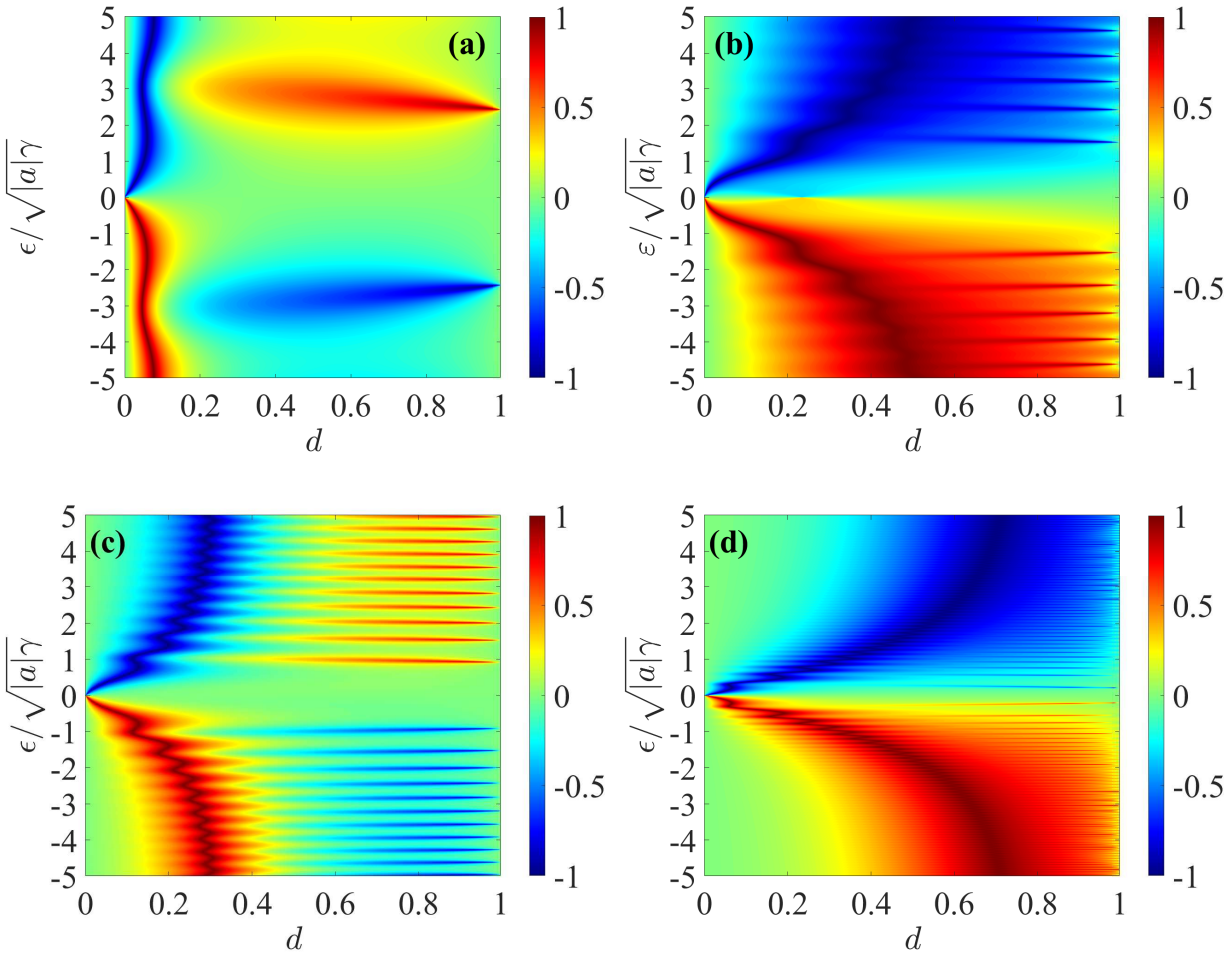



图3。在“非加权”GL 形式体系下计算得到的约瑟夫森结超电流整流幅度 $\eta$ 关于分数维数 $0 < d \leq 1$ 和长度 $L = \sqrt{\gamma/|a|}$ 的系数 $\epsilon/\sqrt{|a|\gamma}$ 的等高线图，分别对应(a)、 $L = 5\sqrt{\gamma/|a|}$ (b)、$L = 10\sqrt{\gamma/|a|}$ (c)和 $L = 50\sqrt{\gamma/|a|}$ (d)。

最后，数值计算表明，对于系数 $\varepsilon$ 和空间的分数维数 $d$的某些取值，甚至有可能实现近乎完美的二极管效应，即整流幅度系数接近 $\eta \approx \pm 1$ （见图3）。一个显著特点是，随着约瑟夫森结的长度 $L$ 增加，二极管效率图样会变得高度振荡（见图3 b-d）。与此同时，无论 $L$如何，其中一个 $\eta$ 达到近乎完美效率的区域，是维数 $d$ 接近 1、且$\varepsilon \neq 0$ 并不等于 1 的区域。

## IV. GL方程的分数阶推广

为了将GL方程推广到分数阶情形，我们采用 Caputo 分数阶导数 [63]。对于这里研究的约瑟夫森弱连接，它们是合适的工具，因为它们符合边界处的物理规律和规范要求：它们直接采用 $x = 0$和 $x = L$处的狄利克雷边界条件，并且对均匀相位给出零动力学响应，因此可以清晰地定义规范不变电流。它们还具有简洁的变分形式，其中左右两侧互为伴随算子，使我们能够从相应的泛函中推导出GL方程和电流密度，

泛函。

对于二极管物理而言，至关重要的是，Caputo 单侧核可以让我们以不同方式加权左右记忆，从而清晰地编码驱动非互易性的约瑟夫森接触结构不对称性。同时，这些算子在局域极限下可平滑地还原为常见的一阶/二阶导数，因此分数阶模型涵盖了经典整数阶 GL 理论。在实际应用中，它们具有良好的解析可处理性和数值实现性，并能避免潜在的端点奇异性。相比之下，Riemann–Liouville 分数阶导数通常需要分数阶初始数据，且会对常数产生非预期的响应；而对称 Riesz 算子虽非常适用于周期性或体介质，却无法在有限边界处控制方向性——这正是我们的非对称约瑟夫森结所需要的。

需要指出的是，我们并未声称超导体的任何特定分形几何与某个唯一的分数阶之间存在一一对应关系。相反，我们将分数阶算子作为一种有效的连续介质表述，用以描述约瑟夫森结中观测到的反常输运。

对于区间 $x \in [0, L]$，可以为连续函数 $f(x)$ [63] 引入阶数为 $n-1 < \nu \le n$ 的左侧和右侧 Caputo 分数阶导数，其中 $n \in \{1, 2\}$：

$$
\begin{aligned}
{}_0^C D_x^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\nu-n+1}}\, d\xi, \\
{}_x^C D_L^\nu f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\nu)} \int_x^L \frac{f^{(n)}(\xi)}{(\xi-x)^{\nu-n+1}}\, d\xi,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中，为方便起见，我们用上标 $C$ 表示这类分数阶导数。

适用于分数阶导数 [62]，的 Agrawal 变分原理扩展了经典欧拉–拉格朗日方程，使我们能够将 GL方程的线性化形式推广到分数阶：

$$
-\gamma \left[\kappa\, {}_0^C D_x^\beta \Delta(x) + (1-\kappa)\, {}_x^C D_L^\beta \Delta(x)\right] + i\varepsilon \left[\mu\, {}_0^C D_x^\sigma \Delta(x) + (1-\mu)\, {}_x^C D_L^\sigma \Delta(x)\right] + \alpha \Delta(x) = 0, \tag{15}
$$

其中，$0 < \sigma < 1$、$1 < \beta < 2$ 分别是 Lifshitz 项和动力学项中导数的分数阶，$0 \le \kappa$、$\mu \le 1$ 分别确定这些项相应的左、右部分贡献（混合权重）。我们强调，分数阶（$\sigma$、$\beta$）是根据反常色散/响应推断出的有效输运参数；这并不意味着其与某个特定分形之间存在唯一映射。

基于 Agrawal 变分原理，可以恢复 GL 自由能，重新推导式（15），进而得到电流密度的表达式（详见附录 B ）：

$$
j(x) = j_\beta(x) + j_\sigma(x), \tag{16}
$$

其中，$j_\beta(x)$表示动能贡献

$$
\begin{aligned}
j_\beta(x) = 2e\gamma\, \mathrm{Im}\Big\{ \Delta^*(x) \Big[ &\kappa\, {}_0 I_x^{2-\beta}\, {}_0^C D_x^\beta \\
&- (1-\kappa)\, {}_x I_L^{2-\beta}\, {}_x^C D_L^\beta \Big] \Delta(x) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

而 $j_\sigma(x)$ 对应于非厄米（Lifshitz）部分

$$
\begin{aligned}
j_\sigma(x) = -e\varepsilon\, \mathrm{Re}\Big\{ \Delta^*(x) \Big[ &\mu\, {}_0 I_x^{1-\sigma}\, {}_0^C D_x^\sigma \\
&- (1-\mu)\, {}_x I_L^{1-\sigma}\, {}_x^C D_L^\sigma \Big] \Delta(x) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

这里，${}_0 I_x^\rho$ 和 ${}_x I_L^\rho$ 分别表示阶数为 $\rho$的左侧和右侧 Riemann–Liouville 分数阶积分。它们是分数阶变分演算在结构上的必要组成，可确保得到适定的 GL泛函、正确的电流密度以及符合要求的边界行为，这也是 Agrawal 分数阶变分演算的特点。

### 1. *Plane-wave solution*

利用恒等式 ${}_0^C D_x^\nu e^{qx} = q^\nu e^{qx}$，${}_x^C D_L^\nu e^{qx} = (-q)^\nu e^{qx}$，并采用分数次幂的主值分支，可以使用平面波试探解 $\Delta(x) = e^{qx}$ 并将其代入式（15）。由此得到特征色散关系：

$$
\begin{aligned}
&-\gamma\left[\kappa\, q^\beta + (1-\kappa)(-q)^\beta\right] \\
&+ i\varepsilon[\mu\, q^\sigma + (1-\mu)(-q)^\sigma] + a = 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

我们方法的分数阶特性并不会使这一点失效，因为指数函数的 Caputo 分数阶导数仍是一个缩放后的指数函数，从而保持线性。记 $q_j$ 为式（19）的任意两个不同根$q_1 \neq q_2$，则可以将式（15）的解表示为：

$$\Delta(x) = C_1 e^{q_1 x} + C_2 e^{q_2 x}, \tag{20}$$

其中常数 $C_1, C_2$ 可通过狄利克雷边界条件方程 (8) 求得：

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{|\Delta_0|\,(e^{i\varphi} - e^{q_2 L})}{e^{q_1 L} - e^{q_2 L}}, \\ C_2 &= \frac{|\Delta_0|\,(e^{q_1 L} - e^{i\varphi})}{e^{q_1 L} - e^{q_2 L}}. \end{aligned} \tag{21}$$

因此，序参量的最终表达式为：

$$\Delta(x) = |\Delta_0|\,\frac{(e^{i\varphi} - e^{q_2 L})\,e^{q_1 x} + (e^{q_1 L} - e^{i\varphi})\,e^{q_2 x}}{e^{q_1 L} - e^{q_2 L}}, \tag{22}$$

从物理角度来看，必须选择一对实部 $q_{1,2}$ 符号相反的波矢，以控制约瑟夫森结中的增长和衰减。

对于 $\beta = 2,\ \sigma = 1$，我们可以恢复二次色散关系 $-\gamma q^2 + i\varepsilon(2\mu - 1)q + a = 0$，它给出与参考文献 $q_{1,2}$ 中相同的一组波矢 67(一致性检验见附录 C )。

对于 $1 < \beta < 2$，Caputo 分数阶导数可以写成二阶导数的 Riemann–Liouville 分数阶积分，然后利用其半群性质，我们得到：

$$\begin{aligned} {}_0I_x^{2-\beta}\,{}_0^C D_x^{\beta}\Delta &= \Delta'(x) - \Delta'(0), \\ {}_xI_L^{2-\beta}\,{}_x^C D_L^{\beta}\Delta &= -\Delta'(x) + \Delta'(L). \end{aligned} \tag{23}$$

将方程 (23) 代入电流密度分量方程 (17)，并按照上一节的方法，在 $x = L$ 处求值，得到：

$$j_\beta(\varphi) = J_\beta(q_1, q_2, L)\,\sin\varphi, \tag{24}$$

带有前置因子

$$J_\beta = \frac{2e\gamma\,|\Delta_0|^2}{\left|e^{q_1 L} - e^{q_2 L}\right|^2} \times \mathrm{Re}\Big\{\left(e^{q_1 L} - e^{q_2 L}\right)^*\Big[q_1\left(e^{q_1 L} - 1\right) - q_2\left(e^{q_2 L} - 1\right)\Big]\Big\}. \tag{25}$$

尽管 $\kappa$ 和 $\mu$ 并未显式出现在（25）中，但它们通过 $q_{1,2}$ 的根隐式地参与其中；这些根来自 $\kappa$- 和 $\mu$-依赖的特征色散关系式（19）。

对于 $0 < \sigma < 1$，Caputo–黎曼–刘维尔恒等式为

$$\begin{aligned} {}_0I_x^{1-\sigma}\,{}_0^C D_x^{\sigma}\Delta &= \Delta(x) - \Delta(0), \\ {}_xI_L^{1-\sigma}\,{}_x^C D_L^{\sigma}\Delta &= \Delta(x) - \Delta(L). \end{aligned} \tag{26}$$

直接计算得到电流密度的 $\sigma$-贡献项：

$$j_\sigma(\varphi) = -e\varepsilon\,|\Delta_0|^2\,(1 - \cos\varphi), \tag{27}$$

汇集方程（24）和（27），电流-相位关系最终形式为：

$$j(\varphi) = J_\beta\,\sin\varphi - e\varepsilon\,|\Delta_0|^2\,(1 - \cos\varphi), \tag{28}$$

其中 $J_\beta$ 由方程（25）给出。

方程（28）所描述的电流-相位关系如图 4 所示。该图由两个曲线图组成。图 4a 中的橙色曲线展示了约瑟夫森结中由Lifshitz项与分数阶动力学相互作用产生的强非互易响应（$\eta \approx -1$），其中分数阶动力学由阶数为 $\beta$ 和 $\sigma$的分数阶 Caputo导数表示。反过来，同一图中的黑色曲线强调了Lifshitz不变量的重要性：当 $\varepsilon = 0$ 时，无论$\beta$ 和 $\sigma$取何种分数阶值，电流-相位关系都会变为互易关系。

图 4 的第二部分，即图 4b，专门展示了在 Caputo 分数阶导数 $\beta = 2$和 $\sigma = 1$ 的整数阶极限下计算得到的电流-相位关系，以及它们对GL方程（15）中动力学项和Lifshitz项的左侧与右侧贡献 $\kappa$ 和 $\mu$。可以看出，当 $\kappa = 0$ 和 $\mu = 1$时，约瑟夫森 $\varphi_0$ 弱连接的互易电流-相位关系得以重现（黑色曲线）。值得注意的是，在左右两侧贡献相等的情况下$\kappa = \mu = 0.5$，约瑟夫森弱连接呈现出依赖关系 $j(\varphi)$ 的经典正弦曲线形状（橙色曲线）。后一个结果源于以下事实：对于 $\mu = 0.5$，Lifshitz不变量的系数 $\varepsilon$ 实际上变为$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = (2\mu - 1)\,\varepsilon = 0$（见附录 C）。

乍一看，由式（28）可得关于 $\varphi = 0$ 我们有 $j = 0$这一反常结果；当 $\varphi = 0$ 给出非零电流密度时，这与先前得到的电流-相位关系式（13）相矛盾。然而，这并不影响 $\varphi \neq 0$的电流-相位关系的准确性。首先，奇对称的约瑟夫森振幅 $J_\beta$ 和局部斜率被精确捕捉为 $j'(0) = J_\beta$，这与完整解的基波一致。其次，在平面波试探函数框架下推导出的电流-相位关系

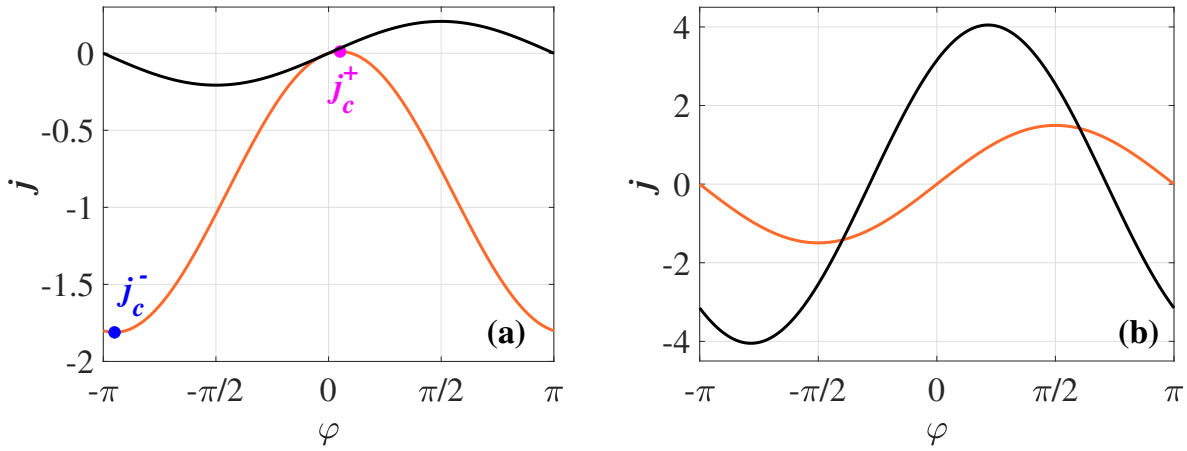



图 4. (a) 长度为 $L = 5$ 的分形超导体之间的约瑟夫森结的电流-相位关系，针对 Caputo 导数的分数阶阶数 $\beta = 1.5$、$\sigma = 0.9$ 计算；当 $\varepsilon = 0$（黑线）时不存在非厄米 Lifshitz 漂移，当 $\varepsilon/\sqrt{|a|\gamma} = 0.9$（橙线）时存在非厄米 Lifshitz 漂移，且左右两侧的贡献相等 $\kappa = \mu = 0.5$。(b) 对于同样长度为 $L$ 的约瑟夫森结，在 Caputo 导数的整数阶阶数 $\beta = 2$、$\sigma = 1$ 下计算的电流-相位关系；固定 $\varepsilon/\sqrt{|a|\gamma} = 0.9$，纯右侧动能混合权重为 $\kappa = 0$、纯左侧利夫希茨混合权重为 $\mu = 1$（黑线），以及两者贡献相等 $\kappa = \mu = 0.5$（橙线）。超电流密度的振幅以 $2e\gamma|\Delta_0|^2$ 为单位。

可改写为 $j(\varphi) = R\sin(\varphi + \varphi_0) - P$ 其中 $R = \sqrt{J_\beta^2 + P^2}$ 且 $\varphi_0 = \arctan(P/J_\beta)$。因此，极值的位置及其非互易分裂由 $R$ 和 $B$ 决定，且与在 $\varphi = 0$处归零无关。换言之，对于$I_c^{(+)} = R - P$, $I_c^{(-)} = R + P$，因此对任意$B \neq 0$均有 $I_c^{(+)} \neq I_c^{(-)}$。简言之，$\varphi = 0$处电流密度为零只是一个局部伪象，而控制非互易性的 $\varphi$相关特征（斜率、极值及其不对称性）仍由双模平面波近似准确地描述。

因此，在基于 Caputo 的分数阶 GL 框架中，即采用左右 Caputo 核的 Agrawal 变分演算时，规范不变的输运电流给出电流-相位关系式（28），其中前因子 $J_\beta$ 通过色散根 $q_{1,\,2}$ 体现分数阶动力学，并隐含地体现混合权重。

根据式（28），可以推导出整流幅度 $\eta$ 的解析表达式:

$$\eta = -\frac{\varepsilon\,|\Delta_0|^2}{\sqrt{J_\beta^2 + \left(\varepsilon|\Delta_0|^2\right)^2}}\,. \tag{29}$$

利用方程（29），可以研究 Caputo 分数阶导数的阶数对振幅的影响——即给定约瑟夫森结的整流系数。该数值研究的结果以相图的形式呈现在图 5 中，分别对应分数阶导数左侧与右侧权重的不对称混合 $\kappa$ 以及 $\mu$（图 5a），以及两者贡献相等的情形（图 5b）。相图清楚地显示，存在一些区域（深蓝色区域），在这些区域中，约瑟夫森二极管效率显著，且实际上近乎理想；这些区域对应于 Caputo 分数阶导数的非整数阶数。我们特意将相图中的取值区间 $\beta$ 和 $\sigma$ 限定在一定范围内，以强调 Caputo 分数阶导数阶数为整数的极限情形未纳入数值计算。

因此，在我们的分数阶 GL 方法中，约瑟夫森二极管效应源于两个关键因素的相互作用: Lifshitz不变量产生电流-相位关系的 $\varphi_0$ 分量，而分数阶导数动力学则体现了非局域性和反演不对称性。Lifshitz 项是二极管非互易性的最基本且不可或缺的来源，而分数阶算子则通过改变电流前因子及其随约瑟夫森系统尺寸的标度关系，放大并重塑这一效应。设定 $\varepsilon = 0$，无论 $\beta$ 和 $\sigma$ 的阶数如何，都可以消除二极管效应。

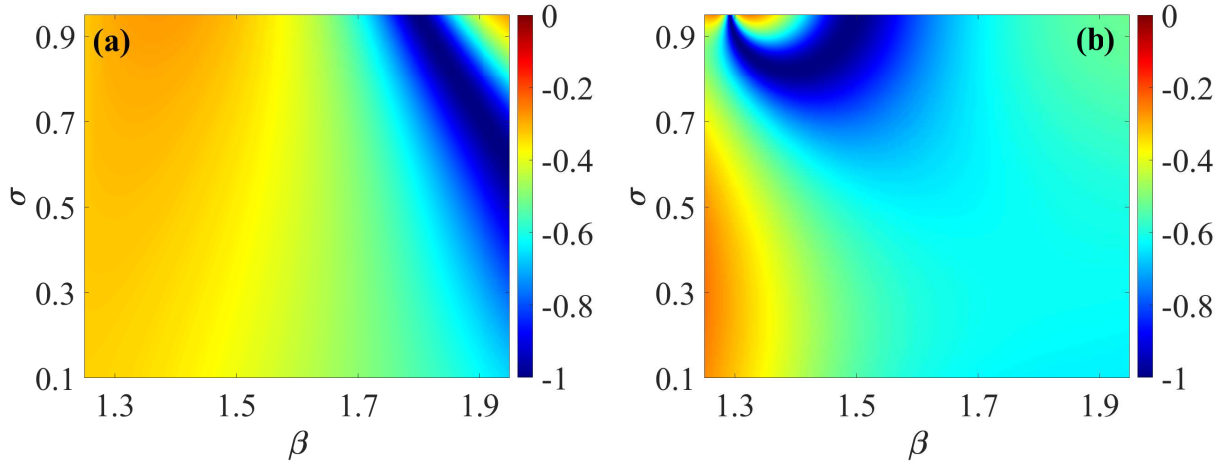



图 5. 约瑟夫森结的超电流整流幅度 $\eta$ 随分数阶阶数 $1 < \beta < 2$ 和 $0 < \sigma < 1$ 变化的等高线图，参数为 $\epsilon/\sqrt{|a|\gamma} = 0.9$，长度为 $L = 5\sqrt{\gamma/|a|}$；(a) 采用纯右侧动能混合权重 $\kappa = 0$ 和纯左侧利夫希茨混合权重 $\mu = 1$，(b) 两种权重的贡献相等 $\kappa = \mu = 0.5$。

*2. The single–sided solution with $\kappa = \mu = 1$ and the integer order of the Lifshitz invariant $\sigma = 1$*

尽管在上一小节中，我们使用指数函数 ansatz 考察了导数分数阶数的整个区间，但补充讨论线性化单侧分数阶 GL 方程的极限情形仍有助于完善我们的分析，其中$\kappa = \mu = 1$，动能项仍由 Caputo 分数阶导数 $1 < \beta \leq 2$描述，而 Lifshitz不变量则像传统情形一样，由一阶整数阶导数表示。在这一简化下，式（15）化简为单侧 Caputo 微分方程:

$$-\gamma\, {}_0^C D_x^{\beta}\, \Delta(x) \;+\; i\,\varepsilon\, \Delta'(x) \;+\; a\,\Delta(x) \;=\; 0, \quad (30)$$

并且存在满足式（8）所给边界条件的解析闭式解

$$\Delta(x) = |\Delta_0| \left[ f_0(x) + \frac{e^{i\varphi} - f_0(L)}{f_1(L)}\, f_1(x) \right]. \quad (31)$$

这里， $f_0$、 $f_1$ 是由 Prabhakar 函数的无穷级数表示的函数（三参数 Mittag-Leffler 函数）：

$$f_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{i\varepsilon}{\gamma}\right)^m x^{\,m(\beta-1)} \left[ E^{\,m+1}_{\beta,\,1+m(\beta-1)}\!\left(\tfrac{a}{\gamma}\, x^{\beta}\right) - \tfrac{i\varepsilon}{\gamma}\, x^{\,\beta-1}\, E^{\,m+1}_{\beta,\,\beta+m(\beta-1)}\!\left(\tfrac{a}{\gamma}\, x^{\beta}\right) \right],$$

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{i\varepsilon}{\gamma}\right)^m x^{\,1+m(\beta-1)}\, E^{\,m+1}_{\beta,\,2+m(\beta-1)}\!\left(\tfrac{a}{\gamma}\, x^{\beta}\right). \quad (32)$$

当$\varepsilon \to 0$ 时，式（32）中的 Prabhakar 级数平滑地转化为标准 Mittag–Leffler 函数；当 $\beta = 2$ 时，则转化为参考文献 67 中的指数函数表示。

根据式（32）的一般解，以及电流密度的 $\beta$ 和 $\sigma$ 分量［式（17）和（18）］的表达式，经过冗长但直接的计算，可得到电流–相位关系：

$$j(\varphi) = J_\beta \sin\varphi + J_\sigma \cos\varphi + J_0, \quad (33)$$

及相应的系数

$$J_\beta = [-2\gamma\, \mathrm{Re}(A - C) + \varepsilon\, \mathrm{Im}\, A]\, |\Delta_0|^2, \quad (34)$$

$$J_\sigma = [\,2\gamma\, \mathrm{Im}(A - C) + \varepsilon\, \mathrm{Re}\, A]\, |\Delta_0|^2, \quad (35)$$

$$J_0 = [\,2\gamma\, \mathrm{Im}(B - D) + \varepsilon\, \mathrm{Re}\, B]\, |\Delta_0|^2. \quad (36)$$

其中，为简洁起见，我们引入了四个在 $x = L$ 处取值的复常数：

$$
\begin{aligned}
A &= f_0'(L) - f_0(L)\frac{f_1'(L)}{f_1(L)}, \\
B &= \frac{f_1'(L)}{f_1(L)}, \\
C &= -\frac{f_0(L)}{f_1(L)}, \\
D &= \frac{1}{f_1(L)}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

电流-相位关系式 (33) 由以下部分构成：幅值为 $\varphi$ 的约瑟夫森相位 $J_\beta$、非厄米漂移（ Lifshitz ）部分 $J_\sigma$，它是关于 $\varphi$ 的偶次谐波，产生 $\varphi_0$- 偏移，以及 $J_0$ 一个与 $\varphi$ 无关的偏置项。

在整数阶极限 $\beta = 2$ 下，可以证明 $J_0$ =0，且式 (33) 化简为纯粹平移的正弦曲线$j(\varphi) = \mathcal{J}\sin(\varphi + \varphi_0)$，即不存在二极管效应。对于$1 < \beta < 2$，分形（分数阶）会产生$J_0 \neq 0$，从而得到有限的二极管效率。

在不存在非厄米 Lifshitz 漂移的情况下，$\varepsilon = 0$ 式 (33)–(36) 化简为纯正弦的电流-相位关系，其中 $J_\sigma = J_0 = 0$ 且$j(\varphi) = J_\beta \sin\varphi$。

## 五、结论

我们提出了一种分数阶 GL 描述，用于描述约瑟夫森结中的非互易超导输运，该输运将分形（或具有其他非局域关联的）超导体与非中心对称正常层耦合起来。我们采用两种互补方法——分数阶积分（测度加权）GL 理论，以及基于由 Agrawal 变分原理推导的左右 Caputo 算子的导数型 GL 方程——得到了约瑟夫森结的非互易电流-相位关系。双模平面波近似以及以广义 Mittag–Leffler（Prabhakar）函数表示的分数阶 GL 方程精确单侧解表明，超导二极管效应源于 Lifshitz不变量与分数阶动力学的相互作用，二者共同放大并塑造超导非互易输运。一个核心结论是其可调性：通过改变有效分形维数（可由分形测度或控制动力学与非厄米漂移项的分数阶阶数来体现），以及 Lifshitz不变量的强度或符号，二极管效率几乎可以覆盖整个范围，实现强整流乃至近理想二极管响应。在整数阶极限下，电流-相位关系还原为标准的相位偏移 $\varphi_0$-结，在相同的 GL 框架中恢复了传统结果。我们的研究揭示了一种可能途径：通过设计分形（分数阶动力学）输运，在不依赖磁场或几何不对称性的情况下，实现约瑟夫森结中的近理想超导二极管。


## 致谢

Y. Y. 感谢获得 ¨ ˙土耳其科学技术研究理事会（TÜBİTAK）-2221 项目“访问科学家和休假科学家奖学金”以及 HPC 国家高性能计算、大数据与量子计算中心（国家中心 01 – CN0000013）提供的资助。


## 附录 A：分数阶积分 GL 表述中电流-相位关系的傅里叶分析

在非加权 GL 形式体系框架下得到的电流-相位关系的解析表达式十分繁复，无法据此分析其相位结构。因此，理解依赖关系 $j(\varphi)$ 的谐波分量，最佳方法是进行傅里叶分析。

表示给定约瑟夫森结电流-相位关系的周期函数 $I_j(\phi)$ 通常可展开为傅里叶级数：

$$
j(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi \right], \tag{A1}
$$

其中系数 $a_n$、 $b_n$ 和 $a_0$ 定义如下：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j(\varphi)\, d\varphi, \tag{A2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi, \tag{A3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi. \tag{A4}$$

式（A1）分解中的每一项都有明确的物理意义，即 $a_1$ 是最低阶奇宇称谐波。在约瑟夫森结中， $a_n$ 其中 $n>1$ 为高阶奇宇称谐波，可能源于多能带效应、强耦合或高阶隧穿过程。不出所料，当 $b_2$、 $b_3$等取值较大时，电流-相位关系的行为会显著偏离标准的正弦约瑟夫森轮廓。相应地，系数 $b_n$ 对应偶宇称余弦谐波；在存在时间反演对称性，或电流-相位关系关于 $\varphi$具有奇函数宇称时，这些谐波通常为零。它们的存在意味着时间反演对称性破缺，从而产生 $\pi$ 或 $\varphi_0$约瑟夫森结。第一项 $a_0$ 是直流分量，表现为即使在相位差为零时也存在净超电流，这表明反演对称性和/或时间反演对称性遭到破坏。

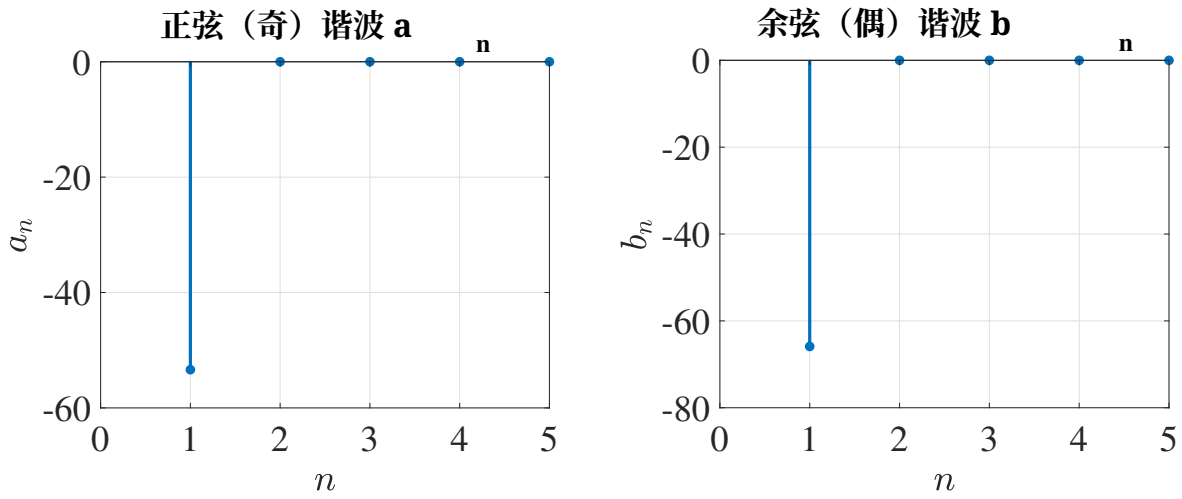



图 6. 图中所示电流-相位关系的傅里叶分析 2 展示了前五个谐波 $a_n$， $b_n$ 对应二极管效率为 $\eta \approx -0.869$。

图 6 所示的傅里叶分析清楚地表明，仅存在基波$n=1$，且偏置项非零 $a_0$。因此，采用GL理论的“未加权”表述计算得到的约瑟夫森结电流-相位关系，确实可以有效地由正文中所示的式（13）表示，其中 $a_1 \equiv \mathcal{A}$ $b_1 \equiv \mathcal{B}$ 以及 $a_0 \equiv \mathcal{C}$。

## 附录 B: Agrawal变分原理下的分数阶GL泛函和电流密度

### 1. 设置、算子和分数阶分部积分

回顾一下，阶数为 $0<\nu\le 1$ 和 $1<\nu\le 2$ 的左/右 Caputo导数（其中 $n-1<\nu\le n$、$n\in\{1,2\}$）定义为

$${}_0^C D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\int_0^x \frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\nu-n+1}}\, d\xi, \qquad {}_x^C D_L^\nu f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\nu)}\int_x^L \frac{f^{(n)}(\xi)}{(\xi-x)^{\nu-n+1}}\, d\xi. \tag{B1}$$

黎曼–刘维尔分数阶积分定义为

$$ {}_0I_x^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-\xi)^{\mu-1} f(\xi)\, d\xi, \qquad {}_xI_L^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^L (\xi - x)^{\mu-1} f(\xi)\, d\xi, \quad \mu > 0. \tag{B2} $$

我们使用 以下两个恒等式（对足够光滑的函数成立；例如参见 [62, 72]） :

$$ \int_0^L \phi(x) \left( {}_0^C D_x^{\sigma} \psi(x) \right) dx = \Big[ \phi \; {}_0I_x^{1-\sigma} \psi \Big]_0^L + \int_0^L \left( {}_xD_L^{\sigma} \phi \right) \psi \, dx, \qquad 0 < \sigma \le 1, \tag{B3} $$

$$ \int_0^L \phi(x) \left( {}_0^C D_x^{\beta} \psi(x) \right) dx = \Big[ \phi \; {}_0I_x^{2-\beta} \psi' - \phi' \; {}_0I_x^{2-\beta} \psi \Big]_0^L + \int_0^L \left( {}_xD_L^{\beta} \phi \right) \psi \, dx, \qquad 1 < \beta \le 2. \tag{B4} $$

此处 ${}_xD_L^{\nu}$ 表示右侧黎曼–刘维尔导数。为进行后续计算，我们还在区间 $x \in [0, L]$上应用 Caputo–Riemann–Liouville 恒等式，该区间对应约瑟夫森结几何（见图 1）：

$$ {}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} f = f(x) - f(0), \qquad {}_xI_L^{1-\sigma} \, {}_x^C D_L^{\sigma} f = -f(x) + f(L), \qquad 0 < \sigma \le 1, \tag{B5} $$

$$ {}_0I_x^{2-\beta} \, {}_0^C D_x^{\beta} f = f'(x) - f'(0), \qquad {}_xI_L^{2-\beta} \, {}_x^C D_L^{\beta} f = -f'(x) + f'(L), \qquad 1 < \beta \le 2. \tag{B6} $$

在整个附录 B 中，我们将 $\Delta$ 和 $\Delta^*$ 视为相互独立的函数。对于约瑟夫森结，我们施加方程（8）中的狄利克雷边界条件，因此 $\delta\Delta(0) = \delta\Delta(L) = 0$，而不对它们的导数 $\Delta'(0)$ $\Delta'(L)$施加任何条件。

### 2. 分数阶 GL泛函

我们寻求一个实二次泛函 $\mathcal{F}[\Delta]$，其欧拉–拉格朗日方程（关于 $\Delta^*$ 的变分）能够再现线性分数阶 GL 方程（其中 $0 < \sigma \le 1$、 $1 < \beta < 2$、 $0 \le \kappa$、 $\mu \le 1$）式（15）。

相应的拉格朗日量可写为:

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}[\Delta, \Delta^*] = {} & \frac{\gamma}{2} \Big\{ \kappa \Big[ \Delta^* \left( {}_0I_x^{2-\beta} \, {}_0^C D_x^{\beta} \Delta \right) + \Delta \left( {}_0I_x^{2-\beta} \, {}_0^C D_x^{\beta} \Delta \right)^* \Big] - (1-\kappa) \Big[ \Delta^* \left( {}_xI_L^{2-\beta} \, {}_x^C D_L^{\beta} \Delta \right) + \Delta \left( {}_xI_L^{2-\beta} \, {}_x^C D_L^{\beta} \Delta \right)^* \Big] \Big\} \\ & + \frac{i\varepsilon}{2} \Big\{ \mu \Big[ \Delta^* \left( {}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta \right) - \Delta \left( {}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta \right)^* \Big] - (1-\mu) \Big[ \Delta^* \left( {}_xI_L^{1-\sigma} \, {}_x^C D_L^{\sigma} \Delta \right) - \Delta \left( {}_xI_L^{1-\sigma} \, {}_x^C D_L^{\sigma} \Delta \right)^* \Big] \Big\} \\ & + a \, |\Delta|^2, \end{aligned} \tag{B7} $$

其中，GL 自由能定义为 $\mathcal{F}[\Delta] = \int_0^L \mathcal{L}\, dx$。

### 3. 基于 Agrawal 变分原理的欧拉–拉格朗日方程

利用式（B3）以及 $\phi = \delta\Delta^*$和 $\psi = {}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta$，并结合相应的右侧关系，可以得到（边界项消失，因为 $\delta\Delta(0) = \delta\Delta(L) = 0$）

$$ \delta \int_0^L \frac{i\varepsilon}{2} \Big\{ \eta \big[ \Delta^* \left( {}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta \right) \big] - (1-\eta) \big[ \Delta^* \left( {}_xI_L^{1-\sigma} \, {}_x^C D_L^{\sigma} \Delta \right) \big] \Big\} dx = \int_0^L \frac{i\varepsilon}{2} \Big[ \eta \, {}_xD_L^{\sigma} - (1-\eta) \, {}_0D_x^{\sigma} \Big] \Big( \cdots \Big) \, \delta\Delta^* \, dx, \tag{B8} $$

然后，根据 Caputo–Riemann-Liouville伴随性质 ${}_xD_L^{\sigma}({}_0I_x^{1-\sigma} \, {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta) = {}_0^C D_x^{\sigma} \Delta$和${}_0D_x^{\sigma}({}_xI_L^{1-\sigma} \, {}_x^C D_L^{\sigma} \Delta) = {}_x^C D_L^{\sigma} \Delta$（端点项在边界条件下消失），得到所需的组合 $i\varepsilon \big[ \eta \, {}_0^C D_x^{\sigma} + (1-\eta) \, {}_x^C D_L^{\sigma} \big] \Delta$。

利用式（B4），结合 $\phi = \delta\Delta^*$和 $\psi = {}_0I_x^{2-\beta} \, {}_0^C D_x^{\beta} \Delta$（右侧项也同理），边界贡献再次消失，因为它们正比于 $\delta\Delta$ 在端点处的取值。体积分项变为

$$ \int_0^L \frac{\gamma}{2} \Big[ \kappa \, {}_xD_L^{\beta} - (1-\kappa) \, {}_0D_x^{\beta} \Big] \Big( \cdots \Big) \, \delta\Delta^* \, dx \; \to -\gamma \Big[ \kappa \, {}_0^C D_x^{\beta} + (1-\kappa) \, {}_x^C D_L^{\beta} \Big] \Delta, $$

其中我们再次利用 ${}_xD_L^{\beta}({}_0I_x^{2-\beta}\,{}_0^{C}D_x^{\beta}\Delta) = {}_0^{C}D_x^{\beta}\Delta$ 和 ${}_0D_x^{\beta}({}_xI_L^{2-\beta}\,{}_x^{C}D_L^{\beta}\Delta) = {}_x^{C}D_L^{\beta}\Delta$，忽略可由狄利克雷变分消去的端点项。

最后，势能项给出 $\delta\int \alpha|\Delta|^2\,dx = \int \alpha\,\Delta\,\delta\Delta^*\,dx$。汇总所有项后，欧拉–拉格朗日方程 $\delta\mathcal{F}/\delta\Delta^* = 0$ 重现了式（15）：

$$-\gamma\Big[\kappa\,{}_0^{C}D_x^{\beta}\Delta + (1-\kappa)\,{}_x^{C}D_L^{\beta}\Delta\Big] + i\varepsilon\big[\eta\,{}_0^{C}D_x^{\sigma}\Delta + (1-\eta)\,{}_x^{C}D_L^{\sigma}\Delta\big] + a\,\Delta = 0. \tag{B9}$$

### 4. 电流密度表达式

GL泛函 $\mathcal{F}$ 在全局相位旋转 $\Delta \to e^{i\theta}\Delta$ （$\theta$ 为常数）下保持不变。相应的电流密度可通过对 $\delta\Delta = i\theta\,\Delta$、$\delta\Delta^* = -i\theta\,\Delta^*$进行一阶变分得到，其中仅有 $O(\theta)$。通过标准的变分法可得电流密度表达式 $j(x)$

$$j(x) = j_\beta(x) + j_\sigma(x), \qquad j_\beta(x) = 2\gamma\ \mathrm{Im}\Big\{\Delta^*(x)\,\mathcal{K}_\beta\,\Delta(x)\Big\}, \qquad j_\sigma(x) = \varepsilon\ \mathrm{Re}\Big\{\Delta^*(x)\,\mathcal{D}_\sigma\,\Delta(x)\Big\}, \tag{B10}$$

其中，Caputo–Riemann–Liouville恒等式为

$$\mathcal{K}_\beta := \kappa\,{}_0I_x^{2-\beta}\,{}_0^{C}D_x^{\beta} - (1-\kappa)\,{}_xI_L^{2-\beta}\,{}_x^{C}D_L^{\beta}, \qquad 1 < \beta \le 2, \tag{B11}$$

$$\mathcal{D}_\sigma := \mu\,{}_0I_x^{1-\sigma}\,{}_0^{C}D_x^{\sigma} - (1-\mu)\,{}_xI_L^{1-\sigma}\,{}_x^{C}D_L^{\sigma}, \qquad 0 < \sigma \le 1. \tag{B12}$$

式（B5）–（B6）表明 $\mathcal{D}_\sigma$ 和 $\mathcal{K}_\beta$ 将非局部 Caputo 导数局限于端点相减的表达式中。例如，

$$\mathcal{D}_\sigma\Delta = \mu\,[\Delta(x) - \Delta(0)] - (1-\mu)\,[\Delta(x) - \Delta(L)] \tag{B13}$$

，以及

$$\mathcal{K}_\beta\Delta = \eta_\beta\big[\Delta'(x) - \Delta'(0)\big] - (1-\eta_\beta)\big[\Delta'(x) - \Delta'(L)\big] \tag{B14}$$

特别是，在约瑟夫森边界条件下，非厄米漂移/Lifshitz项 $j_\sigma$ 会在电流-相位关系中产生 $\cos\varphi$ 贡献，见方程（8）；而 $j_\beta$ 则通过动能重叠产生奇数 $\sin\varphi$ 谐波（见正文）。

在 $\beta = 2$的局域GL极限下，$\sigma = 1$相应关系化简为 ${}_0I_x^{2-\beta} \to {}_0I_x^{0} = \mathrm{Id}$，${}_xI_L^{2-\beta} \to \mathrm{Id}$，${}_0I_x^{1-\sigma} \to \mathrm{Id}$，${}_xI_L^{1-\sigma} \to \mathrm{Id}$，即，阶数为0的分数阶积分会原样返回同一函数。因此，电流（B10）化简为标准的局域表达式

$$j_\beta \to 2\gamma\ \mathrm{Im}\{\Delta^*\,\partial_x\Delta\}, \qquad j_\sigma \to = -\varepsilon\,(2\mu - 1)\,|\Delta|^2, \tag{B15}$$

将奇/偶谐波合并后，得到一个相移为 $\phi_0$ 的正弦曲线，描述约瑟夫森电流-相位关系，且无二极管效应。

## 附录 C: $\varphi_0$-约瑟夫森结分数阶GL理论的一致性检验

如果我们将 $\beta = 2$ 和 $\sigma = 1$ 代入 $[0, L]$上的混合左右 Caputo GL模型，并在动能通道中固定混合参数 $\kappa \in [0, 1]$，在非厄米漂移通道中固定混合参数 $\mu \in [0, 1]$，那么分数阶 GL 方程和电流密度可化简为以下形式

$$-\gamma\,\Delta''(x) + i\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}\,\Delta'(x) + \alpha\,\Delta(x) = 0, \qquad j(x) = 2\gamma\ \mathrm{Im}\{\Delta^*(x)\Delta'(x)\} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}\,|\Delta(x)|^2, \tag{C1}$$

具有有效的Lifshitz不变量系数

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}} \;=\; (2\mu - 1)\,\varepsilon. \tag{C2}$$

因此，对于长度为 $L$ 的约瑟夫森弱连接，该解给出了众所周知的移位电流-相位关系 $j(\varphi) = j_c \sin(\varphi + \varphi_0)$，其相位偏移为：

$$\varphi_0 = \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{2\gamma} L. \tag{C3}$$

特别是，对于参考文献 67 $L$ 的几何构型，将 $2L$ 替换为 $\varepsilon_{\text{eff}} = 2\,\varepsilon_{\text{so}} h$ 并作如下识别 $\varphi_0 = 2\,(\varepsilon_{\text{so}} h/\gamma)\; L$，即可得到相应结果。


[1]B. Lei、H. Juejun、J. Peng、K. Dong Hun、G. F. Dionne、L. C. Kimerling 和 C. A. Ross，单片集成非互易光学谐振腔中的片上光隔离，Nature Photonics 10.1038/nphoton.2011.270 （2011年）。[2] K. Fang、Z. Yu、V. Liu 和 S. Fan，基于磁光光子晶体板中导模共振的超紧凑非互易光隔离器，Opt.Lett. **36**，4254（2011年）。[3] X. Lin、Z. Wang、F. Gao、B. Zhang 和 H. Chen，原子级薄非互易光隔离，Scientific Reports 10.1038/srep04190 （2014年）。[4] M. Brandenbourger、X. Locsin、E. Lerner 和 C. Coulais，非互易机器人超材料，Nature Communications **10**，4608（2019年）。[5] S. Buddhiraju、A. Song、G. T. Papadakis 和 S. Fan，遵循时间反演对称性的非互易超材料，《物理评论快报》**124**，257403（2020年）。[6] M. Shaat、M. Moubarez、M. Khan、M. Khan 和 A. Alzo'ubi，具有巨大且可调非互易弹性模量的超材料，Phys. Rev.Appl. **14**，014005（2020年）。[7] S. M. Keller 和 G. P. Carman，磁电材料中的电磁波传播（双各向异性），Journal of Intelligent Material Systemsand Structure

https://doi.org/10.1177/1045389X12467518。[8]C. Khandekar、F. Khosravi、Z. Li 和 Z. Ja-cob，《非互易双各向异性介质的新型自旋分辨热辐射定律》，《新物理学杂志》**22**，123005（2020年）。[9] Z. Zhou 和 S. Keller，《磁电弹性平板波导的非互易色散解》，Phys. Rev. Appl. **21**，014013（2024年）。[10] Y. Tokura 和 N. Nagaosa，《来自非中心对称量子材料的非互易响应》，NatureCommunications **9**，3740（2018年）。[11] Y. Li、Y. Li、P. Li、B. Fang、X. Yang、Y. Wen、D.-x. Zheng、C.-h. Zhang、X. He、A. Manchon、Z.-H. Cheng 和 X.-x. Zhang，《体 Rashba 半导体 a-GeTe 中高达室温的非互易电荷输运》，NatureCommunications **12**，540（2021年）。

[12]A. Pan 和 D. C. Marinescu，《能带交叉点以上体 Rashba 半导体中的非互易电荷电流》，《物理评论B》**106**，165308（2022年）。[13] I. Askerzade、A. Bozbey 和 M. Cant¨urk，《约瑟夫森动力学和超导的现代方面》Elect

数学工程，第6074卷（施普林格国际出版，2017年）。[14] M. Nadeem、M. S. Fuhrer 和 X. Wang，超导二极管效应，《自然评论：物理学》5，558（2023年）。[15] J. Ma、R. Zhan 和 X. Lin，超导二极管效应：机制、材料与应用，《先进物理研究》4，2400180（2025年），htt ps://advanced.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/apxr.20240[16] J. Ingla-Ayn´es、Y. Hou、S. Wang、E. D. Choi、P. Upadhyaya、O. A. Mukhanov 和 J. S. Moodera，用于量子电路的高效超导二极管和整流器，《自然·电子学》8，411（2025年）。[17] R. Wakatsuki、Y. Saito、S. Hoshino、Y. M. Itahashi、T. Ideue、M. Ezawa、Y. Iwasa 和 N. Nagaosa，非中心对称超导体中的非互易电荷输运，《科学进展》3，e1602390（2017年）。[18] F. Ando、Y. Miyasaka、T. Li、J. Ishizuka、T. Arakawa、Y. Shiota、T. Moriyama、Y. Yanase 和 T. Ono，超导二极管效应的观测，Nature 584，373（2020年）。[19] E. Zhang、X. Xu、Y.-C. Zou、L. Ai、X. Dong、C. Huang、P. Leng、S. Liu、Y. Zhang、Z. Jia、X. Peng、M. Zhao、Y. Yang、Z. Li、H. Guo、S. J. Haigh、N. Nagaosa、J. Shen 和 F. Xiu，非互易超导 $NbSe_2$ 天线，Nature Communications 11，5634（2020年）。[20] B. Zinkl、K. Hamamoto 和 M. Sigrist，手性超导体中超导二极管效应的对称性条件，《物理评论研究》4，033167（2022年）。[21] Y.-Y. Lyu、J. Jiang、Y.-L. Wang、Z.-L. Xiao、S. Dong、Q.-H. Chen、M. V. Milo˘sevi´c、H. Wang、R. Divan、J. E. Pearson、P. Wu、F. M. Peeters 和 W.-K. Kwok，通过保角映射纳米孔实现超导二极管效应，Nature Communications 12，2703（2021年）。

s **24**, 651 (2013年).

[22] A. S. Osin、A. Levchenko 和 M. Khodas，超导多层结构中的反常约瑟夫森二极管效应，《物理评论B》**109**，184512（2024年）。[23] S. Ghosh、V. Patil、A. Basu、Kuldeep、A. Dutta、D. A. Jangade、R. Kulkarni、A. Thamizhavel、J. F. Steiner、F. von Oppen 和 M. M. Deshmukh，高温约瑟夫森二极管，10.1038/s41563-024-01804-4 （2024年）。[24] Y. Yerin、S.-L. Drechsler、A. A. Varlamov、M. Cuoco 和 F. Giazotto，时间反演对称性破缺的多能带超导体中的超电流整流，《物理评论B》**110**，054501（2024年）。[25] Y. Yerin、S.-L. Drechsler、A. A. Varlamov、F. Giazotto 和 M. Cuoco，多能带超导体约瑟夫森干涉仪中的超电流二极管效应，Communications Physics **12**，356（2025年）。[26] Y. M. Itahashi、T. Ideue、Y. Saito、S. Shimizu、T. Ouchi、T. Nojima 和 Y. Iwasa，栅极诱导极性超导体 $SrTiO_3$ 中的非互易输运，《科学进展》**6**，eaay9120（2020年）。[27] S. Mondal、P.-H. Fu 和 J. Cayao，具有安德烈夫态和马约拉纳态的约瑟夫森二极管效应 b

(2025年), arXiv:2503.08318 [凝聚态物理.超导]。[28] W. Zeng，《倾斜狄拉克系统中的横向约瑟夫森二极管效应》，《物理评论快报》134, 176002 (2025年)。[29] H. Wu, Y. Wang, Y. Xu, P. K. Sivakumar, C. Pasco, U. Filippozzi, S. S. P. Parkin, Y.-J. Zeng, T. McQueen 和 M. N. Ali，《范德华异质结构中的无外场约瑟夫森二极管》，Nature 604, 653 (2022年)。[30] H. Narita, J. Ishizuka, R. Kawarazaki, D. Kan, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Shimakawa, A. V. Ognev, A. S. Samardak 和 Y. Yanase，以及 T. Ono，《非中心对称超导体/铁磁体多层结构中的无外场超导二极管效应》，Nature Nanotechnology 17, 823 (2022年)。[31] Q. Cheng, Y. Mao 和 Q.-F. Sun，《交错磁体/正常金属/交错磁体结中的无外场约瑟夫森二极管效应》，《物理评论B》110, 014518 (2024年)。[32] M. Trahms, L. Melischek, J. F. Steiner, B. Mahen- dru, I. Tamir, N. Bogdanoff, O. Peters, G. Reecht, C. B. Winkelmann, F. von Oppen 和 K. J. Franke，《含单个磁原子的约瑟夫森结中的二极管效应》，Nature 615, 628 (2023年)。[33] J.-X. Lin, P. Siriviboon, H. D. Scammell, S. Liu, D. Rhodes, K. Watanabe, T. Taniguchi, J. Hone, M. S. Scheurer 和 J. I. A. Li，《小扭转角三层石墨烯中的零场超导二极管效应》，Nat. Phys. 18, 1221 (2022年)。[34] H. D. Scammell, J. I. A. Li 和 M. S. Scheurer，《扭转三层石墨烯中零场超导二极管效应的理论》，2D Mater. 9, 025027 (2022年)。[35] Y. Tanaka, B. Lu 和 N. Nagaosa，《拓扑绝缘体表面 $d$ 波超导体结中的巨大二极管效应理论》，《物理评论B》106, 214524 (2022年)。

[36]B. Lu, S. Ikegaya, P. Burset, Y. Tanaka 和 N. Nagaosa，《拓扑绝缘体表面可调控的约瑟夫森二极管效应》，《物理评论快报》131, 096001 (2023年)。[37] B. Pal, A. Chakraborty, P. K. Sivakumar, M. Davy- dova, A. K. Gopi, A. K. Pandeya, J. A. Krieger, Y. Zhang, M. Date, S. Ju, N. Yuan, N. B. M. Schr¨oter, L. Fu 和 S. S. P. Parkin，《拓扑半金属中由库珀对动量引起的约瑟夫森二极管效应》，Nat. Phys. 18, 1228 (2022年)。[38] N. F. Q. Yuan 和 L. Fu，《超电流二极管效应与有限动量超导体》，Proc. Natl. Acad. Sci. 119, e2119548119 (2022年)。[39] V. M. Edelstein，《极性超导体中的磁电效应》，《物理评论快报》75, 2004 (1995)。[40] S. Ili´c 和 F. S. Bergeret，《具有任意无序的 Rashba 超导体中超电流二极管效应的理论》，《物理评论快报》128, 177001 (2022年)。[41] A. Daido 和 Y. Yanase，《超导二极管效应与非互易转变线》，《物理评论B》106, 205206 (2022年)。[42] J. J. He, Y. Tanaka 和 N. Nagaosa，《超导二极管的唯象理论》，New J. Phys. 24, 053014 (2022年)。[43] B. Turini, S. Salimian, M. Carrega, A. Iorio, E. Strambini, F. Giazotto, V. Zannier, L. Sorba 和 S. Heun，《高迁移率 InSb 纳米片中的约瑟夫森二极管效应》，Nano Lett. 22, 8502 (2022年), pMID: 36285780。[44] I. Askerzade，《非常规超导体：各向异性与多带……

束缚态

第153卷（施普林格，2012年）。[45] I. N. Askerzade，《约瑟夫森结中电流-相位关系非谐性的影响》（综述文章），《低温物理学》41，241（2015年）。[46] Y. S. Yerin 和 A. N. Omelyanchouk，单带与三带超导体之间约瑟夫森点接触中的受挫现象，《低温物理学》40，943（2014年）。[47] Y. S. Yerin、A. S. Kiyko、A. N. Omelyanchouk 和 E. Il'ichev，基于单带与多能带超导体之间弹道点接触的约瑟夫森系统，《低温物理学》41，885（2015年）。[48] Y. Yerin 和 A. N. Omelyanchouk，基于多能带超导体微结构中的近邻效应与约瑟夫森效应（综述文章），《低温物理学》43，1013（2017年）。[49] J. Cayao、N. Nagaosa 和 Y. Tanaka，利用马约拉纳束缚态增强约瑟夫森二极管效应，《物理评论B》109，L081405（2024年）。[50] M. Roig、P. Kotetes 和 B. M. Andersen，磁化强度梯度产生的超导二极管，《物理评论B》109，144503（2024年）。[51] Y. Hou、F. Nichele、H. Chi、A. Lodesani、Y. Wu、M. F. Ritter、D. Z. Haxell、M. Davy-dova、S. Ili´c、O. Glezakou-Elbert、A. Varam-bally、F. S. Bergeret、A. Kamra、L. Fu、P. A. Lee 和 J. S. Moodera，超导薄膜中普遍存在的超导二极管效应，《物理评论快报》131，027001（2023年）。

《物理评论快报》131，027001（2023年）。[52] A. Sundaresh、J. I. V¨ayrynen、Y. Lyanda-Geller 和 L. P. Rokhinson，多层超导体中临界电流非互易性的抗磁机制，《自然·通讯》14，1628（2023年）。[53] V. M. Krasnov、V. A. Oboznov 和 N. F. Peder-sen，存在温度梯度或空间非均匀性时长约瑟夫森结中的磁通子动力学，《物理评论B》55，14486（1997年）。[54] T. Golod 和 V. M. Krasnov，带记忆功能的超导二极管的演示：在零磁场下运行且具有可切换非互易性，《自然·通讯》13，3658（2022年）。[55] J. J. He、Y. Tanaka 和 N. Nagaosa，超导二极管的唯象理论，《新物理学杂志》24，053014（2022年）。[56] A. Milovanov 和 J. J. Rasmussen，金兹堡–朗道方程的分数阶推广：复杂介质中临界现象的一种非传统研究方法，《物理快报A辑》337，75（2005年）。[57] K. K. Ali、M. Maneea 和 M. S. Mohamed，利用 q-同伦分析变换法求解超导中的非线性分数阶模型，《数学杂志》2023，6647375（2023年），https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1155/202

[58]R. A. El-Nabulsi 和 W. Anukool，关于非局域金兹堡–朗道超导和阿布里科索夫涡旋，《凝聚态物理》**644**，414229（2022年）。[59] R. A. El-Nabulsi 和 W. Anukool，分形超导的一些新方面，《凝聚态物理》**646**，414331（2022年）。[60] J. F. G´o mez-Aguilar，超导体中的分数阶迈斯纳–奥克森菲尔德效应，《现代物理学快报B辑》**33**，1950316（2019年），https://doi.org/10.1142/S0217984919503160。[61] S. Kruchinin、V. Klepikov、V. Novikov 和 D. Kruchinin，分形约瑟夫森结中的非线性电流振荡，《材料科学》**23**，1009（2005年）。[62] O. P. Agrawal，分数阶变分问题的欧拉–拉格朗日方程构造，《数学分析及其应用杂志》**272**，368（2002年）。[63] M. Caputo，q 几乎与频率无关的耗散线性模型——II，《国际地球物理学杂志》**13**，529（1967年），https://academic.oup.com/gji/article-pdf/13/5/529/1600098/13-5-52 [64]V. M. Edelstein，极性对称性超导体的金兹堡–朗道方程，《物理学杂志凝聚态》**8**，339（1996）。[65] R. P. Kaur、D. F. Agterberg 和 M. Sigrist，非中心对称 $CePt_3Si$ 中的螺旋涡旋相，《物理评论快报》**94**，137002（2005）。[66] D. Agterberg，非常规超导体中的新颖磁场效应，《C辑：超导》**387**，13（2003），发表于第三届波兰—美国先进材料超导与磁学研讨会。[67] A. Buzdin，磁性与超导电流在约瑟夫森 $\varphi_0$ 结中的直接耦合，《物理评论快报》**101**，107005（2008）。[68] D. F. Agterberg，磁电效应、螺旋相和 FFLO 相

(2011年)，arXiv:1106.0352 [cond-mat.supr-con]。[69] V. E. Tarasov 和 G. M. Zaslavsky，《分形介质的分数阶金兹堡–朗道方程》，《Physica A：统计力学及其应用》**354**，249（2005

3/6[illegible]57

[70]与厄米且正定的动能二次梯度项不同，Lifshitz项是纯虚数，在复共轭下会产生不对称贡献。因此，自然可以将其视为非厄米漂移项：在由此得到的GL方程中，它会产生一阶导数项，类似于扩散或福克–普朗克方程中的漂移速度。[71] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册：公式、图表及数学

第55号（美国国家标准局，华盛顿特区，1964年）。[72] S. G. Samko、A. A. Kilbas 和 O. I. Marichev，《分数阶积分与导数：理论与应用》（戈登与布里奇科学出版社，1993年）。