arXiv:2601.02194v1 [math.FA] 5 Jan 2026

解析函数希尔伯特空间中的切向边界行为

SHUAIBING LUO 和 BARTOSZ MALMAN

Abstract. Sarason 的 Carath´eodory-Julia 定理的希尔伯特空间版本，将 de Branges-Rovnyak 空间 $\mathcal{H}(b)$ 中函数的非切向边界行为，与作为单位圆盘上解析自映射的 b 存在 Carath´eodory 意义下角导数这一性质联系起来。本文继续研究这一结果的高阶推广，涉及 $\mathcal{H}(b)$ 中函数的导数，并考虑比非切向趋近区域更一般的趋近区域概念。我们的主要结果将 Duan-Li-Mashreghi 关于模型空间中边界行为的最新研究推广到 $\mathcal{H}(b)$-空间及高阶导数情形，并为该结果给出一个全新的、自成一体的证明。该结果也推广了 Fricain-Mashreghi 早先关于径向情形的结果。关于角导数的存在性，我们证明，在经典 Carath´eodory-Julia 定理中，不能用任何本质上更大的区域替代非切向趋近区域。

Contents

1. 背景 2 1.1. Carath´eodory 意义下的角导数。2 1.2. 其他等价条件及高阶类比。4 1.3. 更一般的趋近区域。Duan-Li-Mashreghi 的工作。5 2. 主要结果 8 2.1. 一般趋近区域和符号的边界极限。8 2.2. 核的范数收敛。8 2.3. 一般趋近区域下的 Carath´eodory-Julia 定理：失效情形与一个正面结果。9 3. 定理 A 的证明 11 3.1. 布拉施克乘积情形。11 3.2. 无零点情形。14 3.3. 将特殊情形合并为一般结果。16 3.4. 辅助引理的证明。17

Luo 获得国家自然科学基金（12271149）和湖南省自然科学基金（2024JJ2008）的资助。Malman 获得 Vetenskapsr˚adet（VR2024-03959）的资助。

4. 定理B的证明 19
4.1. 一些初步观察。19 4.2. 布拉施克乘积情形。21 4.3. 无零点情形。23 4.4. 将特殊情形综合为一般结果。24

5. 定理C和定理D的证明 24
参考文献 27

1. 背景

1.1. 卡拉西奥多里意义下的角导数´。 令 $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$表示单位圆盘。我们特别关注其边界圆 $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$上的点 1，并考虑 $\mathbb{D}$ 内以 1 为顶点的普通非切向趋近区域 Γ：

$$\Gamma=\Gamma(c)=\{z\in\mathbb{D}: 1-|z|>c|\arg z|\},\quad c>0,\ \arg z\in(-\pi,\pi] \tag{1.1}$$

（参数 c 固定但任意）。选择 $1\in\mathbb{T}$ 作为基点只是为了方便记号，也可以用其他任何点 $\zeta_o\in\mathbb{T}$ 替代。定义在 $\mathbb{D}$ 中的解析函数 f 在点 1 处的 角导数 是其非切向极限

$$f'(1):=\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Gamma}} f'(z),$$

（如果该极限存在）。众所周知，该极限是否存在与用于定义 Γ 的参数 c 无关。

在 $\mathbb{D}$ 的解析自映射这一背景下，存在一种特殊的角导数概念。若 $b\colon \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 在点 1 处具有角导数，且此外 $b(1):=\lim_{z\to 1,z\in\Gamma} b(z)$ 的模为 1，即 $|b(1)|=1$，则称其在点 1 处具有 *Carathéodory* 意义下的角导数。著名的 Carathéodory–Julia 定理由 [Car 29] 和 [Jul19] 得出，内容如下。

定理1.1。 （***Carath´eodory-Julia***）设 $b\colon \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为解析函数。以下两个条件等价。

(i) 函数 b在点 1 处具有 *Carath´eodory* 意义下的角导数。*(ii)* 存在一列点 $(z_n)_n$，这些点属于 $\mathbb{D}$，收敛于1，并满足

$$\sup_n \frac{1-|b(z_n)|^2}{1-|z_n|^2}<\infty. \tag{1.2}$$

众所周知，(1.2) 实际上等价于一个类似的条件

$$\sup_{z\in\Gamma}\frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|}<\infty.$$

通过令 $z=r\in\mathbb{R}\cap\mathbb{D}$ 并注意到 $1-|b(r)|$ 被 $|b(1)-b(r)|$ 所控制，可以立即看出蕴含关系 $(i)\Rightarrow(ii)$ 成立；根据 (i)，该量是 $\mathcal{O}(1-r)$。Sarason 在[Sar88], 中给出了蕴含关系 $(ii)\Rightarrow(i)$ 的深刻证明：他将 (ii) 中的量确定为某个解析函数希尔伯特空间中评价泛函的范数，并实际上将角导数这一几何概念与算子理论联系起来。de Branges-Rovnyak 空间 $\mathcal{H}(b)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数希尔伯特空间，其特征在于它包含核函数

$$k_z^b(w):=\frac{1-\overline{b(z)}b(w)}{1-\overline{z}w},\quad z,w\in\mathbb{D} \tag{1.3}$$

以及其内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ 满足

$$f(z)=\langle f,k_z^b\rangle_b,\quad f\in\mathcal{H}(b). \tag{1.4}$$

关于 $\mathcal{H}(b)$-空间背景的良好参考资料包括 Sarason的著作 [Sar94]，以及 Fricain 和 Mashreghi [FM16a], [FM16b] 合著的、较新的两卷本大型专著。

由式(1.4)中的再生性质可知

$$\|k_z^b\|_b^2=\langle k_z^b,k_z^b\rangle_b=\frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{1.5}$$

在定理1.1 的条件(ii)下，边界核函数

$$k_1^b(w):=\frac{1-\overline{b(1)}b(w)}{1-w},\quad w\in\mathbb{D} \tag{1.6}$$

可以视为$(k_{z_n}^b)_n$的某个子序列的弱极限，因此是$\mathcal{H}(b)$的一个成员。自然地，它应具有求值性质 $\langle f,\ k_1^b\rangle_b=f(1)$。确实如此，只要恰当地解释 $f(1)$即可。以下结果出现在 [Sar88] 中，并转载于Sarason的著作 [Sar94]中。

定理1.2。*(Sarason扩展)* 以下条件等价于*Carath´eodory-Julia*定理中的两个条件。

(iii) 当 $z\to1$ 趋于 Γ 时，$k_z^b\to k_1^b$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中范数收敛。特别地，对于每个 $f\in\mathcal{H}(b)$，非切向极限

$$f(1):=\lim_{\substack{z\to1\\ z\in\Gamma}}f(z)$$

存在且满足 $\langle f, k_1^b \rangle_b = f(1)$。

1.2. **其他等价条件及高阶推广**。 考虑 b 的 Nevanlinna 因子分解

$$b(z) = B(z)S_\nu(z)b_o(z), \tag{1.7}$$

其中 B 是一个布拉施克乘积，其零点序列为 $(a_n)_n$，

$$B(z) = \prod_n \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z},$$

S_ν 是奇异内因子

$$S_\nu(z) = \exp\Big(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\nu(\zeta) \Big),$$

而 b_o 是外因子

$$b_o(z) = \exp\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |b(\zeta)| \, dm(\zeta) \Big).$$

这里， dm 是 $\mathbb{T}$上的勒贝格测度，并以条件 $m(\mathbb{T}) = 1$归一化。角导数的存在性已用这一因子分解中出现的量刻画。我们将转而在更一般的高阶 Carath´eodory-Julia 理论背景下介绍这些结果；该理论源于对 b 及 $\mathcal{H}(b)$中的函数的高阶导数边界值存在条件的研究。

令 ∂_z 和 $\overline{\partial}_z$ 表示关于复变量 z的通常复微分算子。对于每个 $z \in \mathbb{D}$，极限

$$\overline{\partial_z} k_z^b = \lim_{h \to 0} \frac{k_{z+h}^b - k_z^b}{\overline{h}}$$

在 $\mathcal{H}(b)$的范数下存在。类似地，高阶核 ${\partial_z}^m k_z^b$ 也属于$\mathcal{H}(b)$，不难看出

$$\big\langle f, \overline{\partial_z}^m k_z^b \big\rangle_b = f^{(m)}(z). \tag{1.8}$$

根据 (1.5)，我们有以下有用公式

$$\|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b^2 = \big\langle \overline{\partial_z}^m k_z^b, \overline{\partial_z}^m k_z^b \big\rangle_b = \partial_z^m \overline{\partial_z}^m \frac{1 - |b(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{1.9}$$

如果式（1.9）中的量沿着趋于 1 的点列 $(z_n)_n$ 一致有界，那么与之前一样，我们可以将边界导数核 ${\partial_z}^m k_1^b$ 定义为某个子列 $(\partial_z^m k_{z_n}^b)_n$ 的弱极限（在 $\mathbb{D}$ 中也是逐点极限）。全文中， ${\partial_z}^m k_1^b$ 均按该弱极限定义理解。我们不需要这个函数更精确的逐点公式（但请参见 [FM08b]）。

Fricain 和 Mashreghi 在 [FM08a] 和 [FM08b] 中得到的以下结果，刻画了函数 $\mathcal{H}(b)$ 的导数存在径向极限这一性质，并将其与式（1.7）中出现的量联系起来。

定理 1.3。*(Fricain-Mashreghi*，高阶径向刻画*)*对于每个非负整数 m，以下条件等价。

(i) 当 $r \to 1$ 时，我们有 $\partial_z{}^m k_r^b \to \partial_z{}^m k_1^b$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中的范数收敛。

(ii) 对于每个 $f \in \mathcal{H}(b)$，径向极限

$$f^{(m)}(1) := \lim_{r\to 1} f^{(m)}(r)$$

存在。

(iii) 我们有

$$\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu(\zeta)}{|1-\zeta|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\zeta|^{2m+2}}\, dm(\zeta) < \infty.$$

关于内 b 的这一方向的早期结果由 Ahern 和 Clark 提出，见 [AC70b]。值得一提的是，经过一些处理，可以将 (i) 和 (ii) 中的径向收敛替换为非切向收敛。还有一些与定理 1。3 类似的结果，其中部分 (iii) 被 Aleksandrov-Clark 测度上的类似条件所替代；该测度对应于 b （参见 [Sar94, 第七章]）。我们还注意到，(ii) 中隐含的弱收敛 $\partial_z{}^m k_r^b \to \partial_z{}^m k_1^b$ 会自动加强为范数收敛 i。

— —

我们还想提及 Bolotnikov-Kheifets 的工作，他们在其中得到了 Carath´eodory-Julia 定理一个更直接的高阶推广。他们的结果[BK06，定理 1.2], 表明，某个高阶导数b 的非切向极限存在且某个矩阵为正，与表达式 (1.9) 在一个非切向趋近区域上的上确界有界等价。最近，Dahlin 的工作 [Dah24]中提出了 Carath´eodory-Julia 定理一个有趣的推广，将其扩展到任意再生核和任意区域 X ，而非 $\mathbb{D}$ 。

1.3. **更一般的趋近区域。Duan-Li-Mashreghi 的工作。**将非切向趋近区域 Γ 替换为更一般的区域，便得到 Carath´eodory-Julia 理论的另一种推广。在本文中，1 处的趋近区域是一个开单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{D}$，并满足边界交性质 $\partial\Omega \cap \mathbb{T} = \{1\}$。由于我们关注的是至少与非切向区域一样大的区域，为方便起见，我们还假设在 1 的某个邻域内，Ω 关于 1 呈星形；

也就是说，对于所有充分接近 1 的 $z \in \Omega$，1 与 z 之间的线段都包含在 Ω 中。这一要求将排除一些超出我们研究范围的病态例子。

一个趋近区域可以与一个递增连续函数 ρ 相关联，该函数定义在非负的 x上，并满足 $\rho(0) = 0$，$\rho(x) > 0$ 对于 $x > 0$。考虑如下形式的区域

$$\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{D} : 1 - |z| > \rho(|\arg z|)\}. \tag{1.10}$$

于是，$\rho(x) = cx$ 对应于非切向区域 $\Gamma(c)$，而 $\rho(x) = cx^2$ 对应于通常的圆环趋近区域；在点 1 的邻域内，这些区域类似于一个位于 $\mathbb{D}$内部且在 1 处与 $\mathbb{T}$相切的圆盘。

自然会问，对于更一般的趋近区域，早先陈述的定理是否也存在类似结果。具体而言，可以尝试对 b 得到某些条件，使得边界极限

$$f^{(m)}(1) := \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Omega}} f^{(m)}(z) \tag{1.11}$$

对所有 $f \in \mathcal{H}(b)$都存在。当然，如果两者都存在，该极限必然与通常的非切向极限一致，因此我们上面的记号是一致的。Leung 在 [Leu78, 中的工作研究了这一具体问题，其中在 b 为内函数且趋近区域具有式 (1.10) 的形式、并且对某个 $\gamma \geq 1$满足 $\rho(x) = cx^\gamma$的情形下，得到了各种结果。Protas 在 [Pro72]中开展了相关研究。Leung 工作中的一阶结果（即 $m = 0$）最近由 Duan-Li-Mashreghi 在[DLM25] 中推广了：他们将 Leung 所考虑的区域 Ω_ρ 推广到了更一般的趋近区域。陈述 [DLM25]中的主要定理需要做一些准备。对于靠近 1 且虚部为正的 $z \in \mathbb{D}$ （例如 $\arg z \in (0, \pi)$），考虑弧

$$E_z := \{e^{it} \in \mathbb{T} : \arg z/2 < t < 2 \arg z\}. \tag{1.12}$$

对于虚部为负的 z，令 E_z 为弧 E_z 关于实轴的反射，并令 E_z 在 $z = r \in (0, 1)$ 时 – 为空集。另定义圆扇区

$$S_z = \{re^{it} \in \mathbb{D} : e^{it} \in E_z\}. \tag{1.13}$$

Duan-Li-Mashreghi 结果如下（稍作扩展的表述见 [DLM25，定理 2.1] ）。

定理 1.4. ***(Duan-Li-Mashreghi)*** 设 $b = BS_\nu$ 是一个零点集为$(a_n)_n$ 的内函数，且 Ω 是1处的一个趋近区域。则以下条件等价。

(i)

$$\sup_{z\in\Omega}\|k_z^b\|_b<\infty.$$

(ii) 对每个 $f\in\mathcal{H}(b)$，$f(z)$ 当 $z\to 1$ 在 Ω 中时有极限。

(iii) 我们有

$$\sum_n\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2}+\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\zeta|^2}<\infty \tag{1.14}$$

and

$$\sup_{z\in\Omega}\sum_{n:a_n\in S_z}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}+\int_{E_z}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^2}<\infty. \tag{1.15}$$

为方便起见，上述条件（iii）的表述与 [DLM25 定理 2.1] 中的原始条件略有不同（详见该文献中的证明）。条件（1.14）已出现在 [AC70b], 关于非切向趋近区域的研究中，而条件（1.15）则是在趋近区域大于非切向趋近区域时需要补充的条件。容易看出，上述条件（iii）等价于

(iii')

$$\sup_{z\in\Omega}\sum_n\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}+\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^2}<\infty.$$

事实上，这个条件显然强于（1.15），并且由 Fatou 引理可推出（1.14）。反过来，我们注意到集合 E_z 和 S_z 满足以下容易验证的估计（见 [DLM25，引理 3.4]），由此可直接得到上述等价关系：给定两个点 $w\in\mathbb{D}:=\mathbb{T}\cup\mathbb{D}$ 和 $z\in\mathbb{D}$，若 $w\notin S_z\cup E_z$，则

$$\frac{1}{|1-\overline{w}z|}\le\frac{4}{|1-w|}. \tag{1.16}$$

（iii）相较于（iii'）的优点在于，(1.15) 提取出了得出 $k_z^b\to k_1^b$ 在 Ω 中当 $z\to 1$ 时范数收敛所需的信息；而在本文考察的更一般的趋近区域情形下，这一点并非自动成立。事实上，根据 [DLM25 的定理 2.2], ，在上述定理的等价条件下，当且仅当 (1.15) 中的量在 $z\to 1$ 时趋于 0，这种范数收敛才会发生：

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}}\sum_{n:a_n\in S_z}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{z}a_n|^2}+\int_{E_z}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{z}\zeta|^2}=0. \tag{1.17}$$

在非切向情形 $\Omega=\Gamma$ 中，可以证明 (1.14) 蕴含 (1.17)（进而也蕴含 (1.15)）。由此可知，Γ 中的范数收敛与弱收敛 $k_z^b\to k_1^b$ as $z\to 1$ 等价。

2. Main results

2.1. 一般趋近区域和符号函数的边界极限。 我们的第一个主要结果是将 Duan-Li-Mashreghi 的定理 1.4 推广到具有非平凡外部部分的符号函数，并推广到更高阶情形。

定理 A。 设 $b:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是一个零点集为 $(a_n)_n$ 且具有奇异内因子 S_ν的解析函数。设 Ω 是 1处的趋近区域。对于任意整数 $m\geq 0$，以下条件等价。

(i)

$$\sup_{z\in\Omega}\|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b<\infty.$$

(ii) 对于每个 $f\in\mathcal{H}(b)$， $f^{(m)}(z)$ 在 $z\to 1$ 趋近于 Ω 时存在极限。

(iii)

$$\sup_{z\in\Omega}\sum_n\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}}+\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}+\int_{\mathbb{T}}\frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}dm(\zeta)<\infty.$$

与之前一样，(iii) 中的条件可以改写为类似于 (1.14) 和 (1.15) 的条件，即

$$\sum_n\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^{2m+2}}+\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\zeta|^{2m+2}}+\int_{\mathbb{T}}\frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\zeta|^{2m+2}}dm(\zeta)<\infty$$

and

$$\sup_{z\in\Omega}\sum_{n:a_n\in S_z}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}}+\int_{E_z}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}+\int_{E_z}\frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}dm(\zeta)<\infty.$$

我们的定理证明不采用 Duan-Li-Mashreghi 的技术，即根据 Ahern 和 Clark 在 [AC70a] 中的某些公式来表示核范数（见 [DLM25] 中的第 3 节），因此可以看作更加初等。事实上，对于外函数 b_o，核范数可能不存在这样的公式。我们在第 3 节开头介绍了克服这一困难的方法。

2.2. 核的范数收敛。 我们还将拓展 Duan-Li-Mashreghi 提出的上述核范数收敛结果；在 $m=0$ 情形下，该结果等价于 (1.17)。

定理 B。 假设对于某个 m，定理 A 中的等价条件成立。那么，以下两个条件等价。

(i) 当 $z\to 1\in\Omega$ 时，我们有范数收敛 $\partial_z{}^m\overline{k_z^b}\to\partial_z{}^m k_1^b\in\mathcal{H}(b)$。

(ii)

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}}\sum_{n:a_n\in S_z}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}}+\int_{E_z}\frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}+\int_{E_z}\frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}}dm(\zeta)=0.$$

同样，在非切向情形 $\Omega=\Gamma$中，如果定理 A 的等价条件成立，那么定理 B 中条件（ii）就自动成立。因此，我们又得到了一种证明，说明当 $z\to 1\in\Gamma$ 时，弱收敛与强收敛 $\partial_z{}^m k_z^b\to\partial_z{}^m k_1^b$ 是等价的。

以下对结果的重新表述或许能让问题更加明了。引入定义在 $\mathbb{D}$ 上的非负有限博雷尔测度 M：

$$dM=\sum_n(1-|a_n|^2)d\delta_{a_n}+d\nu-\log|b|dm,$$

其中，δ_{a_n} 是点 $a_n\in\mathbb{D}$ 处的单位质量。那么，定理 A 中的条件（iii）仅表示函数

$$w\mapsto\frac{1}{|1-\overline{w}z|^{2m+2}},\quad z\in\Omega \tag{2.1}$$

在勒贝格空间 $L^1(M)$ 中构成一个有界子集。虽然我们不打算详述证明，但需要指出，可以证明定理 B 的条件（ii）等价于族 (2.1) 关于测度 M 的一致可积性；按定义，这意味着对任意 $\epsilon>0$，都存在一个 $\delta>0$，使得若 $E\subset\mathbb{D}$ 是满足 $M(E)<\delta$ 的博雷尔集，则

$$\sup_{z\in\Omega}\int_E\frac{1}{|1-\overline{w}z|^{2m+2}}dM(w)<\epsilon.$$

由于逐点收敛

$$\frac{1}{|1-\overline{w}z|^{2m+2}}\to\frac{1}{|1-\overline{w}|^{2m+2}}$$

当 $z\to 1$ 时，根据测度论的基本知识，该条件进一步等价于函数族 (2.1) 在 $L^1(M)$ 中的紧性。由此，我们将 $\mathcal{H}(b)$ 中核函数族 $\partial_z{}^m k_z^b$ 的性质与 $L^1(M)$ 中函数族 (2.1) 的性质联系起来。

2.3. 卡拉泰奥´多里-朱莉亚定理在一般趋近区域中的情形：失效与一个正面结果。鉴于 Sarason 对卡拉泰奥´多里-朱莉亚定理的扩展在更一般的趋近区域背景下也有类似结果，人们不禁会想，经典定理是否也能以类似方式推广。我们在这一方向上的主要结果表明，在更广泛的背景下，对原始卡拉泰奥´多里-朱莉亚定理作一种自然的重新表述并不成立。具体而言，考虑 (1.10) 中的区域 Ω_ρ。直观地说，一个区域

形如这种形式的区域，在点 1 附近将严格大于一个非切向区域，只要我们有 $\lim_{x\to 0}\rho'(x) = 0$。一个简单的练习表明，若 ρ 是凸的，那么这一条件实际上等价于 Ω_ρ 不包含于任何非切向区域 $\Gamma(c)$，对任意 c 均成立（回忆 (1.1)）。下面的定理表明，将经典结果直接推广到一般趋近区域会失效。

定理 C. 假设 ρ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微且递增，$\rho(x) > 0$ 对 $x > 0$ 成立，并且

$$\lim_{x\to 0}\rho'(x) = 0.$$

那么存在 $b\colon \mathbb{D}\to\mathbb{D}$，使得

$$\sup_{z\in\Omega_\rho}\|k_z^b\|_b < \infty$$

but

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega_\rho}} b'(z)$$

不存在。

然而，作为定理 B 的推论，我们可以证明以下部分结果。

定理 D. 设 Ω 是 1 处的趋近区域。若当 $z\to 1$ 属于 Ω 时，$k_z^b \to k_1^b$ 在 $\mathcal{H}(b)$ 中范数收敛，则极限

$$b'(1) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b'(z), \quad b(1) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b(z)$$

存在，且 $|b(1)| = 1$。

我们不知道该结果的逆命题对于任何实质上大于非切向趋近区域的趋近区域 Ω 是否成立，也尚未构造出任何反例。因此，我们将以下问题留待解答。

问题。对于一般的趋近区域 Ω，是否存在一种方法来刻画极限的存在性

$$b'(1) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b'(z), \quad b(1) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b(z), \quad |b(1)| = 1,$$

根据核函数 k_z^b, $z\in\Omega$ 的某种行为?

3. Proof of Theorem A

将证明分为两种特殊情形会比较方便： b 是布拉施克乘积，以及 b 在 $\mathbb{D}$ 中无零点。我们将证明一般情形的结论可由这两种特殊情形推出。

定理 A 中条件（i）与（iii）等价性的证明是最复杂的部分，但可以用自然的方式加以证明。若 b 是布拉施克乘积，通过一些观察和莱布尼茨法则，可将 $\partial_z^m \partial_{\overline{z}}^m \|k_z^b\|_b^2 = \|\partial_{\overline{z}}^m k_z^b\|_b^2$ 表示为若干项之和，这些项涉及 b 或其因子的导数，以及一个正量；该正量的大小与定理 A 中（iii）出现的各项成比例。引理 3.1 和引理 3.3 中对 b 及其因子的导数进行估计后，将表明这个正量是主要项。对于无零点的 b，则会采用与此相差不大的方法处理。

3.1. 布拉施克乘积情形。 在本节余下部分，设 b 为对应于零点序列 $(a_n)_{n\geq 1}$ 的布拉施克乘积。于是，定理 A 中的条件（iii）为

$$\sup_{z\in\Omega} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}} < \infty. \tag{3.1}$$

设 b_j（z）为对应于 $(a_n)_{n=1}^{j}$（$b_0 \equiv 1$）的有限布拉施克乘积。对于乘积 $b = B_1 B_2$，我们有一个容易验证的分解公式

$$\|k_z^b\|_b^2 = \|k_z^{B_1}\|_{B_1}^2 + |B_1(z)|^2 \|k_z^{B_2}\|_{B_2}^2. \tag{3.2}$$

还要回顾一个众所周知的恒等式

$$1 - \frac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}, \quad a, z \in \mathbb{D}. \tag{3.3}$$

在布拉施克因子的情形下

$$B_1(z) = \frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \quad a, z \in \mathbb{D},$$

注意到（3.3）意味着

$$\|k_z^{B_1}\|_{B_1}^2 = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

现在，对上述分解公式进行迭代可得

$$\|k_z^b\|_b^2 = \sum_{j\geq 1} |b_{j-1}(z)|^2 \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^2}. \tag{3.4}$$

由 $(a_n)_n$ 满足 Blaschke条件可知，不难看出， $\|k_z^b\|_b^2$ 的导数可以通过对（3.4）中的级数逐项微分来计算。应用莱布尼茨法则并交换求和顺序可得

$$\partial_z^m \overline{\partial_z}^m \|k_z^b\|_b^2 = \sum_{k,l=0}^{m} C_{k,l}(z) \tag{3.5}$$

其中

$$C_{k,l}(z) = \sum_{j\geq 1} \binom{m}{k}\binom{m}{l} b_{j-1}^{(m-k)}(z)\overline{b_{j-1}^{(m-l)}(z)}\,\overline{a_j}^k a_j^l k!l! \frac{1-|a_j|^2}{(1-\overline{a_j}z)^{1+k}(1-a_j\overline{z})^{1+l}} \tag{3.6}$$

根据下一个引理，表达式中 $\frac{1-|a_j|^2}{(1-a_jz)^{1+k}(1-a_j\overline{z})^{1+l}}$ 各项的系数，对于 $C_{k,l}(z)$ 而言，具有良好的性质。

引理 3.1. 设 b 和 b_j 是上述布拉施克乘积。

- 若定理 A 中的 (i) 成立，则 b_j 的最高至 m 阶导数在 Ω 中一致有界，并且 $\lim_{z\to 1,\ z\in\Omega} |b^{(k)}(z)| = 1$。
- 若定理 A 中的 (iii) 成立，则 b_j 的最高至 $2m+1$ 阶导数在 Ω 中一致有界，并且 $\lim_{z\to 1,\ z\in\Omega} |b^{(k)}(z)| = 1$。此外，这些极限

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b^{(k)}(z), \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b_j^{(k)}(z), \quad j\geq 0, k = 0, 1, \ldots, 2m$$

存在。

注 3.2. 请注意上述表述中的不对称性。由于定理 A 中的两个条件（i）和（iii）最终将被证明等价，引理第一部分的结论可以加强为第二部分中更强的结论。不过目前，上述表述既已足够，也更为方便。

稍后我们将证明该引理。暂且假设引理成立，由将柯西–施瓦茨不等式应用于（3.6）可知，若定理 A 中的条件（i）或（iii）对 b 和 m 成立，则存在一个常数 $C>0$，使得

$$|C_{k,l}(z)| \leq C \sqrt{\sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2k+2}}} \sqrt{\sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2l+2}}}, \quad z\in\Omega. \tag{3.7}$$

因此，(3.1) 表明，对于 $z\in\Omega$，(3.5) 左端一致有界。因此，对于布拉施克乘积 b，条件 (iii) 蕴含定理 A 中的条件 (i)。

现在我们通过对 m 使用归纳法，证明定理 A 中的另一个蕴含关系 $(i) \Rightarrow (iii)$。对于基例 $m = 0$，只需注意，根据引理 3.1，当 $z \in \Omega$ 充分接近 1 时，我们有

$$1/2 \leq |b(z)| \leq |b_{j-1}(z)| \leq 1.$$

因此，情形 $m = 0$ 可由（3.4）得到。对于归纳步骤，我们假设条件（i）蕴含（iii）对于 $m-1$ 成立，并假设（i）对 m 成立。于是，每个函数 $f \in \mathcal{H}$（b）的 m 阶导数在 Ω 中有界，因此低阶导数也同样有界。由一致有界原理可知，对于 $i \leq m$，$\sup_{z\in\Omega} \|\partial_z{}^i k_z^b\|_b < \infty$。根据归纳假设，我们得到

$$\sup_{z\in\Omega} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m}} < \infty. \tag{3.8}$$

其思路是证明（3.5）中的项$C_{m,\,m}$（z）支配其他各项。首先考虑（3.5）右端中由 $k < m$、$l < m$ 标记的项。由（3.8）和估计（3.7）可知，而根据引理 3.1，该估计同样成立，因此

$$\sup_{z\in\Omega} \sum_{k,l=0}^{m-1} |C_{k,l}(z)| < \infty. \tag{3.9}$$

现在考虑（3.5）右端中索引 k 或 l 等于 m 的项。同样地，我们可推出

$$\sum_{k=0}^{m-1} |C_{k,m}(z)| + \sum_{l=0}^{m-1} |C_{m,l}(z)| \leq D \sqrt{\sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}}}, \quad z \in \Omega, \tag{3.10}$$

其中 D 为常数。由索引 $k, l = m$ 标记的剩余项为

$$C_{m,m}(z) = \sum_{j\geq 1} |b_j(z)|^2 |a_j|^{2m} (m!)^2 \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}}.$$

不失一般性，我们可以假设对所有 j 都有 $|a_j| > 1/2$ 成立（从序列 $(a_j)_j$ 中去掉有限个点，显然不会影响定理 A 中任何等价条件的成立）。与我们先前证明基例 $m = 0$ 时一样，由引理 3.1 可得

$$C_{m,m}(z) \geq 2^{-2m-2} (m!)^2 \sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}} \tag{3.11}$$

对所有充分接近 1 的 $z \in \Omega$ 均成立。现在结合 (3.5) 与三个估计式 (3.9)、(3.10) 和 (3.11)，可得当 $z \in \Omega$ 充分接近 1 时，

$$2^{-2m-2}(m!)^2 \sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}} \leq C' + D' \sqrt{\sum_{j\geq 1} \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}}} + \partial_z^m \overline{\partial_z}^m \|k_z^b\|_b^2$$

其中 C' 和 D' 是正常数。若定理 A 的 (i) 成立，则此不等式成立的唯一条件是定理 A 的 (iii) 成立。由此，在布拉施克乘积的情形下，等价关系 $(i) \Leftrightarrow (iii)$ 的证明完成（假设前面陈述的引理成立）。

还需证明定理 A 中的条件 (ii) 与其余两个条件等价。根据一致有界原理和 (1.8)，它显然蕴含 (i)。反过来，若 (i) 和 (iii) 成立，则由引理 3.1 的第二部分以及 (1.3)，我们得出，$\mathcal{H}(b)$ 中任意有限个核函数的 m 阶导数，当 $z \to 1$ 在 Ω 中变化时，都存在极限。因此，对于 f 属于 $\mathcal{H}(b)$ 的稠密函数集，$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} f^{(m)}(z) = \lim_{z\to 1, z\in\Omega} \left\langle f, \partial_z{}^m k_z^b \right\rangle_b$ 存在。这与 $\sup_{z\in\Omega} \|\partial_z{}^m k_z^b\|_b$ 一起意味着，当 $z \to 1$ 在 Ω 中变化时，$\partial_z{}^m k_z^b$ 弱收敛，而这显然等价于定理 A 中的条件 (ii)。

3.2. 无零点情形。 现在考虑无零点符号 b 的情形。在 (1.7) 中，令 $d\mu := d\nu - \log|b| dm$，于是

$$b(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.12}$$

定理 A 中的条件 (iii) 变为

$$\sup_{z\in\Omega} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} < \infty. \tag{3.13}$$

由于 $\operatorname{Re} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{\zeta}z|^2}$，(3.12) 表明

$$\frac{-\log|b(z)|^2}{2(1-|z|^2)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^2}. \tag{3.14}$$

由于 $-\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$ 对于 $x \in (0,1]$ 成立，我们从该表达式及 (1.5) 得出

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^2} = S(|b(z)|^2) \|k_z^b\|_b^2 \tag{3.15}$$

其中

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{2n}, \quad x \in (0,1]. \tag{3.16}$$

显然， S 在 (0，1) 上是光滑函数，并且对每个非负整数 k，$\lim_{x\to 1} S^{(k)}(x)$ 都存在。此外， S 有下界 $1/2$。将算子 $\partial_z^m \partial_z{}^m$ 作用于 (3.15)，并应用莱布尼茨法则，可得

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(m!)^2 d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta} z|^{2m+2}} = \sum_{i,j=0}^{m} P_{i,j}(z) \cdot \partial_z^i \overline{\partial_z}^j \|k_z^b\|_b^2 \tag{3.17}$$

其中 $P_{i,j}(z)$ 是由 S 在 $|b(z)|^2$ 处的导数以及 b 的导数构成的乘积，阶数均不超过 m。此外，$P_{0,0}(z) = S(|b(z)|^2)$。

我们还需要引理 3.1 的一个变体。

引理 3.3。设 b 在 $\mathbb{D}$ 中无零点。

- 若定理 A 中的(i)成立，则 b 的各阶导数（阶数不超过 m）在Ω中一致有界，并且$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} |b(z)| = 1$。
- 若定理 A 中的(iii) 成立，则 b 的各阶导数（阶数不超过 $2m+1$ ）在Ω中一致有界，并且$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} |b(z)| = 1$。此外，这些极限

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b^{(k)}(z), \quad k = 0, 1, \ldots, 2m$$

存在。

与布拉施克乘积对应引理的情形一样，证明留待后文。注意

$$|\partial_z^i \overline{\partial_z}^j \|k_z^b\|_b^2| = |\langle \overline{\partial_z}^i k_z^b, \overline{\partial_z}^j k_z^b \rangle_b| \le \|\overline{\partial_z}^i k_z^b\|_b \cdot \|\overline{\partial_z}^j k_z^b\|_b. \tag{3.18}$$

如前所述，定理 A 中的条件 (i) 意味着对于 $i \le m$，有 $\sup_{z\in\Omega} \|\partial_z{}^i k_z^b\|_b < \infty$ 。于是，由 (3.18) 和引理 3.3 可知，对于 $z \in \Omega$，(3.17) 左端有界，因此我们证明了定理 A 中对于无零点 b，蕴含关系 $(i) \Rightarrow (iii)$ 成立。反过来，我们通过对 m 使用归纳法来证明蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (i)$。由 (3.15)、引理 3.3 的第二个结论，以及 S 在 $x \in (1/2,1)$ 上的上下有界性，基例$m = 0$ 显然成立。假设定理 A 中的蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (i)$ 对于 $m-1$ 成立，则从 (3.17) 可知

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{(m!)^2 d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta} z|^{2m+2}} = S(|b(z)|^2) \cdot \|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b^2 + D(z) \cdot \|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b + \mathcal{O}(1)$$

其中 $D(z)$在 $z \in \Omega$中有界。由于左边在Ω中被假定为有界，右边也必定有界。既然 $S(|b(z)|^2)$在Ω中有下界，我们便可推得$\sup_{z\in\Omega} \|\partial_z{}^m k_z^b\|_b < \infty$。

证明在无零点 b 的情形下，定理 A 中的条件（i）和（iii）等价于（ii），与布拉施克

乘积的相应证明类似。唯一的区别是，我们使用引理 3。3 的第二部分，而不是引理 3。1 的第二部分。细节从略。

3.3. 将特殊情形结合为一般结果。在前两节中，我们已经证明了定理 A 在以下两种情形下成立： $b = B_1$ 是布拉施克乘积，或 $b = B_2$在 $\mathbb{D}$ 中无零点。现在我们来证明，这两种情形可以推出一般符号 $b = B_1B_2$ 下的结果。

假设定理 A中的（i）对 $b = B_1B_2$成立，其中 B_1 是布拉施克乘积，且 B_2 在 $\mathbb{D}$ 中无零点。众所周知，我们有压缩包含 $\mathcal{H}$（B_1） $\subset \mathcal{H}$（b）、 $\mathcal{H}$（B_2） $\subset \mathcal{H}$（b），并且 $f \in \mathcal{H}$（b）可以分解为

$$f = B_2 f_1 + f_2, \quad f_1 \in \mathcal{H}(B_1),\, f_2 \in \mathcal{H}(B_2) \tag{3.19}$$

（例如参见 [Sar94，第 5]页，或 [FM16b，定理 16.23]）。压缩包含 $\mathcal{H}$（B_1） $\subset \mathcal{H}$（b）意味着集合包含

$$\{f \in \mathcal{H}(B_1) : \|f\|_{B_1} = 1\} \subset \{f \in \mathcal{H}(b) : \|f\|_b \leq 1\}$$

因此

$$\begin{aligned} \|\overline{\partial_z}^m k_z^{B_i}\|_{B_i} &= \sup_{\substack{f\in\mathcal{H}(B_1)\\ \|f\|_{B_1}=1}} |f^{(m)}(z)| \\ &\leq \sup_{\substack{f\in\mathcal{H}(b)\\ \|f\|_b\leq 1}} |f^{(m)}(z)| \\ &= \|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b. \end{aligned} \tag{3.20}$$

因此，根据定理 A 的特例， $f_i^{(k)}$ (z) 在 $z \to 1 \in \Omega$ 时，当 $k \leq m$,$i = 1$,2 有极限。根据引理 3.3，对于无零点函数 B_2 也同样如此。由 (3.19) 可知， $f^{(m)}$(z) 在 $z \to 1 \in \Omega$ 时有极限。因此，定理 A 中一般情形下蕴含关系 (i) $\Rightarrow$(ii) 的证明就完成了。

我们证明 (ii) $\Rightarrow$(iii)。包含关系 $\mathcal{H}(B_1) \subset \mathcal{H}(b)$、 $\mathcal{H}(B_2) \subset \mathcal{H}(b)$ 表明，定理 A 中的 (ii) 对符号函数 B_1 和 B_2 成立，因此 (iii) 也成立，这意味着 (3.1) 和 (3.13) 得以满足。综合这些条件，我们得到定理 A 中针对符号 $b = B_1B_2$ 的 (iii)。

最后，我们来证明一般情形下剩余的蕴含关系 (iii) $\Rightarrow$ (i)。特殊情形表明

$$\sup_{z\in\Omega} \|\overline{\partial_z}^l k_z^{B_i}\|_{B_i} < \infty, i = 1, 2, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

只需对 (3.2) 中的分解应用莱布尼茨公式、不等式 (3.18) 以及引理 3.1 或引理 3.3，即可得出 $\sup_{z\in\Omega}\|\partial_z^m k_z^b\|_b < \infty$。证明完毕。

3.4. **辅助引理的证明**。

引理 3.1. 我们首先假设定理 A 中的条件（i）成立。我们对 m 使用归纳法，以证明 $b_j^{(m)}$ 在 Ω 中一致有界，其中基例 $m=0$ 显然成立。令 $m>0$，并假设 $\sup_{z\in\Omega}\|\partial_z^m k_z^b\|_b<\infty$。与之前一样，我们得出，对于 $i\le m$，$\sup_{z\in\Omega}\|\partial_z^i k_z^b\|_b<\infty$ 成立；根据归纳假设，b_j 的 $m-1$ 阶及以下导数在 Ω 中一致有界。固定满足 $b(\lambda)\neq 0$ 的 $\lambda\in\mathbb{D}$。项 $\frac{1}{1-\lambda z}$ 及其所有导数在 $\mathbb{D}$ 中有界，因此在 Ω 中也有界。由于 b 和 b_j 是内函数，空间 $\mathcal{H}(b_j)$ 等距嵌入于 $\mathcal{H}(b)$ 中。因此，由（1.5）可得

$$\|k_\lambda^{b_j}\|_b^2=\|k_\lambda^{b_j}\|_{b_j}^2=\frac{1-|b_j(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}\le\frac{1-|b(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}\le\|k_\lambda^b\|_b^2$$

因此

$$|\partial_z^m k_\lambda^{b_j}(z)|=|\langle k_\lambda^{b_j},\overline{\partial_z}^m k_z^b\rangle_b|\le\|k_\lambda^{b_j}\|_b\|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b\le\|k_\lambda^b\|_b\|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b.$$

最右侧的量在 $z\in\Omega$ 上一致有界。将莱布尼茨法则应用于 (1.3) 中的 k_λ^b 表达式，可得

$$\partial_z^m k_\lambda^{b_j}(z)=\frac{-\overline{b_j(\lambda)}b_j^{(m)}(z)}{1-\overline{\lambda}z}+r_j(z) \tag{3.21}$$

其中，$r_j(z)$ 是若干乘积的线性组合，这些乘积由 b_j 的阶数严格小于 m 的导数以及 $(1-\lambda z)^{-1}$ 的幂构成。由归纳法可知，r_j 在 Ω 中一致有界。由于 $|b_j(\lambda)|\ge|b(\lambda)|>0$，由 (3.21) 可知，$b_j^{(m)}$ 在 Ω 中也一致有界。条件 (i) 蕴含定理 A 中的 $\lim_{z\to1,z\in\Omega}|b(z)|=1$ 这一事实，可由 $\sup_{z\in\Omega}\|k_z^b\|_b<\infty$ 和 (1.5) 立即得出。我们已证明引理 3.1 的第一点。

现在证明第二点，因此改为假设定理 A 中的条件 (iii)。利用 (3.3) 和我们的假设，我们注意到，对于 $z\in\Omega$，有

$$\sup_n 1-\frac{|z-a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}=\sup_n\frac{(1-|z|^2)(1-|a_n|^2)}{|1-\overline{a_n}z|^2}\le\sum_j\frac{(1-|z|^2)(1-|a_j|^2)}{|1-\overline{a_j}z|^2}=\mathcal{O}(1-|z|^2). \tag{3.22}$$

我们得出结论，存在 $r\in(0,1)$，使得对于满足 $|z|>r$ 的 $z\in\Omega$，有如下界

$$1/2\le\frac{|z-a_n|}{|1-\overline{a_n}z|}. \tag{3.23}$$

对该表达式求导

$$\log|b_j(z)| = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{j}\log\left(\frac{|z-a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}\right)$$

得到

$$\frac{b_j'(z)}{b_j(z)} = \partial_z \log|b_j(z)|^2 = \sum_{n=1}^{j}\frac{1-|a_n|^2}{(z-a_n)(1-\overline{a_n}z)}. \tag{3.24}$$

由 (3.23) 可得

$$|b_j'(z)| \le 2\sum_{n\ge 1}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}, z\in\Omega, \quad |z|>r.$$

对于满足 $|z|\le r$ 的 z，我们可以使用通常的 Bloch 型估计

$$|f'(z)| \le \frac{2\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|}{1-|z|}$$

从而得出 b_j' 在 Ω 中的一致有界性。我们的证明中 $m=0$ 的情形已完成。为证明情形 $m\ge 1$，只需将 (3.24) 两边乘以 $b_j(z)$，并求 k 次导数，即可看出 $b_j^{(k+1)}(z)$ 是由 b_j 的低于 k 阶导数的乘积以及在 Ω 中由 $\sum_{n\ge1}\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_nz|^{k+2}}$ 控制的项所构成的有限和。一般情形由此可通过归纳法直接得到。~~由于当~~ $j\to\infty$ 时，$b_j\to b$ 在紧集上一致成立，这些估计还表明，对于 $k\le 2m+1$，$b^{(k)}$ 在 Ω 中有界。这意味着，对于 $k\le 2m$，$b_j^{(k)}$ 和 $b^{(k)}$ 在 Ω 中是利普希茨的，因此它们可延拓为定义在 Ω 上的连续函数。特别地，$\lim_{z\to1,\ z\in\Omega} b^{(k)}(z)$ 和 $\lim_{z\to1,\ z\in\Omega} b_j^{(k)}(z)$ 对于 $k\le 2m$ 均存在。$\lim_{z\to1,\ z\in\Omega}|b(z)|=1$ 存在这一事实再次是证明过程的副产品。事实上，

$$\log|b(z)| = \frac{1}{2}\sum_{n\ge1}\log\left(\frac{|z-a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2}\right),$$

由估计式（$x-1$）$/2\le\log\ x\le x-1$，$x\in$（$1/2$，1）以及（3.3），我们可推得

$$\log|b(z)| = \mathcal{O}(1-|z|^2), \quad z\in\Omega.$$

因此，当 $z\to1$ 属于 Ω 时，$|b(z)|\to1$。 □

引理 3的证明。3. 第一点的证明与引理 3.1 证明中相应部分完全类似，使用 $b=b_j$。为证明第二点，我们利用 (3.12) 得到

$$\frac{b'(z)}{b(z)} = -\int_{\mathbb{T}}\frac{2\zeta d\mu(\zeta)}{(\zeta-z)^2}. \tag{3.25}$$

两边乘以 $b(z)$ 并对 $2m$ 求导，可知 (3.13)（即定理 A 的 (iii)）蕴含 $b^{(2m+1)}$ 在 Ω 中有界。与引理 3.1 的证明一样，可得 $\lim_{z\to 1, z\in\Omega} b^{(k)}(z)$ 对于 $k \le 2m$ 存在。最后，我们有

$$-\log|b(z)| = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\zeta}z|^2} d\mu(\zeta)$$

因此，(3.13) 表明，当 $z \to 1$ 在 Ω 中时，$|b(z)| \to 1$。 □

我们陈述以下结果，它可由引理 3.1 和 3.3 推出。

推论 3.4。假设定理 A 中的等价条件对某个 m 成立。那么，b 的 $2m+1$ 阶及以下导数在 Ω 中一致有界，并且 $\lim_{z\to 1,\ z\in\Omega} |b(z)| = 1$。此外，极限

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} b^{(k)}(z), \quad k = 0, 1, \ldots, 2m$$

存在。

我们将在定理 C 中看到，在一般区域 Ω 中，$\lim_{z\to 1,\ z\in\Omega} b^{(2m+1)}(z)$ 可能不存在。

4. Proof of Theorem B

本节证明定理 B，因此在下文中，我们假设对于某个固定的整数 m，定理 A 的等价条件成立。因此，我们的论证经常会用到上一节推导出的各种部分结果（例如引理 3.1 和引理 3.3）。

4.1. 一些初步观察。

以下是我们主要的简化观察。

引理 4.1. 假设对于某个 $m \ge 0$，b满足定理 A 中陈述的等价条件。为了得出当 $z \to 1$ 时，$\partial_z{}^m k_z^b \to \partial_z{}^m k_1^b$ 在Ω中范数收敛，只需证明

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b \tag{4.1}$$

存在。

为方便起见，在以下证明中我们将使用引言中给出的 Fricain-Mashreghi 结果（定理 1.3），尽管严格来说这并非必要。

引理 4的证明。1. 假设 (4.1) 中的极限存在。注意到，由 Fatou 引理以及我们对定理 iii 的假设成立，定理 1。3 中的条件（iii）得以满足。

因此，定理 1。3 中的三个条件均成立。根据定理 1。3 的条件（i），我们得出

$$\lim_{r\to 1-} \|\overline{\partial_z}^m k_r^b\|_b = \|\overline{\partial_z}^m k_1^b\|_b.$$

因此，(4.1) 中的极限也必须等于 $\|\partial_z{}^m k_1^b\|_b$。注意到

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \partial_z^m \overline{\partial_z}^m k_1^b(z) = \|\overline{\partial_z}^m k_1^b\|_b^2$$

我们由此得出以下证明:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|\overline{\partial_z}^m k_z^b - \overline{\partial_z}^m k_1^b\|_b = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|\overline{\partial_z}^m k_z^b\|_b^2 + \|\overline{\partial_z}^m k_1^b\|_b - 2\,\mathrm{Re}\,\partial_z^m \overline{\partial_z}^m k_1^b(z) = 0.$$

□

以下两个引理也将有所帮助。

引理 4.2. 如果 $\partial_z{}^m k_z^b \to \partial_z{}^m k_1^b$ 在 Ω 中范数收敛于 $z \overline{\to} 1$，那么对于 $j < m$, $\partial_z{}^j k_z^b \to \partial_z{}^j k_1^b$ 在 Ω 中也范数收敛于 $z \to 1$。

证明。回想一下，我们假设若 $z \in \Omega$ 足够接近 1，则 z 与 1 之间的线段包含在 Ω 中。于是，由于 $|f_{(j)}(z) - f^{(j)}(1)| = |\int_1^z f_{(j+1)}(w)\, dw|$，我们得到

$$\begin{aligned}\limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|\overline{\partial_z}^j k_z^b - \overline{\partial_z}^j k_1^b\|_b &= \limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sup_{f:\|f\|_b=1} |f^{(j)}(z) - f^{(j)}(1)| \\ &\le \limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|\overline{\partial_z}^{j+1} k_z^b\|_b \cdot |z-1|.\end{aligned}$$

因此，只要范数 $\|\partial_z{}^{j+1} k_z^b\|_b$ 在 $z \overline{\in}$ Ω 上有界，就足以推出 $\partial_z{}^j k_z^b \to \partial_z{}^j k_1^b$ 当 $z \to 1$ 时在 Ω 中范数收敛；当然，假设的范数收敛更能推出这一点。然后从情形 $j + 1 = m$开始逐步迭代，即可得到结论。□

回顾 (1.12) 中区间 E_z 和 (1.13) 中扇形 S_z 的定义。

引理 4.3。假设对于某个整数 m，定理 A的等价条件成立。那么

$$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} dm(\zeta) \tag{4.2}$$

当且仅当存在

$$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} \sum_{n:a_n\in S_z} \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}} + \int_{E_z} \frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} + \int_{E_z} \frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} dm(\zeta) = 0. \tag{4.3}$$

证明。 由定理 A 中的条件（iii）和 Fatou 引理，我们得到

$$J := \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu(\zeta)}{|1-\zeta|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}} \frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\zeta|^{2m+2}} dm(\zeta) < \infty.$$

根据 (1.16)，对于任意 $z \in \mathbb{D}$，我们有以下估计

$$\frac{1}{|1-\overline{w}z|} \leq \frac{4}{|1-w|}, \quad w \in \overline{\mathbb{D}}, w \notin E_z \cup S_z.$$

因此，由控制收敛定理可得

$$\lim_{z\to 1, z\in\Omega} \sum_{n:a_n\notin S_z} \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}\setminus E_z} \frac{d\nu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} + \int_{\mathbb{T}\setminus E_z} \frac{-\log|b(\zeta)|}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} dm(\zeta) = J. \tag{4.4}$$

对于 $z = r \in (0, 1)$，根据定义有 $E_z = S_z = \varnothing$；因此，若 (4.2) 中的极限存在，由 (4.4) 可知它必等于 J。于是，当 $z \to 1$ 属于 Ω 时，(4.2) 与 (4.4) 中两个量之差必趋于 0。这正是条件 (4.3)。反过来，假设 (4.3) 成立，由 (4.4) 立即可知 (4.2) 存在（且等于 J）。□

与上一节一样，我们将把证明余下部分分成两种情况：布拉施克乘积和无零点函数。

4.2. 布拉施克乘积情形。 考虑由自然数 $n \geq 1$ 索引的可求和单边序列$x = \big(x(n)\big)_n$ 构成的空间 ℓ^1，并用 $\|x\|_1 := \sum_n |x(n)|$ 表示 ℓ^1中的通常范数。引入以下序列 $A_{k,l,z}$ 将很有用：

$$A_{k,l,z}(n) = \frac{1-|a_n|^2}{(1-\overline{a_n}z)^{1+k}(1-a_n\overline{z})^{1+l}}, \quad n \geq 1.$$

这里，a_n 是布拉施克乘积 b的零点。由 Blaschke条件 $\sum_n 1-|a_n| < \infty$可知，序列 $A_{k,l,z}$ 属于 ℓ^1。定理 A 关于 b的条件（iii）化简为（3.1），并且由此可得

$$\sup_{z\in\Omega, 1\leq k,l\leq m} \|A_{k,l,z}\|_1 < \infty$$

and

$$A_{k,l,1} \in \ell^1, \quad 1 \leq k, l \leq m.$$

此外，我们有以下范数收敛结果。

引理 4.4。 若布拉施克乘积 b 和整数 m满足定理 A 的等价条件，则对于 $k + l < 2m$，我们有

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|A_{k,l,z} - A_{k,l,1}\|_1 = 0.$$

证明。由于对于每个 n，都有 $A_{k,l,z}(n) \to A_{k,l,1}(n)$，且 $z \to 1$，根据测度论中的一个标准结果，所需的范数收敛将由下式推出

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \|A_{k,l,z}\|_1 = \|A_{k,l,1}\|_1.$$

现在，如果我们能够证明，那么这一收敛性可通过完全类似于引理 4。3 证明中的论证得到。

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_{n:a_n\in S_z} \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2+k+l}} = 0. \tag{4.5}$$

为此，我们首先证明

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sup_{n:a_n\in S_z} |1-\overline{a_n}z| = 0. \tag{4.6}$$

若此结论不成立，则存在一个正数 δ、一个由 Ω 中趋于 1 的点组成的序列 $(z_n)_n$，以及一个由 b 的互异零点组成的序列 $(a_n^*)_n$，使得 $a_n^* \in S_z$ 且对所有 n 都有 $\delta < |1-\overline{a_n^*}z_n|$。现在，标准估计

$$|1-\overline{a_n^*}z_n| \le (1-|a_n^*|) + (1-|z_n|) + |\arg(\overline{a_n^*}z_n)|$$

表明 $1-|a_n^*|$ 有下界，因为上式右端的另外两项在 $z \to 1$ 时趋于 0。这说明该布拉施克乘积在一个以原点为中心、半径严格小于 1 的圆盘内有无穷多个互异零点，这是不可能的。由此得到 (4.6)。因此，给定任意 $\epsilon > 0$，若 $z \in$Ω 充分接近 1，则 $\sup_{n:a_n\in S_z} |1-a_nz| < \epsilon$，进而

$$\begin{aligned}\limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_{n:a_n\in S_z} \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2+k+l}} &= \limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_{n:a_n\in S_z} |1-\overline{a_n}z|^{2m-k-l}\frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}}\\ &\le \epsilon^{2m-k-l}\sup_{z\in\Omega}\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^{2m+2}}.\end{aligned}$$

由于 $2m-k-l \ge 1$，由上述估计可知 (4.5) 成立，因此证明完成。□

现在我们可以完成定理 B 中在b 为布拉施克乘积的情况下，(i) 与 (ii) 等价性的证明。回到方程 (3.5) 和 (3.6)，注意到

$$C_{k,l}(z) = \sum_j B_{k,l,z}(j)A_{k,l,z}(j)$$

根据引理 3.1，序列

$$B_{k,l,z} = (B_{k,l,z}(j))_j = \left(\binom{m}{k}\binom{m}{l} b_{j-1}^{(m-k)}(z)\overline{b_{j-1}^{(m-l)}(z)}\,\overline{a_j}^k a_j^l k!l!\right)_j$$

在 $z \in \Omega$ 上一致有界，并且当 $z \to 1$ in Ω 时逐坐标收敛。由引理 4.4 可知，当 $k+l < 2m$, $C_{k,l}(z)$ 在 $z \to 1$ in Ω 中收敛时，右端 (3.5) 的其余项为

$$C_{m,m}(z) = \sum_{j\geq 1} |b_{j-1}(z)|^2 |a_j|^{2m} (m!)^2 \frac{1-|a_j|^2}{|1-\overline{a_j}z|^{2m+2}}$$

由此可知，该项收敛当且仅当 $\partial_z^m \partial_z^{\ m} \|k_z^b\|_b^2$ 收敛。根据不等式 $|b(z)| \leq |b_{j-1}(z)|$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 成立，以及当 $z \to 1$ 在 Ω 中时 $|b(z)| \to 1$ 的收敛性（回顾引理 3.1），再结合 $|a_j| \to 1$ 当 $j \to \infty$ 时的收敛性，我们看到，当 $z \to 1$ 在 Ω 中时，$C_{m,m}(z)$ 收敛，当且仅当 $\sum_j \frac{1-|a_j|^2}{|1-a_j z|^{2m+2}}$ 当 $z \to 1$ 在 Ω 中时收敛。在调用引理 4.1 和引理 4.3 后，我们关于布拉施克乘积情形下定理 B 的证明便完成了。

4.3. 无零点情形。 为了证明定理 B 对 b 无零点，先回顾方程 (3.17)，为方便读者起见，我们在此重述：

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{2m+2}} = \sum_{i,j=0}^{m} P_{i,j}(z) \cdot \partial_z^i \overline{\partial_z}^j \|k_z^b\|_b^2. \tag{4.7}$$

我们注意到

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Omega}} P_{i,j}(z)$$

根据引理 3.3 以及定理 A中条件成立这一假设，它们存在，因为$P_{i,j}(z)$是 $b(z)$和 $S(|b(z)|^2)$的 m阶及以下导数的乘积。

现在假设定理 B 中的第一个条件成立，即当 $z \to 1$ 趋于 Ω 中时，我们有范数收敛 $\partial_z^{\ m} k_z^b \to \partial_z^{\ m} k_1^b$。由引理 4.2，对于每一对非负整数 $i, j \leq m$，有

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Omega}} \partial_z^i \overline{\partial_z}^j \|k_z^b\|_b^2 = \lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Omega}} \left\langle \overline{\partial_z}^i b_z, \overline{\partial_z}^j k_z^b \right\rangle_b \tag{4.8}$$

它们存在。因此，(4.7) 右侧当 $z \to 1$趋于 Ω 中时收敛，故左侧也收敛。由引理 4.3 可知，定理 B 的部分 (ii) 对无零点 b成立。

现在证明逆向蕴含（ii）$\Rightarrow$（i）。证明对m使用归纳法。基例 $m = 0$ 的成立由（3.15）、引理 4.1 和引理 4.3 立即得出，因为项 $S(|b(z)|^2)$ 在 $z \to 1$ 于 Ω 中时收敛。对于 $m > 0$，我们回到公式（4.7）。不难看出，定理 B 中的条件（ii）对某个 m成立，就意味着对 $m-1$ 也成立。于是根据归纳假设，我们得出（4.8）中的极限对 $i, j \leq m-1$ 存在。对于 $i = m$ 和 $j < m$，（4.8）中的极限由 $\partial_z^{\ m} k_z^b$ 的弱收敛和 $\partial_z^{\ j} k_z^b$ 的范数收敛而存在。因此我们已经证明

在 $z \to 1$ 于 Ω 中时，（4.7）等式两边除一项外的所有项都收敛，例外项的指标为 $i, j = m$。这一项等于 $S(|b(z)|^2)\,\partial_z^m \partial_z{}^m \|k_z^b\|_b^2$，当然也必定收敛。因此 $\overline{\partial_z^m}\partial_z{}^m \|k_z^b\|_b^2$ 也收敛，定理 B 中蕴含（ii）$\Rightarrow$（i）在无零点 b的情形下的证明至此完成。

4.4. 将特殊情形合并为一般结果。 如前所述，考虑 $b = B_1 B_2$，其中 B_1 是一个布拉施克乘积，而 B_2 无零点。我们刚刚证明了定理 B对 B_1 和 B_2成立。

假设定理 A 的第（i）部分对 b成立。按照我们在（3.20）中的方法，但对核之差进行论证，可得

$$\lim_{\substack{z,z' \to 1 \\ z \in \Omega}} \|\overline{\partial_z}^m k_z^{B_i} - \overline{\partial_z}^m k_{z'}^{B_i}\|_{B_i} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.9}$$

因此，随着 $z \to 1$ 趋于 Ω 中的点，$\partial_z{}^m k_z^{B_i}$在范数意义下收敛。根据已证明的定理 B 关于 B_1 和 B_2的特殊情形可知，定理 B 的第（ii）部分对 $b = B_1 B_2$成立。

反过来，假设定理 B 的第（ii）部分对 $b = B_1 B_2$成立。那么它分别对B_1 和 B_2 成立，因此（4.9）成立。将算子 $\partial_z{}^m$ 作用于

$$k_z^b(w) = k_z^{B_1}(w) + B_1(w)\overline{B_1(z)} k_z^{B_2}(w)$$

得出

$$\overline{\partial_z}^m k_z^b(w) = \overline{\partial_z}^m k_z^{B_1}(w) + B_1(w) \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \overline{\partial_z}^{m-i} \overline{B_1(z)} \overline{\partial_z}^i k_z^{B_2}(w).$$

众所周知，B_1 是从 $\mathcal{H}(B_2)$ 到 $\mathcal{H}(b)$ 的有界乘子（参见 [Sar94，第 5] 页）。由引理 3.1，系数 $\partial_z{}^{m-i} B_1(z)$ 在 $z \to \overline{1}$ 趋于 $\overline{\Omega}$ 时收敛。由压缩包含 $\mathcal{H}(B_i) \subset \mathcal{H}(b)$、引理 4.2 和 (4.9)，当 $z \to 1$ 趋于 Ω 时，$\partial_z{}^m k_z^{B_1}$和 $\partial_z{}^i k_z^{B_2}$在 $\mathcal{H}(b)$中按范数收敛。因此，当 $z \to 1$ 趋于 Ω 时，$\partial_z{}^m k_z^b$ 按范数收敛，证明完毕。

5. Proof of Theorems C and D

证明中我们将使用以下简单的微积分引理。

引理 5.1. 设 ρ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的递增连续函数，并且在 $(0, \infty)$ 上连续可微。假设

$$\lim_{x \to 0} \rho'(x) = 0.$$

对于所有满足 $x < x^*$ 的充分小正数 x 和 x^*，我们有

$$2|e^{ix^*} - z| \geq \rho(x^*), \quad z = (1 - \rho(x))e^{ix}.$$

证明。我们有

$$2|e^{ix^*} - z| \geq \frac{1}{2}|x^* - x| + \rho(x) := D(x).$$

注意，对于 $x < x^*$，我们有 $D'(x) = -\frac{1}{2} + \rho'(x)$；根据关于 ρ 的假设，当 x 足够小时，这是一个负量。因此， D 在区间 (x, x^*) 上递减，从而 $\rho(x^*) = D(x^*) \leq D(x) \leq 2|e^{ix^*} - z|$。 □

定理 C的证明。 由于 $\rho(x) = \int_0^x \rho'(x)\,dx = o(x)$，根据我们的假设，我们可以取一个趋于 0 的正实数递减序列 $(x_n)_n$ ，使其满足以下两个条件

$$\sum_n \frac{\rho^2(x_n)}{x_n^2} < \infty \tag{5.1}$$

and

$$x_{n+1} < x_n/2. \tag{5.2}$$

我们取 b 为奇异内函数

$$b(z) = \exp\Big(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\nu(\zeta)\Big), \quad z \in \mathbb{D}$$

其中

$$\nu = \sum_n \rho^2(x_n)\delta_{e^{ix_n}}$$

且 $\delta_{e^{ix_n}}$ 是位于 $e^{ix_n} \in \mathbb{T}$ 处的点质量。我们很快将证明 $\sup_{z\in\Omega_\rho} \|k_z^b\|_{\mathcal{H}(b)} < \infty$ 成立。假设这一点成立，根据定理 A （或 Duan-Li-Mashreghi 定理）和 Fatou 引理，我们有

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\nu(\zeta)}{|1 - \zeta|^2} < \infty.$$

此外，$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega_\rho}} b(z)$ 存在。注意到

$$\frac{b'(z)}{b(z)} = -\int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

为了证明 $\lim_{z\to 1, z\in\Omega_\rho} b'(z)$ 不存在，只需证明

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega_\rho}} \int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

不存在。为此，我们将验证径向极限 $z = r \to 1$ 与沿序列 $z_n = (1 - \rho(x_n))e^{ix_n} \in \partial\Omega_\rho$ 的极限不同。对于径向极限的情形，我们利用不等式 $\frac{1}{|\zeta - r|^2} \leq \frac{4}{|\zeta - 1|^2}$ 和控制收敛定理得到

$$\lim_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta - r)^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta - 1)^2}.$$

回顾 (1.12) 中弧 E_{z_n} 的定义。这一次，控制收敛定理和 (1.16) 中的估计表明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}\setminus E_{z_n}}\frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta-z_n)^2}=\int_{\mathbb{T}}\frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta-1)^2},$$

与径向极限相同。然而，根据 (5.2)，对于 $z_n := (1-\rho(x_n))e^{ix_n}\in\partial\Omega_\rho$，我们有 $E_{z_n}\cap$ supp(ν) $=\{e^{ix_n}\}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_{z_n}}\frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta-z_n)^2}=\lim_{n\to\infty}2e^{-ix_n}=2.$$

Thus

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}}\frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta-z_n)^2}=\lim_{r\to 1}\int_{\mathbb{T}}\frac{2\zeta d\nu(\zeta)}{(\zeta-r)^2}+2,$$

由此可得 $\lim_{z\to 1 z\in\Omega_\rho} b'(z)$ 不存在。

剩下要证明的是 $\sup_{z\in\Omega_\rho}\|k_z^b\|_b<\infty$。根据定理 A，我们需要证明以下量有限：

$$\sup_{z\in\Omega_\rho}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\nu(\zeta)}{|z-\zeta|^2}=\sup_{z\in\Omega_\rho}\sum_n\frac{\rho^2(x_n)}{|e^{ix_n}-z|^2}. \tag{5.3}$$

只需将上述上确界限制在 $z\in\partial\Omega_\rho$ 上来证明这一点。此外，只需对所有充分接近 1 的 $z\in\Omega_\rho$ 证明这一点。

令 $z=(1-\rho(x))e^{ix}\in\partial\Omega_\rho$。存在唯一的 m，使得 $x_{m+1}\le x<x_m$。我们将把和式 $\sum_n \rho^2(x_n)|e^{ix_n}-z|^2$ 分成由 $n\ge m+2$ 和 $n\le m-1$ 索引的项，并对由 $n=m+1$ 和 $n=m$ 索引的项作特别论证。

我们先处理这两个特殊项。我们将证明，$|e^{ix_m}-z|$ 和 $|e^{ix_{m+1}}-z|$ 分别有下界 $\rho(x_m)$ 和 $\rho(x_{m+1})$。对于 $n=m+1$，注意到由于 ρ 递增，$1-|z|=\rho(x)\ge\rho(x_{m+1})$，因此 $|e^{ix_{m+1}}-z|\ge 1-|z|\ge\rho(x_{m+1})$。对于 $n=m$，对 $x^*=x_m$ 应用引理 5.1，得到 $2|e^{ix_m}-z|\ge\rho(x_m)$。由这两个估计可得

$$\frac{\rho^2(x_m)}{|e^{ix_m}-z|^2}+\frac{\rho^2(x_{m+1})}{|e^{ix_{m+1}}-z|^2}\le 5.$$

现在考虑由 $n\ge m+2$ 编号的项。那么，与 x_{m+1} 相比，$x=\arg z$ 距离 x_n 更远，因此可得 $|x_{m+1}-x_n|\le|x_n-x|\le 4|e^{ix_n}-z|$。此外，由 (5.2) 可知 $2x_n<x_{m+1}$，进而推出 $x_n\le|x_{m+1}-x_n|\le 4|e^{ix_n}-z|$。由此我们得到

$$\sum_{n\ge m+2}\frac{\rho^2(x_n)}{|e^{ix_n}-z|^2}\le 16\sum_{n:n\ge m+2}\frac{\rho^2(x_n)}{x_n^2}.$$

因此，求和的这部分由 (5.1) 控制。

最后，考虑由 $n \le m-1$ 索引的项。然后，与前一部分类似，我们得到 $4|z-e^{ix_n}| > |x_m - x_n| > x_n/2$，因此

$$\sum_{n:n\le m-1} \frac{\rho^2(x_n)}{|e^{ix_n}-z|^2} \le 64 \sum_{n:n\le m-1} \frac{\rho^2(x_n)}{x_n^2}.$$

结合上述估计可得 $\sup_{z\in\Omega_\rho} \|k_z^b\|_b < \infty$。 □

最后，我们现在证明定理 D。对 b 取对数导数，并结合前面推导出的表达式 (3.24) 和 (3.25)，得到

$$\frac{b'(z)}{b(z)} = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{(z-a_n)(1-\overline{a_n}z)} - \int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\mu(\zeta)}{(\zeta-z)^2}. \tag{5.4}$$

其中 $d\mu = -d\nu + \log|b| dm$，与之前一样。根据引理 4.4 的证明开头已经提到的标准测度论结果，如果我们能够证明以下结论，那么上面的右端将趋于 $\sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2} - \int_{\mathbb{T}} \frac{2\zeta d\mu}{\zeta-1}(\zeta)$ $()^2$，当 $z \to 1$ 在 Ω 中时：

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-\overline{a_n}z|} = \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2}$$

and

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-z|^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-1|^2}$$

由于

$$1 = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} |b(z)| \le \limsup_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \frac{|z-a_n|}{|1-\overline{a_n}z|} \le 1,$$

因此可得

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-\overline{a_n}z|} = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Omega}} \sum_n \frac{1-|a_n|^2}{|1-\overline{a_n}z|^2},$$

如果这些极限存在。现在，我们只需重复引理 4.3 的证明中的论证，即可证明上述右端收敛。因此，当 $z \to 1$ 属于 Ω 时，(5.4) 的右端收敛。由于左端的分母 $b(z)$ 也收敛，我们便得到了所需结果。

References

[AC70a] P. R. Ahern 和 D. N. Clark。关于与不变子空间正交的函数。《数学学报》，124(1)：191–204，1970 年。[AC70b] P. R. Ahern 和 D. N. Clark。径向极限与不变子空间。《美国数学杂志》，92(2)：332–342，1970 年。[BK06] V. Bolotnikov 和 A. Kheifets。Carath´eodory–Julia 定理的高阶类比。《泛函分析杂志》，237(1)：350–371，2006 年。

.[Car29] C. Carath´eodory。关于有界解析函数的角导数。De Gruyter，1929 年。[Dah24] F. Dahlin。通过再生核得到的边界值：Julia-Carath´eodory 定理。arXiv 预印本 arXiv:2412.13901，即将在《加拿大数学杂志》发表，2024 年。[DLM25] Y. Duan、Y. Li 和 J. Mashreghi。模型空间中的再生核函数与边界极限。《太平洋数学杂志》，337(2)：225–244，2025 年。[FM08a] E. Fricain 和 J. Mashreghi。de Branges–Rovnyak 空间中函数的边界行为。《复分析与算子理论》，2(1)：87–97，2008 年。[FM08b] E. Fricain 和 J. Mashreghi。de Branges-Rovnyak 空间中 n-阶导数的积分表示及其再生核的范数收敛。载于《傅里叶研究所年刊》，第 58 卷，第 2113–2135 页，2008 年。[FM16a] E. Fricain 和 J. Mashreghi。$\mathcal{H}(b)$ 空间理论。第 1 卷，《新数学专著》第 20 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016 年。[FM16b] E. Fricain 和 J. Mashreghi。$\mathcal{H}(b)$ 空间理论。第 2 卷，《新数学专著》第 21 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016 年。[Jul19] G. Julia。Schwarz 引理的新扩展。《数学学报》，42：349–355，1919 年。[Leu78] K. K. Leung。关于与不变子空间正交的函数的边界行为。《美国数学会会刊》，244：67–84，1978 年。[Pro72] D. Protas。与不变子空间正交的函数的切向极限。《美国数学会会刊》，166：163–172，1972 年。[Sar88] D. Sarason。通过希尔伯特空间得到的角导数。《复变函数与椭圆方程》，10(1)：1–10，1988 年。[Sar94] D. Sarason。单位圆盘中的次 Hardy 希尔伯特空间，《阿肯色大学数学科学讲义》第 10 卷。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1994 年。

School of Mathematics, Hunan University, Changsha, 410082, PR China
电子邮箱地址：sluo@hnu.edu.cn

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, 721 23 Västerås, Sweden
电子邮箱地址：bartosz.malman@mdu.se