arXiv:2601.02195v1 [math.GR] 5 Jan 2026

双曲反射群中的不变随机子群

JEAN RAIMBAULT

Abstract. 我们证明，某些福克斯反射群存在不变随机子群，其支撑中包含不可数多个子群同构类型，从而回答了 S. Thomas 提出的问题。我们还在高维空间中给出了类似的构造。我们的构造基于双曲空间中紧致 Coxeter 多胞体的极限。我们还通过类似的构造，给出了与 Y. Glasner 和 A. Hase 提出的问题相关的不变随机子群实例。

“不变随机子群”这一概念是“正规子群”概念的概率论推广。离散群 Γ 中的不变随机子群，就是定义在 Γ的子群沙博蒂空间上的一个博雷尔概率测度，并且该测度在 Γ的元素的共轭作用下保持不变。基本实例包括共轭类有限的子群，例如有限指标子群和正规子群。不变随机子群空间具有紧致性，因此可以通过有限指标子群族的极限来进行研究；这一点正是最初引入这些对象的动机（例如参见 [AGV14]，该术语最早在此处使用）。另一方面，正如特定群的正规子群的性质能够帮助我们洞察该群的结构，或从同构角度研究该群，不变随机子群的性质也应如此。本文在很大程度上正是受到后一种研究范式的启发。

更准确地说，我们关注包含弥散不变随机子群的群。这一概念由 S. Thomas 在 [Tho22] 中提出。这类不变随机子群具有这样的性质：对于其支撑中的任意一个群，与之同构的子群所构成的集合测度为零。并不显然任何群中都存在此类不变随机子群，但在上述文献中，Thomas 构造了若干存在弥散遍历不变随机子群的离散群，并提出是否还有更“自然”的此类例子。本文的主要目标是在几何背景下提供此类例子。我们还运用类似的构造，给出忠实且张成的不变随机子群的例子，以回应 [GH23] 中提出的问题。

福克斯群。 在自由群或曲面群中，如何构造具有不可数支撑的遍历 IRS 早已广为人知（例如参见 [Bow15]），但其支撑中的所有子群都是可数秩自由群，因此只有一个同构类。另一方面，我们将证明，在某些含挠元的福克斯群中，可以构造弥散型不变随机子群

。具体来说，我们将在群 Γ中这样做，它是 (4,4,4) 三角群。也就是说，设 T_4 是 $\mathbb{H}^2$ 中三个角均等于 $\pi/4$的唯一三角形，并令Γ_{T_4} 为由关于 T_4各面的反射所生成的等距变换子群。这是一个离散等距变换群，而 T_4 在 Γ 的各元素作用下的像铺砌了 $\mathbb{H}^2$。它有如下简单表示

$$\Gamma_{T_4} = \left\langle s_1, s_2, s_3 \,\middle|\, (s_i s_{i+1})^4, s_i^2 \right\rangle$$

（其中指标在 $i = 1$，2，3上循环取值）。用此记号 n
我们证明如下结论。

定理 1。 群 Γ_{T_4} 存在一个遍历弥散型不变随机子群。

我们预期， $\mathbb{H}^2$ 中的许多反射群都满足这一结论（但并非全部，例如直角群以及所有角度均等于某个给定素数的三角形群，其子群的同构类型只有可数多个，这与自由群或曲面群类似），而且与我们类似的论证也可用于这一情形。更一般地说，以下问题似乎可能有明确答案。

问题 1。 哪些含挠元的有限生成福克斯群包含弥散型不变随机子群?

高维直角 Coxeter 群。高维秩一群中的格是否存在弥散遍历不变随机子群[1]，这是一个颇有意思的问题，而且似乎需要更精巧的论证。沿着这一方向，我们证明以下定理。

定理 *2. </style}*设 $P \subset \mathbb{H}^d$, $d \geq 4$ 是一个有限体积的直角多面体。那么它的反射群 Γ_P 存在弥散遍历不变随机子群。

在三维情形下，我们注意到，我们的论证只能得出较弱的结论：存在一些直角反射群的不变随机子群，其支撑包含不可数多个同构类型。然而，确实存在一些非弥散的遍历不变随机子群，也具有支撑中包含不可数多个同构类型这一较弱性质（Thomas 在一个可数集上的有限支撑置换群中构造了此类例子）。因此，我们不知道针对$d = 3$的定理 2 构造是否能得到遍历弥散型不变随机子群，不过我们猜测可以。

我们注意到，众所周知，对于 $\mathbb{H}^d$， $2 \leq d \leq 8$ 存在无穷多个有限体积直角多面体（对于 $d = 2$，3，4，可选取紧致多面体），而对于 $d \geq 13$ 则不存在（[PV05，Duf10]）。因此，定理 2 给出了无穷多个 PO(d，1) 中格的例子，这些格含有弥散遍历不变随机子群，但该定理无法应用于高维情形。以下问题似乎有肯定答案。

[1]Stuck–Zimmer 定理表明，高秩单群中的格不存在弥散遍历不变随机子群。

问题 2。 所有不同构于$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ 的秩一简单李群中的格，是否都含有弥散遍历不变随机子群？

值得注意的是，据我所知，目前尚无任何已知例子是带有弥散遍历不变随机子群的无挠双曲群。

忠实且生成的不变随机子群。我们还构造了具有其他性质的直角群中的不变随机子群。在 [GH23] 中，作者引入了忠实不变随机子群和生成不变随机子群的概念（见下文 4.1）。他们证明，任意 Gromov双曲群都存在一个支撑不可数的忠实遍历不变随机子群（事实上，他们证明了一个更一般的结果）。另一方面，自由群中存在既忠实又生成的遍历不变随机子群（例如 [Bow15] 中的例子）。我们给出了高维双曲例子，结果如下。

定理 3。设 $d \geq 2$，且 $P \subset \mathbb{H}^d$ 是一个紧致直角多面体。那么 Γ_P 存在既忠实又生成的遍历不变随机子群。

如上所述，这意味着在 PO(d, 1),$d = 3$, 4 中存在无穷多个格，它们包含忠实的生成不变随机子群。我们预计，这一结果可以直接推广到有限体积直角多面体（目前我们使用的凸包络论证仅适用于紧致多面体，但利用厚部应该可以将其推广到一般的有限体积多面体）。更有意思的推广则是将其推广到所有双曲直角 Coxeter 群。

组织结构。在第一节 1 中，我们给出考克斯特群中反射型不变随机子群的一般构造，这是对 [ABB+20 第 13], 节所述构造的一种变体，并给出使其产生弥散型不变随机子群的条件。随后，我们在第二节将其应用于福克斯群，以证明定理 1；在第三节将其应用于直角群，以证明定理 2。最后，在第四节证明定理 3，并在此回顾 [GH23] 中的必要预备知识。

致谢。 本研究得到法国国家研究署通过项目 AGDE- ANR-20-CE40-0010-01 资助。

我感谢 Simon Thomas 和 Egemen C¸eken 对本文先前版本提出的意见。

1. Reflective IRS over a shift

1.1. 构造。 设 P 为一个有限考克斯特多面体。假设我们可以找到一对有限考克斯特多面体 P_i，二者都由P铺砌（即每个 $\Gamma_{\widehat{P}_i}$ 都是 Γ_P的有限指标子群），并且对于 $\widehat{P}_i$的每个 i面 $F_i^{\pm}$，使得$F_1^{\pm}$是一个与$F_2^{\mp}$等距的多面体。我们还要求，与 $F_i^{\pm}$相邻的面所成的二面角具有 $\frac{\pi}{2m}$的形式，从而沿这些面粘合 P_i 后得到一个考克斯特多面体。

于是，对于序列 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$，我们可以构造无限多面体 P_a：对所有 $i \in \mathbb{Z}$，将 $\widehat{P}_{a_i}$ 的 $F^+_{a_i}$ 面与 $\frown P_{a_{i+1}}$ 的 $F^-_{a_{i+1}}$ 面粘合而成。

对于 Γ 的子群 H，我们用 $[H]$ 表示其共轭类；注意，共轭类 $[\Gamma_{P_a}]$ 是良定义的。我们有如下观察。

引理4。如果 A 是 $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 的移位不变闭子集，那么子集 $\bigcup_{a\in A}[\Gamma_{P_a}]$ 是 *Chabauty*闭的。

设 $n_i = [\Gamma_P : \Gamma_{P_i}]$。设 ν 是 $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 上的移位不变博雷尔概率测度，令

$$t_\nu = \mathbb{P}_\nu(a_0 = 1)$$

并按如下方式定义另一个概率测度 ν'：

$$\nu'(A) = \frac{1}{t_\nu n_1 + (1-t_\nu)n_2}\int_A n_{a_0} d\nu(a).$$

现在我们按如下方式定义 Γ_P 的一个随机子群 $\mu_n\nu$：令 a 为一个 ν'-随机序列。多面体 P_a 由 P 铺砌；我们在有限多面体 P_{a_0} 内均匀随机选取 P 的一个副本，并将 Γ_P 中与之对应的 Γ_{P_a} 的共轭作为随机子群。

引理5。设 ν 是 $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$上的移位不变博雷尔概率测度。随机子群 μ_ν 是不变的。

证明。最简单的论证是证明测度 μ_ν 是有限支撑IRS的弱极限。

首先假设 ν 是周期的，其周期为有限序列 b =(b_1，.....，b_n)，则轨形 P_α 是与 $\widehat{\ }$的 D_∞-覆盖相对应的有限支撑IRS：该覆盖 P_b 的构造方式是，将与面 $F^-_{b_1}$、$F^+_{b_n}$ 相关联的两个反射映射为 D_∞ 的生成元，并将其他反射生成元 $\Gamma_{\widehat{P}_b}$ 映射为单位元。设 a =(⋯b，b，⋯)，则 Γ_{P_a} 在 Γ_P中的正规化子包含 $\Gamma_{\widehat{P}_b}$，因此我们可以从 $\Gamma_P/\Gamma_{\widehat{P}_b}$中均匀随机选取一个元素，以选取 Γ_{P_a} 的一个随机共轭。从几何上看，这意味着在 P_b 中均匀随机选取 P 的一个随机平移，也就是按照在 i处权重为 $\frac{n_i}{n_1+\cdots+n_n}$ 的分布选取 $1 \le i \le n$，然后在 P_{b_i}内选取 P 的一个随机平移。这正是此时 μ_ν 的定义，因此它是 Γ_{P_b}的共轭类上的均匀分布。

一般而言，测度 ν 本身是周期测度 ν_n的弱极限。显然可以验证，测度 μ_ν 于是是这些不变随机子群 μ_{ν_n}的弱极限，因此其本身是不变的。

关于一种更直接、且可应用于我们情形的论证，参见[ABB+20，引理 13.4]。□

引理 6. 如果 ν 是移位遍历的，那么 μ_ν 是遍历 *IRS*。

~证明。设 A 是 μ_ν 的支撑中的一个共轭不变的博雷尔子集，并且

~假设 $\mu_\nu(A) > 0$。那么根据引理4，A 中的所有子群都具有

~形式，其中 a 属于 ν 的支撑。设 $A = \{a : [\Gamma_{P_a}] \subset A\}$。那么~$A$ 是移位不变的博雷尔集。如果 $\nu(A) = 0$，那么 $\mu_\nu(A) = 0$，这可由~ μ_ν 的定义看出。因此必有 $\nu(A) = 1$，由此可知 A具有满测度。□

1.2. **弥散性的刚性条件**。我们固定一个考克斯特多面体P，如前一节中的 $\mathbb{H}^d$ as。

引理 7。如果：

(1) 对于 $a \in$，多面体 P_a supp(ν) 满足：Γ_{P_a} 同构于$\Gamma_{P_{a'}}$ 当且仅当 P_a 与 $P_{a'}$ 等距；*(2)* Γ_P 中的 Γ_{P_a} 的正规化子是有限的，除非 a 是移位周期的

并且 ν 是 $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 上的移位不变遍历测度，且其支撑不包含在有限移位轨道上，则 μ_ν 是弥散的。

证明。 μ_ν 的支撑包含于 $\{\Gamma_{P_a} : \ a \in$supp(ν)$\}$。因此，根据条件 1，supp(μ_ν) 中的每个同构类都包含在一个 PO(d, 1)-共轭类中。由下文的引理 8，这个共轭类可分解为至多可数个 Γ-共轭类。因此，如果某个同构类具有正的 μ_ν 测度，那么某个 Γ-共轭类也具有正测度。由 μ_ν 的遍历性可知，μ_ν 必须支撑在单个有限共轭类上。最后，条件 2 表明，当且仅当 ν 支撑在有限轨道上时，这种情况才会发生。□

引理 8。设 G 是一个半单李群，Γ、$\Lambda \subset G$ 是 G 的一对 *Zariski* 稠密离散子群。将 Λ 共轭到 Γ 中的 G 元素至多可数个。

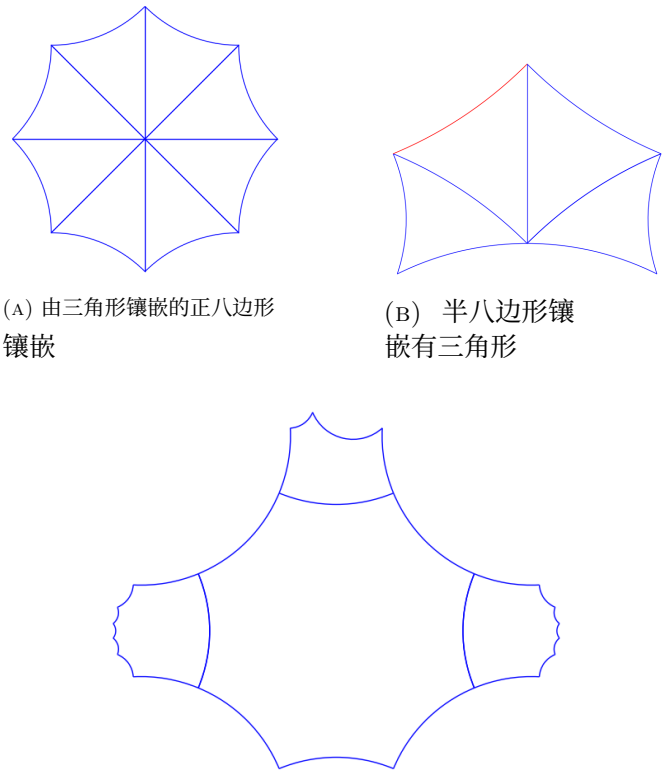
证明。对于给定的元素 $g \in G$，将 g 共轭到 Λ 中的元素集是由中心化子 $Z_G(g)$ 的 Λ-陪集组成的可数（可能为空）并集。由于 Λ 是扎里斯基稠密的，我们有 $\bigcap_{g\in\Lambda} Z_G(g) = Z(G)$ 是离散的，因此将 Λ 中每个元素都共轭到 Λ 中的元素集是 0 维的，特别地，它是可数的。□

2. Diffuse IRSs in Fuchsian groups

令：

- T 为角为 $\frac{\pi}{4}$ 的正双曲三角形；
- O 为正双曲直角八边形（由 8 个 T 平铺而成，见下方图 1a）；
- Q 为半八边形（见图 1b）。

^ ^令 $P_1 = O$，并令 P_2 为将 Q 的一个副本沿着与两个直角相邻的一个面粘合到 O 的一个面上所得的多边形，再将 O 的副本粘合到与已粘合的 Q 不相交的两个相对面上（除等距变换外，只有一种做法，见图 2）。



(A) 由三角形镶嵌的正八边形镶嵌

(B) 半八边形镶嵌有三角形

FIGURE 2. 多边形 P_2

2.1. 刚性。 下面的引理在我们的情形下蕴含了引理 7 中的 (2)。

引理 9. 对于上述的 P_1, P_2，P_a 存在非平凡的自等距变换，当且仅当 a 是移位周期的。

证明。 首先不妨设 a 不恒等于 1，并令 l 满足 $a_l = 2$。设 $f \neq \mathrm{Id}$ 是 P_a 的一个自等距变换。设 x_1, x_2 是 P_{a_l} 的两个顶点，其角为 $\pi/4$。那么，它们的像是边界上角为 $\pi/4$ 的相邻顶点，因此必属于同一个 P_{a_k}，且满足 $a_k = 2$。多边形 P_2 本身没有非平凡的自等距变换[2]，因此存在唯一一个从 P_{a_l} 到 P_{a_k} 的等距变换。

将 $\mathbb{H}^2$ 中每个 x_i 的邻域映到自身或另一个 x_j 的邻域的等距变换，只有恒等变换，或关于两者之间中线的反射。后者不会将 P_{a_l} 映入 P_a，因此必有 $f = f_0$。若 $k = l$，则可推出 $f = \mathrm{Id}$，因此有 $k \neq l$。

现在我们证明 $a_{l+1} = a_{k+1}$：假设两者之一等于 2（否则两者都等于 1，结论便已成立）。如果 $a_{l+1} = 2$，那么它

[2]这样的等距变换会交换夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的两个顶点，但它们的邻边长度不同。

由上一段可知， $P_{a_{k+1}}$ 和 $f(P_{a_{l+1}})$ 都粘接在 P_{a_k}的同一条边上。因此，在 O 的第一个副本之后，会有角 $\frac{\pi}{2}$ 和$\frac{\pi}{4}$；若 $a_{k+1}=1$，这就不可能（至少会有 3 个角$\frac{\pi}{2}$）。所以 $a_{k+1}=1$；如果我们从 $a_{k+1}=1$ 开始，也可以用同样的方法证明 $a_{l+1}=1$。接着通过递归论证可知，对所有 n都必须有 $a_{n+k-l}=a_n$，也就是说， a 的周期为 $k-l\neq 0$。□

若 P 是以点 $x_0\in P$ 为根的 $\mathbb{H}^2$ 凸多边形，则其角序列是在 $[0,\pi[^{\mathbb{Z}}$ 中得到的序列：从根 x_0 在每个边界分支上的投影开始，按逆时针顺序依次列出各顶点处的角（若 P 紧致，则这是一个单一的周期序列）。

下面两个引理表明，对于如上由 P_1 和 P_2 构造的不可变随机子群 μ_ν，引理 7 中的性质 (1) 成立$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$。结合蕴含性质 (2) 的引理 9，这表明对于非周期的 ν，不可变随机子群 μ_ν 提供了一个证明定理 1 的例子。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$**引理 10.** 对于如上的 P_1、P_2，两个多面体 P_a、$P_{a'}$ 等距，当且仅当它们的角序列在平移意义下相同。

证明。 我们证明，角序列在平移意义下唯一确定 a。现在可以假设角序列中包含一个 (4,4) 片段，并通过平移使该片段对应于 P_{a_0} 中的两个 $\frac{\pi}{4}$ 角 $a_0=2$。设 N_1 为角序列中 (4,4) 之后 2 的个数，N_{-1} 为它之前$\bar{}$2 的个数。那么 $k_1=\frac{N_1-5}{2}$ 等于满足 $a_1=\cdots=a_i=1$ 的$\underline{i\geq}1$ 的个数，而 $k_{-1}=\frac{N_{-1}-5}{2}$ 等于满足 $a_{-1}=\cdots=a_i=1$ 的$\underline{\quad i\leqq}-1$ 的个数。因此，角序列确定了 a 中 2 前后 1 的个数，从而确定了 a 本身。□

引理 11。 设 Γ_1、Γ_2 是与多边形 P_1、P_2相关联的反射群，这些多边形位于 $\mathbb{H}^2$ 中，其所有角均为 $\pi/2$或 $\pi/4$，且具有有限多个边界分支。若 Γ_1 与 Γ_2 同构，则 P_1 和 P_2 的角序列彼此相差一个平移或镜像。

证明。我们注意到， [Bah05 定理 4 给出了一个更一般得多的结果。2]（该结果只针对有限生成的 Coxeter 群表述，但可推广到与局部有限图相关联的 Coxeter 群。）我们针对这里的特殊情况给出证明；由于定义图具有线性结构，这里的证明比一般情况简单得多。

我们首先证明 P_i 只有一个边界分支的情形。

我们将多面体的角序列记为 (α_i) 和 (β_i)，并使用规范表示

$$\Gamma_1=\langle s_i|(s_is_{i+1})^{\pi/\alpha_i},s_i^2\rangle,\ \Gamma_2=\langle t_i|(t_it_{i+1})^{\pi/\beta_i},t_i^2\rangle.$$

设 $\varphi:\ \Gamma_1\to\Gamma_2$ 为一个同构；我们将证明，对每个 $i\in\mathbb{Z}$，$\varphi(s_i)$都与某个 $t_{\varepsilon i+k}$ 共轭，其中 $\varepsilon\in\{\pm1\}$ 和 $k\in\mathbb{Z}$，由此关于角序列的结论便可立即得出。

Γ_1 中的任意对合要么是反射，要么是两个具有正交轴的反射的乘积；在后一种情形下，这对反射必与一对 s_i，s_{i+1}^g 共轭（其中 $g \in \langle s_i,\ s_{i+1}\rangle$）。我们不妨假设至少有一个 α_i 等于 $\pi/2$，并将其对应的序列平移，使其为α_0，于是 $\langle s_0,\ s_1\rangle \cong (\mathbb{Z}/2)^2$。$\Gamma_2$ 中所有与$(\mathbb{Z}/2)^2$ 同构的子群，都包含在某个有限二面体子群 $\langle t_i,\ t_{i+1}\rangle$ 中，因此必有

$$\varphi(s_0), \varphi(s_1) \in \langle t_k, t_{k+1}\rangle$$

对某个 $k \in \mathbb{Z}$。由于（$s_0 s_1$）在 Γ_1 中没有平方根，我们必须有 $\beta_k = \pi/2$，因此 $\langle t_k,$ $t_{k+1}\rangle$ 中的对合恰好是 t_k, t_{k+1}，$(t_k t_{k+1})$。此外，我们不可能有 φ（s_0）$= t_k t_{k+1}$：若果真如此，则 φ（s_0）φ（s_{-1}）将生成一个无限子群（因为在这种情况下，φ（s_0）和 φ（s_{-1}）的不动点集不相交），这不可能，因为 $\langle s_{-1}, s_0\rangle$ 是有限的。

由前一段可知，我们有 φ（s_i）$= t_k$ 或 t_{k+1}，类似地，φ（s_1）等于 t_k，t_{k+1}中的另一个。必要时反转序列（β_i）的顺序，我们可以假设

$$\varphi(s_0) = t_k,\ \varphi(s_1) = t_{k+1}.$$

在本节其余部分中，我们证明 $\varphi(s_2)$ 与 t_{k+2}共轭；并将这一论证作为归纳步骤，可得对所有 i，$\varphi(s_i)$ 都与 t_{k+i} 共轭。

若 $\alpha_1 = \pi/2$，则可用上述相同的论证证明 $\varphi(s_2) = t_{k+2}$。若 $\alpha = \pi/4$，则由上述相同的论证，$\varphi(s_2)$ 是 $\langle t_{k+1},\ t_{k+2}\rangle$ 中的一个反射，且与 t_{k+2}共轭；也就是说，它是 t_{k+2} 或 $t_{k+1}t_{k+2}t_{k+1}$，因为对合 $t \in \langle t_{k+1},\ t_{k+2}\rangle$ 只有这两种可能，使得 $(t_{k+1}t)^4 = 1$，而 $(t_{k+1}t)^2 \neq 1$。

在一般情形下，P_i 可能各自具有（有限多个）不同的边界分支，群 Γ_{P_i} 同构于自由积 $\Gamma_{Q_{i,\ 1}} * \cdots * \Gamma_{Q_{i,\ m_i}}$，其中 $Q_{i,\ j}$ 是对应于 P_i的边界分支的考克斯特多面体。我们断言，具有单个边界分支的考克斯特多面体的反射群不可自由分解；更一般地说，连通图的考克斯特群（若两个生成元的乘积具有有限阶，则在它们之间连一条边）也是如此。为证明这一点，注意到由于所有考克斯特生成元都是对合，在将 Γ 分解为自由积时，它们必定都属于某个自由因子的一个共轭。另一方面，G 中由边相连的两个生成元必定属于同一个自由因子的同一个共轭，因为它们的乘积具有有限阶。因此，由连通性可知，任意两个生成元都属于同一个自由因子的同一个共轭。由此可知该分解是平凡的。

根据库罗什同构定理 [Kur34]，可知 $\Gamma_{Q_{i,j}}$ 两两同构；根据前一种情形，它们的角序列必定两两相等或互为镜像。□

3. Diffuse IRSs in right-angled reflection groups

本节中我们假设 $d \geq 3$。

3.1. 构造。令 P 为 $\mathbb{H}^d$ 中一个有限体积的直角多面体。注意，若 F, E 是 P 中不相邻的面，则它们不相交（例如，因为 P 是直角的，每个顶点的链接都是一个单纯形）。

取 P 的一个面 F。令 F' 为一个由 F 铺砌的多面体（位于 $\mathbb{H}^{d-1}$ 中），使其 $(m-2)$-面数量大于任何对偶图直径至多为 d 的 K 铺砌多面体的面数量，其中 K 是 P 的任意一个面：由于这样的图只有有限多种，因此存在这样的 F'；事实上，体积足够大的任何 F 铺砌多面体都满足条件。我们还要求，F' 的任何一个 $(m-2)$- 面由 F 的面铺砌所得的图，其直径至多为 2（例如，可以通过依次沿不相交的面加倍来构造 F'，从而保证这一点）。

设想在 $\mathbb{H}^d$ 的 P 铺砌中观察 F'，令 Q_0 为所有与 F' 相交于 F 的某个平移副本中的 P 的副本之并。令 Q 为只包含位于相对于 F' 任意选定一侧的那些 P 的子多面体。则 Q 有一个与 F' 等距的侧面。

我们声称，Q 的所有其他面都可以由 P 的某个面铺砌，其对偶图的直径至多为 d。令 D 为这样一个面。我们首先在 D 不与 F' 相邻的情况下证明这一断言：此时，D 由 P 的一个面 E 构造而成，该面在 P 的对偶图中与 F 的距离至少为 2；具体做法是关于 P 的各个面 F_0 对其进行反射，其中这些面既与该面相邻，又与 F 相邻（我们称 F_0 为将 E 与 F 连接起来）。如果 E 与 F 的距离等于 2，那么 D 等于 $\Pi \cdot E$，其中 Π 是所有将 E 与 F 连接起来的面的交集的稳定子，因此其对偶图的直径为 k，其中 k 是该交集在 $\mathbb{H}^d$ 中的余维，且至多为 $(d-1)$。如果 E 与 F 的距离为 >2，即不存在将 E 与 F 连接起来的面，那么面 D 实际上是 P 的一个面。

在 D 与 F' 相邻的情况下，其铺砌与其和 F' 的交集的铺砌同构；根据第二段中关于 F' 的第二个假设，该交集的直径至多为 2。

设 F'' 是 P 的对偶图中距离 >2 于 F 的一个面，并且F_+, F_- 是 P 的两个面，它们在对偶图中距离 >2 于 F''（通过将 P 替换为适当的加倍对象，我们可以确保它们存在）。将 P^ 沿着 ∂Q 中 F'' 的一个副本与 Q 粘合起来，我们得到一个多面体 P_2，它有一个面与 F' 等距，而其余所有面都具有严格更小的价（因为它们由 P 的面铺砌而成，而根据上面的^断言，其图的直径至多为（$d+1$））。此外，P_2 中与 F_+ 或 F_- 相邻的所有面都与 P 的面等距。

^我们进一步选择 F'' 的粘合副本，使得 P_2 没有非平凡的自等距变换：这是可能的，因为这样的等距变换必须同时保持 F'（因为它是唯一的最高次数面）以及粘合后的 P（因为它是唯一一个多面体

与 F'不相交），因此，只要选择合适的粘合方式，使粘合后的 P 的投影不包含 F'' 的中心，就能确保唯一的等距变换是单位元。

对于另一个多面体，我们只需选择 $P_1 = P$。

3.2. 验证。 以下两个引理证明，上述构造的两个多面体均满足引理 7 中的两个条件，从而证明定理 2。

引理 12。 *设 P_1, P_2 如上所述，则两个多面体 $P_a, P_{a'}$ 彼此等距，当且仅当它们在平移意义下 $a = a'$。*

证明。首先，由 $\widehat{P_2}$ 的构造可知，对于任意 $a \in \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$，$P_a$ 中最大度数的任一面都是 P_2的某个副本中的 F'-面。（这在 P_2中成立；沿着 F_+ 粘合 P_1 或 P_2 的副本时，我们只会增加一些面，这些面具有由直径为 2 的 P 的面构成的铺砌，因为与 $F_\pm$相邻的任一 P_i 的所有面都是 P的面。）

设 $a \in \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$，设 k 满足 $a_k = 2$，并设 f 是 P_a 的一个自等距变换。那么，对于某个满足 $a_l = 2$ 的 l，$f(P_{a_k}) = P_{a_l}$：由度数的极大性可知，f 必须将 P_{a_k} 的 F'-面 F'_{a_k} 映到某个此类 P_{a_l}的 F'-面 F'_{a_l}。接着，借助与证明 P_2 没有对称性时相同的论证，我们可以看到，满足这一条件的等距变换是唯一的；它还会将 P_{a_k} 中与 F' 不相交的 P 的副本映到 P_{a_l} 中的那个副本。由于后者是 P_a 中距离 F' 为 1 的唯一一个 P 副本，f 必须等于这个等距变换，因此 $f(P_{a_k} = P_{a_l}$，且 f 是唯一满足条件的等距变换。通过归纳论证（参见引理 9 的证明），可得 f 要么是单位元，要么 $k \neq l$ 且 a 是 $|k-l|$-周期的。□

引理 13。 *设 $d \geq 4$ and R, R' 是两个直角多面体，$\mathbb{H}^d$ 中的所有 $(d-1)$面都具有有限的 $(d-1)$体积，且其边界是连通的。那么，当且仅当 R 与 R'等距时，Γ_R 与$\Gamma_{R'}$ 同构。*

证明。根据 [Rad03][3] 主要结果的一个特例，从 Γ_R 到 $\Gamma_{R'}$ 的任意群同构，都是由 R 与 R'的对偶图之间的一个同构诱导的。因此，它们作为抽象多面体是同构的。由此可知，它们的余维 1 面也两两等距。由于这些是维数为 $d-1 \geq 3$的紧致双曲直角多面体，根据莫斯托–普拉萨德强刚性定理 [Mos73, Pra73]，可知它们必定两两等距。由于在 $\mathbb{H}^d$中，沿余维 1 面以直角拼接两个 $(d-1)$-多面体，在等距意义下只有一种方式，因此进一步可知其边界分支

[3]另见 [Bah05，定理 4.1]；E. Green 在其未发表的学位论文中较早证明了一个更弱的结果，其中已经包含直角 Coxeter 群。相关文献中的表述仅涉及与有限图相关的直角 Coxeter 群，但其中的论证几乎无需修改即可推广到与局部有限图相关的群。

的 P与 P'两两同构。由于 ∂P, $\partial P'$是连通的，因此存在唯一一个 $\mathbb{H}^d$ 的等距变换，它将两者之间的等距变换延拓，并诱导出 P 与 P'之间的等距变换。

□

4. Faithful and spanning invariant random subgroups in higherdimensions

4.1. 术语。 设 Γ是一个可数群， μ 是 Γ中的一个不变随机子群。我们回顾两个与 μ相关的自然对象，它们由 [GH23]引入。核 K_μ 是 μ 的最大正规子群，它包含于 Γ中几乎每一个子群（这是不变随机子群对有限指数子群或近正规子群的正规核的推广）。换言之

$$K_\mu = \{x \in \Gamma : \mathbb{P}_\mu(x \in H) = 1\}.$$

若 μ 满足 $K_\mu = \{1\}$，则称其为忠实的 不变随机子群（换言之，不存在包含于 μ中几乎每一个子群的非平凡正规子群）。具体来说，这意味着

$$\forall g \in \Gamma \setminus \{1\} \quad \mathbb{P}_\mu(g \notin H) > 0.$$

E_μ 的正规包络 μ 是包含 μ几乎所有子群的最小正规子群（即正规生成子群的推广），因此

$$E_\mu = \langle x \in \Gamma : \mathbb{P}_\mu(x \in H) > 0 \rangle.$$

若 IRS μ 满足 $E_\mu = \Gamma$，则称其为张成的 。等价地，存在 Γ 的正规生成集 S，使得对所有 $s \in S$， $\mathbb{P}_\mu(s \in H) > 0$ 。

4.2. 凸包络。 若 $P \subset \mathbb{H}^d$ 是一个紧致 直角多面体，且$S \subset \mathbb{H}^d$, $d = 3, 4$，则定义其凸包络 $\mathrm{Conv}_P(S)$ 为包含铺砌 $\mathbb{H}^d = \Gamma_P \cdot P$中 S 的所有多面体的最小凸并。凸包络始终是一个直角多面体。

以下引理将 [Pat16 的引理 3.1 和 4.2] 从测地线推广到凸子集，但其证明几乎可由上述文献中的结论直接得出。

引理 14. 如果 $C \subset \mathbb{H}^d$ 是凸的，那么 $\mathrm{Conv}_P(S)$ 包含在 $D + \log(2+\sqrt{3})$邻域内，其中 C （ D 是 P的直径）。

证明。 [Pat16、引理 3.1、引理4.2]中的结论表明，对于任意测地线 $\alpha \subset \mathbb{H}^d$，都有 $\mathrm{Conv}_P(\alpha) \subset N_R(\alpha)$，其中 $R = D + \log(2+\sqrt{3})$，而 $N_R(S)$ 表示 S 在 $\mathbb{H}^d$ 中的 R 邻域。如果 H 是 $\mathbb{H}^d$ 中的一个超平面，那么 $\mathrm{Conv}_P(H) = \bigcup_{\alpha \subset H} \mathrm{Conv}_P(\alpha)$，因此立刻可得 $\mathrm{Conv}_P(H) \subset N_R(H)$。同理，对于由 H界定的半空间 H^+，结论也成立。

现在，如果 C 是任意凸子集，则有

$$\mathrm{Conv}_P(C) = \bigcap_{H^+ \supset C} \mathrm{Conv}_P(H^+)$$

（显然，因为 $C = \bigcap_{H^+ \supset C} H^+$），因此

$$\mathrm{Conv}_P(C) = \bigcap_{H^+ \supset C} N_R(H^+).$$

由于 $\bigcap_{H^+ \supset C} N_R(H^+) = N_R(C)$（这可以通过在 C 上使用投影，在任意 CAT(0) 空间中看出），我们也得到了关于 C 的结果。□

4.3. 定理 3 的证明。设 P 是 $\mathbb{H}^d$ 中的一个紧致直角多面体，$d \geq 2$，以及 $\Gamma = \Gamma_P$。我们将使用以下记号

$$B_R = \{\gamma \in \Gamma : d(o, \gamma o) < R\}.$$

我们在 P 中固定一个内点 o，并令 $P_n = \mathrm{Conv}_P(B(o,n))$，且令 μ_n 为 Γ 中的 IRS $\mu_{\Gamma_{P_n}}$。

设 μ_0 是 μ_n 的一个聚点。记 $\mu_0 = t\mu_1 + (1-t)\delta_{\{\mathrm{Id}\}}$；根据 [Rai24]，我们有 $t > 0$，且 μ_1 支撑在反射群上：事实上，由下面的引理 15 可知，在此情形下我们有 $t = 1$。我们将证明，μ_1 的几乎每个遍历分量都必须是忠实的，并且是张成的。

4.3.1. 张成性。

引理 15. *存在常数 $C, c > 0$，使得对于所有 n, R 以及 P 的所有面类型 s*

$$\frac{\mathrm{vol}(x \in P_n : \text{存在一个类型为 } s \text{ 的面，其与 } x \text{ 的距离为 } \leq R\,) \geq 1 - Ce^{-cR}}{\mathrm{vol}(P_n)}.$$

证明。我们将利用 Ratner 对幺幂不变测度的分类，证明以下命题作为推论：存在 $R > 0$，使得对于所有 n，对于球面 $\partial B(o,n)$ 上的任意 x，P_n 中都存在一个类型为 s 的面，其与 x 的距离为 $\leq R$。由引理 14 以及双曲球体积的指数增长可知，P_n 中与 $\partial B(o,n)$ 的距离为 $\geq T$ 的部分所占体积比例为某个 $d > 0$ 的 $O(e^{-dT})$，且对 n 一致，因此该引理立即成立。

为证明这一断言，我们注意到，如果 $v \in T^1 P$ 既是平移体 γP（其中某个 $\gamma \in \Gamma_P$）的一个面 F 的向外法向量，又同时是 $\partial B(o,n)$ 的向外法向量，那么 F 位于 P_n 的边界上。对于 v 在 P_n 内部的一个开邻域内的情形，这一结论仍然成立（并且仍与 $B(o,n)$ 相切）。设 U_s 为将这样的邻域平移回 P 后所得的邻域：我们可以假设 U_s 中向量的基点与 ∂P_n 的距离为 ≤ 1。

以一个边界点为根，$\partial B(o,\ n)$ 的外法向量场（在 $T^1\mathbb{H}^d$ 的子集上的基点格罗莫夫–豪斯多夫拓扑中）收敛于一个 horosphere 的外法向量场。若我们考虑后者中一个 R-球在 $T^1 P = \Gamma_P \backslash \mathbb{H}^d$ 中的像上的均匀概率测度，则由幺幂子群的可 amen 性以及拉特纳测度分类定理 [拉特91] 可知，该测度弱收敛于 $T^1 P$ 上的李维尔测度。特别地，当 R 足够大时，落在每个 U_s 中的概率都为正，因此（当 n 足够大时，原则上可能取决于 R）在 $\partial B(o,\ n)$ 上的 R-球中，这一概率也为正（以任意点为根）。由

上一段可知，这意味着从 $\partial B(o,\ n)$上的任意一点出发，距离 $\leq R+1$ 处都存在一个类型为 s 的 P_n 的面。□

由此引理可知，对于任意 $R>0$，若我们枚举 $B_R=\{g_1,\dots,g_{m_R}\}$，那么对于 Γ 的任意 Coxeter生成元 s

$$\mathbb{P}_{\mu_n}(g_i s g_i^{-1}\in H \text{ for some } 1\leq i\leq m_R)\geq 1-Ce^{-cR}.$$

由此可得

$$\mathbb{P}_{\mu_n}(\forall s\,\exists g_s\in B_R:\ g_s s g_s^{-1}\in H)\geq 1-C'e^{-cR}.$$

由于 B_R 是有限的，因此同一性质对 μ_0 也成立，进而（由马尔可夫不等式）可知，μ_0 的几乎每个遍历分量几乎必然包含 Γ 的每个 Coxeter生成元的一个共轭。特别地，它必定是张成的。

4.3.2. 忠实性。

引理 16. 设 $C=2+\sqrt{3}+D$。对于任意 $R>0$，当 n 足够大时，对任意 $x\in P_n$，存在一点 $y\in P_n$，使得 $d(x,y)\leq R+C$，且 $B(y,R)\subset P_n$。

我们还可以假设 $y\in\Gamma\cdot x$。

证明。令 D为 P的直径。根据引理 14，$B(n)\subset P_n\subset B(n+C)$。结果的第一部分立即可得：我们将 x 投影到凸子集 $B(n)$上，得到点 x'，其到 x 的距离至多为 $2+\sqrt{3}+D$，然后沿着经过 x' 的半径在 $B(n)$内移动，直到其到边界 $\partial B(n)$的距离为 $\geq R$：所得点满足引理陈述第一段中的结论。

附加结论是显然的，因为 Γ在 $\mathbb{H}^d$中是余紧的。 □

由于集合 $\{g\in\Gamma:\ d_X(o,\ go)\leq R+C\}$是有限的，根据此引理，对于任意 $R>0$，我们都有（记与反射子群 $H\in$Sub$_\Gamma$相关联的多面体为 P_H）：

$$\mathbb{P}_{\mu_1}(\exists g\in\Gamma:\ B(go,R)\subset P_H)=1.$$

因此，μ_1 的几乎每个遍历分量也满足这一性质。令 ν 为这样的分量。

对于给定的 $g\in\Gamma$，满足 $B(gK,R)\subset P_H$ 的反射子群集合 $H\in$Sub$_\Gamma$ 是 Chabauty拓扑中的开集。由 μ_1 支撑的紧致性可知，存在 $g_1,\dots,g_N\in\Gamma$，使得

$$\mathbb{P}_\nu(\exists 1\leq i\leq N:\ B(g_iK,R)\subset P_H)=1.$$

从而存在一个 $g\in\Gamma$，使得

$$\mathbb{P}_\nu(B(gK,R)\subset P_H)>0.$$

现在，$B(gK,\ R)\subset P_H$ 表示，对于每个非平凡的 $x\in B_R$，我们都有 $x\notin gHg^{-1}$。由 μ_1 的不变性可得

$$\mathbb{P}_\nu(H\cap B_R=\{1\})=\mathbb{P}_\nu(gHg^{-1}\cap B_R)>0.$$

由于 R 是任意的，并且 $\Gamma = \bigcup_{R>0} B_R$ 我们得到，对于任意非平凡的 $x \in \Gamma$，都有 $\mathbb{P}_\nu(x \notin H) > 0$，因此 ν 是忠实的。

References

[ABB+20] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、Tsachik Gelander、Nikolay Nikolov、Jean Raimbault 和 Iddo Samet。《局部对称空间的 L^2-不变量增长》。第二部分：秩一中的奇异不变随机子群。 *Int. Math. Res. Not.*，2020(9):2588–2625，2020。[AGV14] Mikl´os Ab´ert、Yair Glasner 和 B´alint Vir´ag。《不变随机子群的 Kesten 定理》。 *Duke Math. J.*，163(3):465–488，2014。[Bah05] Patrick Bahls。 *The isomorphism problem in Coxeter groups*. 伦敦：Imperial College Press，2005。[Bow15] Lewis Bowen。《自由群的不变随机子群》。 *Groups Geom. Dyn.* 9 3 891 916, 2015 ，( ): – 。[Duf10] Guillaume Dufour。《双曲空间中直角 Coxeter 多面体札记》。 *Geom. Dedicata*，147:277–282，2010。[GH23] Yair Glasner 和 Anton Hase。《丛状双曲群中的忠实不变随机子群》。 *Bull. Lond. Math. Soc.*，55(4):1760–1772，2023。[Kur34] Alexander Kurosch。《任意群自由积的子群》。 *Math. Ann.*，109:647–660，1934。[Mos73] G. D. Mostow。 *Strong rigidity of locally symmetric spaces* 78 *Ann.* , 1973 *Math. Stud.* 普林斯顿大学出版社卷，普林斯顿，新泽西州，。[Pat16] Priyam Patel。《特定双曲流形群的剩余有限性增长》。 *Geom. Dedicata*，185:87–103，2016。[Pra73] Gopal Prasad。《Q-秩 1 *Invent. Math.* 21 255 286, 格的强刚性》。 , : – .[PV05] Leonid Potyagailo 和 Ernest Vinberg。《双曲空间中的直角反射群》。 *Comment. Math. Helv.*，80(1):63–73，2005。[Rad03] David G. Radcliffe。《群图积的刚性》。 *Algebr. Geom. Topol.*，3 1079 1088, 2003 : – . [Rai24] Jean Raimbault。《考克斯特多胞体与 Benjamini–Schramm 收敛》，2024。[Rat91] Marina Ratner。《Raghunathan 拓扑猜想与幺幂流的分布》。 *Duke Math. J.*，63(1):235–280，1991。[Tho22] Simon Thomas。《弥散不变随机子群》。 *Proc. Am. Math. Soc.*，150 12 5417 5419，2022 ( ): – 。

Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373, CNRS, Aix-MarseilleUniversité*Email address*: jean.raimbault@univ-amu.fr