黑洞附近光的光学回波

Suting Ju[1]，Jingxuan Zhang[1]，和 Li-Gang Wang[1*]*School of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China*（日期：2026年1月6日）

强引力场下的光偏折被称为强引力透镜效应，为研究时空几何提供了有力手段。此外，实验室类比模型被用于研究弯曲时空的影响，并探索光学器件的设计。在此，我们应用类比引力框架，揭示了黑洞附近脉冲点源产生的光学回波行为；该行为强烈依赖于黑洞光子球与光源持续时间之间的相互作用。我们将史瓦西时空建模为弗拉姆抛物面，并利用解析测地线解和惠更斯–菲涅耳原理计算回波响应。特别是，当脉冲持续时间对应的空间尺度与光子球相当时，时间响应中的明亮干涉条纹上会出现连续的“回波尾部”。对时间域和频域的分析表明，这些回波尾部是入射脉冲与光子球之间发生共振的标志。这项工作从波动光学视角揭示了动态源与黑洞之间的相互作用，为强引力透镜效应提供了一个桌面级观测窗口。

arXiv:2601.02197v1 [gr-qc] 5 Jan 2026

I. 引言

广义相对论将引力解释为时空的几何效应。近期，对超大质量黑洞 M87* [1] 和 Sgr A* [2] 的视界尺度观测再次证明了该理论的正确性。致密天体周围的强引力场会导致严重的光偏折，呈现出强引力透镜效应 [3–5]。此外，强引力透镜效应使光子在逃逸至无穷远之前能够绕行多圈。两条光线绕行次数不同所产生的时间延迟会使观测者接收到回波。瞬变点光源的回波响应已在不同的四维时空中得到探讨，例如史瓦西时空 [6] 和克尔时空 [7–9]。在时域天文学领域，瞬变透镜效应及其回波也被用于探测和应用 [10], ，例如探测原初黑洞 [11]。显然，随着探测精度不断提高，研究致密天体附近脉冲光源的回波信号，将有望加深我们对强引力场的理解与探索。

除了天文观测之外，类比引力为研究遥远天体的物理特性提供了另一种途径。人们提出了多种物理系统来模拟黑洞并观测相关的有趣现象，包括水槽 [12], 、玻色-爱因斯坦凝聚体 [13], 和非线性光学实验 [14], 。尤其是波导系统，已成为模拟弯曲时空的多功能平台。基于变换光学理论 [15–17], ，人们设计了具有特定折射率分布的波导，以模拟弯曲时空并研究其中的效应，例如天体力学 [18], 、引力透镜 [19], 、爱因斯坦环 [20], 、（反）德西特度规 [21], 以及史瓦西外部与内部度规 [22, 23]。除了梯度波导，弯曲波导曲面也可用于模拟弯曲空间。例如，具有恒定高斯曲率的弯曲波导可作为宇宙学常数非零的宇宙的类比模型，并已用于研究散斑图样动力学的演化 [24]。一种受史瓦西度规启发的抛物面结构被用于控制光的演化，并在其瓶颈附近表现出隧穿效应[25]。研究人员还利用弯曲波 [26] 和光束 [27]，探索了基于莫里斯-索恩可穿越虫洞度规的弯曲波导。事实上，梯度波导与弯曲波导之间存在等效关系 [28–30]。这些桌面实验搭起了理论相对论与实验室物理之间的桥梁。此外，基于波导的类比引力研究为光的操控开辟了新途径。例如，弗拉姆抛物面纳米结构能够以多种方式控制光 [25]。将史瓦西时空中的光子球引入混沌台球的空间折射率分布中，可以实现对混沌的控制 [31]。

本研究受到强引力场中光沿多条测地线环绕传播的行为，以及关于二维曲面波导的既有研究启发，聚焦于弗拉姆抛物面——一种源自史瓦西时空的旋转曲面——上光子球附近测地线的多次环绕 [32]。我们研究脉冲点源的

* lgwang@zju.edu.cn

时域和频域响应，研究基于对弗拉姆抛物面上测地线的详细分析 [33] ，以及二维曲空间中的惠更斯-菲涅耳原理 [34]。这些结果加深了我们对致密天体诱发的回波信号的理解，并有助于拓展利用弯曲波导模拟天文现象的范围，推动弯曲波导作为光学器件的潜在应用。

II. 理论与公式

这里，我们首先说明理论模型和分析方法。如图 1(a) 所示，我们考虑史瓦西黑洞附近的光脉冲，其可用弗拉姆抛物面进行数学描述，以模拟黑洞附近赤道切片时空。光源随机放置在初始点（r_i，φ_i），观测者位于点（r_o，φ_o）。由于曲面的旋转对称性，不失一般性，我们可以假设光源位于直线 $\varphi_i = 0$ 上；由于输出场关于 φ_o 在（π，2π）内对称，因此观测角 φ_o 可视为从 0 变化至 π。下面，我们简要给出曲面上测地线的理论表达式，据此可以计算测地线及其长度；随后，我们使用惠更斯-菲涅耳原理 [34] 计算观测位置处的输出场。

A. 弗拉姆抛物面上的测地线

我们首先来推导黑洞附近的测地线。史瓦西黑洞的时空度规为 [35]

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})c^2dt^2 + (1 - \frac{r_g}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{1}$$

其中，r_g 表示事件视界的半径，c表示光速。这里，我们令 $t = const$ 和 $\theta = \pi/2$ （赤道切片），从而选取史瓦西时空的一个子空间，度规可化简为

$$ds^2 = \frac{r}{r - r_g}dr^2 + r^2d\varphi^2. \tag{2}$$

这表示某一时刻史瓦西时空的赤道面。度规也可写成矩阵形式 $g_{\mu\nu}$，(μ，$\nu = 1$，2)，其中 $g^{\mu\nu}$ 是$g_{\mu\nu}$的逆矩阵。将式（2）嵌入三维平直时空$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2$，可得 $z = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}$，它是旋转曲面的母线，该曲面称为弗拉姆抛物面 [32]。

弯曲空间中的光沿其测地线传播。在弗拉姆抛物面的曲面上，测地线遵循以下方程

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0, \tag{3}$$

其中 $x^\mu = (x^1, x^2) = (r, \varphi)$，克里斯托费尔符号为 $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$。测地线的切向量 $\frac{dx^\mu}{ds}$ 满足 $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds} = 1$，如式（2）所示。通过解析计算，可以推导出式（2）所示曲面上的测地线轨道方程如下

$$(\frac{dr}{d\varphi})^2 = r^4(1 - \frac{r_g}{r})(\frac{1}{r_p^2} - \frac{1}{r^2}), \tag{4}$$

其中 $r_p = r_i^2(d\varphi/ds)_i$ 是一个积分常数，由测地线的初始条件决定；它也可以看作是根据式（3）导出的不同测地线（位于光源与观测者之间）的轨道近日点。显然，当 $r^2 = r_p^2$ 时，式（4）右侧趋于零，表明测地线到达转向点。

在任意曲面上计算测地线时，最通用的方法是对方程 (3) 进行数值求解。数值求解方程 (3) 时，初始角度决定了所绘制的测地线。由于我们考虑光线在弗拉姆抛物面的事件视界周围环绕多圈，因此寻找对应的角度更加困难。对于弗拉姆抛物面，不仅可以推导出测地线轨道方程 (4)，还可以得到其

解析表达式。Eufrasio 等人 [33]研究了弗拉姆抛物面上测地线轨道的解析表达式。弗拉姆抛物面上的测地线分为两种类型，可根据近星点 r_p 加以区分（根据 [33]，近星点也对应于冲击参数）。当 $r_p > r_g$时，存在规则测地线，且这些测地线永远不会到达事件视界。将方程 (4) 关于 r从无量纲近星点 $\widetilde{r}_p = r_p/r_g$ 积分到无量纲半径 $\widetilde{r} = r/r_g$，即可得到

$$\varphi_r(\widetilde{r}) = 2\sqrt{\frac{\widetilde{r}_p}{\widetilde{r}_p - 1}}\left(F\left[\frac{\pi}{2}, \frac{-2}{\widetilde{r}_p - 1}\right] - F\left[\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{(\widetilde{r}_p - 1)(\widetilde{r} + \widetilde{r}_p)}{2\widetilde{r}_p(\widetilde{r} - 1)}}\right), \frac{-2}{\widetilde{r}_p - 1}\right]\right), \tag{5}$$

其中 F 是第一类椭圆积分 。式（5）的逆变换可得规则测地线如下

$$\widetilde{r}_r(\varphi_r) = \widetilde{r}_p \Big/ \left(2\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{\widetilde{r}_p - 1}{4\widetilde{r}_p}}\varphi_r, \frac{-2}{\widetilde{r}_p - 1}\right] - 1\right), \tag{6}$$

其中 cn 为雅可比椭圆余弦函数。角度 φ_r 从（$-\varphi_{r,\infty}$，$\varphi_{r,\infty}$）变化，其中 $\varphi_{r,\infty} \equiv$ 是式（5）中的 $\lim_{\widetilde{r}\to\infty}\varphi_r(\widetilde{r})$。

当 $r_p \le r_g$ 时，存在最终会到达事件视界的奇异测地线。在这种情况下，式（4）的积分下限变为 $\widetilde{r}_{low} = \widetilde{r}_g = 1$，上限仍为 $\widetilde{r}_{upper} = \widetilde{r}$。这类奇异测地线的表达式为

$$\varphi_s(\widetilde{r}) = 2\sqrt{\frac{\widetilde{r}_p}{1 - \widetilde{r}_p}}\left(F\left[\frac{\pi}{2}, -\frac{1 + \widetilde{r}_p}{1 - \widetilde{r}_p}\right] + iF\left[i\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{(1 - \widetilde{r}_p)(\widetilde{r}_p + \widetilde{r})}{2\widetilde{r}_p(\widetilde{r} - 1)}}\right), \frac{2}{1 - \widetilde{r}_p}\right]\right), \tag{7}$$

其中 $\widetilde{r}_p < 1$，其 中 $\widetilde{r}_p$ 应理解为相对冲击参数。式（7）的逆变换 s

$$\widetilde{r}_s(\varphi_s) = \frac{\widetilde{r}_p\left(1 - \mathrm{sn}^2\left[i\sqrt{\frac{1-\widetilde{r}_p}{4\widetilde{r}_p}}\varphi_s, \frac{2}{1-\widetilde{r}_p}\right]\right)}{\mathrm{sn}^2\left[i\sqrt{\frac{1-\widetilde{r}_p}{4\widetilde{r}_p}}\varphi_s, \frac{2}{1-\widetilde{r}_p}\right] + \widetilde{r}_p}, \tag{8}$$

其中 sn 表示雅可比椭圆正弦函数， φ_s 的取值范围为 (0,$\varphi_{s,\infty}$)，其中 $\varphi_{s,\infty} = \lim_{\widetilde{r}\to\infty}\varphi_s(\widetilde{r})$。

当光的测地线从位于 (r_i, φ_i) 的光源发出，而该光源与这些测地线的近星点不重合时，上述测地线表达式需要额外旋转一个角度，才能经过光源。如图1(b)所示，由于光可以从光源沿不同方向传播，我们将弗拉姆抛物面划分为四个区域，以讨论逆时针测地线表达式。分隔区域 I 和 II 的绿线具有冲击参数 $r_p = r_g$ （即 $\widetilde{r}_p = 1$），分隔区域 II 和 III 的蓝线具有冲击参数 $r_p = r_i > r_g$ （即 $\widetilde{r}_p = \widetilde{r}_i$，其中 $\widetilde{r}_i = r_i/r_g$），而分隔区域 III 和 IV 的红线也具有冲击参数 $r_p = r_g$ （即 $\widetilde{r}_p = 1$）。换言之，在区域 II 和 III 中，测地线始终是规则测地线，且 $r_p > r_g$。而在区域 I 和 IV 中，测地线则变为奇异测地线。在每个区域中，我们都需要定义相应的旋转角 φ_j，其中 $j = 1, 2, 3, 4$ 分别表示上述不同区域。如图1(c-f)所示，这些角度 φ_j分别对应于区域 II 和 III 中相应近星点的角位置，或区域 I 和 IV 中相应测地线与事件视界交点的角位置，其表达式为

$$\varphi_1 = \varphi_i - \varphi_s(\widetilde{r}_i), \tag{9}$$
$$\varphi_2 = \varphi_i - \varphi_r(\widetilde{r}_i), \tag{10}$$
$$\varphi_3 = \varphi_i + \varphi_r(\widetilde{r}_i), \tag{11}$$
$$\varphi_4 = \varphi_i + \varphi_s(\widetilde{r}_i), \tag{12}$$

其中 $\widetilde{r}_i = r_i/r_g$。这里， $\varphi_r(\widetilde{r}_i)$ 和 $\varphi_s(\widetilde{r}_i)$ 的值分别由方程（5）和（7）计算得到。

对于光源（r_i， φ_i）与观测者（r_o， φ_o）之间的每条测地线，都可以根据与 $\widetilde{r}_p$ 的每个取值（同时与初始位置 r_i 和从光源出发的测地方向有关），使用方程（6）或方程（8）确定其轨迹。一旦根据方程（9）—（12）确定了每条测地线的近星点的角位置 φ_j，或测地线与事件视界的交点，观测者的相对角位置就由 $\delta\varphi_j = \varphi_o - \varphi_j$ 给出，这表示在不同区域中，沿相应测地线从近星点或交点到观测者的角变化。因此，将（r_o， φ_o）和 $\delta\varphi_j$ 代入方程（6）或方程（8），也就是说，令 $\widetilde{r}_r$ 或 $\widetilde{r}_s = \widetilde{r}_o$ $(\widetilde{r}_o = r_o/r_g)$ 以及 φ_r 或 $\varphi_s = \delta\varphi_j$，即可确定相应的

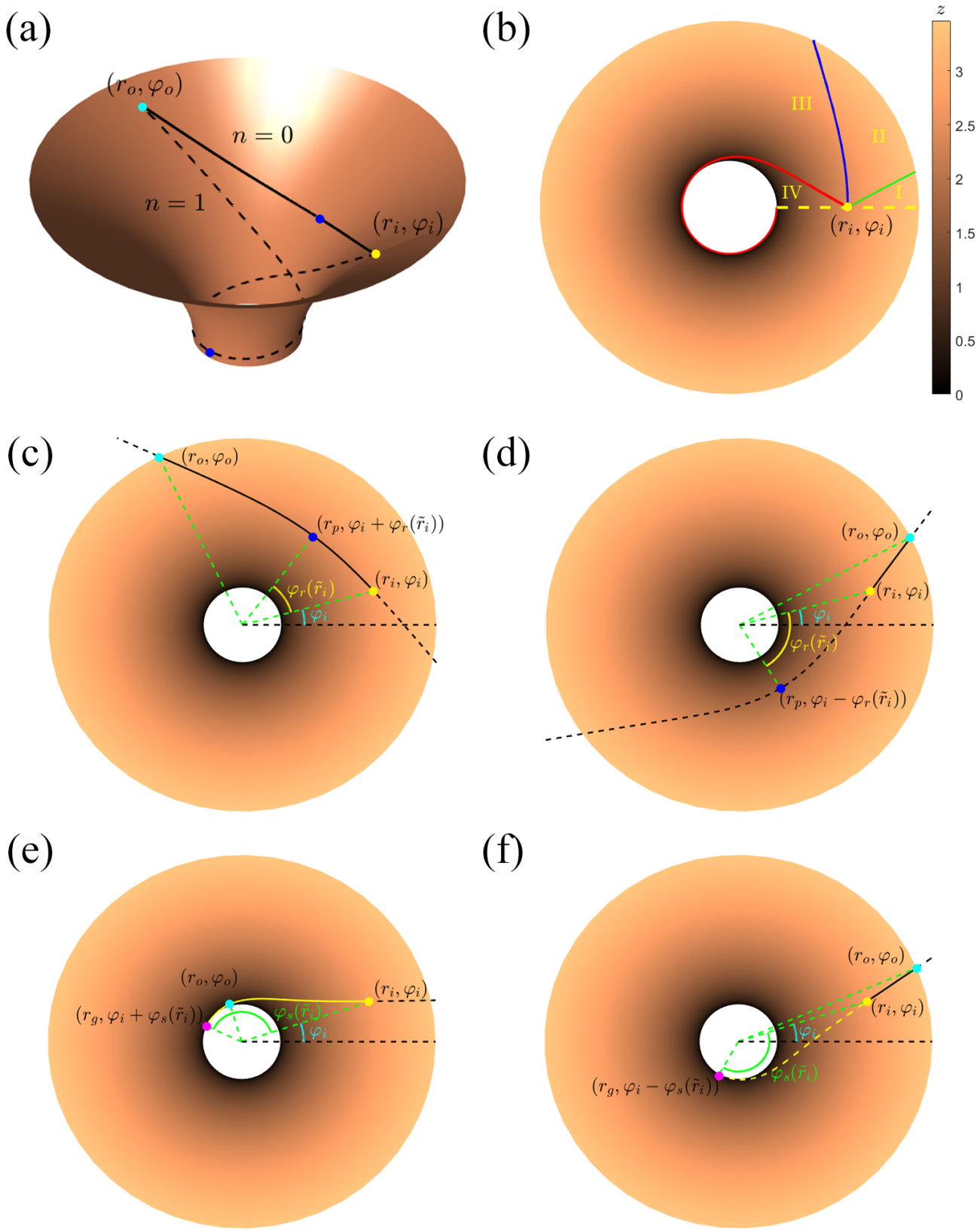

图 1. 弗拉姆抛物面上各种测地线的示意图。(a) 光源与观测者之间的两条逆时针测地线。黑色实线表示 $n = 0$ 逆时针测地线，黑色虚线表示 $n = 1$ 逆时针测地线。(b) 从光源出发，弗拉姆抛物面上的四个区域 I、II、III 和 IV 的示意图。事件视界的高度设为零。(c-d) 位于区域 II 和 III 中的测地线所对应的近星点的角位置，以及 (e-f) 当测地线位于区域 I 和 IV 中时，相应测地线与事件视界交点的角位置。此处，光源位于 (r_i, φ_i)（见黄色圆点），观测者位于 (r_o, φ_o)（见青色圆点）；蓝色圆点标记测地线的近星点，(e) 和 (f) 中的洋红色圆点表示奇异测地线与事件视界的交点，而 (e) 中以黄色标示的奇异测地线不像 (c)、(d) 和 (f) 中的测地线那样到达 r_o 。

通过搜索 $\widetilde{r}_p$ 来寻找测地线。为避免分母为零，区域 II 和 III 中的式（6）或区域 I 和 IV 中的式（8）可分别明确写为

$$2\mathrm{cn}^2\left[\sqrt{\frac{\widetilde{r}_p-1}{4\widetilde{r}_p}}(\varphi_o-\varphi_j(\widetilde{r}_p,\widetilde{r}_i,\varphi_i)),\frac{-2}{\widetilde{r}_p-1}\right]-1-\frac{\widetilde{r}_p}{\widetilde{r}_o}=0, \tag{13}$$

and

$$(\widetilde{r}_o+\widetilde{r}_p)\mathrm{sn}^2\left[i\sqrt{\frac{1-\widetilde{r}_p}{4\widetilde{r}_p}}(\varphi_o-\varphi_j(\widetilde{r}_p,\widetilde{r}_i,\varphi_i)),\frac{2}{1-\widetilde{r}_p}\right]+(\widetilde{r}_o-1)\widetilde{r}_p=0, \tag{14}$$

其中，在不同区域中，$j=1$、2、3、4。通过求解式（13）或式（14），即可通过搜索冲击参数 $\widetilde{r}_p$ 确定测地线。如果一条测地线围绕事件视界环绕 n 次，则可将观测角设为 $\varphi_o\to\varphi_o+2n\pi$，其中 $n=1$、2、3、$\cdots$ 为整数，并使用带有 $j=3$ 的式（13），由此求得其冲击参数 $\widetilde{r}_p$。在求解 $\widetilde{r}_p$ 的过程中，对于 $n\geq 1$ 情况可能存在多个解；经过尝试后，此处我们需要的是最小的 $\widetilde{r}_p$。

上文讨论的测地线是光源与观测者之间的逆时针测地线。对于顺时针测地线，由于曲面的对称性，将角度设为 $\varphi_o\to 2\pi-\varphi_o$即可计算冲击参数 $\widetilde{r}_p$。因此，对于给定的观测者（r_o,φ_o），我们可以先得到两条直接传播的测地线（$n=0$，分别为逆时针和顺时针），然后将观测角设为 $\varphi_o\to\varphi_o+2\pi$，得到两条环绕一次的测地线（$n=1$）；再将观测角设为 $\varphi_o\to\varphi_o+4\pi$，得到两条环绕两次的测地线（$n=2$），并重复这些步骤以获得更多测地线。惠更斯-菲涅耳原理所需的每条测地线的长度 L，均根据其测地线轨迹通过数值方法计算得出。

B. 光脉冲响应

现在我们来考察光脉冲在黑洞附近如何演化。由于黑洞附近存在强引力时空，若光源靠近黑洞，就会出现多圈测地线。为简化起见，这里假设初始光脉冲由点状光源发出，因此可表示为

$$E_{\mathrm{i}}(t)=\exp(-\frac{t^2}{2\tau^2})\exp(i\omega_0 t), \tag{15}$$

其中，τ 是脉冲的时间半宽，$\omega_0=2\pi f_0$ 是其中心角频率，f_0 则是脉冲的中心频率。光源的频谱为

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\mathrm{i}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}E_{\mathrm{i}}(t)\exp(-i\omega t)dt\\ &= \sqrt{2\pi}\tau\exp[-\frac{\tau^2}{2}(\omega-\omega_0)^2].\end{aligned} \tag{16}$$

显然，光源的频谱呈现出长度为 τ 的反比例函数。为简化起见，我们首先考虑由长度为 L 的单条测地线贡献的时间响应。根据曲面 [34] 上的惠更斯-菲涅耳原理，将式（16）乘以传播因子$\sqrt{\frac{1}{i\lambda}}\exp(-ikL)/L$，即可写出距离 L 处频域中的输出场：

$$\tilde{E}_o(\omega,L)=\frac{\tau}{L}\sqrt{\frac{\omega}{ic}}\exp[-\frac{\tau^2}{2}(\omega-\omega_0)^2]\exp(-ikL), \tag{17}$$

其中 $k=\omega/c=2\pi/\lambda$ 是波数，λ 是波长。随后，对公式（17）进行傅里叶逆变换，即可轻松得到时域中的输出场：

$$E_o(t,L) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\tilde{E}_o(\omega,L)\exp(i\omega t)d\omega \tag{18}$$

$$\approx \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\omega_0}{i2\pi c}}\exp[-\frac{(t-\frac{L}{c})^2}{2\tau^2}]\exp[i\omega_0(t-\frac{L}{c})], \tag{19}$$

在 $\sqrt{\omega} \approx \sqrt{\omega_0}$的近似下。由公式（19）可知，单条测地线贡献的时间响应也可视为一个高斯脉冲（即形状不变）。与输入脉冲相比，输出高斯振幅部分为 $\exp[-(t-\frac{L}{c})^2/2\tau^2]$，光沿测地线传播的飞行时间为 L/c，输出相位部分为 $\exp[i\omega_0(t-\frac{L}{c})],$，且也移动了 L/c。事实上，公式（18）可以精确求解，其精确表达式为

$$\begin{aligned} E_o(t,L) &= \frac{i}{8L(c\tau\xi)^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2)\exp(-\frac{\xi^2}{4}) \\ &\times\left[\xi^2 I_{-\frac{1}{4}}(-\frac{\xi^2}{4})+(\xi^2-2)I_{\frac{1}{4}}(-\frac{\xi^2}{4})+\xi^2 I_{\frac{3}{4}}(-\frac{\xi^2}{4})+\xi^2 I_{\frac{5}{4}}(-\frac{\xi^2}{4})\right], \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\xi=(t-L/c)/\tau-i\omega_0\tau$。式 (20) 是四个修正贝塞尔函数与一个高斯包络相乘后得到的叠加。我们的数值计算表明，除非 $\Delta\omega \gg \omega_0$，式 (19) 与该式的精确解吻合良好。 (20)

由于观测者与光源之间存在多条测地线，因此需要考虑来自多条测地线的光场贡献。这里，我们将绕黑洞逆时针环绕 n 次的测地线长度记为 L_{2n+1}，将顺时针环绕 n次的测地线长度记为 L_{2n+2}。因此，弗拉姆抛物面上光脉冲的总输出场可写为

$$E_{o,T}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[E_o(t,L_{2n+1})+E_o(t,L_{2n+2})]. \tag{21}$$

显然，总输出场是来自一系列逆时针和顺时针测地线对的场分量的叠加，其强度可通过 $I_{o,T}(t)=|E_{o,T}(t)|^2$. 直接求得。同时，再次使用傅里叶变换求得该曲面上总输出场的频谱也很有趣

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_{o,T}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_{o,Total}(t)\exp(-i\omega t)dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[\tilde{E}_o(\omega,L_{2n+1})+\tilde{E}_o(\omega,L_{2n+2})]. \end{aligned} \tag{22}$$

因此，为了获得黑洞附近的场动态分布或其频谱，需要计算从光源出发、到达观测者可能所在任意位置的逆时针测地线和顺时针测地线的长度，这些内容已在上一小节中讨论。

III. 结果与讨论

首先，我们给出弗拉姆抛物面上连接光源与观测者的所有可能测地线的测地线长度结果。表 I 展示了当环绕次数 n 从 $n=0$ 变为 $n=5$时，部分测地线的长度。结果表明，经过最初几次环绕（$n=0$，1，2）后，逆时针或顺时针测地线长度的增量会迅速趋近于 $2\pi r_g$。对于更大的 n，随着 n 增至 $n+1$，数值 n 越大，增量就越接近 $2\pi r_g$，即逆时针测地线对应 $\Delta L_{ac}=L_{2n+1}-L_{2n-1}\longrightarrow 2\pi r_g$，顺时针测地线对应 $\Delta L_c=L_{2n+2}-L_{2n}\longrightarrow 2\pi r_g$。这些关系对于逆时针和顺时针两种情况都成立。

对于光脉冲，穿过较长测地线需要更长时间，因此观测者可能会接收到一系列脉冲。这里我们将相邻两条逆时针或顺时针测地线的增量定义为黑洞附近可能观测到的回波时间，如下所示

$$\tau_{\text{echo}}=2\pi r_g/c, \tag{23}$$

这将体现在脉冲响应的时间演化中。在我们的计算中，我们对从 $n=0$ 到 $n=4$的测地线进行了数值计算，并在较大的 n 情况下使用了 $2\pi r_g$ 关系。

如图2所示，时间响应由一个主脉冲和无穷多个回波脉冲组成。初始半宽度 τ 远小于回波时间 τ_{echo}。图2(a)展示了观测角从 0 变化到 π时的输出时间响应。从图中可以看出，光脉冲经历了一个从

表 I. 光源与观测者之间在不同环绕次数 n $r_i/r_g = 4$ $\varphi_i = 0$ $\widetilde{r}_o =$下，逆时针和 $r_o/r_g = 5$ 10 20 $\varphi_o = 0.25\pi$ 0.5π 0.75π $r_g = 1$ L_{2n+1} 顺时针测地线的测地线长度及其增量。这里，光源固定在 (,)，观测者设在 (,,,,)，事件视界半径为 cm。为逆时针测地线长度，$\Delta L_{ac} = L_{2n+1} - L_{2n-1}$为其增量。同样，$L_{2n+2}$为顺时针测地线长度，$\Delta L_c = L_{2n+2} - L_{2n}$为其增量。

$(\widetilde{r}_o, \varphi_o)$	n	0	1	2	3	4	5
(5,$\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	3.6260	15.3770	21.6983	27.9819	34.2651	40.5482
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	11.7511	6.3212	6.2836	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	13.7200	20.1253	26.4098	32.6930	38.9762	45.2594
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.4053	6.2845	6.2832	6.2832	6.2832
(5,$\pi/2$)	L_{2n+1}/r_g	6.5922	16.1794	22.4841	28.7676	35.0508	41.3339
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	9.5872	6.3047	6.2834	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	12.8303	19.3386	25.6241	31.9073	38.1905	44.4737
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.5083	6.2855	6.2832	6.2832	6.2832
(5,$3\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	8.9452	16.9729	23.2684	29.5517	35.8349	42.1181
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	8.0277	6.2955	6.2833	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	11.8407	18.5527	24.8399	31.1232	37.4063	43.6895
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.7120	6.2872	6.2832	6.2832	6.2832
(10,$\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	8.1197	20.7087	27.0331	33.3168	39.6000	45.8832
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	12.5890	6.3244	6.2837	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	19.0435	25.4601	31.7448	38.0280	44.3111	50.5943
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.4166	6.2846	6.2832	6.2832	6.2832
(10,$\pi/2$)	L_{2n+1}/r_g	11.1736	21.5125	27.8191	34.1025	40.3857	46.6689
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	10.3389	6.3065	6.2835	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	18.1421	24.6733	30.9590	37.2422	43.5254	49.8086
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.5312	6.2857	6.2832	6.2832	6.2832
(10,$3\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	13.9052	22.3068	28.6033	34.8867	41.1698	47.4530
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	8.4016	6.2965	6.2833	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	17.1232	23.8873	30.1749	36.4581	42.7413	49.0245
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.7641	6.2875	6.2832	6.2832	6.2832
(20,$\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	18.1999	31.0476	37.3737	43.6573	49.9405	56.2237
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	12.8477	6.3261	6.2837	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	29.3782	35.8006	42.0853	48.3685	54.6517	60.9349
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.4224	6.2847	6.2832	6.2832	6.2832
(20,$\pi/2$)	L_{2n+1}/r_g	21.1234	31.8521	38.1596	44.4430	50.7262	57.0094
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	10.7287	6.3074	6.2835	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	28.4706	35.0138	41.2996	47.5828	53.8659	60.1491
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.5432	6.2858	6.2832	6.2832	6.2832
(20,$3\pi/4$)	L_{2n+1}/r_g	24.0198	32.6469	38.9439	45.2272	51.5104	57.7936
	$\Delta L_{ac}/r_g$	-	8.6270	6.2970	6.2833	6.2832	6.2832
	L_{2n+2}/r_g	27.4354	34.2277	40.5154	46.7986	53.0818	59.3650
	$\Delta L_c/r_g$	-	6.7923	6.2877	6.2832	6.2832	6.2832

分离到合并的过程。在后向散射区域，回波脉冲逐渐分离为两个脉冲；而在前向散射区域，光脉冲逐渐合并。图2(b)展示了图2(a)中的五个截面。随着输出角从 0 变化到 $\pi/4$，我们可以清楚地看到脉冲的分离。除第一个脉冲外，所有回波脉冲都分离为两个脉冲，且回波脉冲的强度逐渐减弱。当输出角变为 $\pi/2$时，后向散射转变为前向散射，光脉冲完全分离，脉冲数量是 $\varphi_o = 0$ 和 π时的两倍。当输出角从 $3\pi/4$ 变为 π时，脉冲开始合并。例如，第二个脉冲逐渐靠近主脉冲并远离第三个脉冲，而第三个脉冲则逐渐靠近第四个脉冲。当输出角变为 π时，合并完成，回波脉冲的强度增加。回波脉冲的强度满足关系式 $I \propto 1/t^2$，该式可由公式（19）代入 $t = L/c$推导得到。

角度相关的时间响应源于测地线路径随观测角的变化。图2(c1)显示了不同观测角下8条测地线的长度 φ_o。在 φ_o 从0变为 π的过程中，逆时针测地线的长度不断增加，而顺时针测地线的长度不断减小。图2(a)中的每条曲线实际上都由一条测地线贡献，主脉冲由 $n = 0$逆时针测地线贡献。当 $\varphi_o = \pi$时，编号相同n 的逆时针测地线和顺时针测地线长度相等；而当 $\varphi_o = 0$时，第 n条顺时针测地线与第（$n + 1$）条逆

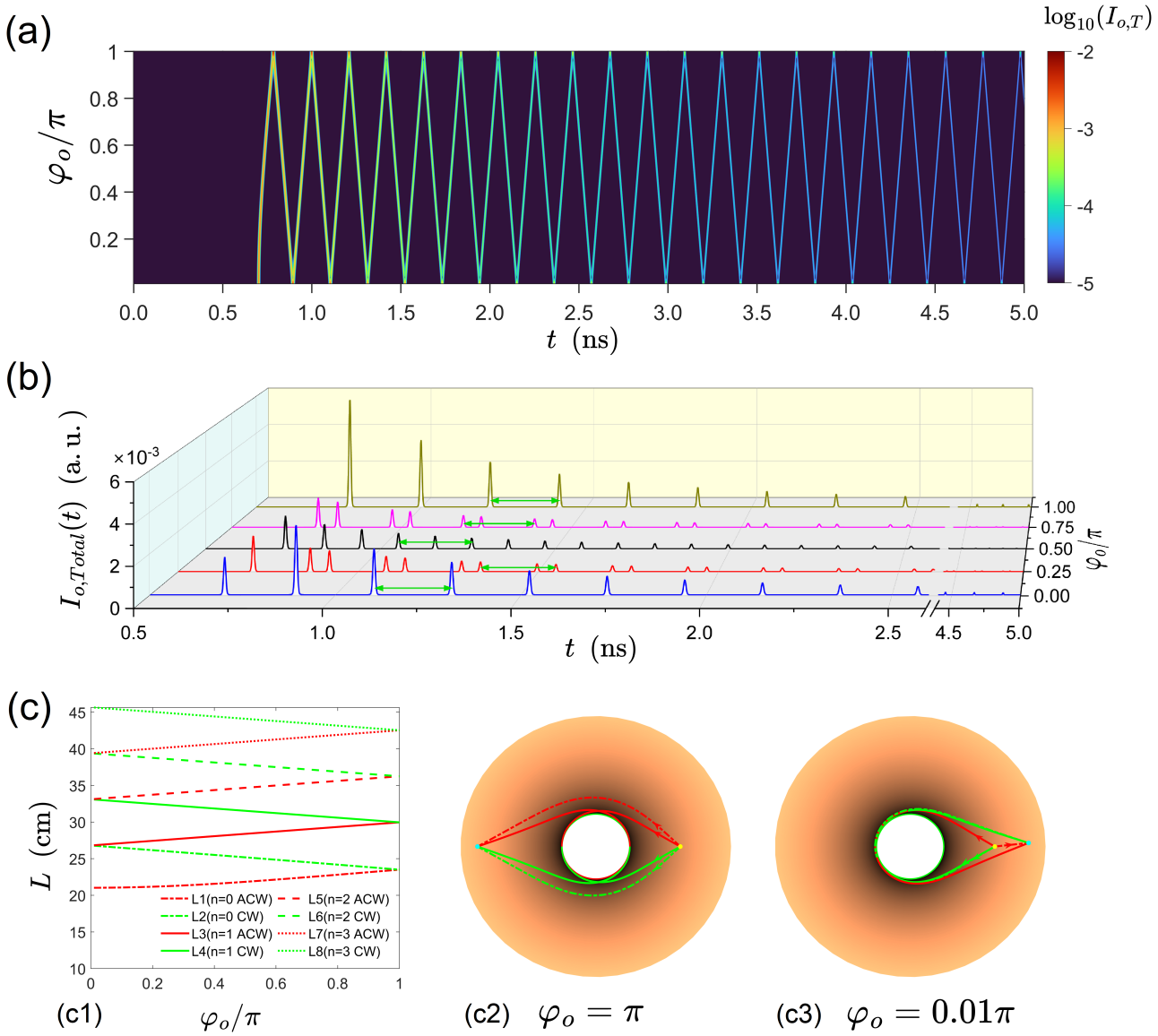

图2. 弗拉姆抛物面上点状脉冲源的时间响应。(a) 不同观测角下的时间响应。横轴表示时间 t，范围为 0 至 5 纳秒；纵轴表示观测角 φ_o，范围为 0.01π 至 π。颜色表示输出强度的对数 $I_{o,\,T} = |E_{o,\,T}|^2$。(b) (a) 中不同观测角下的五个横向切片：$\varphi_o = 0.01\pi$（蓝线）、$\pi/4$（红线）、$\pi/2$（黑线）、$3\pi/4$（洋红线）和 π（深黄色线）。回波时间（$\tau_{\text{echo}} = 0.21$ 纳秒）用绿色双箭头标出。(c) 不同观测角下的测地线长度。(c1) 红线表示逆时针测地线，绿线表示顺时针测地线。点划线、实线、虚线和点线分别表示 $n = 0$、$n = 1$、$n = 2$、$n = 3$ 测地线。(c2) $n = 0$ 逆时针测地线（红色点划线）与 $n = 0$ 顺时针测地线（绿色点划线）之间对称性的示意图。(c3) $n = 0$ 顺时针测地线（绿色点划线）与 $n = 1$ 逆时针测地线（红色实线）之间对称性的示意图。其他参数为：事件视界半径 $r_g = 1$ 厘米，光源位置（$r_i/r_g = 1.1$，$\varphi_i = 0$），观测者半径 $r_o/r_g = 20$，中心频率 $f_0 = \omega_0/2\pi = 30$ 吉赫兹，初始半宽度 $\tau = 0.003$ 纳秒，以及光速 $c = 30$ 厘米· 吉赫兹。

时针测地线长度相同，如图2(c2)和(c3)的示意图所示，这表明曲面上测地线的对称性。因此，回波脉冲的分离与合并体现了测地线长度的变化。时间脉冲的分离意味着第 n条顺时针测地线与第（$n+1$）条逆时针测地线之间的差异逐渐增大。相反，时间脉冲的合并表明编号为 n 的顺时针测地线与逆时针测地线之间的差异逐渐减小。

当初始半宽度 τ 增大时，时间响应也会相应变化。随着脉冲宽度从图 3(a) 增至图 3(d)，角向暗条纹开始出现，但我们仍能分辨出回波脉冲。从图 3(e)

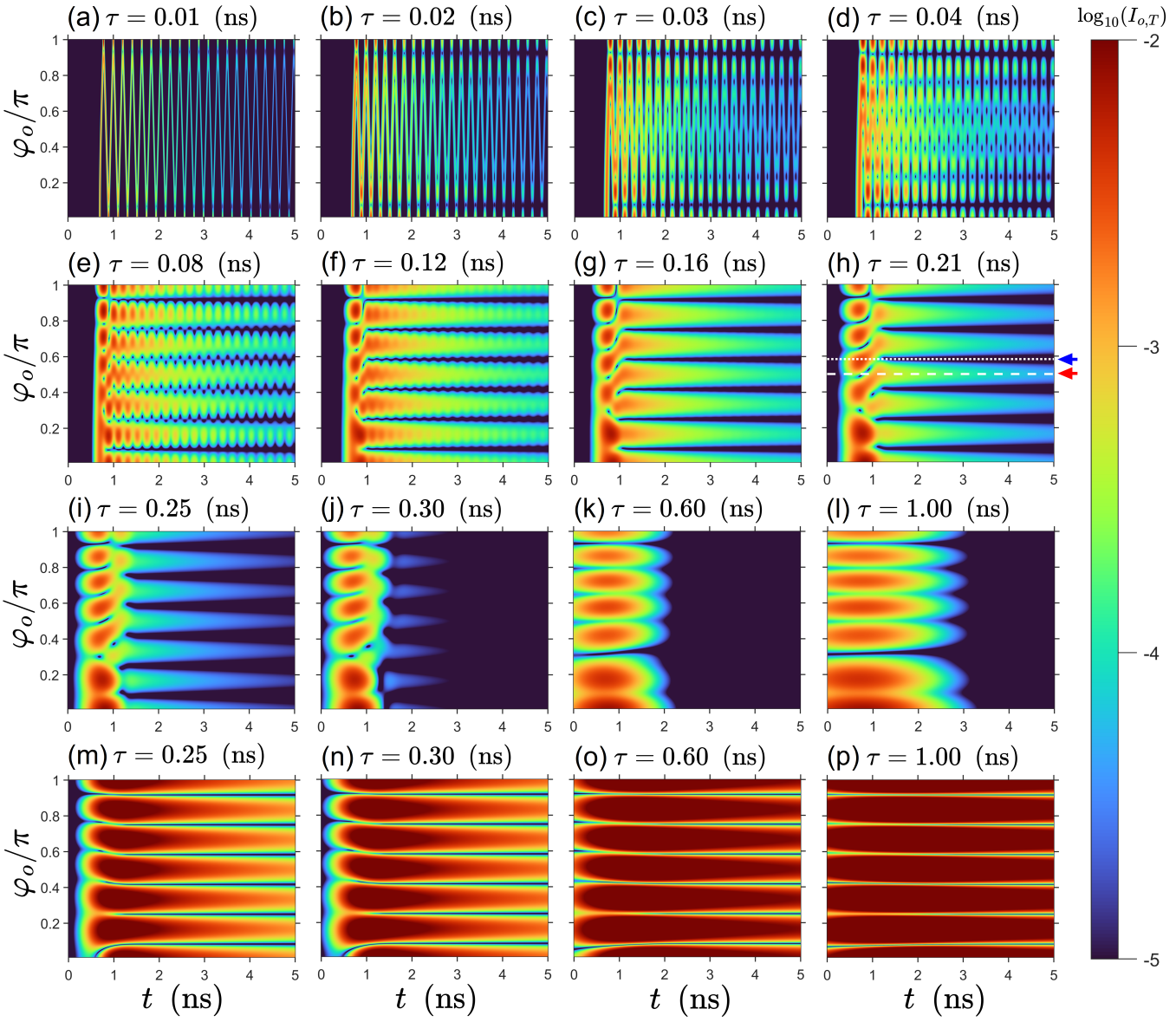

图3. 脉冲持续时间对观测者处输出场演化的影响。(a)-(l)中，脉冲半宽度分别为$\tau = 0.01$ 纳秒、0.02 纳秒、0.03 纳秒、0.04 纳秒、0.08 纳秒、0.12 纳秒、0.16 纳秒、0.21 纳秒、0.25 纳秒、0.30纳秒、0.60 纳秒和1.00 纳秒，中心频率为 $f_0 = 30$ 吉赫兹。(m)-(p)中，脉冲宽度与(i)-(l)相同，但中心频率移至 $f_0 = 28.65$ 吉赫兹。其他参数与图2相同。

到图 3(h)，随着初始半宽度 τ 接近回波时间 τ_{echo}，角向干涉图样变得更加明显。沿着亮条纹（见图 3(h) 中红色箭头标记的白色虚线），增强的回波信号在主脉冲之后形成长长的“回波尾”，这表明脉冲的时间结构与光子球耦合。沿着暗条纹（见图 3(h) 中蓝色箭头标记的白色点线），回波脉冲彼此抵消，因此时域中只有一个脉冲。干涉条纹由相邻脉冲之间的相干叠加引起，实际上是不同观测角下测地线长度差的结果。从图 3(i) 到图 3(l)，随着 τ 增大，回波尾逐渐消失，主脉冲的宽度也随之进一步增加。然而，如果选择合适的中心频率 f_0，回波尾不会消失，反而会随着脉冲宽度增加而变得更强，如图 3(m) 到图 3(p) 所示。这一效应意味着光脉冲与光子球持续耦合。接下来我们将在频域中解释这一行为。

接下来，我们研究脉冲　　频域响应。根据回波时间 τ_{echo}，我们可以推导出

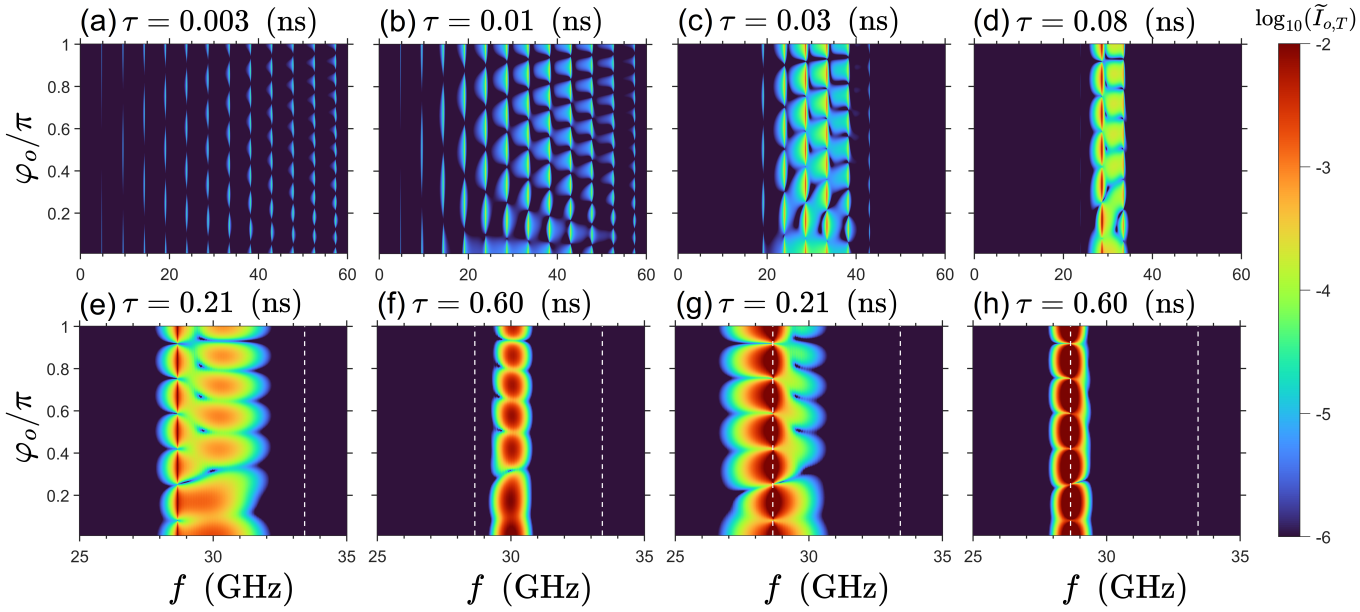

图 4. 脉冲持续时间对频域响应的影响。结果由 $\widetilde{I}_{o,\ T}(\omega) \ = \left|\widetilde{E}_{o,\ T}(\omega)\right|^2$ 得出。(a)-(d) 中，脉冲宽度分别为 τ =0.003 纳秒、0.01 纳秒、0.03 纳秒和 0.08 纳秒，$f = \omega/2\pi$ 的范围为 0 至 60 吉赫兹。(e)-(f) 中，脉冲宽度分别为 τ =0.21 纳秒和 0.60 纳秒，$f = \omega/2\pi$ 的范围为 25 至 35 吉赫兹。(g)-(h) 的绘图采用与 (e)-(f) 相同的脉冲宽度范围，但入射中心频率不同。(a)-(f) 中，入射中心频率为 $f_0 = 30$ 吉赫兹，与图 3(a) 至 (l) 中的设置一致；而 (g)-(h) 中，入射中心频率为 $f_0 = 6f_{\rm echo} = 28.65$ 吉赫兹，与图 3(m) 至 (p) 中的设置一致。

相应的基回波频率

$$f_{\rm echo} = 1/\tau_{\rm echo} = c/2\pi r_{\rm g}. \tag{24}$$

对于频率等于基回波频率任意整数倍的光，其能量会被光子球俘获。对于图4所示的情况，当 $r_g = 1$ 厘米时，回波频率为 $f_{\rm echo} = 4.77$ 吉赫兹。在图4(a)中，离散频率均为基回波频率的整数倍。这些频率分量体现了测地线环绕的行为，实际上也代表了光子球模（见附录A）。从图4(a)到(d)，随着脉冲宽度变宽，频率分布逐渐集中在中心频率 f_0 附近，被光子球俘获的离散频率数量也随之减少。频率分布的变化与时域中的变化一致。例如，在图4(b)中，频域中存在许多光子球模。这些频率分量非相干叠加，形成图3(a)中的角向不连续延迟时间分布。在图4(d)中，频域中有两个光子球模，它们的叠加在时域中产生拍频图样（见图3(e)）。在图4(e)中，唯一的光子球模对应于图3(h)中的回波尾。当中心频率不是基回波频率的整数倍时，随着脉冲宽度进一步增大，光子球频率分量会消失。图4(f)中剩余的频率分布来自没有环绕行为的测地线，实际上就是 $n = 0$ 逆时针和顺时针测地线。在相应的时域中（见图3(k)），回波尾也会逐渐消退。当中心频率设为某个光子球模的频率时（见图4(g)和(h)），频域中始终存在回波分量，因此时域中的回波尾不会消失，反而会增强，如图3(m)至(p)所示。换言之，频域中的每个光子球模都会在时域中形成相应的回波尾。当频域中存在多个光子球模时，回波尾彼此重叠，形成延迟时间分布。每个光子球模在频域中表现为一条在特定角度处断开的竖线，表示零强度节点。对于频率为基回波频率 M 倍的某个光子球模，在观测角 $\varphi_o = (m + 1/2)\pi/M, m = 0, \ \cdots, \ M - 1$处会出现零强度点。这些位置对应于时域中的暗条纹，条纹数量也为 M，下一部分将对此进行说明。

接下来，我们展示中心频率 f_0 如何影响时间响应中的角干涉条纹数量。从图5(a)到图5(f)可以看出，随着入射中心频率降低，时域响应中的条纹数量也相应减少。这些条纹均匀分布在0至 π的范围内。这里

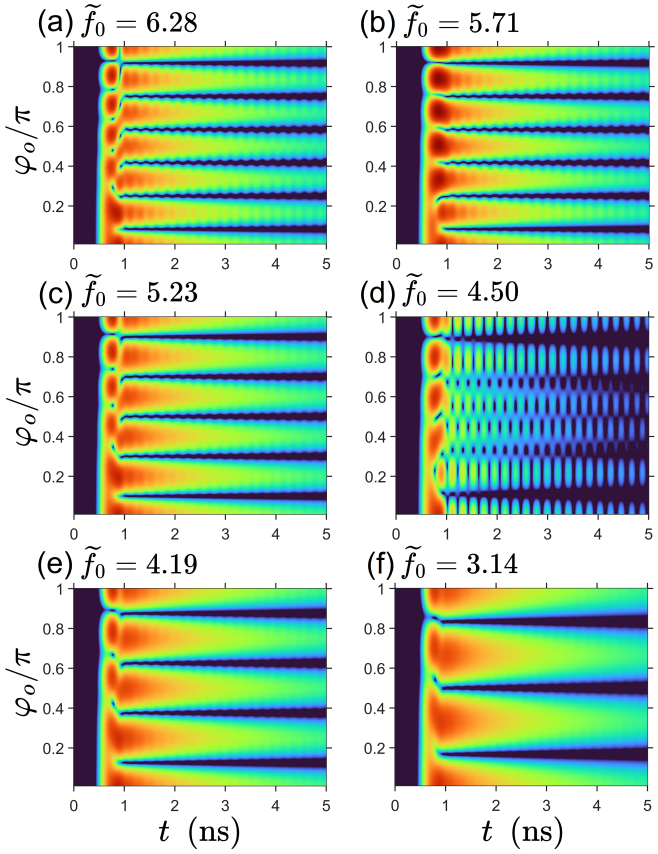

图5. 中心频率 f_0 对观测者处输出场演化的影响。(a)-(f)中，$\widetilde{f}_0 = f_0/f_{\text{echo}}$ 的值分别为6.28、5.71、5.23、4.50、4.19和3.14。脉冲半宽设为 $\tau = 0.12$ 纳秒。其他参数与图2相同。

~我们使用表达式 $f_0 = f_0/f_{\text{echo}} = 2\pi r_g/\lambda_0$ 来解释条纹数量，该表达式也是环形谐振器 [38, 39]的共振条件表达式。暗条纹的数量可由 $M = \left\lfloor \widetilde{f}_0 + 1/2 \right\rfloor$ 给出。图5(a)和(b)均呈现出六条暗条纹，其中 $M = 6$ 光子球模的频率最接近各自的中心频率。暗条纹的角位置为 $\varphi_o = (m + 1/2)\pi/6$, $m = 0, \cdots, 5$，亮条纹位置为 $\varphi_o = m\pi/6$, $m = 0, 1, \cdots, 6$。在图5(c)中，中心频率向 $M = 5$ 模偏移，条纹数量减少到五条。因此，频率最接近中心频率的光子球模在频域中的强度最高，其对应的干涉图样因而主导时域表现。在图5(d)中，延迟时间分布由 $M = 5$ 光子球模和 $M = 4$ 光子球模共同贡献，二者的回波尾相互干涉，形成交错条纹（见附录B）。在图5(e)和(f)中，时域分别存在四条和三条暗条纹，它们分别由 $M = 4$ 和 $M = 3$ 光子球模主导。测地线多重环路产生的光子球模，使弗拉姆抛物面上的角延迟时间分布类似于环形腔 [40]的共振。

光源位置带来的时间响应变化主要发生在主脉冲附近。这里我们选择脉冲半宽 $\tau = 0.21$ 纳秒，使频域中只剩下一个光子球模。在 $\varphi_o/\pi = 0.01$ 方向（见图 6(a) 和 (c)）上，观测者和光源位于黑洞的同一侧。随时间变化的强度输出曲线由两部分组成：由 $n = 0$ 逆时针测地线产生的主脉冲，以及由其他测地线产生的回波尾。当光源靠近黑洞时（$\widetilde{r}_i = 1.1$），主脉冲和回波尾也彼此靠近，在时域中形成单个峰值。随着光源移得更远（$\widetilde{r}_i = 8$，12，16），主脉冲与回波尾之间的时间间隔增大，出现两个峰值。主脉冲的峰值强度增大，而回波尾几乎保持不变，因为只激发了一个光子球模。从测地线的角度来看，后向散射中主脉冲与回波尾之间的间隔对应于$L_2 - L_1/c$ $n = 1$ 顺时针测地线与 $n = 0$ 逆时针测地线之间的路径长度差。高阶测地线差异及其对应的时间响应对以下变化并不敏感：

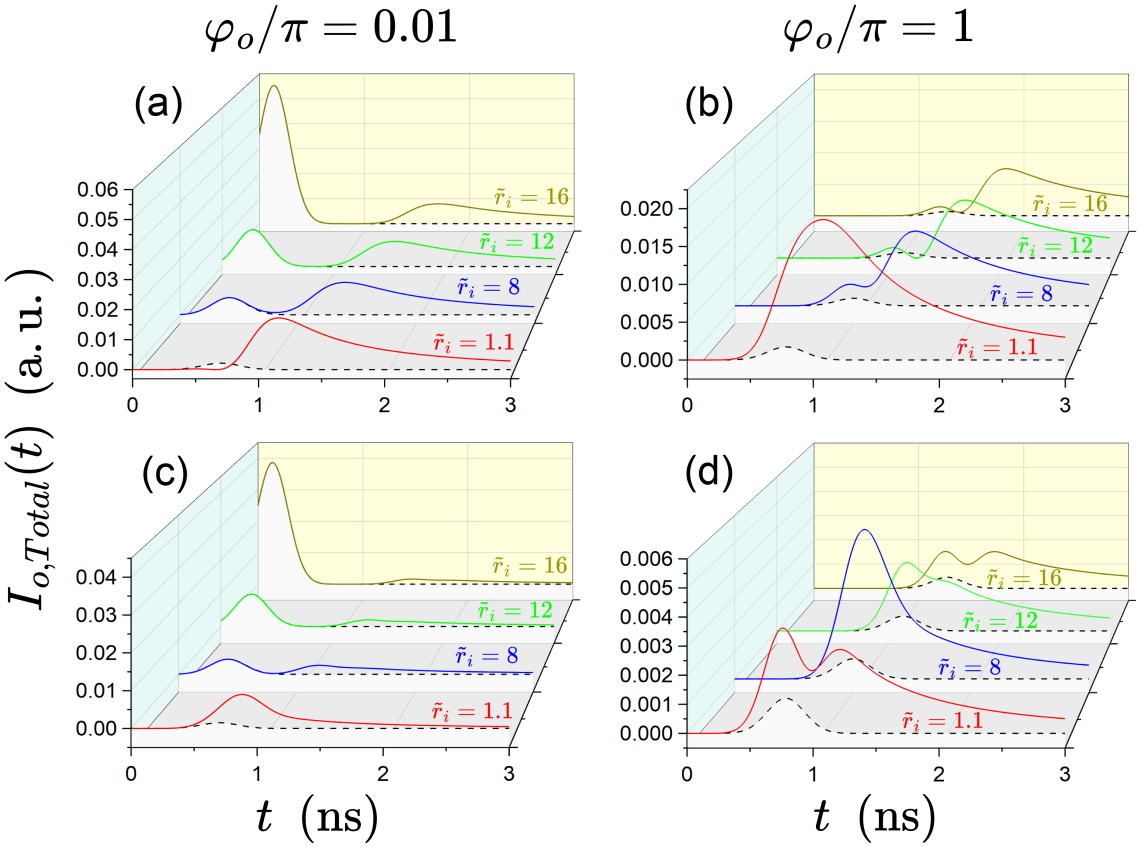

图6. 光源位置对强度分布的影响。光源位置 $\tilde{r}_i = r_i/r_g = 1.1$、8、12、16 分别用红色、蓝色、绿色和深黄色线表示。黑色虚线表示由第 n=0 条逆时针测地线贡献的脉冲。(a) 和 (c) 的观测角为 $\varphi_o/\pi = 0.01$，(b) 和 (d) 的观测角为 $\varphi_o/\pi = 1$。(a) 和 (b) 的中心波长为$\lambda_0/r_g = 2\pi/6 \approx 1.05$ （即 $\tilde{f}_0 = 6$），(c) 和 (d) 的中心波长为 $\lambda_0/r_g = 1.5$ （即 $\tilde{f}_0 = 4.19$）。脉冲半宽为 $\tau = 0.21$ 纳秒。其他参数与图2相同。

光源位置。当光源位置增大时，第 n 条=1 逆时针测地线的长度 L_1减小，而长度差（$L_2 - L_1$）$/c$ 增大，因此主脉冲的峰值强度更高，且与回波尾的间距更大。在 $\varphi_o/\pi = 1$ 方向（见图 6(b) 和 (d)）上，观测者和光源位于黑洞的相对两侧。随着光源位置不同，强度输出曲线可能呈现一个或两个峰值。由于曲面的对称性，逆时针测地线和顺时针测地线长度相等，因此强度曲线的峰值主要取决于 $n = 1$ 逆时针测地线与 $n = 0$ 逆时针测地线之间的差异（$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$。当（$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$ 的值接近半整数时，由 $n = 1$ 逆时针测地线和 $n = 2$ 逆时针测地线产生的脉冲相互抵消，叠加后出现两个峰值。相反，当（$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$ 的值接近整数时，叠加后会出现单个峰值（见附录 C）。

四、结论

总之，我们研究了史瓦西时空某个子空间中黑洞附近脉冲点源产生的光学回波。基于解析多圈测地线和惠更斯-菲涅耳原理，我们推导了脉冲光源绕黑洞传播时的响应表达式。由于黑洞周围存在光子球，观测平面上的输出脉冲响应由一系列脉冲组成，包括一个主脉冲和多个回波脉冲。我们揭示了时域中的回波尾与频域中的光子球模之间的对应关系，从而解释了不同脉冲宽度和中心频率下延迟时间分布的变化。我们的结果进一步表明，除主脉冲附近外，光源位置几乎不会改变回波信号。该模型的局限性在于仅考虑了史瓦西时空的空间切片，因此引力势 [41]有所不同。

弗拉姆抛物面上的光子球位置与四维情形不同（详细讨论见附录A）。这一模型的扩展还可进一步考虑黑洞的自旋 [7, 42], 、波偏振 [43],以及光源的有限尺寸 [6, 7, 44] 。

本研究探讨了由曲面上的强引力场引发的回波现象，为实验室模拟提供了一种类比模型。我们对黑洞光子球与光源脉冲持续时间之间相互作用的讨论，为强引力透镜效应和瞬变源透镜效应提供了新的视角，或有助于探测致密天体。此外，弯曲波导在光学应用方面潜力巨大，例如弯曲空间纳米结构 [25], 和测地线透镜 [28, 30]。测地线的环绕运动赋予系统类似于环形谐振器的特性，为光学设备设计带来了新的可能性。弯曲空间中的效应可应用于弯曲光子波导和微腔的设计 [45–49]。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（62375241）资助。

附录A：弗拉姆抛物面上的光子球

绕致密天体做圆轨道运动的光子构成其光子球。在弗拉姆抛物面上，测地线也会围绕 $r = r_g$ 呈现类似的环绕行为。按照四维时空中的处理步骤， [36], 我们在此计算曲面上光子球的位置。由式（2）可得

$$(\frac{dr}{ds})^2 = (1 - \frac{r_g}{r})(1 - \frac{r_p^2}{r^2}). \tag{A1}$$

参数 r_p 的含义与式（4）中的相同。方程右侧可记为$\varepsilon - V(r)$，其中 ε 表示守恒有效能量， $V(r)$表示有效势。光子球出现在 $dV(r)/dr = 0$ 的位置。由于有效能量 ε 与径向距离 r 无关，对方程右侧求导可得

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{1}{r^3}\left[r_g r\left(1 - \frac{r_p^2}{r^2}\right) + 2r_p^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]. \tag{A2}$$

当 $r = r_p$ 时，方括号中的第一项为零；当 $r = r_g$ 时，方括号中的第二项为零。当 $r = r_p = r_g$ 时，有效势的一阶导数为零，因此弗拉姆抛物面上的光子球位于 $r = r_g$ ，与事件视界重合。该结果与测地线的行为一致。

由于我们假设时间恒定，光子球的位置不同于四维情形。对于史瓦西黑洞，光子球位于 $r_s = 3r_g/2$ 处，该位置对应于最大势能点，并形成不稳定轨道 [36]。基于费马原理，可以推导出费马度量，它可作为史瓦西黑洞的另一种类比模型。在费马度量的二维曲面上，光子球的位置为 $\rho = 3r_g/2$，其中 ρ 为径向曲面参数，与旋转半径 r 的关系为 $r(\rho) = \rho/\sqrt{1 - r_g/\rho}$ [37]。

附录 B：角向干涉条纹数的转变

从图7(a)到(c)可以看出，随着中心频率 $f_0 = c/\lambda_0$ 降低，暗条纹的分布由~五条变为四条。图7(b)处于过渡过程中，此时 $f_0 = 2\pi r_g/\lambda_0 = 4.5$ 的值是介于五和四之间的半整数。相应的频域分布如图7(d)至(f)所示。在图7(d)中，$M = 5$ 光子球模占主导；在图7(f)中，则由 $M = 4$ 光子球模占主导。而在图7(e)中， $M = 4$ 光子球模与 $M = 5$ 光子球模的强度相当。因此，相应的回波尾彼此干涉，从而在图7(b)中形成交错条纹。从图7(g)到(i)也发生了由五条暗条纹向四条暗条纹的过渡，但不像 $\tau = 0.12$ 纳秒的情况那样出现回波尾部干涉。在过渡过程中，图7(g)变为图7(h)时，回波尾先消失；随后图7(h)变为图7(i)时，回波尾又重新出现。在频域中，脉冲宽度越长，频域分布越集中。随着中心频率降低，会出现没有

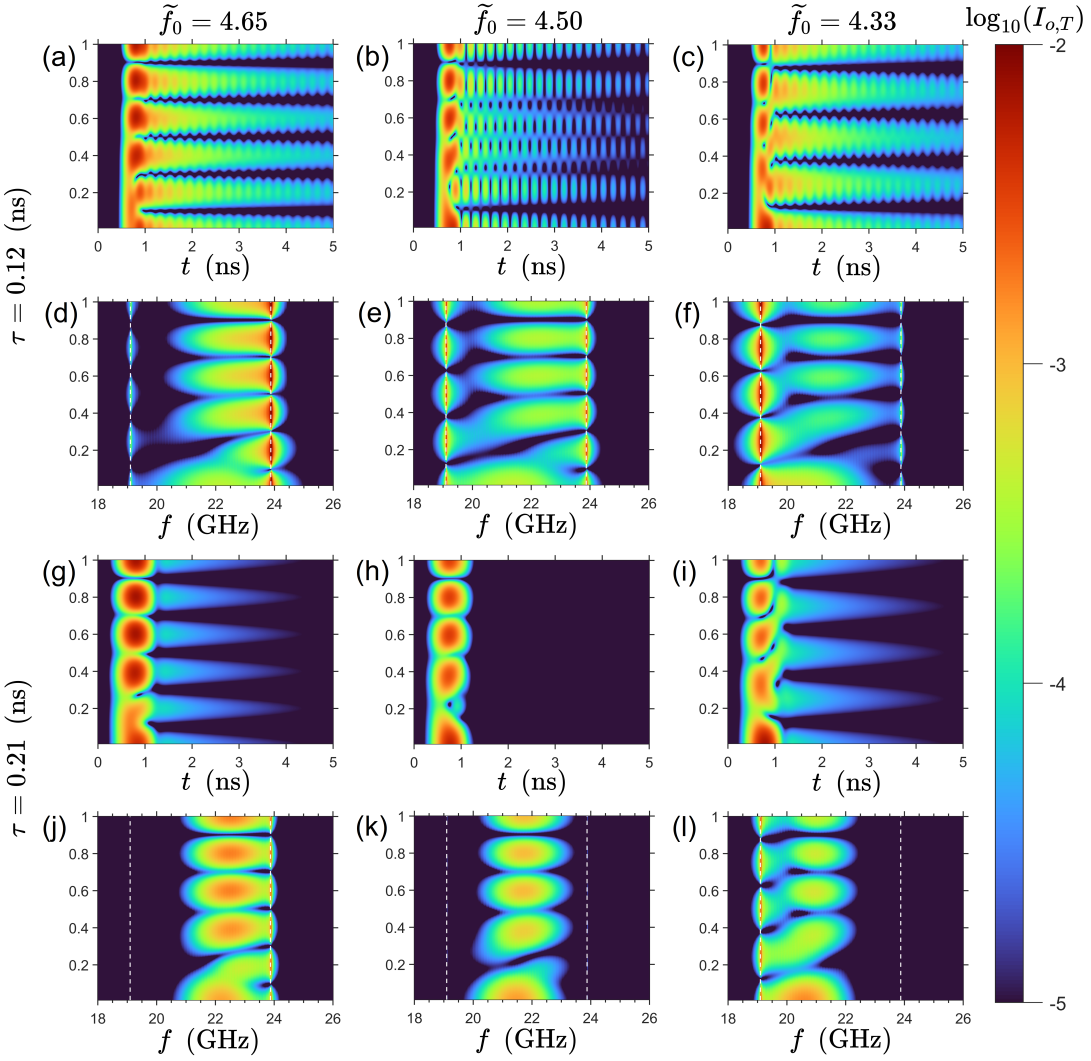

图7. 不同中心频率 f_0 和脉冲半宽 τ下的时间响应及其对应的频域分布。每列的中心频率 f_0 分别为 $4.65f_{\mathrm{echo}}$、$4.50f_{\mathrm{echo}}$ 和 $4.33f_{\mathrm{echo}}$。第一行和第三行分别是脉冲半宽为 $\tau = 0.12$ 纳秒和 0.21 纳秒时的时间响应。第二行和第四行是相应的频域分布。白色虚线标出了频率为 $4f_{\mathrm{echo}} = 19.10$ 吉赫兹的 $M = 4$ 光子球模和频率为 $5f_{\mathrm{echo}} = 28.37$ 吉赫兹的 $M = 5$ 光子球模的位置。其他参数与图2相同。

光子球模被激发的情况（见图7(k)），因此相应的时域中也不会出现回波尾（见图7(h)）。回波尾的这种变化进一步证实了这样的观点：频域中的每个光子球模都对应一系列回波尾。

附录 C： $n = 0$ 与 $n = 1$ 逆时针测地线之间的长度差

这里，我们进一步从相对长度差（$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$的角度解释图 6(b) 和 (d) 中所示的结果，其中 $\varphi_{out} = \pi$ 。从表 II 的第三列可以看出，除了 $r_i = 1.1$ cm 的情况外，其他所有情况的（ $L_3 - L_1$ ） $/\lambda_0$ 值都接近半整数。因此，在图 6(b) 的输出强度曲线中， $r_i = 8$ cm、12 cm 和 16 cm 的情况均因相邻波包之间的相消干涉而呈现双峰。类似地，从表 II 的第四列可以看出，当为 $r_i = 1.1$ cm 和 16 cm 时， （$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$ 的值更接近半整数，图 6(d) 中相应的光强曲线也呈现双

表 II. 入射中心波长为 $\lambda_0 = 1$ cm、 $2\pi/6 \approx 1.05$ cm 和 1.5 cm 时的相对测地线差（$L_3 - L_1$）$/\lambda_0$。第二列对应图 6(b)，第三列对应图 6(d)。其他参数与图2相同。

r_i cm	$\lambda_0 = 1$ cm	$\lambda_0 = 2\pi/6$ cm	$\lambda_0 = 1.5$ cm
1.1	6.4630	6.1717	4.3087
8	7.6870	7.3406	5.1247
12	7.8462	7.4926	5.2308
16	7.9438	7.5858	5.2959

峰。

[1] E. H. T. Collaboration 等, 《M87 事件视界望远镜首批结果：I. 超大质量黑洞阴影》, Astrophys. J. Lett. 875, L1 (2019)。[2] E. H. T. Collaboration 等, 《人马座 A* 事件视界望远镜首批结果：I. 银河系中心超大质量黑洞的阴影》, Astrophys. J. Lett. 930, L12 (2022)。[3] G. S. Bisnovatyi-Kogan 和 O. Y. Tsupko, 《史瓦西黑洞的强引力透镜效应》, Astrophysics 51, 99 (2008)。[4] P. V. P. Cunha 和 C. A. R. Herdeiro, 《阴影与强引力透镜效应：简要综述》, Gen Relativ Gravit 50, 42 2018( )。[5] M. D. Johnson 等, 《黑洞光子环的普适干涉特征》, 《科学进展》6, eaaz1310 (2020)。[6] A. Zengino˘glu 和 C. R. Galley, 《史瓦西黑洞产生的焦散回波》, Phys. Rev. D 86, 064030 (2012)。[7] G. N. Wong, 《质量、自旋和倾角的黑洞微光特征》, Astrophys. J. Lett. 909, 217 (2021)。[8] A. C´ardenas-Avenda˜no、C. Gammie 和 A. Lupsasca, 《黑洞光变曲线自相关中缺少次级峰的解释》, Phys. Rev. Lett. 133, (2024)。[9] G. N. Wong、L. Medeiros、A. C´ardenas-Avenda˜no 和 J. M. Stone, 《利用甚长基线干涉测量黑洞光回波》, Astrophys. J. Lett. 975, L40 (2024)。[10] K. Liao、M. Biesiada 和 Z.-H. Zhu, 《强透镜瞬变源：综述》, Chin. Phys. Lett 39, 119801 (2022)。[11] S. Profumo, 《用于搜寻原初黑洞的瞬变透镜效应机会多波段巡天》, J. Cosmol. Astropart. Phys. 2025, 075 (2025)。[12] L.-P. Euv´e、F. Michel、R. Parentani、T. G. Philbin 和 G. Rousseaux, 《在水槽中观测到由霍金效应关联的噪声》, Phys. Rev. Lett. 117, 121301 (2016)。[13] J. Steinhauer, 《在模拟黑洞中观测量子霍金辐射及其纠缠》, Nat. Phys. 12, 959 2016( )。[14] M. C. Braidotti、R. Prizia、C. Maitland、F. Marino、A. Prain、I. Starshynov、N. Westerberg、E. M. Wright 和 D. Faccio, 《在光子超流体中测量彭罗斯超辐射》, Phys. Rev. Lett. 128, 013901 (2022)。[15] J. Plebanski, 《引力场中的电磁波》, Phys. Rev. 118, 1396 (1960)。[16] U. Leonhardt, 《光学共形映射》, Science 312, 1777 (2006)。[17] J. B. Pendry、D. Schurig 和 D. R. Smith, 《控制电磁场》, Science 312, 1780 (2006)。[18] D. A. Genov、S. Zhang 和 X. Zhang, 《在超材料中模拟天体力学》, Nat. Phys. 5, 687 (2009)。[19] C. Sheng、H. Liu、Y. Wang、S. N. Zhu 和 D. A. Genov, 《通过模拟引力透镜效应捕获光》, Nat. Photon. 7, 902 (2013)。[20] C. Sheng、R. Bekenstein、H. Liu、S. Zhu 和 M. Segev, 《在波导中通过模拟弯曲空间整形波前》, Nat. Commun. 7, 10747 (2016)。[21] H. Chen、S. Tao、J. B˘el´ın、J. Courtial 和 R.-X. Miao, 《变换宇宙学》, Phys. Rev. A 102, 023528 (2020)。[22] H. Chen、R.-X. Miao 和 M. Li, 《模拟史瓦西黑洞外部系统的变换光学》, Opt. Express 18, 15183 (2010)。[23] W. Xiao 和 H. Chen, 《利用变换光学类比内部史瓦西度规》, Opt. Express 31, 11490 (2023)。[24] V. H. Schultheiss、S. Batz 和 U. Peschel, 《弯曲空间中的汉伯里·布朗-特维斯测量》, Nat. Photon. 10, 106 2016( )。[25] R. Bekenstein、Y. Kabessa、Y. Sharabi、O. Tal、N. Engheta、G. Eisenstein、A. J. Agranat 和 M. Segev, 《利用纳米光子结构中的弯曲空间控制光》, Nat. Photon. 11, 664 (2017)。[26] J. Zhu、Y. Liu、Z. Liang、T. Chen 和 J. Li, 《弯曲空间中的弹性波：模拟虫洞》, Phys. Rev. Lett. 121, 234301 2018( )。[27] R. Q. He、G. H. Liang、S. N. Zhu 和 H. Liu, 《利用弯曲光学空间模拟虫洞的巨大潮汐力》, Phys. Rev. Res. 2, 013237 (2020)。

[28] L. Xu、X. Wang、T. Tyc、C. Sheng、S. Zhu、H. Liu 和 H. Chen, 《测地透镜上的光线与波》, Photon. Res. 7, 1266 (2019)。[29] C. Xu、I. Dana、L.-G. Wang 和 P. Sebbah, 《从弯曲曲面到平面的变换中的光混沌动力学》, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 119, e2112052119 (2022)。[30] E. Falc´on-G´omez、V. De Falco、K. Atia Abdalmalak、A. Amor-Mart´ın、V. De La Rubia、G. Santamar´ıa-Botello 和 L. E. G. Mu˜noz, 《全金属测地线透镜：静态球对称引力场的类比电磁模型》, Phys. Rev. D 110, 084002 (2024)。[31] C. Xu、L. Wang 和 P. Sebbah, 《二维光学腔中的光线工程：从混沌到有序》, Laser & Photonics Reviews 17, 2200724 (2023)。[32] L. Flamm, 《重刊：对爱因斯坦引力理论的贡献》, Gen. Rel. Grav. 47, 72 (2015)。[33] R. T. Eufrasio、N. A. Mecholsky 和 L. Resca, 《史瓦西测地几何中的弯曲空间、弯曲时间与弯曲时空》, Gen. Rel. Grav. 50, 159 (2018)。[34] C. Xu 和 L.-G. Wang, 《任意二维曲面中光传播理论》, Photon. Res. 9 , 2486 (2021)。[35] K. Schwarzschild, 《"经典旧作"：根据爱因斯坦理论，质点的引力场》, Gen. Rel. Grav. 35, 951 (2003)。[36] S. M. Carroll, 《时空与几何：广义相对论导论》, Addison-Wesley, (2003)。[37] V. Perlick, 《从时空视角看引力透镜》, Living Rev. Relativ. 7, 9 (2004)。[38] S. L. McCall、A. F. J. Levi、R. E. Slusher、S. J. Pearton 和 R. A. Logan, 《回音壁模式微盘激光器》, Appl. Phys. Lett. 60, 289 (1992)。[39] J. Wang、S. Valligatla、Y. Yin、L. Schwarz、M. Medina-S´anchez、S. Baunack、C. H. Lee、R. Thomale、V. M. Fomin、L. Ma 和 O. G. Schmidt, 《在光学莫比乌斯带微腔中实验观测贝里相》, Nat. Photon. 17, 120 (2023)。[40] K. J. Vahala, 《光学微腔》, Nature 424, 839 (2003)。[41] L. Resca, 《史瓦西几何中的时空测地线轨道与空间测地线轨道》, Eur. J. Phys. 39, 035602 (2018)。[42] J. M. Bardeen、W. H. Press 和 S. A. Teukolsky, 《旋转黑洞：局部非旋转参考系、能量提取与标量同步辐射》, The Astrophysical Journal 178, 347 (1972)。[43] T. E. H. T. Collaboration 等, 《人马座 A* 事件视界望远镜首批结果：VIII. 偏振环的物理解释》, Astrophys. J. Lett. 964, L26 (2024)。[44] N. Matsunaga 和 K. Yamamoto, 《引力透镜效应中的有限光源尺寸效应与波动光学》, J. Cosmol. Astropart. Phys. 2006, 023 (2006)。[45] C. Huang、Y. Luo、Y. Zhao、X. Ma、Z. Yan、Z. Liu、C. Sheng、S. Zhu 和 H. Liu, 《一种用于芯片上宽带非线性光学的共形映射方法》, Nat. Photon. 18, 471 (2024)。[46] M. C. Roth、U. Israeli、S. Ben-Avi 和 R. Bekenstein, 《集成曲面纳米光子结构中的光的非测地传播》, Opt. Express 33, 43071 (2025)。[47] Y. Song、Y. Monceaux、S. Bittner、K. Chao、H. M. Reynoso de la Cruz、C. Lafargue、D. Decanini、B. Dietz、J. Zyss、A. Grigis、X. Checoury 和 M. Lebental, 《莫比乌斯带微激光器：非欧几里得光子学的试验平台》, Phys. Rev. Lett. 127, 203901 (2021)。[48] H. Girin、S. Bittner、X. Checoury、D. Decanini、B. Dietz、A. Grigis、C. Lafargue、J. Zyss、C. Xu、P. Sebbah 和 M. Lebental, 《探索非欧几里得光子学：伪球面微激光器》, Phys. Rev. A 111, 043512 (2025)。[49] C. Xu、A. Sundaresan、N.-B. Kazkal、C. Lafargue、L. Zarfaty、L.-G. Wang、O. Birnholtz、D. Decanini、M. Lebental 和 P. Sebbah, 《黑洞光学类比：光子球微激光器》, arXiv:2507.01751。