arXiv:2601.02202v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

采用标准k-ε RANS 模型，通过隐式壁面惩罚公式施加壁面函数的湍流流体流动基于密度的拓扑优化

Amirhossein Bayat[a], Hao Li[a], Joe Alexandersen[a,*]

[a]机械与电气工程研究所，南丹麦大学，*Campusvej 55*，欧登塞，邮编 *DK-5230*，丹麦

摘要

湍流对边界附近的网格精细度要求很高，以确保准确性。在拓扑优化（TO）中，如此精细的网格并不现实，而常见方法则受限于准确性较低且会高估边界层厚度。壁面函数是降低计算需求的自然选择，但由于设计参数化是弥散的，难以将其直接应用于基于密度的拓扑优化。我们提出了一种适用于雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）标准 k–ε模型的隐式壁面函数公式，该公式直接从设计变量的梯度中提取壁面法向信息，并支持通过惩罚项公式向 RANS 方程施加壁面函数，无需使用贴体网格。该方法为高雷诺数湍流拓扑优化提供了可靠途径，其边界层准确性可媲美采用显式壁面函数的贴体网格分析，同时保留基于密度的拓扑优化的灵活性。此外，由于利用壁面函数对壁面效应进行建模，因此在粗得多的网格上也能获得准确的解，从而显著降低计算成本。我们在三个典型基准算例上验证了该方法，雷诺数最高达 $\mathrm{Re} = 2 \times 10^5$：弯管、U形弯管和特斯拉阀。在所有算例中，所提出的方法都能准确再现近壁速度剖面，与采用显式壁面函数的贴体网格验证模拟结果高度吻合。相比之下，未采用所提出壁面函数处理的常规湍流拓扑优化公式无法准确预测边界层发展，所得结果也并非最优。

关键词：基于密度的，拓扑优化，隐式壁面函数，标准 RANS k-ε 模型，高雷诺数流动，边界层建模，流体动力学

1. 引言

人们普遍认为，与层流相比，湍流在传递热量、质量和动量方面效率显著更高，这主要归因于湍流中“涡黏度”所带来的混合作用增强 [1]。这一独特特性使得研究湍流至关重要，不容忽视，尤其是因为当今许多工业过程和科学挑战都受限于热量、质量和动量传递方面的局限。

湍流仿真主要有四种方法。其中，准确性最高但计算成本也最高的是直接数值模拟（DNS），它能够解析所有湍流尺度，因此需要极其精细的网格，尤其是在固体边界附近 [2, 3]。第二种方法是大涡模拟（LES），它对纳维–斯托克斯方程应用空间滤波器，直接解析大尺度能量涡，同时对较小尺度的涡进行建模 [4]。

*通讯作者电子邮箱地址：joal@sdu.dk (Joe Alexandersen)

尽管大涡模拟的计算成本低于直接数值模拟，但仍需要大量计算资源。雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）模型通过计算湍流量的统计平均值，在为各种工程应用提供足够准确性的同时，显著降低了计算成本 [5]。最后，混合大涡模拟/雷诺平均纳维–斯托克斯模型在自由剪切区采用大涡模拟，在壁面附近采用 RANS 建模，并依据壁面定律，利用大涡模拟处理主流、利用 RANS 处理近壁区域，从而兼顾准确性与效率 [6]。本研究选用了标准 k-ε湍流模型及壁面函数，因为它在准确性、计算效率和计算稳健性之间取得了良好平衡。

拓扑优化（TO）是一种用于生成高效且创新设计的强大计算方法。该概念最初由 Bendsoe 和 Kikuchi [7], 针对固体力学提出，随后由 Borrval 和 Petersson [8], 扩展至斯托克斯流动问题，并进一步由 Gersborg 等人应用于层流 [9]。然而，对于湍流，拓扑优化仍远未成熟，还需要大量进一步的研究与开发 [10]。在拓扑优化的背景下，RANS 模型是最实用的选择，因为该过程涉及数百次模拟的迭代。

1.1. 研究动机

将拓扑优化应用于 RANS湍流模型时，壁面函数具有显著优势，因为它们:

（i）能够在粗网格上模拟湍流。在基于密度的拓扑优化中，流固界面并不明确；设计域中的任何点都可能成为潜在壁面。因此，为了捕捉黏性底层和对数区 [11, 12]„ 否则就必须在整个计算域内采用极其精细的网格来解析近壁湍流，这在计算上是不可行的。

（ii）近似壁面附近的行为，简化流动方程的求解 [13], , 从而避免解析低雷诺数k-ε模型中的近壁区域所导致的缓慢收敛 [14]。因此，在拓扑优化中采用壁面函数可大幅降低计算成本，因为优化过程中必须数百次求解正问题与伴随问题。

然而，将壁面函数与基于密度的拓扑优化相结合并非易事，因为流固界面并未被显式表示，而是嵌入在弥散设计场中。尽管弥散域为优化过程中的大幅几何变化提供了灵活性 [15], , 但这些灰色区域也使得难以在流固界面准确施加边界条件。因此，涉及壁面函数的 RANS 模型尤其难以进行一致的构建。

1.2. 相关研究

1.2.1. 湍流拓扑优化（*TuTO*）

湍流拓扑优化（TuTO）最初采用 Spalart–Allmaras（SA） [16]湍流模型进行演示 [17, 18, 19, 20, 21]。SA模型是一种单方程RANS闭合模型，它输运一个与涡黏度相关的工作变量，广泛应用于涡轮机械和航空航天应用 [22]。然而，对于自由剪切流和射流，基准SA模型的准确性往往较低 [23]。此后，TuTO 已扩展至双方程湍流模型，例如k–ε、k–ω或类似模型 [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]。采用双方程湍流模型可提高准确性、增强通用性并降低对经验假设的依赖 [33], , 但计算成本也更高。在保真度谱的高端，Nobis 等人 [34] 直接使用 DNS 开展 TuTO，提供了无建模误差的参考结果，但计算成本大幅增加。

计算 RANS伴随方程还会带来另一项耗时且占用大量内存的计算任务。因此，人们开发了各种近似方法，以获得对设计 [35]“足够好”的梯度。其中，冻结湍流方法最为常见。在这种方法中，推导伴随方程时仅考虑平均动量方程，同时将湍流黏度 ν_t 视为固定值，并忽略湍流模型的导数 [36, 37]。尽管这种简化方法计算成本较低，却会降低精度，并可能显著扭曲伴随梯度，尤其是在逆压梯度区域 [38, 25]。本研究在 COMSOL Multiphysics [39] 中实现了离散伴随方法，未采用任何此类简化。

为避免 RANS 湍流模型的数学复杂性和计算成本，拓扑优化中采用了一些代数湍流方法和简化方法作为轻量级替代方案，这些方法适用于大规模或三维 TuTO。Høghøj [40] 提出了一种所谓的零方程模型，该模型基于普朗特混合长度模型。虽然无需为湍流量添加额外方程，但仍需额外求解方程（一个反应-扩散方程和一个泊松方程），以计算到最近壁面的距离。Lundgren 等人 [41] 进一步简化了这一方法，假设壁面距离函数与实际设计无关，并将代数普朗特混合长度模型应用于三维流动–传热–结构拓扑优化。

为了减少壁面附近对极细网格的需求，必须使用壁面函数。Kubo 等人[42],在浸入边界框架中结合基于水平集的拓扑优化，采用一个壁面定律方程，并直接根据速度的法向梯度修正壁面上的湍流黏度。Galanos 等人[43] 利用哈密顿–雅可比方程的解计算到壁面的距离，并在使用切割单元的拓扑优化中，将壁面函数应用于 SA模型。

据作者所知，将隐式壁面函数引入基于密度的 TuTO 仍未得到研究。针对 $k-\varepsilon$RANS 模型，已有成熟的壁面函数公式；采用这些公式可以降低计算成本，因为它们允许使用 $y^+ \sim 10$–300 的网格，而无需采用完全解析近壁面建模所要求的 $y^+ \approx 1$ 。需要指出的是，对于上述列出的大多数研究，由于计算成本的限制，其基础模型所要求的 y^+ 通常很少得到满足。因此，在拓扑优化中引入壁面函数至关重要。

1.2.2. 基于密度的拓扑优化中的隐式壁面

在基于密度的拓扑优化中，拓扑由连续的材料分布控制，因此不存在显式的固-流界面。针对这一背景下与壁面相关的条件，人们开发了多种依赖设计变量空间梯度的方法。为处理涂层结构，Clausen 等人 [44, 45] 引入了第二滤波器，可定义厚度受控的界面。这种方法已扩展到多种工程应用中的壁面控制 [46, 47, 48, 49]。为在隐式壁面上施加边界条件，密度跃变（类似于梯度）已用于对流传热 [50, 51], 、流固耦合（FSI） [52],以及黏热损失建模 [53]。

有时，仅定义隐式壁面并不足够，还可能需要确定壁面法向方向。在对流传热中，Lazarov 等人 [54] 引入了隐式法向量，用于在基于密度的拓扑优化中施加法向热通量壁面条件。Wang 和 Xiaoping [55], 采用了相同的思路来处理设计相关载荷。在增材制造中，可制造性约束至关重要，壁面法向量已用于限制悬垂结构 [56]并控制表面粗糙度 [57]。

最近，Bayat 等人 [58] 在基于密度的拓扑优化中采用第二滤波器及其空间梯度来确定壁面表示和相应的法向量，从而实现自由滑移边界条件。本文将这一方法扩展用于施加湍流壁面函数。

1.3. 贡献

本文提出了一种稳健且相对易于实现的方法，将带壁面函数的标准 k-ε RANS 模型集成到基于密度的拓扑优化框架中，并将其称为隐式壁面函数方法。所提出的隐式壁面函数方法能够准确捕捉近壁物理，同时保持计算成本可控，从而为 RANS 与拓扑优化的耦合引入了一种新颖的 formulation。

本文以弯管、U形弯管和特斯拉阀这三个重要基准算例，展示所提出的方法在复杂物理问题和几何形状下的稳健性。前两个基准算例表明，所提出的隐式壁面函数方法生成的设计优于“常规”TuTO 方法。近期研究增进了人们对特斯拉阀性能与几何形状及运行条件之间关系的理解，但研究主要局限于层流和蠕动流状态 [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65]。据我们所知，目前尚无关于特斯拉阀在湍流、惯性主导状态下进行拓扑优化的报道，而在此状态下，准确的边界层建模对于可靠的预测和优化至关重要。特斯拉阀天然具有急弯和复杂几何形状，进而会产生高度湍流的流动。本文研究了高雷诺数下的特斯拉阀，以强调惯性主导效应对优化后拓扑的影响。此外，

我们针对广泛的雷诺数范围开展了比较研究，涵盖层流（自由滑移和无滑移边界条件下）直至完全湍流状态。

1.4. 论文结构

本文由以下部分组成：

– 第2节介绍湍流k–ε模型、拓扑优化变量以及显式和隐式壁面函数表示，并给出最终的弱形式及求解方法的详细信息。– 第3节将所提出的湍流拓扑优化方法（称为隐式壁面函数方法）应用于后向台阶基准算例，并将结果与 Kim[66] 的实验数据进行比较。– 第4节将隐式壁面函数方法应用于多个拓扑优化测试算例（弯管、U形弯管和特斯拉阀），包括对U形弯管的文献比较和大涡模拟验证，并将层流特斯拉阀设计（自由滑移壁面与无滑移壁面）与湍流优化后的特斯拉阀设计进行比较。– 第5节给出结论。

2. 所提出的隐式壁面函数方法的公式

2.1. 雷诺平均纳维–斯托克斯（*RANS*）湍流模型

雷诺通过将速度场分解为两个分量，提出了一种统计方法，这种方法称为雷诺分解：平均速度和脉动部分。他还在纳维–斯托克斯方程中引入了额外的非线性应力项，这些应力项现称为雷诺应力或湍流应力。该分解表示为 [67]:

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}' \tag{1}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ 是平均（时间平均）速度，而$\boldsymbol{u}'$ 是脉动速度分量。脉动部分的时间平均值为零。

引入标准$k-\varepsilon$ RANS 模型来模拟流体流动行为（详细综述见 [68]）。由速度$\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^\top$和压力$p$ 的 RANS 方程所描述的不可压缩流体稳态流动为：

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \nabla\cdot\left((\nu+\nu_T)[\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^\top]\right) + \alpha\boldsymbol{u} = 0 \tag{2a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2b}$$

其中，ν 是运动黏度，取决于流体本身；ν_t 是湍流涡黏度，用于模拟速度脉动部分$\boldsymbol{u}'$的影响；α 是逆渗透率或 Brinkman 惩罚因子。在固体域中，Brinkman 惩罚因子设为较大的数值，以确保流体几乎无法流经固体。

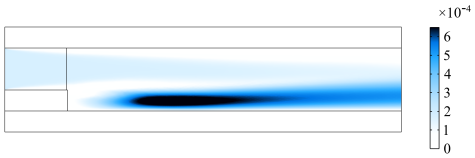
为计算湍流涡黏度 ν_t，我们需要求解另外两个对流-扩散-反应方程，即 k 和 ε 方程，它们分别表示湍动能和耗散率。湍流涡黏度的计算公式为 $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$，其中 k 和 ε 是以下方程的解：

$$\nabla\cdot\left(k\boldsymbol{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_k}\nabla k\right) - P_k + \varepsilon = 0 \tag{3a}$$

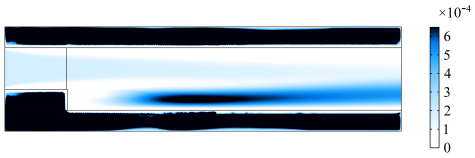
$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\boldsymbol{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) - \frac{\varepsilon}{k}(C_1 P_k - C_2\varepsilon) + \alpha\varepsilon = 0 \tag{3b}$$

其中，α 是方程（2）中使用的相同 Brinkman 惩罚因子，而P_k 是湍动能的产生项，定义如下：

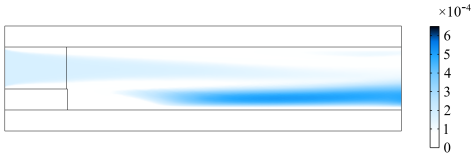
$$P_k = \nu_T\left(\nabla\boldsymbol{u} : \left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^\top\right)\right) \tag{4}$$



(a) 显式壁面



(b) 在k方程中未使用惩罚项的隐式壁面



(c) 在k方程中使用惩罚项的隐式壁面

图 1：三种情况下的湍流黏度场 ν_t：(a) 显式壁面（参考），(b) 在k方程中未使用惩罚项的隐式壁面，以及 (c) 在k方程中使用惩罚项的隐式壁面。在k方程中未使用惩罚项的隐式壁面与显式壁面更为吻合，而增加的 ν_t 提高了湍流模型的稳定性，并有助于收敛。

常数参数　　参数设为$C_\mu = 0.09$、$C1 = 1.44$、$C2 = 1.92$、$\sigma_k = 1.0$ 和 $\sigma_\epsilon = 1.3$ [69]。最后一项方程 (3b) 为　用于迫使 ε 在固体域中为零——类似于公式（24）中的 Brinkman 项　　.

如 Butler 等人所述 [31], , 与先前的工作 [27, 70]不同，我们不在k 方程中施加 Brinkman 惩罚项。初步研究表明，不在k 方程中施加 Brinkman 惩罚项时，最终湍流特性与显式壁面参考情形更加吻合。如图 1 所示，在k 方程中也施加惩罚项，会使固体区域内的湍流黏度趋于零，但会降低对主体流动中湍流黏度的预测准确性。相反，在k 方程中省略惩罚项，得到的湍流黏度预测结果与显式壁面情形高度吻合。这样可以使固体域内的湍流黏度增大，从而增强湍流方程中的黏性项，使其更接近固体部分。

2.2. 显式壁面函数

在壁面附近，平均速度梯度变得极为陡峭，因此需要极其精细的网格才能准确解析 [71, 72]。在实际应用中，通常希望避免直接解析这些近壁区域所带来的高昂计算成本。为此，可以在距离壁面一定位置处施加适当的边界条件，即壁面函数，从而大幅降低计算开销，同时保持较好的解的精度。壁面函数既考虑壁面处的黏性应力，也考虑k-ε方程 [69]。

2.2.1. 壁面处的黏性剪切应力

流体域中的黏性应力定义如下：

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu\left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\top}\right] \tag{5}$$

壁面上的黏性应力切向部分等于：

$$\boldsymbol{\tau}_w = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{n}^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \tag{6}$$

在此表达式中， $\boldsymbol{\sigma n}$表示壁面上的黏性牵引向量，而 $(\boldsymbol{n}^{\top}\boldsymbol{\sigma n})$ 表示其法向分量。通过从总牵引力中减去法向分量，可以分离出壁面上黏性应力的切向分量。随后，可以使用壁面律对数律估算模型的边界条件，以规定壁面上的切向黏性应力 [69]:

$$\boldsymbol{\tau}_w = -\frac{u_\tau}{y^+}\,\mathbf{u}, \tag{7}$$

其中，y^+ 由下式计算:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \tag{8}$$

而u_τ 为摩擦速度，可估算为计算域内的$u_\tau = \frac{|\boldsymbol{u}|}{y^+}$，以及壁面上的$u_\tau = C_\mu^{0.25}\sqrt{k}$ [73]。可分别在计算域和壁面上按下式计算： [69]

$$u_\tau = \max\left\{C_\mu^{0.25}\sqrt{k},\ \frac{|\mathbf{u}|}{\delta_w^+}\right\} \tag{9}$$

其中y 定义为沿法向从壁面量起的距离（坐标标记为x_1 和x_2）。在有限元分析中，我们用单元尺寸的一半（$h/2$）估算到壁面的距离y[25]，并使用下式计算壁面抬升 [74]：

$$\delta_w^+ = \max\left(\frac{h_w C_\mu^{0.25}\sqrt{k}}{2\nu},\ 11.06\right) \tag{10}$$

在靠近壁面处，即黏性底层中，线性关系$y^+ = \frac{|\boldsymbol{u}|}{u_\tau}$ 成立。再往外，在对数层中，壁面律对数律 $\frac{|\mathbf{u}|}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\log y^+ + \beta$成立。对数层和线性层的规律在$y_*^+ = 11.06$处相交（假设 κ（冯·卡门常数）为 $= 0.41$，且 β'（经验常数）为 $= 5.2$），这就是对数区域中的最小值 δ_w^+ 等于11.06的原因。为满足壁面律对数律，数值 δ_w^+ 应介于11.06和300之间；在数值实现中，可通过调整网格尺寸来控制这一点。

结合方程（6）和（7），可得:

$$(\boldsymbol{\sigma n}) - (\boldsymbol{n}^{\top}\boldsymbol{\sigma n})\boldsymbol{n} + \frac{u_\tau}{\delta_w^+}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{s,f} \tag{11}$$

这表示黏性壁面函数边界条件，使用标准k–ε湍流模型时必须满足该条件。

2.2.2. 壁面上 k 和 ε的边界条件

除了黏性壁面函数边界条件外，我们还在壁面上对k 和 ε施加边界条件，并修改产生项P_k。

Kuzmin 等人[69] 建议对k 和 ε 施加诺伊曼边界条件:

$$\mathbf{n}\cdot\nabla k = -\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{\text{wall}} \tag{12a}$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla \varepsilon = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{{u_\tau}^3}{\kappa\, y^2} = \frac{\varepsilon}{y} \qquad \text{on } \Gamma_{\text{wall}} \tag{12b}$$

需要特别指出的是，y 表示沿法向到壁面的距离。也可以对 ε [73, 74]施加狄利克雷条件:

$$\varepsilon_w = \frac{{u_\tau}^4}{\kappa \delta_w^+ \nu} \tag{13}$$

因此，确保边界上的产生项 P_{kw} 与边界上的耗散率 (ε_w) [69] 处于平衡状态至关重要:

$$P_{kw} = \varepsilon_w = \frac{{u_\tau}^4}{\kappa \delta_w^+ \nu} \tag{14}$$

我们将采用这种方法，在所识别的隐式壁面内施加方程（13）和方程（14），同时不对壁面或固体内部的 k 方程施加任何边界条件（原因见第 2.1 节和图 1。）

2.3. 设计变量与滤波

在基于密度的拓扑优化中，引入设计变量 $\gamma(\boldsymbol{x})$，用于区分固体区域和流体区域。所有灵敏度和微分运算均针对该变量进行。如下所定义，设计变量的取值连续分布在 0 到 1 之间，其中 0 表示固体域，1 表示流体域:

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_s \end{cases} \tag{15}$$

采用反应-扩散偏微分方程滤波器 [75]对设计变量 γ 进行平滑处理，并使问题正则化，形式如下:

$$-\frac{{r_1}^2}{12}\Delta\hat{\gamma} + \hat{\gamma} = \gamma \tag{16}$$

其中，r_1 为滤波半径，对应引入约为该尺寸的最小长度尺度。虽然使用公式（16）有助于实现网格无关设计，但会导致设计变量呈灰度。为使设计变量的分布更接近二值化（但会失去严格的长度尺度控制），采用赫维赛德投影函数 [76]:

$$\varphi = \frac{\tanh(\beta_0\eta) + \tanh(\beta_0(\hat{\gamma} - \eta))}{\tanh(\beta_0\eta) + \tanh(\beta_0(1 - \eta))} \tag{17}$$

其中，β_0 是　控制转变陡峭程度的陡峭度参数（ β_0 越大，设计变量就越
类似阶跃函数 函数），而 η 是决定投影过渡位置的阈值。

2.4. Brinkman 惩罚

为了在固体区域内使速度和 ε 场趋于零，引入了体积惩罚项 [8, 9, 15]。该项通常称为 Brinkman 惩罚或逆渗透率项，表示为投影设计变量 φ的函数:

$$\alpha(\varphi) = \alpha_{\max}\frac{1 - \varphi}{1 + q_\alpha\varphi} \tag{18}$$

其中，$\alpha_{\max}$ 表示最大惩罚值，而q_α 是控制过渡陡峭度的调节参数。有关更详细的讨论，请参阅 [10, 15]。

2.5. 隐式壁面和法向量

在基于密度的拓扑优化中，通常会像第 2.3 节所述，对设计变量进行滤波和投影。然而，为了识别并控制隐式壁面的宽度，并以平滑、连续的方式计算相应的法向量，引入辅助二级滤波器 [44, 58] 是有益的。这种方法有两项主要优势：(i) 将与壁面相关的参数与其他正则化处理分离，从而可以对壁面定义采用不同的滤波半径，并控制壁面厚度；(ii) 对投影设计变量 φ 进行平滑，从而为法向量计算提供质量更高的导数。

第二滤波器采用相同的反应-扩散偏微分方程滤波器 [75]:

$$-\frac{{r_2}^2}{12}\Delta\hat{\varphi} + \hat{\varphi} = \varphi \tag{19}$$

但其中 r_2 是第二滤波半径，输出为第二滤波后的设计变量$\hat{\varphi}$。随后，根据 Bayat 等人 [58] 的研究，使用该变量定义固-流界面及其相应的法向量。固-流界面由动量方程和 k-ε 方程的壁面强度 ψ 描述，定义如下:

$$\psi = \psi_{\max}\left(\frac{\|\nabla\hat{\varphi}\|_2}{G_{\max}}\right)^{P_{con}} \tag{20}$$

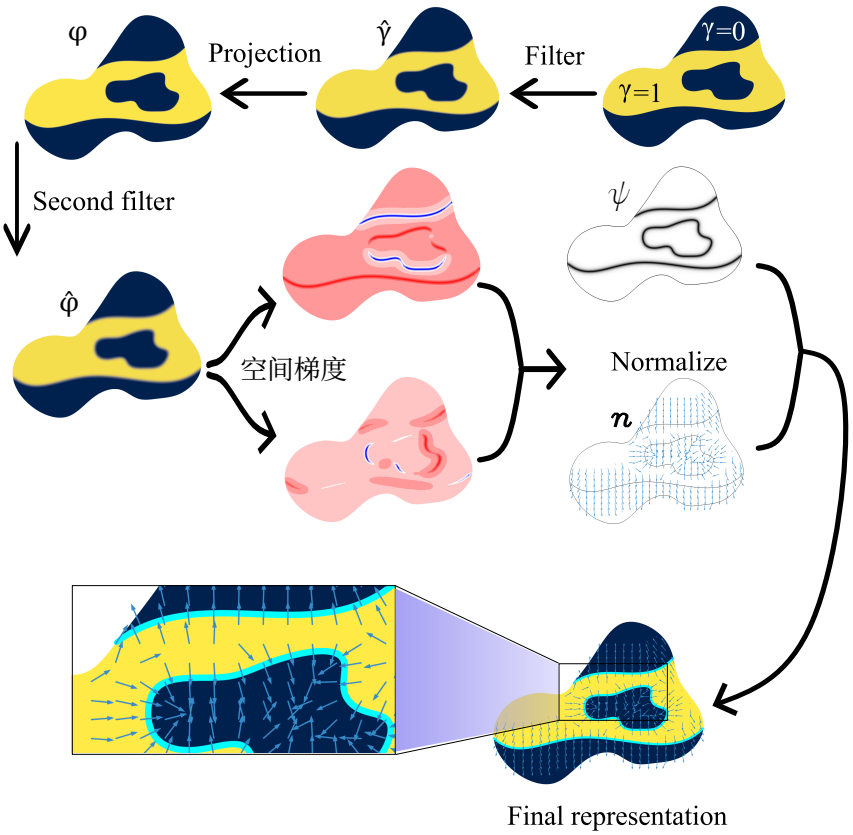


图2：壁面区域识别及法向量计算过程示意图。

其中， $\psi_{\max}$ 是最大壁面强度，P_{con} 是控制因子，而$G_{\max}$ 表示 Clausen 等人推导出的最大梯度幅值 [44]:

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{r_2} \tag{21}$$

与以往研究类似 [54, 56, 58], , 法向量$\boldsymbol{n} = [n_1, n_2]^\top$ 由下式直接计算

$$\boldsymbol{n}(\hat{\varphi}) = -\frac{\nabla\hat{\varphi}}{|\nabla\hat{\varphi}|} \tag{22}$$

对于产生项，我们将引入一个独立的壁面强度 ψ_p，其作用不同于用于施加黏性和k-ε边界条件的其他壁面强度。在前述情况中，壁面强度会乘以较大的有量纲系数 $\psi_{\max}$（例如 $O(10^3\text{-}10^4)$），以形成强惩罚项，使其主导局部残差，并在隐式壁面附近以弥散方式有效施加所需的边界行为。但对于产生项，由于它在方程中起反应项的作用，并会改变湍流生成项的幅值，我们只需在壁面处开启这一修正，并在主体流动中关闭它，而不改变其尺度。因此， ψ_p 被定义为取值介于0和1之间的无量纲激活因子，而非较大的惩罚参数。为此，我们采用平滑赫维赛德投影来控制给定位置处产生项的壁面函数修正是否激活，表示如下:

$$\psi_p = \frac{\tanh\left(\beta_p\eta_p\right) + \tanh\left(\beta_p\left(\frac{\psi}{max(\psi)} - \eta_p\right)\right)}{\tanh\left(\beta_p\eta_p\right) + \tanh\left(\beta_p(1-\eta_p)\right)} \tag{23}$$

在此，我们在所有模拟和优化运行中固定 $\eta_p = 0.5$ 和 $\beta_p = 64$ 。 β_p 的值相对较大，因此赫维赛德投影在 0 和 1 之间的过渡非常陡峭，但仍保持连续。

壁面计算的整体流程总结于图 2 和图 3 中。

2.6. 非线性耦合求解器方法

方程 (2) 和 (3) 的控制方程紧密耦合且高度非线性。分子黏度 ν 是流体的一种材料属性，而湍流涡黏度 ν_t 则取决于湍流场。湍流场 k 和 ε 又同时取决于流场及彼此。对于这一高度非线性系统，求得稳态解可能非常困难。

因此，我们采用伪瞬态延拓 [77]。在每个方程中加入关于伪时间 τ 的人工时间导数，并逐渐增大伪时间步长 $\Delta\tau$，直至残差收敛。随着 $\Delta\tau$ 逐渐增大至 10^4, , 系统达到收敛，此时解将接近稳态解。动量方程的伪瞬态形式为:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \nabla p - \nabla\cdot\left((\nu+\nu_T)[\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^\top]\right) + \alpha\boldsymbol{u} = 0 \tag{24}$$

为求解耦合方程，我们选择采用分离式方法。一种方法是引入耦合参数 [69]:

$$\chi = \frac{\varepsilon}{k} \tag{25}$$

该方法将k 和 ε方程解耦，并对两个方程进行线性化。随后对整个系统进行迭代求解，直至收敛 [74]。

采用伪瞬态方法后，线性化的湍流k-ε 方程变为 [69, 78, 79]:

$$\frac{\partial k}{\partial\tau} + \nabla\cdot\left(k\boldsymbol{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_k}\nabla k\right) - P_k + \chi k = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \nabla\cdot\left(\varepsilon\boldsymbol{u} - \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right) - \chi\,(C_1P_k - C_2\varepsilon) + \alpha\varepsilon = 0 \tag{27}$$

随后使用前一次外迭代所得的 χ 和 ν_t 的数值求解这些方程，直到解收敛。收敛时，得到的k 和 ε场对应于方程（3a）和（3b）的解。

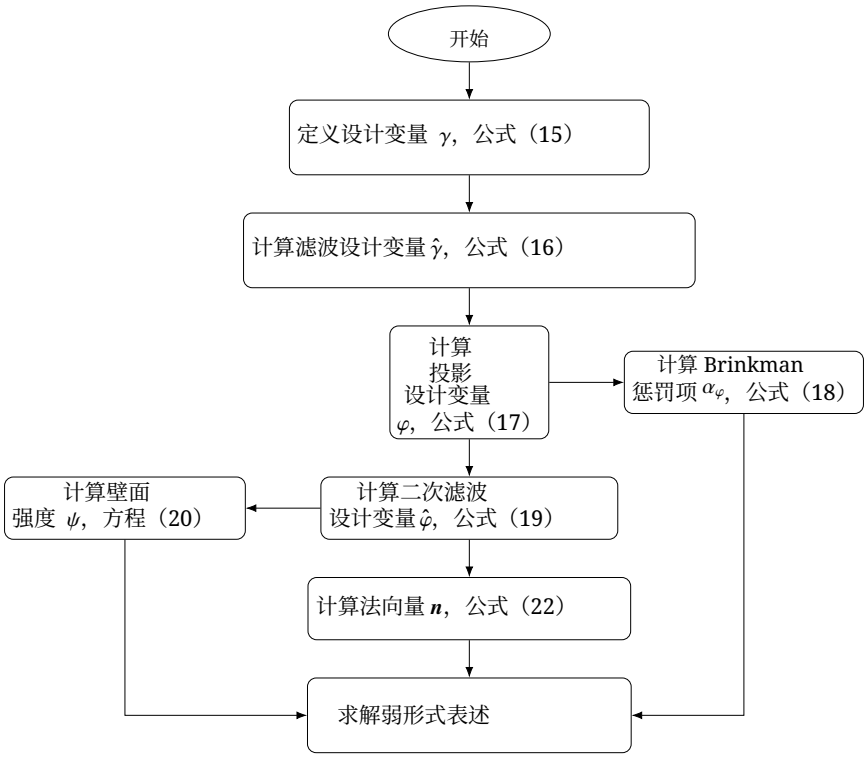


图3：流程图展示了如何将固-流界面壁面（隐式壁面）的定义纳入基于密度的拓扑优化框架。

2.7. 采用隐式壁面函数的弱形式

为了采用第2.5节所述的方法引入第2.2.1节和第2.2.2节所述的隐式壁面函数，我们在弱形式中引入体积惩罚项，并使用壁面强度作为惩罚场，使其集中于隐式壁面处。

实际上，我们将壁面强度 ψ 与测试函数及相关边界条件相乘，并在计算域上积分，以获得弱形式中的附加项。对于方程（11）中的黏性应力，我们有：

$$\int_{\Omega} \psi \left((\boldsymbol{\sigma n}) - (\boldsymbol{n}^{\top} \boldsymbol{\sigma n}) \boldsymbol{n} + \frac{u_{\tau}}{\delta_{w}^{+}} \boldsymbol{u} \right) \cdot \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 是速度场的测试函数向量。对于方程（13）中的 ε 条件，我们有：

$$\int_{\Omega} \psi \left(\varepsilon - \varepsilon_{w} \right) w_{\varepsilon} \, \mathrm{d} \tag{29}$$

其中 w_{ε} 是 ε 场的测试函数。

相比之下，对于进入k 方程的产生项，我们根据方程—修改产生项，（14）在每个 y 次迭代，使用：

$$P_k = P_k + \psi_p \left(\varepsilon_w - P_k \right) \tag{30}$$

所提出的隐式壁面函数方法的最终完整弱形式如下：

纳维–斯托克斯方程：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau}\,\boldsymbol{w}\,d\Omega + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p\,\nabla\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \Big((\nu+\nu_T)[\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^\top]\Big) : \nabla\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \alpha\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega q\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \psi\left(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \frac{u_\tau}{\delta_w^+}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\Omega + \mathcal{S}_{u,p} = 0\end{aligned} \tag{31}$$

k方程：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\partial k}{\partial \tau}\,w_k\,d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla k\,w_k\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{\nu_t}{\sigma_k}\,\nabla k\cdot\nabla w_k\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \chi\,k\,w_k\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \Big(P_k + \psi_p\,(P_{kw}-P_k)\Big)\,w_k\,\mathrm{d}\Omega + \mathcal{S}_k = 0\end{aligned} \tag{32}$$

ε方程：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\,w_\varepsilon\,d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varepsilon\,w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\,\nabla\varepsilon\cdot\nabla w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad - \int_\Omega \chi\,C_1\,\Big(P_k + \psi_p\,(P_{kw}-P_k)\Big)\,w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad + \int_\Omega \chi\,C_2\,\varepsilon\,w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \alpha\,\varepsilon\,w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \psi\,(\varepsilon-\varepsilon_w)\,w_\varepsilon\,\mathrm{d}\Omega + \mathcal{S}_\varepsilon = 0.\end{aligned} \tag{33}$$

与我们此前关于自由滑移边界条件的工作相比 [58], , 稳定化项（$\mathcal{S}_{u,p}$, $\mathcal{S}_k$,$\mathcal{S}_\varepsilon$）仅采用 COMSOL 对压力、流线和间断稳定化的默认实现 [80]。

2.8. 隐式壁面函数拓扑优化总结

所提出的隐式壁面函数方法的实现细节总结于图4中。如图所示，根据图3计算得到的壁面法向量和壁面强度被纳入k–ε弱形式方程中。这些量连同初始猜测和边界条件一起用于控制方程的弱形式，并采用线性离散的有限元方法求解。为获得k–ε湍流模型的稳定解，采用伪瞬态方法，并对k 和 ε 方程进行线性化。随着时间步长逐渐增大至 10,000，伪瞬态解逐步收敛至稳态解。随后，在 COMSOL 中结合自动微分，通过离散伴随公式计算灵敏度。接着，移动渐近线法的停止准则为：所有经各自初始幅值缩放的设计变量的相对变化均低于最优性容差 10^{-2}；或目标函数停滞，即连续五次迭代中$\frac{o_{k+1}-o_k|}{\max(1,|o_k|)} < \zeta_2$，其中$o$ 为目标函数， ζ 为一个较小的容差；或最后

每个延拓步最多设置 25 次 MMA 迭代（弯管和 U形弯管案例），Tesla 阀最多设置 30 次 MMA 迭代，以此作为保护机制。当满足停止准则后，流程便进入下一个延拓步，此时会更新拓扑优化参数，并重复该过程。我们采用延续法，先取较高的q_a （即较低的惩罚项），随后逐步降低。这样有助于流体流经大部分区域，减轻初始 Brinkman 惩罚对设计演变的影响，并有利于求解非凸问题 [15]。此外，我们还逐步增大投影陡峭度参数 β_0。

3. 所提出的隐式壁面函数方法的验证

为验证隐式壁面函数方法在基于密度的 TuTO 中的实现效果，我们将其与 Kim [66] 提出的经典后向台阶基准案例的实验数据进行比较。该问题被广泛

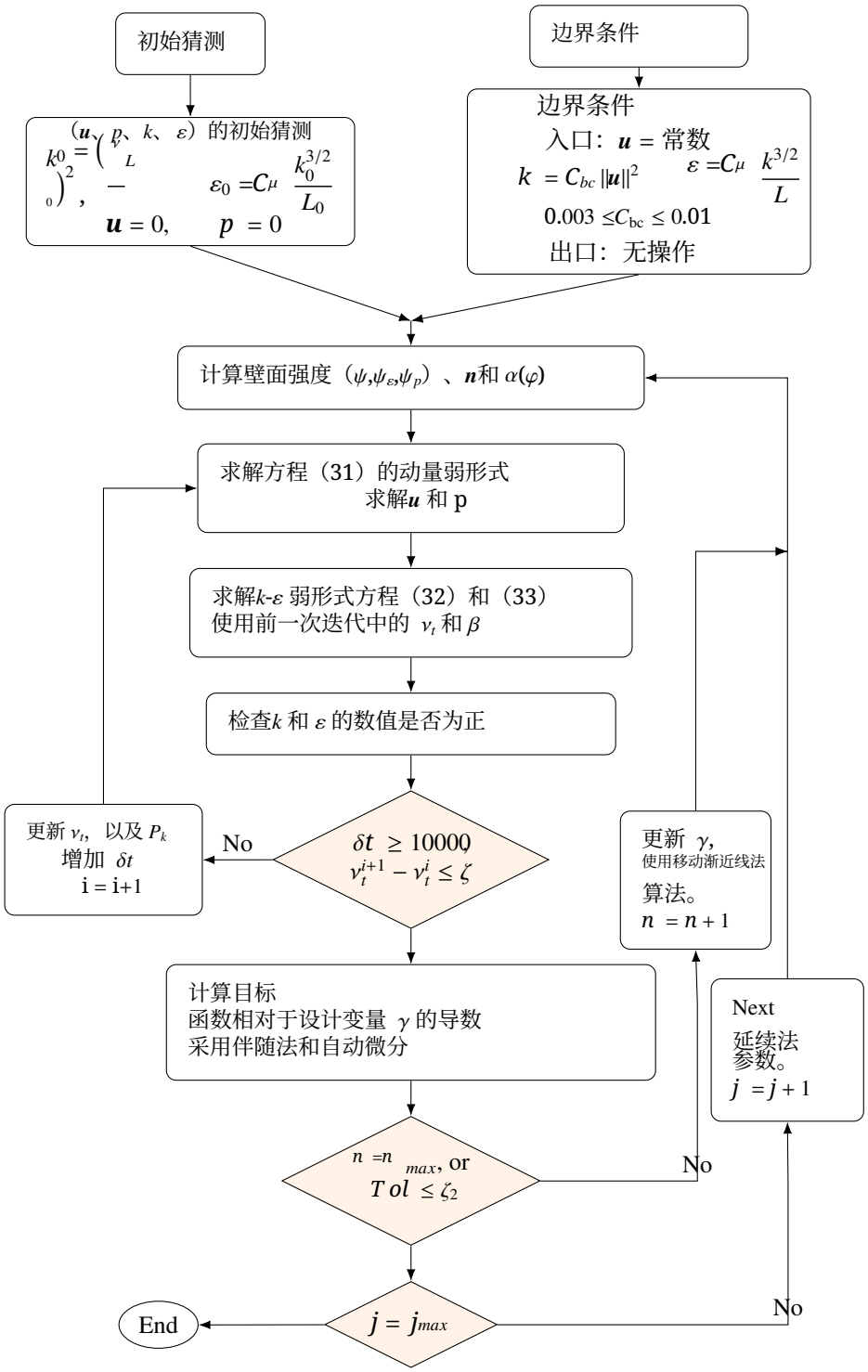
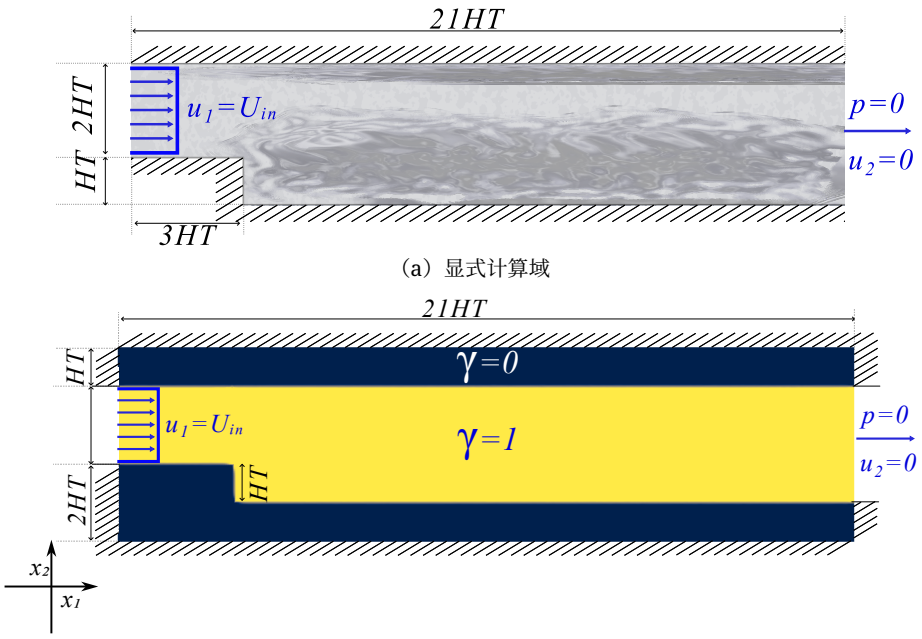


图4：该流程图展示了所提出的用于基于密度的湍流拓扑优化的逐步流程，其中壁面函数直接定义在设计域内，并包括所采用的具体边界条件和延拓方案。



（a）显式计算域

（b）弥散域

图5：用于验证所提出的隐式壁面函数方法的后向台阶基准几何示意图。（a）显示显式壁面情形，（b）显示用于隐式壁面情形的弥散域。 $\gamma = 1$ 表示流体域，$\gamma = 0$ 表示固体域。

该算例用于评估湍流中的分离与再附着行为，如图5所示。雷诺数根据分离点处边界层的动量厚度（$x_1 = 0$）计算，所得数值约为1.3×10^3，与Kim 等人[81]报道的实验设置一致。基于动量厚度的雷诺数定义为：

$$\mathrm{Re}_\theta = \frac{U_0\,\theta}{\nu} \tag{34}$$

其中，U_0 表示自由来流速度，ν 为流体的运动黏度，θ 为动量厚度，计算如下：

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u(y)}{U_0}\left(1 - \frac{u(y)}{U_0}\right) dy \tag{35}$$

给定的动量厚度雷诺数大致等价于89,600的入口雷诺数。模拟采用运动黏度 $\nu = 8.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$，台阶高度为$HT = 0.0381\mathrm{m}$，而入口速度设定为均匀的$U_{\mathrm{in}} = 1\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$。后向台阶验证基准所采用的参数汇总于表1中，网格如图6所示；壁面处允许的最大单元尺寸为$h_{max} = 0.002$，自由来流区域为$h_{max} = 0.006$。需要指出的是，此处特意采用了相对粗的网格，以说明壁面函数能够支持这种设置。该基准算例提供了一个具有物理意义的场景，用于评估所提出的方法在捕捉壁面效应方面的表现。

图 5 展示了用于验证所提出的隐式壁面函数方法的后向台阶示意图，包括：(a) 采用显式壁面的常规几何表示；(b) 采用隐式壁面的基于密度的“弥散区域”表示。针对三种不同情况进行了模拟：

- 案例 #1 采用带壁面函数的显式壁面表示，并作为准确参考解；
- 案例 #2 采用所提出的隐式壁面函数方法；

表 1：后向台阶基准验证所用的参数。

参数	数值
HT	0.0381
ν	8.5×10^{-7}
$\psi_{\max}$	5000
P_{con}	4
r_1	$4h_{max}$
r_2	$2h_{max}$
α_{max}	100
U_{in}	1
Re_{in}	89,600

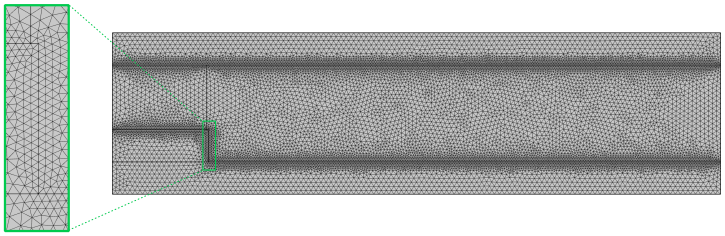


图 6：用于验证所提出的隐式壁面函数方法的计算网格示意图。固-流界面处的网格经过细化，单元尺寸为$h_{max} = 0.002$；自由流区域和固体域内的网格则粗化至$h_{max} = 0.006$（h_{max} 为允许的最大单元尺寸）。该网格总计包含 24,668 个三角形和 87,486 个自由度。

- 案例 #3 遵循不使用壁面函数的“常规”基于密度的 TuTO 流动建模方法，对所有变量（速度、k 和 ε）[27]施加 Brinkman 型惩罚，以将k 和 ε推向固体域中的零。

采用相对较粗的网格，以强调壁面函数能够适用于这种情况，并说明“对流”TuTO 模型在常用粗网格上的精度不足。

所提出的隐式壁面函数方法采用隐式y^+ 场，该场定义于整个计算域内；而显式壁面函数方法中的y^+ 仅定义在壁面上。图 7 展示了该体积场，其中数值仅在边界附近实际使用，此处壁面强度场 ψ 较大。

图8展示了三个案例在距入口不同距离处、沿不同切线的速度剖面，并与 Kim 等人[81]的实验结果进行了比较。结果清楚表明，“常规”方法（案例 #3）未能正确捕捉近壁速度分布，与实验实测结果存在偏差，尤其是在下游较远的位置。相比之下，所提出的隐式壁面函数方法（案例 #2）能够准确预测速度场，与实验数据相符，并且非常接近

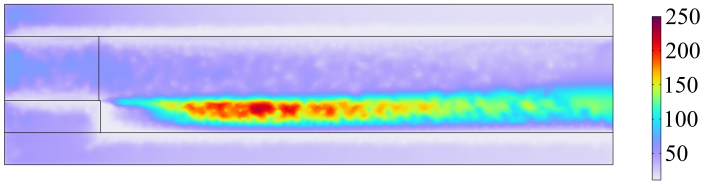
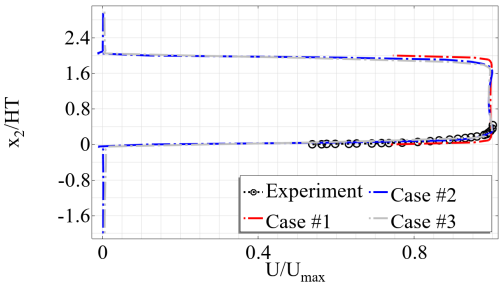
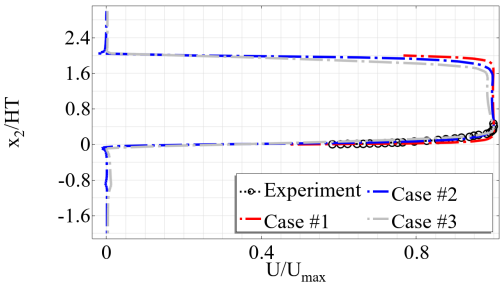


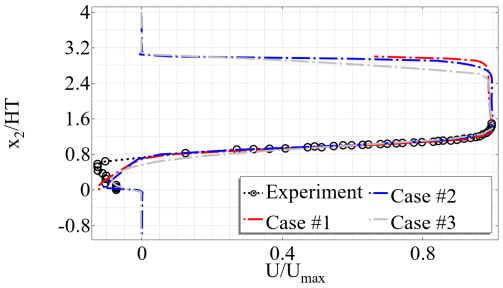
图 7：采用所提出的隐式壁面函数方法得到的后向台阶基准几何的隐式y^+ 分布。在壁面附近，壁面强度场 ψ 较大，y^+ 保持在 11.06 至 300 之间，符合壁面律对数律。



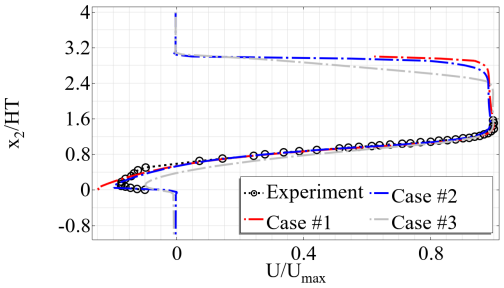
(a) $x_1/HT = -1$



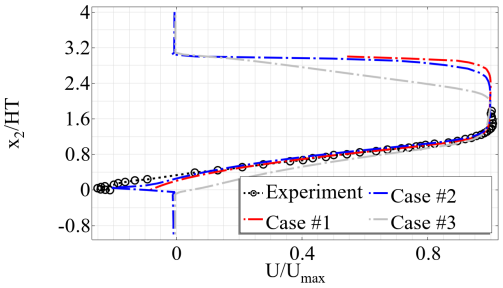
(b) $x_1/HT = 0$



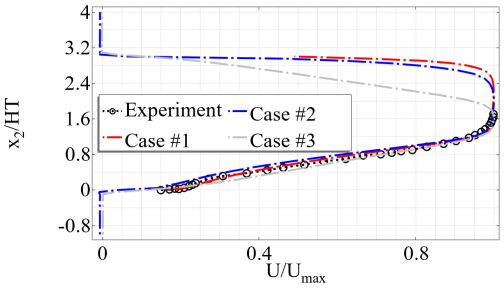
(c) $x_1/HT = 4/3$



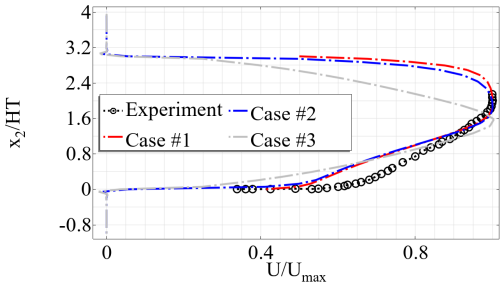
(d) $x_1/HT = 8/3$



(e) $x_1/HT = 16/3$



(f) $x_1/HT = 24/3$



(g) $x_1/HT = 48/3$

图8：不同流向位置处速度剖面的示意图。将实验结果与三种模拟案例进行比较：案例 #1，采用显式壁面函数的显式壁面模型；案例 #2，所提出的隐式壁面函数方法；以及案例 #3，采用隐式壁面的“常规”模型。

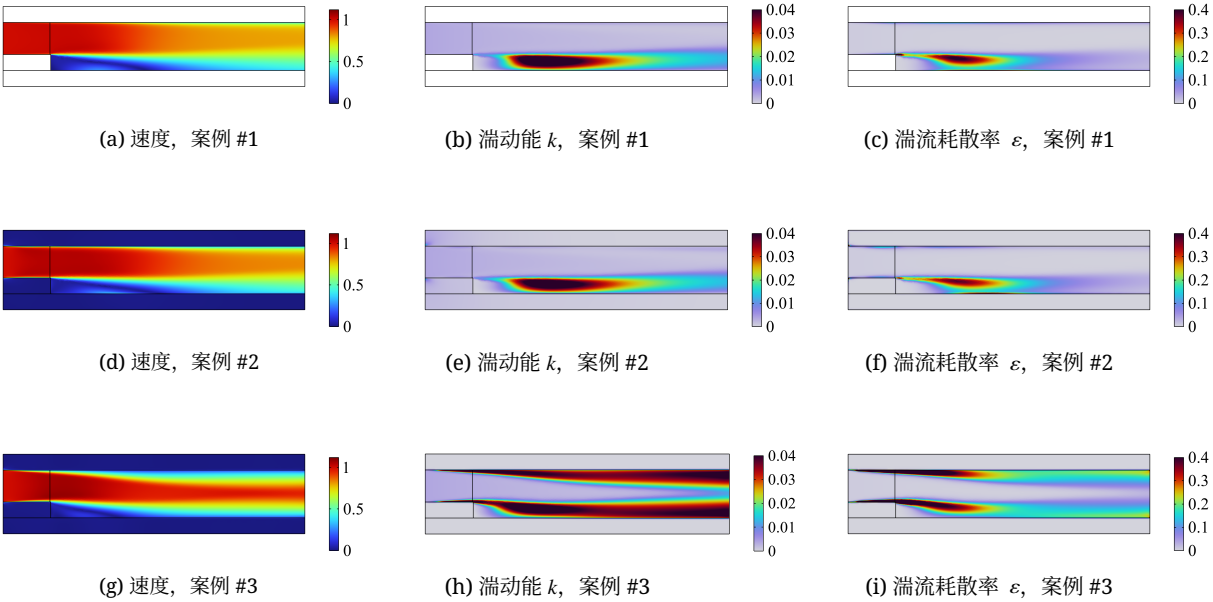


图 9：不同案例下速度 $\boldsymbol{u}$、湍动能k和湍流耗散率 ε 对比结果的直观总结。案例 #1采用显式壁面函数，并视为准确参考解。案例 #2在弥散域内采用所提出的隐式壁面函数方法。案例 #3在弥散域内采用“传统”的基于密度的湍流建模方法（在k 和 ε [27]上施加体积力）。

与显式壁面模型（案例 #1）相似。需要指出的是，在最下游点，三个案例都未能充分捕捉下壁面附近的速度分布，见图8g。这与当前实现无关，而是 RANS 和k-ε 模型引入的建模误差所致。

图 9 对给定网格下的三个案例进行了比较，结果表明，所提出的隐式壁面函数方法（案例 #2）与显式壁面方法（案例 #1）非常接近，而与“传统”方法（案例 #3）存在显著差异。可以看出，“传统”方法预测的流动路径弯曲程度明显更大，沿通道下游方向的边界层也明显更厚，且通道顶部和底部的湍流量都很大。这是因为在施加无滑移速度条件并将湍流量设为零时，粗网格会显著高估边界层厚度。这与采用壁面函数（无论是显式壁面还是隐式壁面）时几乎笔直的主流路径和极薄的顶部边界层形成鲜明对比。

4. 拓扑优化测试案例

本节采用所提出的隐式壁面函数方法，研究 TuTO 文献中的两个常见基准示例，并将结果与“常规”方法进行比较。此外，我们还研究了湍流特斯拉阀问题这一附加示例。表2总结了所考虑的案例，包括三个问题：(i) 弯管基准（图10）、(ii) U形弯管基准（图 11）和 (iii) 特斯拉阀问题（图 12）。

4.1. 优化问题公式

对于弯管基准和 U形弯管基准，目标泛函是在确保流体域不超过规定体积分数的同时，使平均入口压力最小。优化问题为

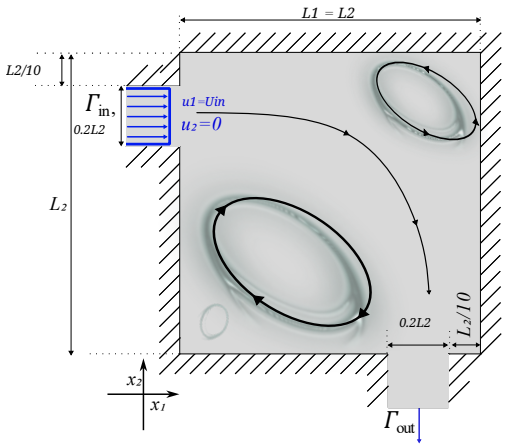


图10：弯管示意图。流体以均匀速度（$U_{\text{in}} = 1$）进入方形入口区域，拓扑优化旨在寻找一条使入口平均压力最小的最优流动路径，并通向出口；出口处施加零压力和法向速度流出条件。

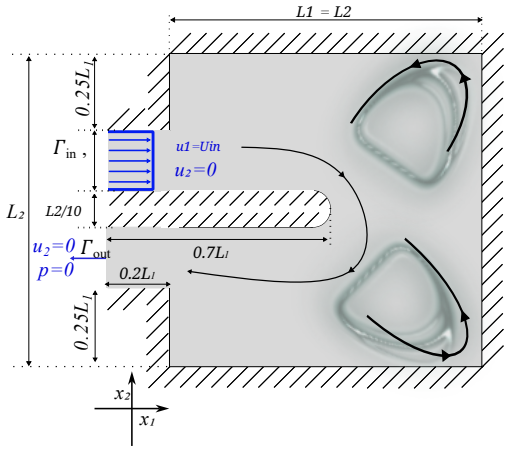


图11：U形弯管示意图。流体以均匀速度（$U_{\text{in}} = 1$）从入口进入计算域，沿着经过U形转弯且入口平均压力最低的优化通道流动后，从出口流出；出口处施加零压力和法向速度边界条件。

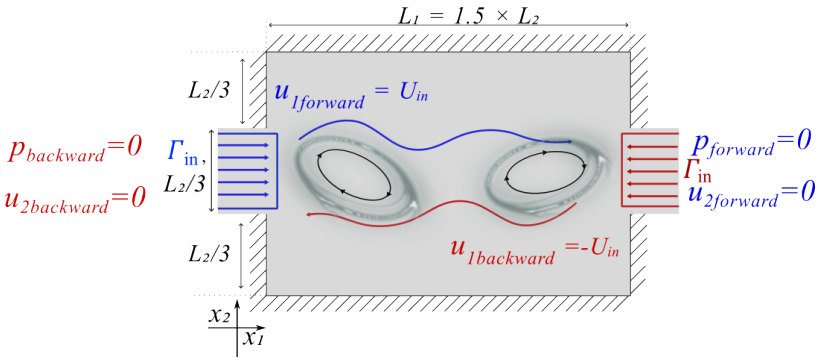


图12：特斯拉阀示意图。正向流动（蓝色）以均匀入口速度（$U_{\text{in}} = 1$）从左侧进入，并在零压力、法向速度出口条件下从右侧流出。反向流动（红色）以相同的均匀入口速度从右侧进入，并从左侧流出。拓扑优化旨在寻找一种几何形状，使反向平均入口压力与正向平均入口压力的比值最大化。

表2：表中汇总了不同示例的问题配置。采用所提出的隐式壁面函数方法的算例，在“隐式壁面函数”列中标记为“Yes”；采用“传统”方法的算例则标记为“No”。

问题	隐式壁面函数	体积分数	雷诺	示例编号
弯管（图10）	No	$V_f = 0.25$	5,000	示例1
弯管（图10）	Yes	$V_f = 0.25$	5,000	示例#2
弯管（图10）	Yes	$V_f = 0.33$	5,000	示例3
弯管（图10）	Yes	$V_f = 0.25$	200,000	示例 #4
U形弯管（图11）	No	$V_f = 0.27$	5,000	示例 #5
U形弯管（图11）	Yes	$V_f = 0.27$	5,000	示例 #7
U形弯管（图11）	Yes	$V_f = 0.27$	200,000	示例 #7
特斯拉阀（图12）	Yes	$V_f = 0.6$	5,000	示例 #8

表述为：

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} \quad & \frac{\int_{\Gamma_{in}} p \, \mathrm{d}s}{\int_{\Gamma_{in}} 1 \, \mathrm{d}s} \\ \text{subject to} \quad & \frac{\int_{\Omega} \varphi \, \mathrm{d}V}{\int_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}V} \leq V_f \\ & 0 \leq \gamma(\boldsymbol{x}) \leq 1 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{36}$$

对于特斯拉阀 [82]案例，目标泛函旨在最小化正向和反向平均入口压力之间的比值，从而提高特斯拉阀 [83]的所谓二极性。最大流体体积分数限制为$V_f = 0.6$。该优化问题表述为：

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} \quad & \int_{\Gamma_{in}} \frac{p_{\text{forward}}(\gamma(\boldsymbol{x}))}{p_{\text{backward}}(\gamma(\boldsymbol{x}))} \, \mathrm{d}s \\ \text{subject to} \quad & \frac{\int_{\Omega} \varphi \, dV}{\int_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}V} \leq V_f \\ & 0 \leq \gamma(\boldsymbol{x}) \leq 1 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{37}$$

4.2. 弯管基准

弯管被用作第一个基准算例，用于比较采用所提出的隐式壁面函数方法和传统方法得到的优化设计。问题设置如图 10 所示，入口速度均匀，为$U_{\text{in}} = 1$；出口采用零压力条件和法向速度条件。延续法所用的相应优化参数汇总于表3。计算网格如图 13 所示，包含 56,302 个三角形，自由度总数为 199,486。

如图 14 所示，采用所提出的隐式壁面函数方法优化得到的几何形状与“传统” [27]公式所得结果存在系统性差异。这种设计差异在入口处便已显现，沿流向逐渐增大，并在出口附近达到最大，此处两种几何形状的偏差最为明显。这种现象源于两种模型预测的速度分布存在显著差异，如图 15 所示：所提出的隐式壁面函数方法能够再现与显式壁面参考高度吻合、符合物理规律的边界层；而“传统”的基于惩罚的方法则会导致边界层厚度异常增大并持续增长，速度预测也随之出现越来越大的误差，尤其是在出口附近。如前所述，“传统”方法对k–ε 方程施加体力，以在固体区域中强制实施$k = \varepsilon = 0$，同时施加无滑移速度条件。尽管这些确实是正确的边界条件，但如果网格不够精细，无法解析薄边界层，该方法就会大幅高估边界层的厚度及其增长。

为验证所提出方法的准确性，采用带有显式壁面函数的贴体表示对优化设计重新进行模拟。如图16所示，优化后的

表3：采用所提出的隐式壁面函数方法的弯管参数。

参数	数值			
β	4	6	9	13
q_a	150	75	30	15
$\psi_{\max}$	1000			
P_{con}	4			
r_1	$4h_{\max}$			
V_f	$\frac{1}{4}$ or $\frac{1}{3}$			
r_2	$6h_{\max}$			
$Re_{\text{入口}}$	5000			
$h_{\max}$	0.007			
L_1	1			
$\alpha_{\max}$	100			
U_{in}	1			

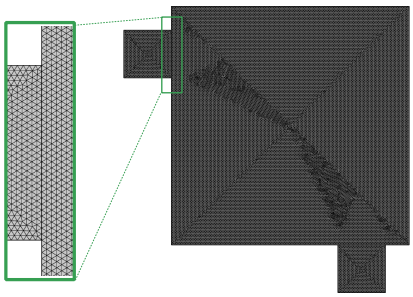


图 13：此处展示了用于弯管基准的网格，近似单元尺寸为 h_{max} = 0.007，共包含 56,302 个三角形和 199,486 个自由度。

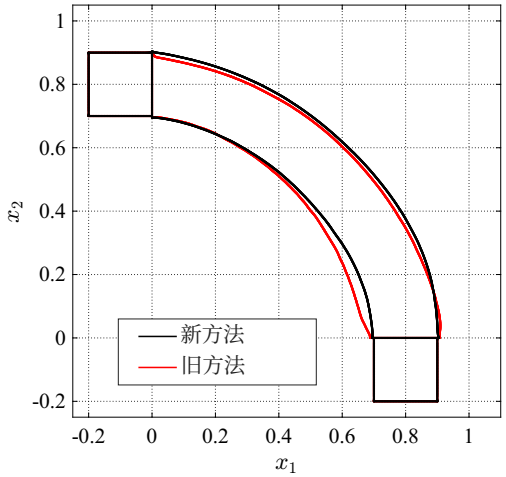
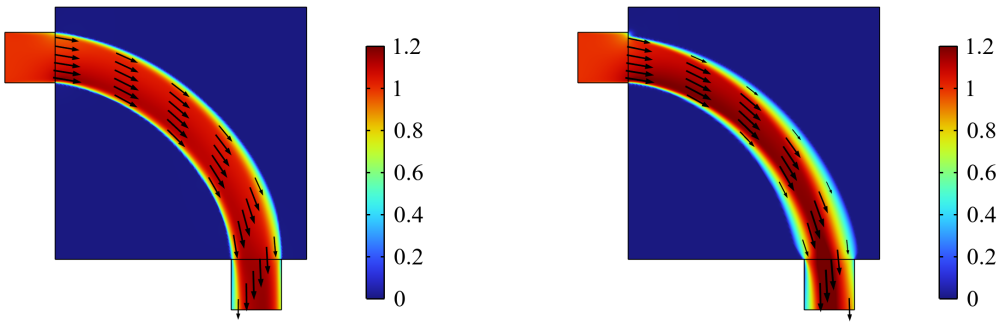


图 14：比较 采用所提出的隐式壁面函数方法（示例#2）和“常规”方法（示例1 ，在k 和 ε上施加 Brinkman 惩罚且不使用隐式壁面函数时）的优化几何形状，Re_{inlet} = 5000下的优化结果。



(a) 所提出的隐式壁面函数方法　　(b) “常规”方法

图15：比较使用所提出的隐式壁面函数方法和“常规”方法获得的速度场（示例#1和示例#2）。如图所示，当不采用壁面函数时，边界层从入口开始增长，并在出口附近达到最大厚度。相比之下，采用隐式壁面函数方法时，速度分布呈现出更自然、物理上更准确的行为，不会出现“常规”方法中观察到的人工边界层增长。

结果与贴体几何的重新模拟。速度$\boldsymbol{u}$、压力p和湍流黏度ν_t场吻合良好，证实了所提出方法的准确性。

使用贴体网格和显式壁面函数进行重新模拟时，示例#1和示例#2的压降分别为0.1954和0.0924。这清楚地表明，采用所提出的隐式壁面函数方法进行优化所得的设计效果显著更好。值得注意的是，优化模型和贴体网格重新模拟所得的压降均存在高估。这在流体流动的拓扑优化中很常见，由弥散边界导致，因而是预期之中的。总体而言，与相应的贴体网格结果相比，采用弥散边界时观察到的压降通常约为其两倍。对于示例#2，优化模型预测的压降为0.1731，而贴体网格重新模拟预测的压降为0.0924。

4.2.1. 不同体积分数下的弯管

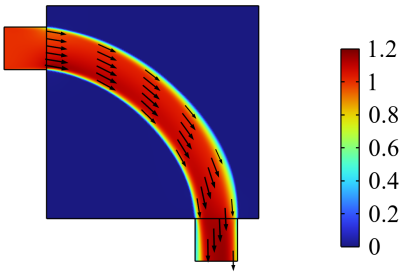
为评估指定体积分数对优化几何形状的影响，我们采用所提出的方法，在较高的体积分数设定$V_f = \frac{1}{3}$（示例#3）下进行优化，并与之前的设定$V_f = \frac{1}{4}$（示例#2）进行比较。其他参数与表3所示相同。

比较图17中的两种优化设计可以发现，增大允许的流体体积会形成明显更宽的通道，这与预期一致。$V_f = \frac{1}{3}$下更宽的流道对应较低的水力阻力（平均入口压力较低）；而$V_f = \frac{1}{4}$下较窄的流道预计会增加损失，这是满足较低流体体积要求所致。两种设计都呈现出明显的弯曲通道，且形状接近圆形。

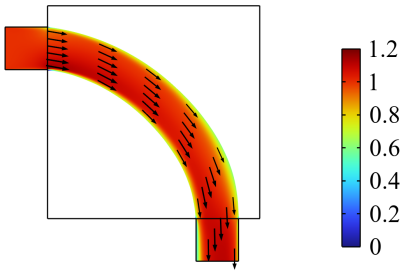
此外，我们采用显式壁面表示进行重新模拟，以进一步验证所提出的方法在另一种管道几何形状下的准确性。结果见图18，可以看出，重新模拟的结果与所提出的方法所得结果非常吻合。值得注意的是，此处的边界层较厚，因为与示例#2（图16）相比，通道比入口更宽。因此，湍流黏度分布也更加复杂（图18e和图23e），但同样得到了很好的捕捉。对于示例#3，优化模型预测的压降为0.1303，而贴体网格再模拟预测的压降为0.0651。

4.2.2. 更高雷诺数下的弯管

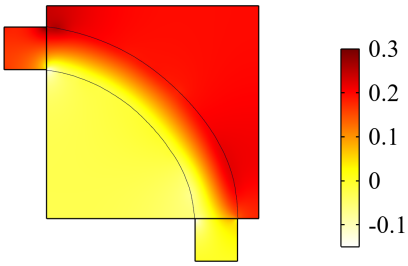
得益于采用隐式壁面函数方法，所提出的公式能够在相对粗网格上实现高雷诺数下的精确拓扑优化。图19展示了雷诺数提高至$\mathrm{Re} = 2 \times 10^5$（示例 #4）时的结果。低雷诺数和高雷诺数下的优化几何形状总体上仍然相似，但高雷诺数情况下的曲率略大。这种有限的变化表明，在我们的设置中，这两种状态之间的边界层特性仅发生了小幅变化，说明完全湍流状态下优化几何形状对雷诺数的依赖性较低，因此仅



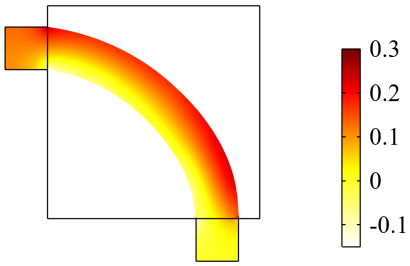
(a) 最终拓扑优化速度场



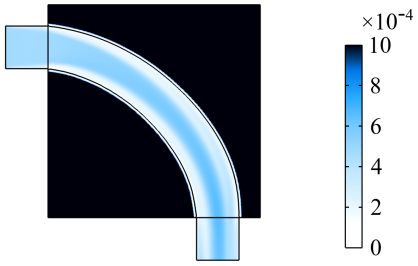
(b) 体拟合网格速度场



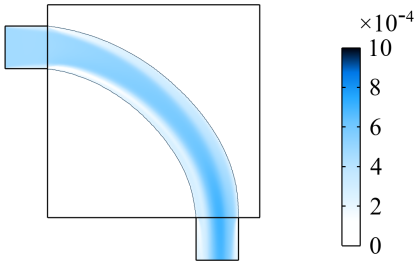
(c) 最终拓扑优化压力场



(d) 体拟合网格压力场

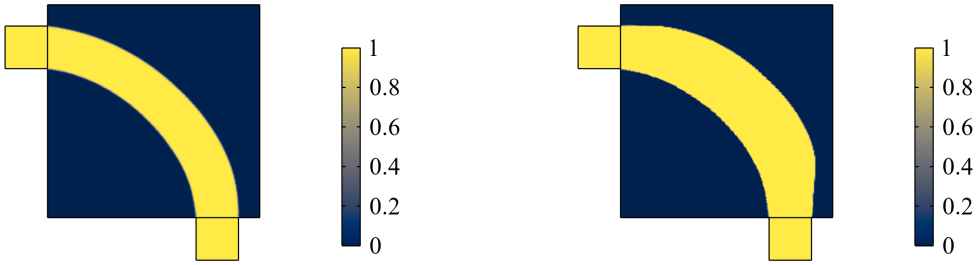


(e) 最终拓扑优化湍流黏度 ν_t



(f) 体拟合湍流黏度 ν_t

图16：采用隐式壁面函数方法优化的弯管几何（示例#2）与采用显式壁面的重新模拟结果对比。左列显示拓扑优化结果，右列展示相应的体拟合重模拟场，便于直接进行视觉比较。



(a)$V_f = \frac{1}{4}$ (b) $V_f = \frac{1}{3}$

图 17：使用所提出的方法得到的最终拓扑优化滤波–投影设计变量 φ。左：V_f = 1/4（示例#2）。右：V_f = 1/3（示例3）。

表4：采用所提出的隐式壁面函数方法参数的U形弯管。

参数	数值			
β	8	10	18	18
q_a	150	75	35	12
$\psi_{\max}$	1000			
P_{con}	4			
r_1	$4h_{\max}$			
V_f	0.27			
r_2	$4h_{\max}$			
$Re_{入口}$	5000			
$h_{\max}$	0.007			
L_1	1			
$\alpha_{\max}$	100			
U_{in}	1			

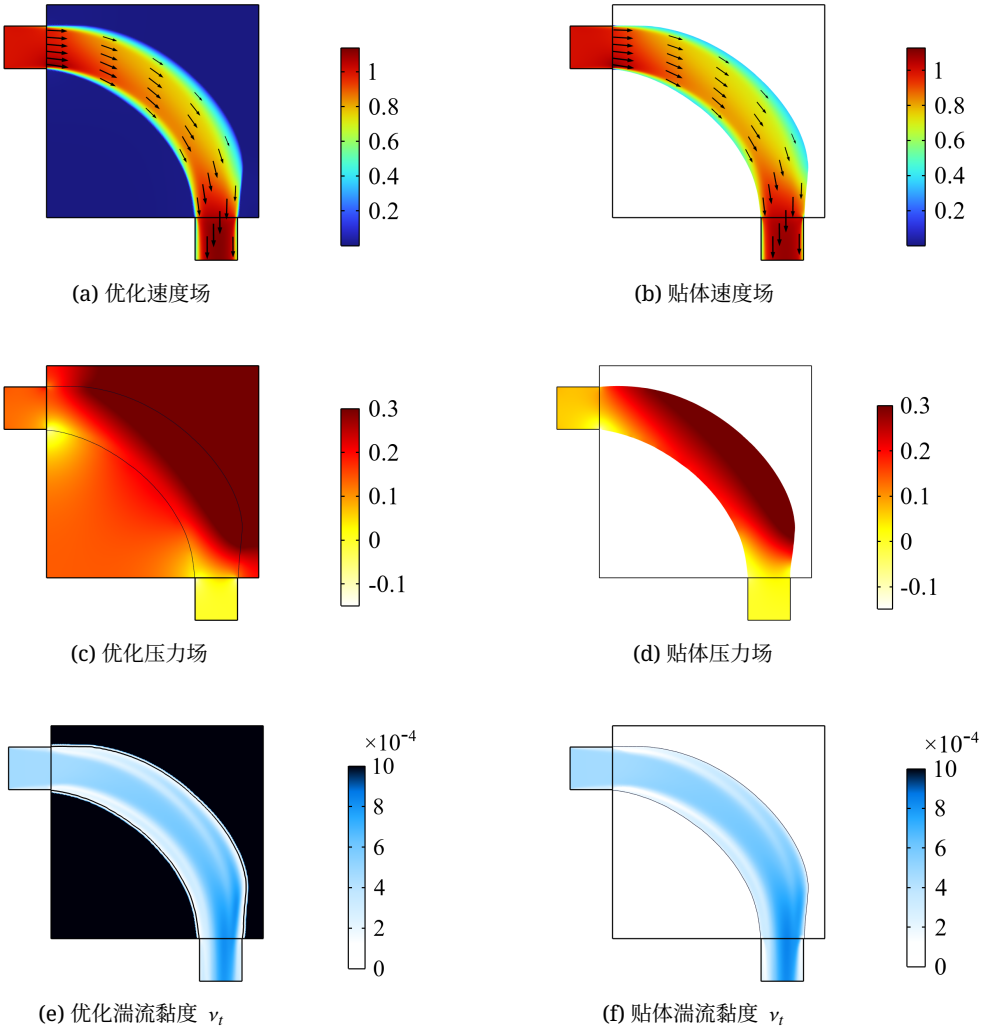
最终设计之间存在细微差异。此外，经过交叉检验重新分析后，两者在这两个雷诺数下的性能非常相似。对于示例 #4，优化模型预测的压降为 0.1435，而贴体网格再模拟预测的压降为 0.0470。

图 20 显示了弯管（示例 #2–#4）的隐式y^+ 分布。对于所提出的隐式壁面函数方法，y^+ 通过计算域隐式定义。如图 20 所示，在壁面y^+ 附近，该值保持在 11.06 左右且低于 300。在相同网格下，当雷诺数从 5000 增加到 200,000 时，相应的y^+ 值也会增加，但仍处于允许范围内。

*4.3. U*形弯管基准算例

本研究考虑的第二个基准算例是 U形弯管案例，如图 11 所示。在此设置中，均匀入口速度进入计算域，流经一个 180° 弯管，预期以直线型速度分布离开计算域，并在出口处达到零压力。计算网格如图 21 所示，由 55,055 个三角形组成，自由度（DOFs）总数为 195,636。参数和延续法见表4。

采用所提出的隐式壁面函数方法和“常规”方法得到的优化几何形状如图22所示。与弯管基准类似，所提出的方法生成的几何形状与常规方法所得的不同，尤其是在下游区域和出口附近。这种差异源于隐式壁面函数公式能够更准确地预测边界层，而常规方法在边界层表征方面引入的误差则不断增大。尽管采用“常规”方法优化的设计在某种意义上看起来可能更为流线型，因为其曲率似乎更加



(a) 优化速度场 (b) 贴体速度场

(c) 优化压力场 (d) 贴体压力场

(e) 优化湍流黏度 ν_t (f) 贴体湍流黏度 ν_t

图18：比 较采用所提出的隐式壁面函数方法与采用显式壁面函数重新模拟得到的结果 s
在较高体积分数下 （$V_f = \frac{1}{3}$，示例3）。

顺应流动，但最终性能明显更差。使用带显式壁面函数的贴体模型重新进行模拟时，“常规”设计的压降为0.9446，而所提出的方法得到的设计压降仅为0.3423。

如图23所示，优化得到的弥散域速度、压力和湍流黏度场与贴体网格重新模拟得到的结果高度吻合。这表明，所提出的隐式壁面函数方法能够准确再现流场，其结果与显式壁面表示高度一致。与此前一样，优化模型预测的压降与重新模拟模型预测的压降存在差异。对于示例6，优化模型预测值为0.4408，重新模拟模型预测值为0.3423。

4.3.1. 较高雷诺数下的*U*形弯管基准算例

采用壁面函数后，将雷诺数提高到更高的值（例如，雷诺数 $= 2 \times 10^5$）在计算上更为容易，即使使用相对粗糙的网格，也能获得准确的解。在本文所考虑的完全湍流状态下，雷诺数 $\in (5 \times 10^3, 2 \times 10^5)$，最优拓扑结构基本保持不变，仅发生少量局部调整，

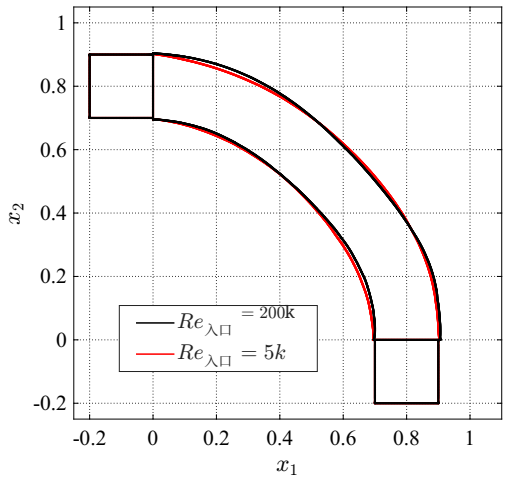
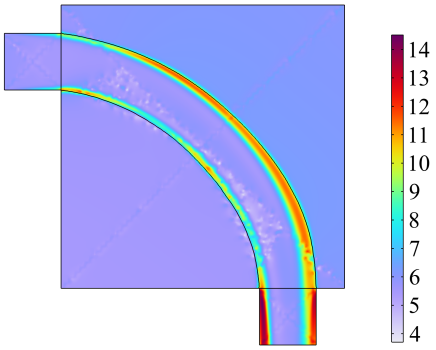
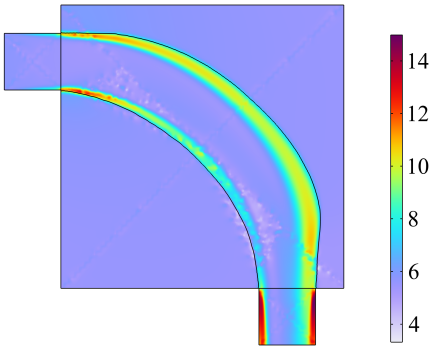


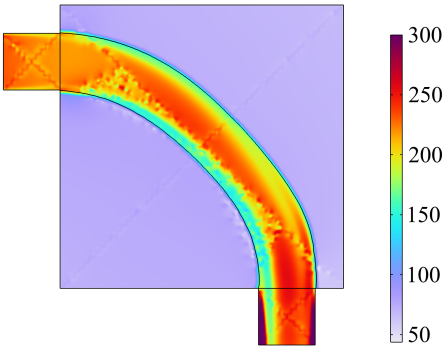
图19：优化几何形状对比较雷诺数 = $5k$ （示例#2）与雷诺数 = $200k$ （示例 #4），采用所提出的隐式壁面函数方法 t ch.



(a) 示例#2，雷诺数 = 5,000，$V_f = 0.25$



(b) 示例3，雷诺数 = 5,000，$V_f = 0.33$



(c) 示例 #4，雷诺数 = 200,000，$V_f = 0.25$

图 20：采用所提出的隐式壁面函数方法获得的示例 #2–#4 优化后的弯管几何形状的隐式y^+ 分布。壁面附近，示例 #2 和 #3 的y^+ 保持在接近 11.06 的水平，而示例 #4 的y^+ 低于 300，表明所有情况下均满足壁面律对数律。

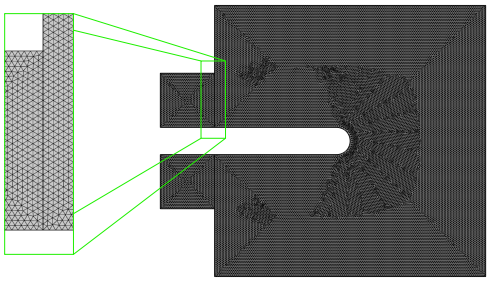


图21：网格　　此处展示了用于U形弯管基准算例的网格，近似单元尺寸为$h_{max} = 0.007$，共有55,055个三角形　　，和195　,636个D　OFs.

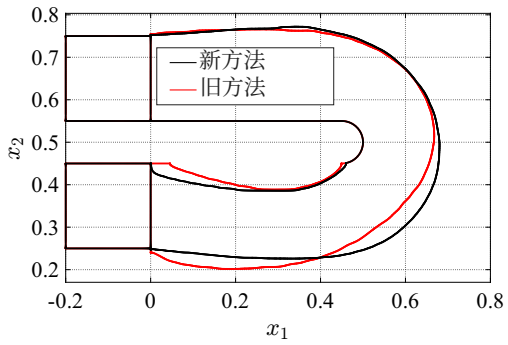


图22：在优化几何形状上，对比所提出的隐式壁面函数方法（示例 #6）与“常规”方法（示例 #5）在U形弯管基准算例中的表现。主要差异出现在靠近出口处，此时“常规”方法无法准确模拟边界层增长。

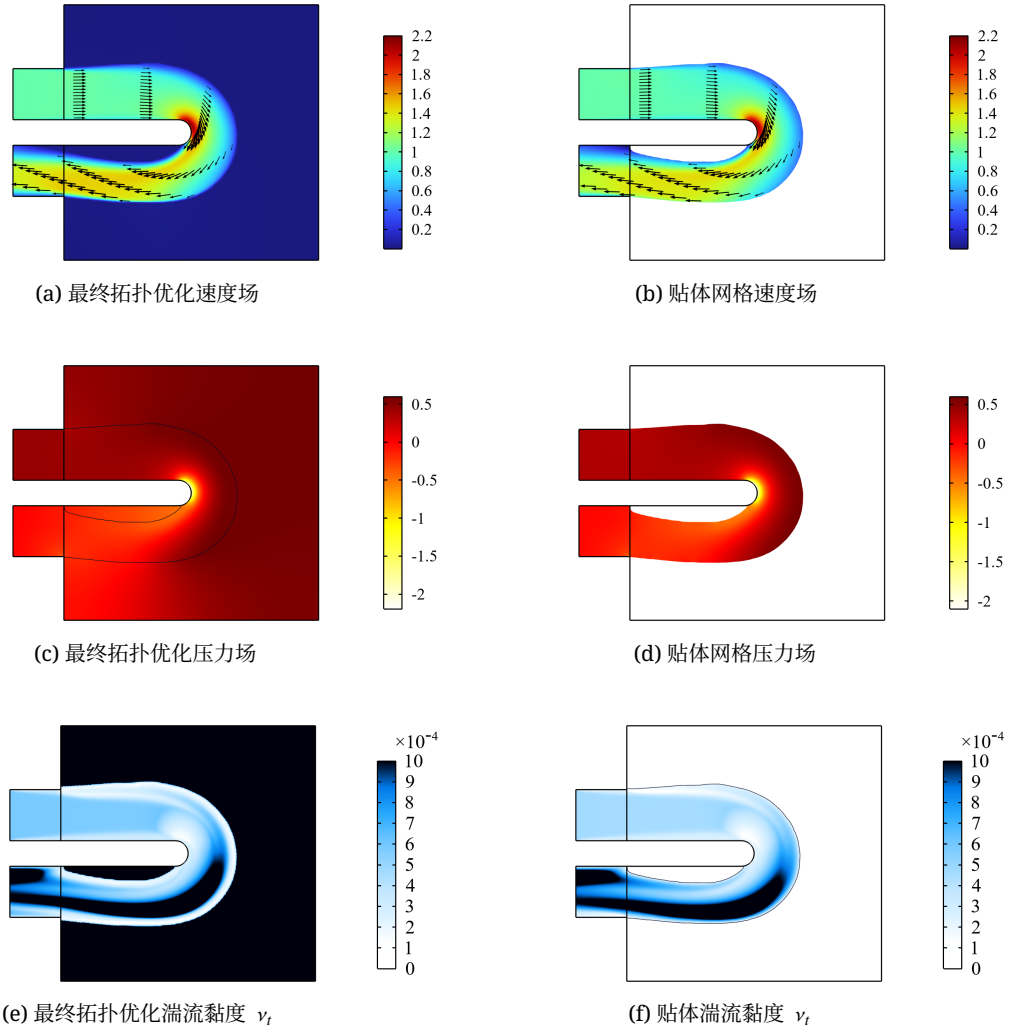
如图24所示。将雷诺数从 5×10^3 增加至 2×10^5，会导致轻微的几何偏差，并使优化模型预测的压降略有变化。然而，使用带显式壁面函数的贴体模型重新模拟时，压降差异显著：雷诺数 $= 5k$ 时为0.3423，雷诺数 $= 200k$时为0.2118。两种情况下，雷诺数为 $= 200k$ 时获得的几何形状表现都略好（约1%），这表明这些几何变化属于局部最优解，而非在给定条件下、采用相同延续法所得到的真正最优解。

图25展示了U形弯管（示例 #6 和示例 #7）的隐式y^+ 分布。在靠近壁面的区域，示例 #6 的y^+ 保持在11.06附近，而示例 #7 的值低于300，这证实壁面律对数律成立。

4.3.2. 与文献比较及大涡模拟验证

在将所提出的方法与“传统”方法进行比较后，我们希望将自己的设计与采用壁面函数的文献进行比较。文献中唯一一项针对 k-ε RANS 模型采用壁面函数的拓扑优化设计研究，是 [70] 使用 TOBS-GT方法开展的工作——该方法采用带显式壁面的贴体网格。我们从 [70, 图16a] 中提取其设计，并将其载入 COMSOL，以确保在与我们的结果完全相同的条件下进行仿真。需要指出的是，该设计并非直接以平均入口压力为目标泛函，而是采用了耗散能泛函[8, 70] ——因此，这种比较并不完全公平，尽管这两个目标应当成正比。我们采用贴体网格，并分别使用RANS $k - \varepsilon$ 模型和大涡模拟模型对优化设计进行比较。图 26展示了采用类似贴体网格并应用显式壁面函数得到的三种不同结果的压力场：所提出的方法、Picelli等人的论文 [70], 以及“传统”方法。

表 5 的第一行显示了使用贴体网格



(a) 最终拓扑优化速度场　(b) 贴体网格速度场

(c) 最终拓扑优化压力场　(d) 贴体网格压力场

(e) 最终拓扑优化湍流黏度 ν_t　(f) 贴体湍流黏度 ν_t

图23：比较优化设计与U形弯管案例（示例6）的贴体网格再模拟。左列显示拓扑优化的隐式壁面函数结果，右列则展示相应的贴体网格再模拟场。

并针对 RANS $k-\varepsilon$ 模型采用显式壁面函数计算得出的三种不同设计的压降。我们的设计的压降为 0.3423，Picelli等人的设计为 0.4103，而“传统”设计高达 0.9446。由此可见，对于这一问题，所提出的方法生成的几何性能最佳。

为进一步验证优化设计的性能，我们采用高保真度模拟代替物理实验。我们使用更高一级的湍流模型保真度，并在 COMSOL 中设置大涡模拟（大涡模拟）。大涡模拟研究的详细信息见附录附录A，此处仅给出结果以求简洁。图 27 展示了三种设计的时间平均速度场和压力场：所提出的隐式壁面函数方法；[70]的结果；“常规”方法。可以看出，整体趋势相似，但采用显式壁面函数的$k-\varepsilon$ 模型与大涡模拟模型之间存在重要差异。

表 5 第二行显示了使用 LES 模型和贴体网格计算得出的三种不同设计的压降。按照与上文使用 RANS $k-\varepsilon$模型时观察到的相同趋势，计算得出的时间平均压降分别为 0.4014、0.6332 和 1.2806。尽管由 TOBS-GT [70] 生成的设计似乎更能适应惯性，且方向变化更平滑，但其平均压降比所提出的隐式壁面函数方法高出 57%。然而，采用壁面函数生成的两种设计均优于通过“常规”方法生成的设计——

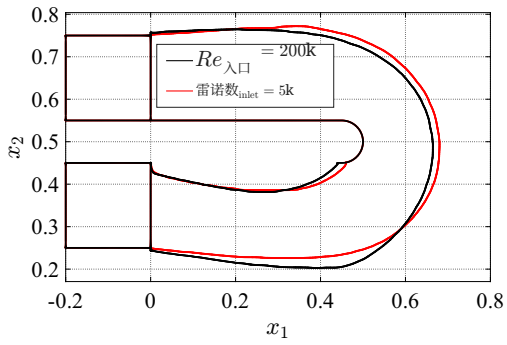
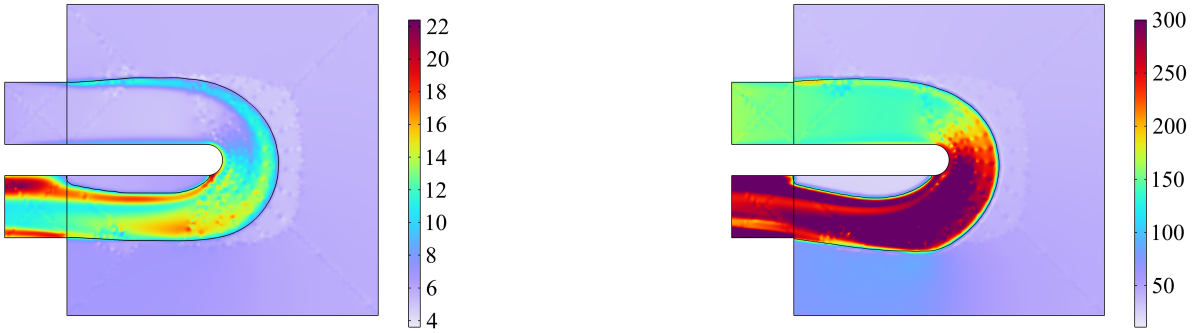


图24：雷诺数 $= 5k$ （示例 #6）和 雷诺数 $= 200k$ （示例 #7），采用隐式壁面函数方法得到的优化几何形状。



(a) 示例 #6，U形弯管，雷诺数 = 5,000

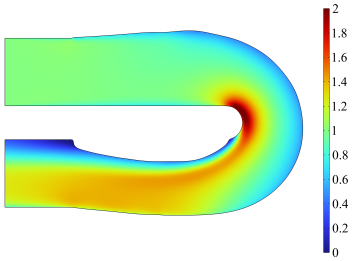
(b) 示例 #7，U形弯管，雷诺数 = 200,000

图25：使用所提出的隐式壁面函数方法得到的示例6和示例 #7中优化的U形弯管几何形状的隐式y^+ 分布。在壁面附近，y^+ 在示例6中保持接近11.06，在示例 #7中低于300，这表明两种情况下均满足壁面律对数律。

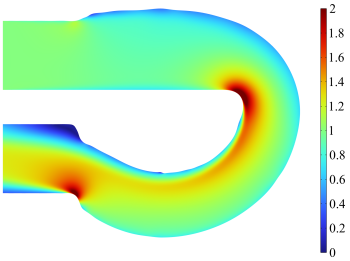
后者未使用壁面函数，其压降分别是所提出方法和 TOBS 方法的 3 倍和 2 倍。这是意料之中的，因为若要捕捉薄边界层和近壁行为，“常规”方法需要使用比当前网格（以及文献中通常使用的网格）细得多的网格。

模型	所提出的	设计 TOBS [70]	“常规”
RANS $k-\varepsilon$	0.3423	0.4103	0.9446
LES	0.4014	0.6332	1.2806

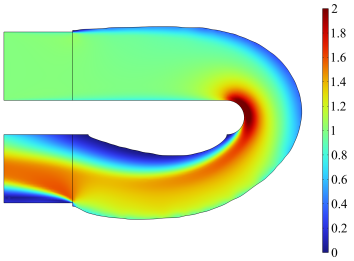
表 5：使用贴体网格和 RANS $k-\varepsilon$ 或大涡模拟计算的三种不同设计的入口压力，计算结果基于图 26 和图 27 所示的场。



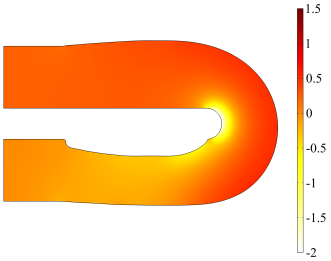
(a) 所提出的方法，速度



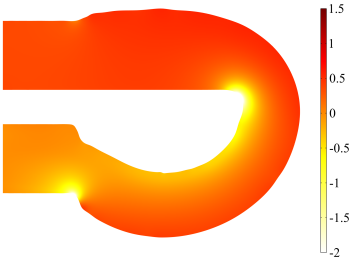
(b) TOBS-GT方法 [70], 速度



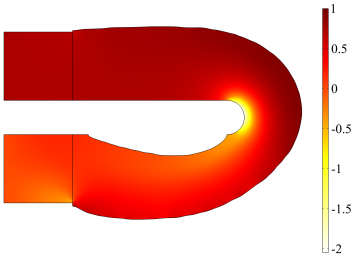
(c) “传统”方法，速度



(d) 所提出的方法，压力

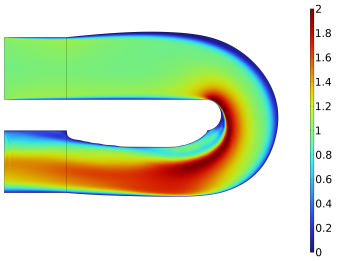


(e) TOBS-GT方法 [70], 压力

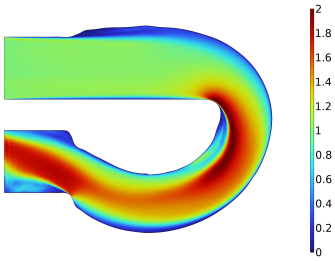


(f) “传统”方法，压力

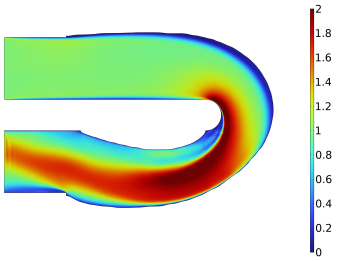
图 26：采用标准k-ε 模型，通过显式壁面函数和贴体网格计算得到的三种不同设计的速度场和压力场。



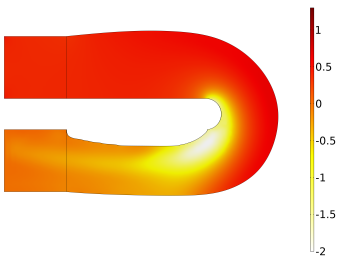
(a) 所提出的方法，速度



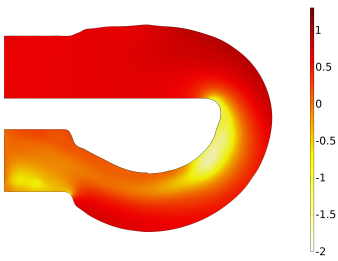
(b) TOBS-GT方法 [70], 速度



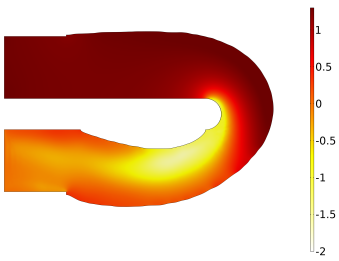
(c) “传统”方法，速度



(d) 所提出的方法，压力



(e) TOBS-GT方法 [70], 压力



(f) “传统”方法，压力

图 27：时间平均使用大涡模拟模式，通过贴体网格计算得到的三种不同设计的时间平均速度场和压力场 l.

表6：采用隐式壁面函数方法的特斯拉阀参数。

参数	数值						
β	8	12	18	24	30	36	45
q_a	100	33	11	3	1	1	1
$\alpha_{\max}$	250	270	300	350	350	350	400
$h_{\max}$	0.01125						
$\psi_{\max}$	1000						
P_{con}	4						
r_1	$4h_{\max}$						
V_f	0.6						
r_2	$4h_{\max}$						
$Re_{入口}$	5000						
L_1	1						
U_{in}	1						

4.4. 特斯拉阀

“特斯拉阀” [82] 是一种被动式流动整流器，没有运动部件，它利用几何结构产生方向相关的水力损失。从功能上看，特斯拉阀旨在降低正向流动时的平均入口压力，同时使反向流动时的平均入口压力显著增大，从而起到流体二极管的作用。在低雷诺数下，流动响应主要由黏度主导；而在高雷诺数下，惯性效应则成为主导机制。由于其结构具有急弯和突然扩张，会形成高度湍流状态，因此准确处理近壁物理至关重要，这也使得在拓扑优化通常采用的较粗网格上，壁面函数的实现尤为重要。特斯拉阀的示意图见图12。流体以均匀入口速度（$U_{\text{in}} = 1$）进入，出口处设为零压力，并采用直线流出的速度条件。计算网格见图28，包含32,516个三角形，自由度（DOFs）总数为198,228。拓扑优化所用的参数和延拓方案汇总于表6。

图29展示了特斯拉阀的优化历史，呈现了设计在整个优化过程中的演变。可以看出，整体拓扑逐渐形成（图29q - 29t），壁面函数则通过逐步形成的壁面强度场逐渐施加（图29u - 29x）。随着拓扑的发展，速度场（图29a - 29d）变得更加清晰，尤其是反向流动（图29e - 29h）变得更加复杂，因为拓扑也变得更加复杂。对于正向流动方向（图29d），优化设计似乎经过了一定程度的流线化，只是将流动改道，使其绕过主要特征的

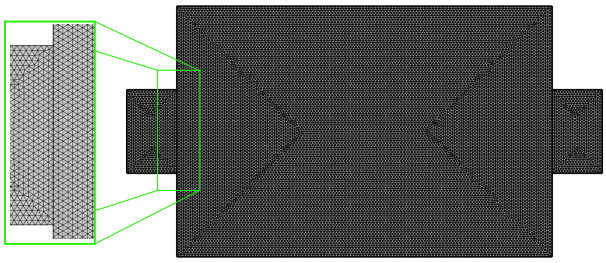


图28：此处展示了特斯拉阀基准算例所用的网格，单元尺寸约为 $h_{max} = 0.0125$，共有 32,516 个三角形和 198,228 个自由度。

顶部和底部。对于反向流动方向（图29h），优化设计包含许多带有曲率的小通道和障碍物，可改变流动方向，从而造成能量损失。从压力场中可以清楚地看出这一点：对于正向流动（图29l），单个滞止区是导致能量损失的主要因素；而对于反向流动（图29p），多个单个通道会造成较大的能量损失。

如图30所示，将所提出的隐式壁面函数方法得到的正向和反向速度、湍流黏度（ν_T）及压力场，与采用显式壁面函数的贴体网格重新模拟所得到的相应结果进行了比较。图中表明，即使对于复杂拓扑，采用所提出的隐式壁面函数方法得到的最终优化场，也与采用显式壁面函数的贴体几何仿真结果高度吻合，这既凸显了所提出方法的准确性，也体现了本研究所用参数的一致性。与前两个基准算例相比，优化模型与贴体模型之间观测到的压降差异显著减小。对于正向流动方向，优化模型预测值为0.5962，贴体模型预测值为0.5710。对于反向流动方向，优化模型预测值为4.0812，贴体模型预测值为4.4473。差异较小很可能是由于延拓方案的最终 β 数值较高（表6）。

图31展示了特斯拉阀基准算例在计算域内以及正向和反向流动方向下隐式定义的y^+。可以看出，y^+ 数值保持在壁面函数所假定的对数子层内。

4.4.1. 不同工况下的特斯拉阀

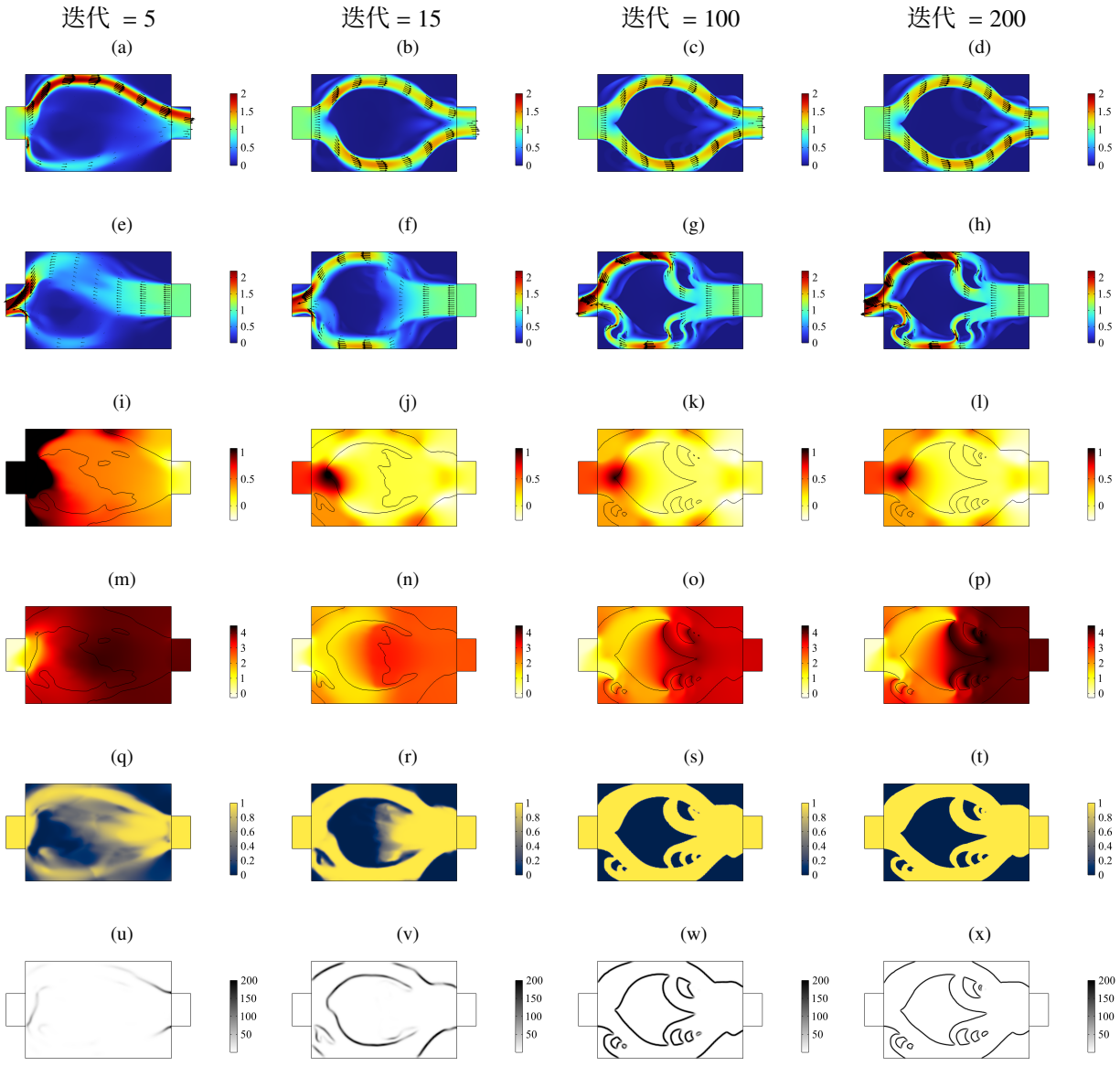
特斯拉阀在不同流动状态下运行，其中黏性力（低雷诺数）或惯性（高雷诺数）占主导。由于特斯拉阀中的边界层处理会显著影响优化生成的拓扑结构，因此我们通过在不同流动状态（层流和湍流）下进行优化来研究这一影响；对于层流情形，还采用不同的壁面边界条件（无滑移和自由滑移）。总共在三种具有代表性的工况下对几何形状进行优化：(a) 采用所提出的隐式壁面函数方法的完全湍流工况（$\mathrm{Re}_{inlet} = 5000$）；(b) 壁面为自由滑移的层流工况（$\mathrm{Re}_{inlet} = 33$）[58]；以及 (c) 壁面为无滑移的层流工况（$\mathrm{Re}_{inlet} = 33$）。相应的优化几何形状如图32所示。

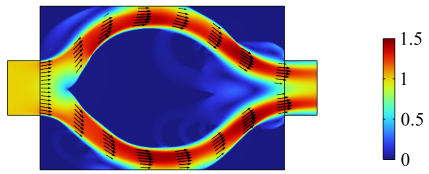
在湍流情形下（图32a），由惯性力和湍流变量引起的能量损失都会被捕捉到。因此，优化器倾向于选择能引导正向流动沿相对直接路径前进、且仅有平缓转弯的构型，同时会形成促使回流的特征，对反向流动造成阻碍。最终设计呈现出局部收缩的喉部，主要在反向运行时引发形状损失，从而以对正向阻力影响较小为代价，实现较强的整流效果。

层流无滑移情形（图32c）中，黏性力在边界处和主体区域内均占主导。相比之下，在层流自由滑移情形（图32b）中，壁面切向黏性应力受到抑制，壁面黏性耗散也随之消失；但由于雷诺数较低，主体区域内仍存在黏性应力。因此，在层流无滑移情形下，优化器会使主流道趋于平直，并减少过度收缩，以限制与壁面相关的能量耗散。而在自由滑移情形下，优化器则能够利用更多壁面实现更多次流向改变，而不会因壁面黏性应力产生能量损失。

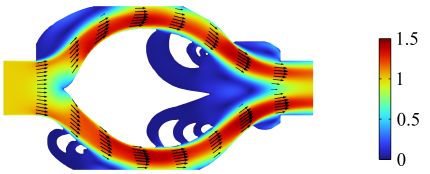
为评估跨流态鲁棒性，我们进行了交叉检验，在三种情景下重新模拟每种几何形状——湍流、层流自由滑移和层流无滑移。如图33所示，可以观察到两个明显趋势。首先，每种设计在其所针对的流态和边界条件设置下表现最佳。其次，跨流态应用时，性能会显著下降：针对湍流优化的几何形状在层流条件下二极性较低；反过来，针对层流优化的几何形状在湍流中也表现出较低的二极性。最后，值得注意的是，针对湍流优化的几何形状二极性显著更高，达到7.788，而针对层流优化的几何形状仅为4.111，这凸显了采用湍流拓扑优化能够大幅改善目标函数。湍流优化所得二极性显著更高，是因为湍流模型能够捕捉惯性力和分离点导致的流动方向依赖性，而层流状态（低雷诺数）下则无法捕捉；在层流状态下，黏性力占主导，设计对流动方向（正向和反向流动）的敏感性较低，因为此时忽略了惯性力造成的损失。

图29：采用隐式壁面函数方法的特斯拉阀（示例 #8）的优化历史。图(a)至(d)显示正向速度场；图(e)至(h)显示反向速度场；图(i)至(l)展示正向压力场；图(m)至(p)展示反向压力场；图(q)至(t)显示滤波投影设计变量， φ；图(u)至(x)展示壁面强度场。

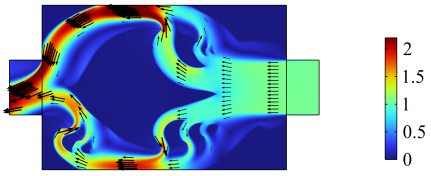




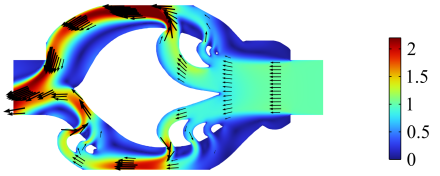
(a) 正向流动：隐式壁面



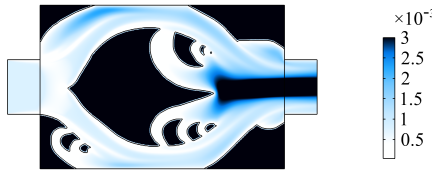
(b) 正向流动：显式壁面



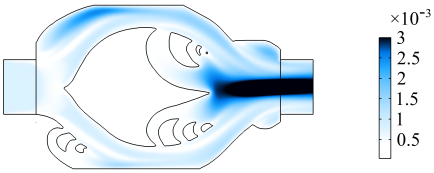
(c) 反向流动：隐式壁面



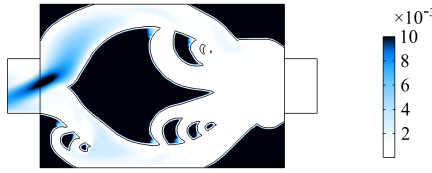
(d) 反向流动：显式壁面



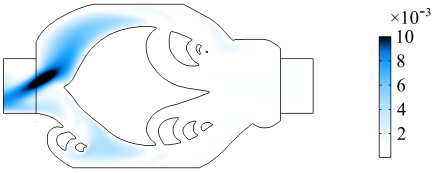
(e) 正向湍流黏度 ν_t：隐式壁面



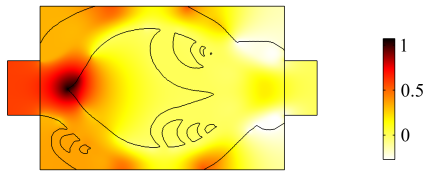
(f) 正向湍流黏度 ν_t：显式壁面



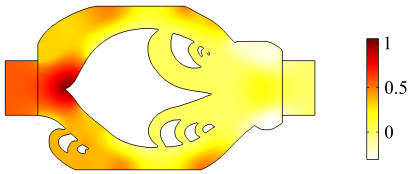
(g) 反向湍流黏度 ν_t：隐式壁面



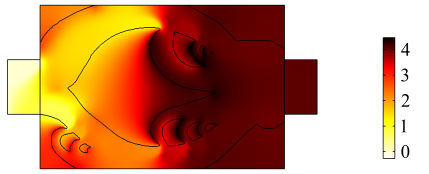
(h) 反向湍流黏度 ν_t：显式壁面



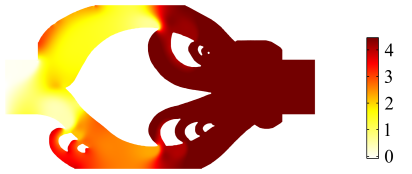
(i) 正向压力分布：隐式壁面



(j) 正向压力分布：显式壁面



(k) 反向压力分布：隐式壁面



(l) 反向压力分布：显式壁面

图30：使用所提出的隐式壁面函数方法获得的优化特斯拉阀特征（左），以及特斯拉阀基准算例（示例 #8）中采用显式壁面函数进行贴体网格重新模拟得到的对应结果（右）。



(a) 正向流动　　(b) 反向流动

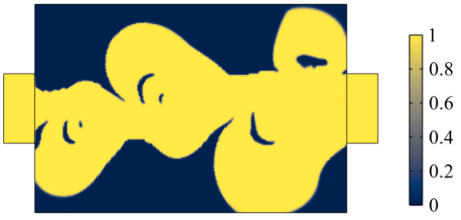
图31：在正向流动和反向流动条件下，使用所提出的隐式壁面函数方法获得的特斯拉阀优化几何形状（示例 #8）的隐式y^+ 分布。在壁面附近，y^+ 保持在对数律区域内。



(a) 所提出的隐式壁面函数方法优化几何形状



(b) 层流自由滑移优化几何结构



(c) 层流无滑移优化几何结构

图32：在三种不同流动假设和边界条件下，特斯拉阀最终的拓扑优化几何结构：(a) 在 $\mathrm{Re}_{\mathrm{inlet}} = 5000$ 下，采用所提出的隐式壁面函数方法的湍流；(b) 在 $\mathrm{Re}_{\mathrm{inlet}} = 33$ 下，采用自由滑移边界条件的层流；(c) 在 $\mathrm{Re}_{\mathrm{inlet}} = 33$ 下，采用无滑移边界条件的层流。

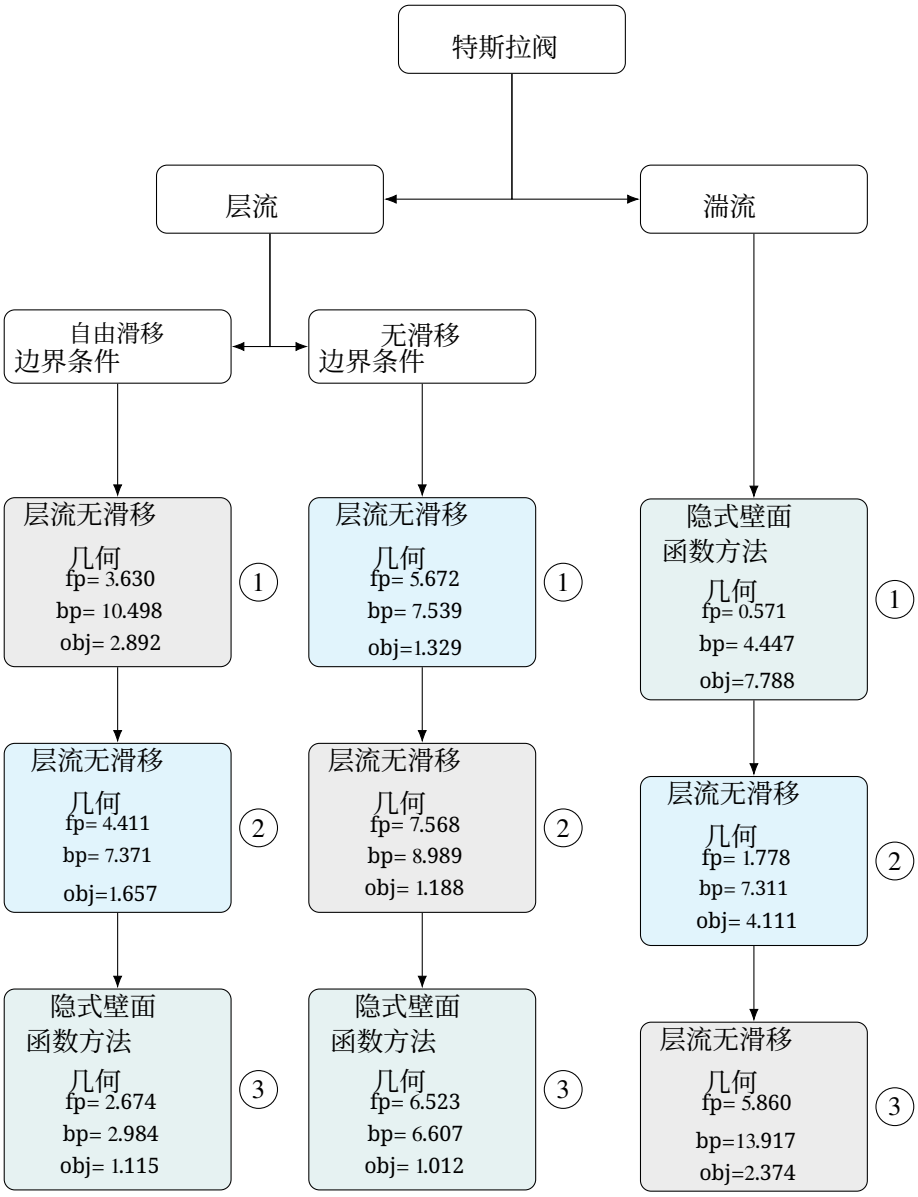


图33：特斯拉阀案例研究，展示了采用自由滑移（灰色）和无滑移（蓝色）边界条件的层流，以及采用隐式壁面函数（绿色）的湍流优化几何形状，并在三种不同条件下重新进行模拟（采用自由滑移和无滑移边界条件的层流，以及采用无滑移边界条件的湍流）。符号定义如下：fp 表示正向平均入口压力，bp 表示反向平均入口压力，obj 表示目标函数。

表7：不同示例的最终目标函数值和贴体网格再模拟的平均入口压力。符号“—”表示本研究未评估相应数值。

示例	优化得到的压降	重新模拟得到的压降	
		k-ε	LES
示例1	0.4023	0.1954	—
示例#2	0.1731	0.0924	—
示例3	0.1303	0.0651	—
示例 #4	0.1435	0.0470	—
示例 #5	0.8327	0.9446	1.2806
文献比较 [70]	—	0.4103	0.6332
示例6	0.4408	0.3423	0.4014
示例 #7	0.4108	0.2118	—
示例 #8，正向流动	0.5962	0.5710	—
示例 #8，反向流动	4.0812	4.4473	—

4.5. 基准算例总结

表7给出了本研究所考虑的所有算例的最终目标值的详细总结，以及相应贴体网格重新模拟的平均入口压力。该表报告了示例 #1–#8、文献比较以及大涡模拟再模拟的最终平均入口压力数值。

5. 结论

我们提出了一种湍流拓扑优化框架，将基于密度的公式与近壁面物理的隐式壁面函数处理相结合，用于标准 k-ε RANS 模型。该方法在复杂、湍流主导的流动中能够生成准确的设计，同时将计算成本控制在可接受范围内。主要结论如下：

1. **较粗网格上的更高准确性**。 通过在目标为 $y^+ \in [11.06, 300]$ 而非 $y^+ \approx 1$ 的网格上运行，该方法避免了完全解析黏性底层，从而减少自由度并降低计算成本。2. **正确的边界层行为**。 该公式能够准确预测边界层的发展，避免常规方法中常见的边界层过度增厚，并生成符合预期且与显式壁面再模拟结果一致的速度和压力剖面。3. **高雷诺数 稳健性**。 该框架能够在雷诺数达到数十万（针对某些问题）时保持优化运行的稳定性，在维持网格经济性的同时，确保非线性 RANS 系统收敛。尽管在高雷诺数下收敛性仍可能成为问题，但与不采用隐式壁函数方法相比，问题要小得多。4. **高度非线性物理过程和复杂几何结构下的准确性**。 对于强非线性的k-ε 方程以及复杂布局（例如具有急弯和狭窄通道的特斯拉阀通道），该方法仍然可靠。5. **易于集成**。 该方法相对容易在现有的基于密度的拓扑优化中实现：只需增加基于密度的拓扑优化中已经常见的操作即可。

当前公式基于k-ε 标准模型，壁面处理基于壁面律，因此该方法确实具有k-ε 方法和壁面律的所有局限性。在区域 of 当发生强分离、再附着或停滞，且 k-ε模型或对数律无法正确预测流动行为时，所提出的隐式壁面函数模型的准确性预计会下降。作者建议将当前的带隐式壁面函数的拓扑优化框架扩展到替代性 RANS 封闭模型（如 k-ω模型），或扩展到大涡模拟（LES）等高保真度方法；这些方法同样可以受益于隐式定义的壁面函数。此外，当前方法中有两个与隐式定义的壁面函数相关的参数，必须仔细调整才能捕捉壁面效应：壁面强度 ψ 和第二滤波半径 r_2。该参数

ψ控制隐式壁面条件的施加强度，而 r_2 控制有效壁面厚度；两者都必须准确选取。未来，开展严格的研究和量纲分析 [84, 85]或许有助于简化这些参数的选取。

补充信息

本文未使用补充信息。

致谢

本项目的部分计算是在UCloud交互式高性能计算系统上完成的，该系统由南丹麦大学的eScience中心管理。第二作者通过欧盟的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动博士后奖学金22（资助编号：101106842）获得了经费支持。

声明

利益冲突

作者声明，他们在本文中不存在任何竞争性经济利益。

结果复现

所提出方法的详细实现过程和算法已在第 2 节中介绍，读者可据此复现结果。如有进一步疑问，请联系通讯作者。

作者贡献

Amirhossein Bayat（abay@sdu.dk）：概念构思、方法学、软件、调查、验证、撰写——初稿。Hao Li（hli@sdu.dk）：验证、资源、监督、撰写——审阅与编辑、项目管理。Joe Alexandersen（joal@sdu.dk）：概念构思、方法学、软件、验证、资源、监督、撰写——审阅与编辑、经费获取。

参考文献

[1] S. Pope，《湍流》，第1版，剑桥大学出版社，2000年。[2] D. G. Fox、D. K. Lilly，湍流数值模拟，《地球物理学评论》10（1972）51–72。[3] P. Moin、K. Mahesh，直接数值模拟：湍流研究的工具，《流体力学年度评论》30（1998）539–578。[4] M. Lesieur、O. Metais，湍流大涡模拟的新趋势，《流体力学年度评论》28（1996）45–82。[5] H. Xiao、P. Cinnella，RANS模拟中的模型不确定性量化：综述，《航空航天科学进展》108（2019）1–31。[6] J. Fröhlich、D. Von Terzi，用于湍流模拟的混合LES/RANS方法，《航空航天科学进展》44（2008）349–377。[7] M. P. Bendsøe、N. Kikuchi，利用均匀化方法生成结构设计的最优拓扑，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 71（1988）197–224。[8] T. Borrvall、J. Petersson，斯托克斯流中流体的拓扑优化，《流体数值方法国际期刊》41（2003）77–107。

[9] A. Gersborg-Hansen、O. Sigmund、R. B. Haber，通道流问题的拓扑优化，《结构与多学科优化》30（2005）181–192。[10] J. Alexandersen、C. S. Andreasen，基于流体的问题的拓扑优化综述，《流体》5（2020）29。[11] A. Dewan，应对工程中的湍流，Springer Science & Business Media，2010年。[12] A. A. Aliabadi，《湍流：面向科学家与工程师的基础方法》，Springer Nature，2022年。[13] M. Ciofalo，《湍流的热流体动力学》，Springer，2022年。[14] T. J. Craft、S. E. Gant、H. Iacovides、B. E. Launder，复杂湍流的新型壁面函数策略，《数值传热学B辑：基础》45（2004）301–318。[15] J. Alexandersen，流体流动问题基于密度的拓扑优化详尽导论及其MATLAB实现，《结构与多学科优化》66（2023）12。[16] P. Spalart、S. Allmaras，一种用于空气动力流动的单方程湍流模型，载于：第30届航空航天科学会议暨展览，1992年，第439页。[17] A. Zymaris、D. Papadimitriou、K. Giannakoglou、C. Othmer，针对不可压缩流的Spalart-Allmaras湍流模型连续伴随方法，《计算机与流体》38（2009）1528–1538。[18] E. Papoutsis-Kiachagias、E. Kontoleontos、A. Zymaris、D. Papadimitriou、K. Giannakoglou，层流与湍流（包括传热）的约束拓扑优化，CIRA，编者，EUROGEN：设计、优化与控制的进化方法和确定性方法，卡普阿，意大利（2011）。[19] G. H. Yoon，采用Spalart–Allmaras模型的湍流拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 303（2016）288–311。[20] L. F. Sa、P. V. Yamabe、B. C. Souza、E. C. Silva，采用Spalart–Allmaras模型的湍流旋转流拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 373（2021）113551。[21] Q. Holka、E. Toubiana、J. Cortial、B. Ghannam、M. Nemer，采用连续伴随湍流模型的湍流表面冷却器基于密度的拓扑优化，《结构与多学科优化》65（2022）223。[22] S. B. Rodríguez，RANS湍流建模，《应用计算流体力学与湍流建模》（2019）。网址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:213557655。[23] S. N. A. Yusuf、Y. Asako、N. A. C. Sidik、S. B. Mohamed、W. M. A. A. Japar，RANS湍流模型简述，《CFD Letters》12（2020）83–96。[24] E. M. Papoutsis-Kiachagias、K. C. Giannakoglou，应用于形状与拓扑优化的湍流连续伴随方法：工业应用，《计算工程方法档案》23（2016）255–299。[25] C. B. Dilgen、S. B. Dilgen、D. R. Fuhrman、O. Sigmund、B. S. Lazarov，湍流的拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 331（2018）363–393。[26] S. B. Dilgen、C. B. Dilgen、D. R. Fuhrman、O. Sigmund、B. S. Lazarov，湍流流动传热系统的基于密度的拓扑优化，《结构与多学科优化》57（2018）1905–1918。[27] G. H. Yoon，基于k-ε湍流模型的有限元拓扑优化方法，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 361（2020）112784。[28] D. H. Alonso、J. S. Romero Saenz、R. Picelli、E. C. N. Silva，基于Wray–Agarwal湍流模型的拓扑优化方法，《结构与多学科优化》65（2022）82。

[29] Y. Sun, M. Hao, Z. Wang，基于 k-ε模型的湍流冷却结构拓扑优化，Entropy 25 (2023年) 1299。[30] B. Zhang, J. Zhu, L. Gong, K. Jia, L. Gao，采用 k-ω 湍流模型的湍流自然对流散热器拓扑优化，《应用数学建模》118 (2023年) 272–302。[31] B. J. Butler, J. Alexandersen, S. R. Rao，通过实验验证一种拓扑优化方法，可生成适用于控制阀的特定容量抗空化装置，Journal of Fluids Engineering 147 (2025年)。[32] C. Wu, Y. Zhang，基于修正湍流模型的高雷诺数流动拓扑优化，Aerospace 11 (2024年)。doi:10.3390/aerospace11070525。[33] K. L. Harrison, D. G. Bogard，RANS湍流模型对气膜冷却性能预测的比较，载于：Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air，第43147卷，2008年，第1187–1196页。[34] H. Nobis, P. Schlatter, E. Wadbro, M. Berggren, D. S. Henningson，通过超疏水表面的拓扑优化延迟模态层流-湍流转捩，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 403 (2023年) 115721。[35] R. P. Dwight, J. Brezillon，离散伴随近似对基于梯度的优化的影响，AIAA journal 44 (2006) 3022–3031。[36] C. Othmer，用于计算管道流拓扑和表面灵敏度的连续伴随公式，《流体数值方法国际期刊》58 (2008) 861–877。[37] M. Pietropaoli, R. Ahlfeld, F. Montomoli, A. Ciani, M. D'Ercole，面向增材制造的设计：内部通道优化，Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 139 (2017) 102101。[38] E. A. Kontoleontos, E. M. Papoutsis-Kiachagias, A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou，黏性流（包括传热）的基于伴随的约束拓扑优化，Engineering Optimization 45 (2013) 941–961。[39] COMSOL AB，COMSOL Multiphysics®，6.3 版，2025年。网址：www.comsol.com。[40] L. C. Høghøj，热质传递结构的拓扑优化，丹麦技术大学，2023年。[41] J. Lundgren, H. Nadali Najafabadi, J.-E. Lundgren, C.-J. Thore，包含孤岛约束的流动-热-结构模型大规模三维多物理场拓扑优化，Engineering Optimization 57 (2025年) 2173–2207。[42] S. Kubo, A. Koguchi, K. Yaji, T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki，采用浸入边界法的二维湍流拓扑优化（基于水平集），Journal of Computational Physics 446 (2021) 110630。doi:10.1016/j.jcp.2021.110630。[43] N. Galanos, E. M. Papoutsis-Kiachagias, K. C. Giannakoglou，采用“离散思考—连续求解”伴随方法，通过切割单元法对湍流进行共轭传热拓扑优化，Energies 17 (2024年) 1817。[44] A. Clausen, N. Aage, O. Sigmund，涂层结构与材料界面问题的拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 290 (2015) 524–541。[45] A. Clausen, E. Andreassen, O. Sigmund，具有多孔填充的三维壳结构拓扑优化，Acta Mechanica Sinica 33 (2017) 778–791。[46] Y. Luo, Q. Li, S. Liu，采用基于侵蚀的界面识别方法进行壳-填充结构拓扑优化，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 355 (2019) 94–112。

[47] S. Chu, L. Gao, M. Xiao, Y. Zhang，具有多样化微结构填充的涂层结构多尺度拓扑优化，《结构与多学科优化》61 (2020) 1473–1494。[48] T. Hu, Y. Wang, H. Li, M. Yu, K. Furuta, K. Izui, S. Nishiwaki，多种材料填充涂层结构的拓扑优化，《有限元分析与设计》235 (2024年) 104165。[49] L. C. Høghøj, D. R. Nørhave, J. Alexandersen, O. Sigmund, C. S. Andreasen，双流体换热器的拓扑优化，《国际传热传质杂志》163 (2020) 120543。[50]J. Alexandersen，对流问题的拓扑优化，2011年。网址：https://portal.findresearcher.sdu.dk/da/publications/topology-optimization-for-convection-problems。doi:10.13140/RG.2.2.24635.72485，学士论文，丹麦技术大学。[51] M. Zhou, J. Alexandersen, O. Sigmund, C. B. W. Pedersen，拓扑优化在导热与对流传热问题中的工业应用，《结构与多学科优化》54 (2016) 1045–1060。[52] H. Hederberg, C.-J. Thore，采用密度跃变进行隐式边界表示的流固耦合拓扑优化，《结构与多学科优化》68 (2025年) 122。[53] J. Mirpourian, N. Aage，拓扑优化中的任意边界条件：在强耦合黏热多物理场中的应用（2025年）。[54] B. S. Lazarov, J. Alexandersen, O. Sigmund，具有对流边界条件的稳态导热问题的拓扑优化设计，EngOpt (2014)。网址：10.13140/RG.2.2.29361.68966。[55] C. Wang, X. Qian，设计相关边界载荷下拓扑优化的密度梯度方法，Journal of Computational Physics 411 (2020) 109398。[56] X. Qian，拓扑优化中的内凹与悬垂角度控制：一种基于密度梯度的积分方法，《国际工程数值方法杂志》111 (2017) 247–272。[57] C. Wang, X. Qian, W. D. Gerstler, J. Shubrooks，面向增材制造的拓扑优化边界斜率控制：实现自支撑并控制表面粗糙度，《制造科学与工程杂志》141 (2019) 091001。[58] A. Bayat, H. Li, J. Alexandersen，具有自由滑移边界条件的纳维-斯托克斯流动的基于密度的拓扑优化（2025年）。Hal-05131366。[59] P. Zhou, T. Zhang, T. W. Simon, T. Cui，基于拓扑优化的流体二极管无阀微泵的仿真与实验，《微机电系统杂志》31 (2021) 292–297。[60] X. Dong, X. Liu，采用优化算法设计的非牛顿流体新型止回微阀，《化学工程杂志》407 (2021) 126911。[61] S. Bohm, H. B. Phi, A. Moriyama, E. Runge, S. Strehle, J. König, C. Cierpka, L. Dittrich，适用于微流控应用的高效被动式特斯拉阀，《微系统与纳米工程》8 (2022) 97。[62] T. Ni, J. Si, F. Li, C. Pan, D. Li, M. Pan, W. Guan，基于流固耦合仿真的新型特斯拉阀毛细通道液冷板性能分析，《应用热工程》232 (2023) 120977。[63] S. Feng, S. Shan, C. Lai, J. Chen, X. Li, S. Mori，采用梯度分布式特斯拉冷板对电池模组热性能和能源效率进行多目标优化，《能源转换与管理》308 (2024) 118383。

[64] T. Sasaki, K. Furuta, N. Ishida, H. Li, T. Kondoh, K. Izui, S. Nishiwaki，考虑壁面连接结构的三维流体二极管设计拓扑优化，《结构与多学科优化》67 (2024) 209。[65] F. Ren, Q. Li, P. Wang，采用响应面法和非支配排序遗传算法II对纳米流体特斯拉阀通道电池冷板进行多目标优化，《能源储存杂志》115 (2025) 115969。[66] J. J. Kim，湍流剪切层分离与再附着研究：后向台阶上的流动，斯坦福大学，1978。[67] S. B. Pope，《湍流》，《测量科学与技术》12 (2001) 2020–2021。[68] P. Moin, W. H. R. Chan，《湍流基础》，剑桥大学出版社，2024。[69] D. Kuzmin, O. Mierka, S. Turek，关于在基于有限元离散的不可压流求解器中实现 κ-ε 湍流模型，《国际计算科学与数学杂志》1 (2007) 193–206。[70] R. Picelli, E. Moscatelli, P. V. M. Yamabe, D. H. Alonso, S. Ranjbarzadeh, R. dos Santos Gioria, J. R. Meneghini, E. C. N. Silva，采用TOBS方法和几何修剪过程进行湍流流动拓扑优化，《结构与多学科优化》65 (2022) 34。[71] W. Rodi，钝体绕流的大涡模拟与RANS计算比较，《风工程与工业空气动力学杂志》69 (1997) 55–75。[72] R. S. Rogallo, P. Moin，湍流数值模拟，《流体力学年度评论》16 (1984) 99–137。[73] H. Grotjans, F. R. Menter，适用于通用计算流体力学代码的壁面函数，《计算流体力学'98》(1998) 1112–1117。[74]COMSOL AB，k-ϵ 湍流模型，载于：COMSOL Multiphysics®参考手册，6.3 版，https://doc.comsol.com/6.3/doc/com.comsol.help.cfd/cfd_ug_fluidflow_single.06. 108.html，2025年。访问日期：2025-08-11。[75] B. S. Lazarov, O. Sigmund，基于亥姆霍兹型微分方程的拓扑优化滤波器，《国际工程数值方法杂志》86 (2011) 765–781。[76] F. Wang, B. S. Lazarov, O. Sigmund，关于拓扑优化中的投影方法、收敛与鲁棒形式，《结构与多学科优化》43 (2011) 767–784。[77] COMSOL AB，层流模型的伪时间步进，载于：COMSOL Multiphysics®参考手册，6.3 版，https://doc.comsol.com/6.3/doc/com.comsol.help.mfl/mfl_ug_fluidflow_single. 06.57.html，2025年。访问日期：2025-11-20。[78] M. Ceze, K. Fidkowski，DG离散RANS-SA方程的伪瞬态延拓、解更新方法和CFL策略，载于：第21届AIAA计算流体力学会议，2013年，第2686页。[79] COMSOL AB，湍流模型的伪时间步进，载于：COMSOL Multiphysics®参考手册，6.3 版，https://doc.comsol.com/6.3/doc/com.comsol.help.cfd/cfd_ug_fluidflow_single. 06.123.html，2025年。访问日期：2025-11-20。[80] COMSOL AB，稳定化技术，载于：COMSOL Multiphysics®参考手册，6.3 版，https: //doc.comsol.com/6.3/doc/com.comsol.help.comsol/comsol_ref_modeling.19.090.html，2025年。访问日期：2025-11-21。

[81] J. Kim, S. Kline, J. Johnston，湍流剪切层再附着研究：后向台阶上的流动 (1980)。[82] N. Tesla，瓣膜导管，1920年。美国专利 1,329,559。[83] S. Lin, L. Zhao, J. K. Guest, T. P. Weihs, Z. Liu，固定几何流体二极管的拓扑优化，《机械设计杂志》137 (2015) 081402。[84] M. J. B. Theulings, M. Langelaar, F. van Keulen, R. Maas，改进固体/流体拓扑优化的多孔介质模型，《结构与多学科优化》66 (2023) 133。URL：https://doi. org/10.1007/s00158-023-03570-4。doi:10.1007/s00158-023-03570-4。[85] M. Theulings, L. Noël, M. Langelaar, R. Maas，通过达西–福希海默惩罚减少流动问题拓扑优化中的参数调节，《应用力学与工程计算方法》443 (2025) 118027。doi:10.1016/j.cma.2025.118027。[86] C OMSOL AB，大涡模拟接口理论，载于：COMSOL Multiphysics®参考手册，6.3 版，https://doc.comsol.com/6.3/doc/com.comsol.help.cfd/cfd_ug_fluidflow_single.06.125.html，2025年。访问日期：2025-12-05。

附录 A. LES 验证研究详情 es

U形弯管基准算例的大涡模拟验证研究在 COMSOL 中使用其基于残差的变分多尺度（RBVM）实现进行设置 [86]。尽管大涡模拟本质上需要三维域，但我们通过在第三方向设置薄计算域，并在侧面施加对称边界条件，进行了二维近似。

附录 *A.1.* 网格

三种情况下使用的网格如图 A.1 所示。初始非结构三角形网格在一个侧面上生成，其要求如下：在流动区域内，最大和最小单元尺寸分别为 0.01 和 0.001；在壁面上，最大和最小单元尺寸分别为 0.001 和 0.00005。随后，沿壁面施加边界层网格划分，使用 18 层四边形单元，拉伸因子为 1.15，厚度调整因子为 0.5。最后，沿第三维度对网格进行挤出，使贯穿厚度方向仅存在一个单元，从而将三角形单元转换为棱柱，将四边形单元转换为六面体。最终网格包括：

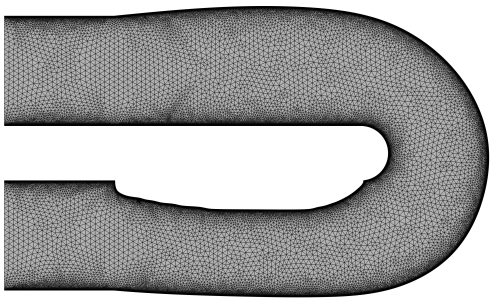
- 使用所提出的方法进行设计：55,287 个三角棱柱、64,098 个边界层单元、748,840 个总自由度
- 使用“常规”方法进行设计：55,542 个三角棱柱、63,288 个边界层单元、743,184 个总自由度
- 使用 [70] 中的 TOBS 进行设计：58,060 个三角棱柱、66,780 个边界层单元、781,888 个总自由度

三种设计在 14 个核心上（AMD Ryzen Threadripper PRO 5975WX）的计算时间均超过 48 小时。由于计算时间限制，所采用的分辨率受到严重限制，而非受y^+ 或正式网格收敛研究的具体要求所限。

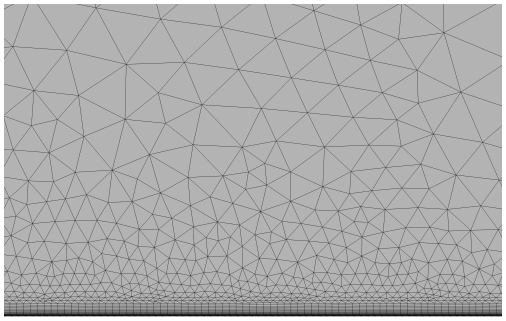
附录 *A.2.* 计算细节

边界条件按照第 4.2 节原始问题表述中的规定设置。入口速度以平均方式施加 [86] ，出口压力也采用相同方式。入口处加入合成湍流，参数如下：中等湍流强度（0.05）、基于几何的湍流长度尺度、100 个傅里叶模态，以及随机种子 113013。

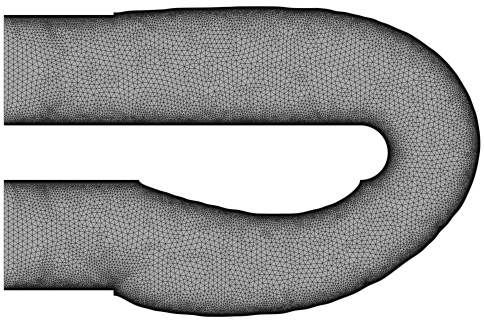
为加快计算，首先在非常粗的粗网格上运行模拟（该网格基于 4× 对最终网格进行粗化而构建）。随后，将最终时刻的结果用作粗网格上的初始条件（该网格基于



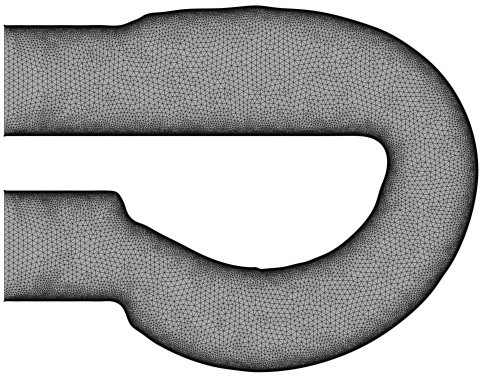
(a) 当前方法



(b) 当前方法——边界附近的放大图



(c) “传统”方法



(d) Picelli等人的 TOBS 结果 [70]

图 A.1：用于性能大涡模拟验证的网格。

2× 最终网格的粗化）。最后，将最终时刻的结果用作最终网格上的初始条件。

对于两个粗网格，模拟时间跨度设为 2 个时间单位，此时流动似乎已达到准重复状态。对于最终网格，模拟时间跨度设为 5 个时间单位，因为这已足够，但同时也受到可用计算时间的严格限制。经过 2 个时间单位后，每隔 0.01 个时间单位保存一次流动和压力场。随后利用这些保存的状态计算时间平均速度场和压力场，以便相互比较并与 k-ε模型进行比较。