风险厌恶马尔可夫决策过程：在电网与水库管理中的应用

Arash Khojaste[a], *、Jonathan Pearce[a]、Daniela Pucci de Farias[b]、Geoffrey Pritchard[c]、Golbon Zaker ¡[a]

[a]马萨诸塞大学阿默斯特分校机械与工业工程系，美国马萨诸塞州[b]托尔夸托·迪·特利亚大学商学院，阿根廷[c]奥克兰大学统计系，新西兰奥克兰

arXiv:2601.02207v1 [math.OC] 5 Jan 2026

摘要

本文开发了风险规避模型，以支持系统运营商在可再生能源发电带来的不确定性下规划和运营电网。我们在马尔可夫决策过程（MDP）框架中采用条件风险价值（CVaR）进行金融风险对冲，并为这些模型提出高效、精确的求解方法。此外，我们提出一种电力可靠性导向风险度量，并给出用于风险规避型电网规划与运营的新型高效计算模型。

关键词：随机过程、风险、马尔可夫决策过程（MDP）、条件风险价值（CVaR）、海上风电、电网可靠性

1. 引言

预计可再生能源在未来电网中将占据较高比重。由于边际成本接近于零且没有直接排放，可再生能源已得到广泛应用。然而，可再生能源面临的一项主要挑战是其具有间歇性，因为其发电量取决于天气条件。这种间歇性可能降低电力系统的整体韧性，尤其是在可能扰乱能源生产与配送的极端事件期间（Suresh 等人，2024年；MacKenzie 等人，2024年）。由于存在这种不确定性，需要配备备用/调节机组，以确保电网可靠性。这些备用能源可以是天然气等热能源，也可以是电池等储能系统。然而，这两种方案都面临运行限制。例如，火力发电机组在规定时间范围内只能以有限幅度提高或降低出力。同样，储能也必须遵守最大充放电速率。了解可再生能源的行为模式将使系统运营商受益匪浅，因为这有助于他们在考虑备用系统限制的情况下，制定运行备用系统的计划。然而，在主要依赖可再生能源、尤其是风能和太阳能的电网中，要确保供电充足性，仅使已装机发电容量与峰值需求及备用资源相匹配还远远不够（Stenclik 等人，2021年）。系统运营商需要在备用能源资源之外采用新工具，以帮助他们平衡需求与可再生能源生产的波动性（Mortimer 和 Mieth，2024年）。

投资决策需要对运营成本作出可靠估算，并制定近乎最优的系统运行方案。这一需求促使我们采用马尔可夫决策过程（MDP）框架。一般而言，与制定爬坡发电机组运行方案相关的优化问题，大多以最小化期望成本为目标，即系统的长期平均成本。然而，尾部风险可能对成本（瞬时/点态）和/或可靠性造成不成比例的影响，因此在资源充足性分析中应予以考虑（Stenclik，2024年）。系统运营商需要进行风险规避型决策，选择最优策略来运行备用系统，不仅要实现成本效益，还要满足预先设定的可靠性目标，例如失负荷概率（Mortimer 和 Mieth，2024年）。

*通讯作者电子邮箱：akhojaste@umass.edu (Arash Khojaste), jonathanpear@umass.edu (Jonathan Pearce), danielinha@gmail.com (DanielaPucci deFarias), g.pritchard@auckland.ac.nz (Geoffrey Pritchard), gzakeri@umass.edu (Golbon Zakeri)

在我们的分析中，我们提出了能够反映运营商规避风险时系统成本的方法。在此前研究（Khojaste 等人，2024年）的基础上，该研究探讨了如何运行备用系统以降低平均成本；本文进一步构建风险规避模型，以规避备用系统在最坏情况下的成本。

在我们的模型中，电力系统的损失主要来自两个方面：运行可用备用系统所产生的费用，以及需求削减相关的成本。我们构建了一种风险模型，用整体系统损失来刻画这些成本。该模型权衡燃料成本与被削减需求的成本。尽管有人可能认为，提高需求削减的惩罚项就能充分体现其影响，但这种方法无法处理尾部风险和连续削减的复杂性，而这些情况对终端消费者的危害可能更大。正是出于这些考虑，本文探讨了其他方法，包括采用不同的风险模型变体。这些变体包括纳入条件风险价值（CVaR），以及实施防止连续需求削减的策略。

近期研究探讨了多个领域中的投资决策问题和风险规避规划。例如，安全与网络安全（Akbari 和 MacKenzie，2025年；Shojaeighadikolaei 等人，2025年）、交通运输（Zeigham 等人，2025年）、机器人学（Mollaei Khass 等人，2025年）、金融（Saghezchi 等人，2024年）以及供应链管理（Sobhani 和 Shahrokhi，2019年）。特别是，随机能源系统中的风险管理已得到广泛研究。例如，Nasr 等人（2019年）提出了一种方法，通过在微电网中运用信息间隙决策理论求解双层多目标优化问题，从而考虑光伏发电和需求的不确定性。这种非概率方法不需要掌握不确定参数的概率密度函数。Yankson 等人（2023年）没有明确纳入风险度量，而是采用一种规划方法来分析电力损失的负面影响，并展示有效规划如何缓解这些影响。他们通过引入一种能源管理框架，确保自然灾害发生后微电网仍能供应能源，从而隐式地应对风险。Bakhtiari 等人（2022年）提出了一种改进的耦合马尔可夫链蒙特卡罗仿真方法，用于规划以可再生能源为基础的独立微电网。他们证明，该改进模型能有效降低系统运行期间发生电力短缺的风险。Mortimer 和 Mieth（2024年）通过纳入条件风险价值，研究了能源受限随机能源系统中的风险感知线性策略近似。其方法依托序贯决策框架中的滚动预测。该研究没有采用马尔可夫决策过程，而是使用经参数修正的成本函数近似，寻找一种性能与随机方法相当的等效情景。Lara 等人（2022年）提出了一种概率预测的应用方案，将其纳入小时前运行，通过风险规避多阶段随机规划提升态势感知。他们采用概率预测的马尔可夫表示，以捕捉《可再生能源》的变异。这使得研究者能够构建多阶段问题，同时避免情景生成阶段。部分关于能源系统中风险规避序贯决策的研究，探讨了运用条件风险价值的风险规避模型预测控制方法，例如 Ning 和 You（2021年）以及 Hans 等人（2020年）的研究。尽管这些研究具有启发性，但它们并未直接提出或求解本文所讨论的特定形式化表述。

许多现实世界中的规划问题可分为两类：“投资型”和“运营型”。在投资阶段作出的每项决策，都可能引发后续运营阶段的一系列潜在行动。运营阶段通常代表一个长期时域，且往往划分为多个阶段。我们倾向于用离散马尔可夫决策过程来表示运营阶段，因为系统运营商需要估算长期运营计划的成本，而这一估算对投资阶段具有重要价值。

随机过程在对不同应用（参见 Farhang & Jalali (2025年)；Sobhani 等人 (2025年)）中复杂且由不确定性驱动的系统建模方面日益普遍。特别是，许多研究致力于构建超越能源领域的风险感知型马尔可夫决策过程。该领域最早的研究之一，Howard & Matheson(1972年)，探讨了如何最大化具有恒定风险敏感度的马尔可夫决策过程所产生的确定性等价奖励。该研究采用价值迭代进行时变有限时域优化，并提出策略迭代方法，以便在无限时域情形下找到确定性等价收益最高的平稳策略。在较新的研究中，Ahmadi 等人(2021年）使用拉格朗日框架对受约束风险规避型马尔可夫决策过程进行形式化表述，并采用条件风险价值（CVaR）和熵风险价值等相干风险度量来刻画决策中的不确定性。Chow & Ghavamzadeh (2014年）提出了用于马尔可夫决策过程CVaR优化的算法，以获得局部风险敏感的最优策略。Bäuerle & Glauner (2021年）探讨了马尔可夫决策过程中的谱风险度量，并提出一种通过分解方法最小化总折扣成本的方法。他们的研究将谱风险度量作为CVaR的推广纳入传统风险敏感型马尔可夫决策过程模型，从而对其进行了扩展。

表1：两个案例研究中的模型量。

		示例1：火电备用			示例2：水库管理		
变量	符号	描述	Set	Unit	描述	Set	Unit
时间状态	$t \in T$	时段	1:24	hour	时段	1:54	week
输入制度状态	$r \in R$	净需求状态	1:4	索引	流入状态	1:4	索引
运行状态	$l \in L$	发电水平	0:13	单位	储能水平	0:5000	MW
动作／控制	$a \in A$	爬坡步长	-1:1	单位	水库出流	0:9	MW
外生输入	$w \in W$	净需求	$(-\infty, +\infty)$	MW	水库入流	0:47	MW
频率	$\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$	日内的 & 年度的	$\{1, 365\} \times 24$	hour	年度的	$\{1\}$	week

除了形式化表述和求解方法之外，我们工作的另一项显著特点是通过分位数傅里叶回归构建马尔可夫决策过程状态。分位数回归非常适合对周期性变化的随机现象进行建模（Pritchard (2015年)），例如电力需求和可再生能源发电，它们呈现出显著的日变化和季节性模式。我们允许非齐次时间马尔可夫转移概率，使边际行为和序列依赖结构都能随周期变化。在背景部分 2中，我们回顾马尔可夫决策过程形式化表述的若干关键内容。有关更详细的说明，请参见Khojaste 等人 (2024年)。在此基础上，第3节介绍我们采用条件风险价值（CVaR）的风险厌恶决策框架，并给出双线性规划公式以及一种能够高效求得全局最优解的新方法。第效率地获得全局最优解。第4 节展示模型在两项应用中的数值结果。最后，在第5 节中，我们探讨其他与风险相关的方法。这些方法保留线性规划形式，以提高电网可靠性。它们共同增强了系统韧性，同时保持了计算可处理性。

2. 背景

本节为我们的 MDP框架奠定基础，相关内容详见我们近期的研究Khojaste 等人(2024年)。我们首先介绍分位数傅里叶回归技术，该技术用于刻画外生输入的周期性行为。这种行为将定义我们的 MDP状态空间。随后，我们概述 MDP 本身的结构及其特征，包括状态、行动、成本和转移动态。最后，我们介绍两个用于启发的案例研究，以说明本文后续部分中风险规避方法的应用。

2.1. 电网可靠性的马尔可夫决策过程

马尔可夫决策过程为选择能够优化预期目标函数的策略提供了系统化框架。马尔可夫决策过程可有多种类型，包括有限或无限状态、有限或无限时间范围，以及连续或离散过程。本文始终假设过程具有有限状态、离散时间，并且时间范围无限（且循环）。

随后，将可再生能源系统本身建模为一个离散马尔可夫决策过程（Bertsekas，2017；Puterman，2005；White，1993），该过程由一组可观测的状态变量以及可操控的行动变量构成，并辅以一步状态转移概率以及状态—行动成本，这些成本在任意状态—行动序列上具有可加性。现在，我们来定义 MDP 的组成部分：

2.1.1. 马尔可夫决策过程变量

- 一个外生随机变量$w(t) \in W$ （“电力净需求/水”），用于量化可再生能源系统中的波动因素。

- 可观测的状态分量：

  1. 一个在其取值范围内周期性变化的时间状态$t \in T \subset \{1, 2, \ldots, |T|\}$。2. 一种环境状态$\mathrm{r}(t) \in R \subset \{1, 2, \ldots, |R|\}$，用于索引外生信号$w$的分位数划分 $\cup_{r \in R} W_r(t) = W(t)$。

3. 发电机自身的运行状态$\mathrm{l}(t) \in L$（“级别”）。

将状态变量记作$(t, s) := (t, (\mathrm{l}, r)) \in T \times (L \times R) =: T \times S$会比较方便。

- 一个可操控的行动（控制）变量$a \in A$。
- 决策时点与时间$t \in T$相同，其中$t = 1, 2, \ldots, |T|$。
- 在相应时间t的状态s下采取行动a，会产生即时成本c_{tsa}。
- $p_{s'|tsa}$表示在时间t采取行动a时，从状态s转移到状态s'的转移概率。

2.1.2. 随机输入模型

我们假设w是一个循环平稳过程，这对于风能／太阳能潜力或水文入流而言是自然的。假设$w(t)$的一组固定分位数曲线$\{w_1(t), \ldots, w_{|R|-1}(t)\}$具有周期性，并且可以通过傅里叶基回归，根据历史时间序列得到良好近似：

$$w_r(t \mid B_\alpha) := \phi_W(t) \cdot B_r$$

这里，ϕ_W是由傅里叶多项式构成的基，其阶数和频率反映了对系统周期性的假设。回归系数B_r针对一系列预先选定的水平，通过分位数回归确定（Khojaste 等人，2024年；Koenker，2005），每个水平都需要求解一个线性规划。

分位数间隔$W_r(t) := [w_{r-1}(t), w_r(t)]$（其中$r \in \{0, \ldots, |R|\}$）定义了输入区间，其中$w_0(t) := 0$且$w_{|R|} := \infty$。

条件分布

$$p_{w|rt} = \mathbb{P}(w \mid r, t) = \mathbb{P}(w \in W_r \mid t)$$

的外生输入w[兆瓦],可通过直方图回归从时间序列数据中近似得到 on.
状态序 列$r(t)$建模为具有时变周期性状态转移概率的马尔可夫链：

$$p_{r'|rt}(\vec{\gamma}) := \phi_R(t) \cdot \gamma \approx \mathbb{P}(r' \mid r, t),$$

其中，ϕ_R是另一种特定于应用的傅里叶基。回归参数$\vec{\gamma}$通过最大化相应的对数似然函数确定，同时满足（凸二次）非负约束和（线性）归一化约束：

$$\begin{aligned} \arg\max_{\vec{\gamma}} \quad & \sum_{(t,r,r') \in \text{data}} \log p_{r'|rt}(\vec{\gamma}) \\ & \sum_{r'} p_{r'|rt}(\vec{\gamma}) = 1 \quad \forall t, r \\ & p_{r'|rt}(\vec{\gamma}) \in [0, 1] \quad \forall t, r, r' \end{aligned}$$

该问题可转化为二阶锥约束凸规划（Lobo 等人，1998）。

2.1.3. 状态转移模型

状 态变量通过确定性模型ψ演化，该模型由随机输入w和控制动作驱动 a：

$$\begin{aligned} t' &= t \bmod |T| + 1 \\ r' &\sim \mathbb{P}_R(\bullet \mid t, r) \\ \ell' &= \psi(\ell, a, w) \\ w' &\sim \mathbb{P}_W(\bullet \mid t, r) \end{aligned}$$

我们在第ϕ_W、ϕ_R和ψ节 2.3–2.4 中介绍两个具体案例研究的示例。这里，t模$|T|$表示t除以$|T|$后的余数，因此时间索引会通过$\{1, \ldots, |T|\}$，按$t' = (t \bmod |T|) + 1$循环。

2.2. 最低期望成本运行策略

现在我们介绍用于求解最优决策的线性规划形式化表述 MDPLP（2）。为避免重复，我们将状态-动作概率的可行集定义如下：

$$X := \left\{ x \in \Delta \;\middle|\; \sum_{a} x_{t's a} = \sum_{s',a} x_{ts'a} p_{s'|tsa} \quad \forall t, s \right\} \tag{1}$$

这里，

$$\Delta := \left\{ x \geq 0 \;\middle|\; \sum_{s,a} x_{tsa} = 1 \quad \forall t \right\}$$

是定义在T上的概率分布集合，其索引为$S \times A$；X 是与S上的一步状态转移概率相容的子集。

每个状态-动作分布$x \in X$ 都对应一个可行的循环平稳运行策略

$$\mathbb{P}(s, a \mid t) = x_{tsa},$$

每个x都会在阶段成本集合 $\{c_{tsa}$ 上诱导出一个分布：$t \in T$、$s \in S$、$a \in A\}$。

$$\text{MDPLP} \quad \min_{x} \left\{ \sum_{t,s,a} c_{tsa} \frac{x_{tsa}}{|T|} : x \in X \right\} \tag{2}$$

这里x_{tsa}中的唯一决策变量是平稳无条件概率，即系统在时间t处于状态s并采取动作a 的概率。

在（Hillier & Lieberman，2021年，§19.3）中，作者提到，对于 MDPLP（2）在任意给定时间 t 的每个状态 $\in S$ 下的任意最优顶点解，t 只有一个动作 a 的取值可以严格为正。因此，MDPLP （2）将给出确定性策略。

命题1。通过求解线性规划表述 (2)可以找到一个确定性而非随机化的最优策略。（*Hillier&Lieberman，2021年*）

MDPLP（2）的形式化表述在（Hillier & Lieberman，2021年）和（White，1993）中有详细说明，它通过最小化总“平均成本”，确定马尔可夫决策过程的最优决策策略。该决策策略包含在每个状态下采取的一系列动作。该模型的主要目标是最小化稳态下的期望成本，从而确保所选策略在一段时间内实现最优平均成本。作为一种规划工具，本文所述形式化表述中的转移概率完全依赖历史数据，不利用滚动预测（参见 Mortimer 和 Mieth（2024年）及 Ghadimi & Powell（2024年）），因此不能指望它提供最佳在线运行计划。不过，该方法非常适合估算运行成本，以供长期基础设施/容量规划使用。我们近期关于优化 Khojaste 等人（2025年）数据中心冷却策略的研究中，就有一个该模型的最新应用示例。首先，我们将在电网可靠性的背景下，将其作为马尔可夫决策过程的基准模型。接下来的章节中，我们将介绍在该基准模型中纳入风险度量的不同方法。

2.3. 模型设定：海上风能的火电备用

在采用间歇性可再生能源的电网中，可再生能源发电（边际成本为零）优先调度，而火电备用资源则用于满足剩余需求。我们将这种剩余需求称为“净需求”。由于可再生能源具有间歇性，系统面临的净需求水平是随机的。若将净需求区分为 $|R|$个不同水平，则这种随机变异可表示为一个在这些水平之间转换的离散过程。通过分析电力需求历史数据，并结合相应区域的可再生能源发电数据，我们获得了参数，从而能够为净需求这一随机变量拟合马尔可夫链。

Name	描述	值
基准_爬坡	基础发电容量	6 GW
惩罚项_成本	需求削减成本	$3.0/兆瓦时
燃料_成本	火力发电成本	$0.1/兆瓦时
爬坡_速率	机组发电容量	1.5 兆瓦/台

表2：火电备用案例研究的参数。

本研究在 Khojaste 等人（2024年）的基础上，纳入了多种风险偏好。如（Khojaste 等人，2024年）所述，我们的模型中，风能代表间歇性可再生能源，火力发电则作为备用。我们使用了联邦能源管理委员会（美国联邦能源管理委员会，2021年）提供的2006年至2020年逐小时电力需求数据。风电数据由美国国家海洋和大气管理局（美国国家海洋和大气管理局，2025年）的44025号浮标逐小时风速数据，结合国际能源署15兆瓦海上风力涡轮机的发电特性得出（Gaertner，2020年）。我们使用分位数傅里叶回归捕捉净需求的周期性，从而有效刻画其时变行为。图 1 展示了对2006年至2020年净需求数据进行拟合的0.75、0.5和0.25分位数。利用这三个拟合分位数，我们将净需求水平的序列依赖结构建模为一个四状态马尔可夫链，其中1为最低净需求水平，4为最高净需求水平。

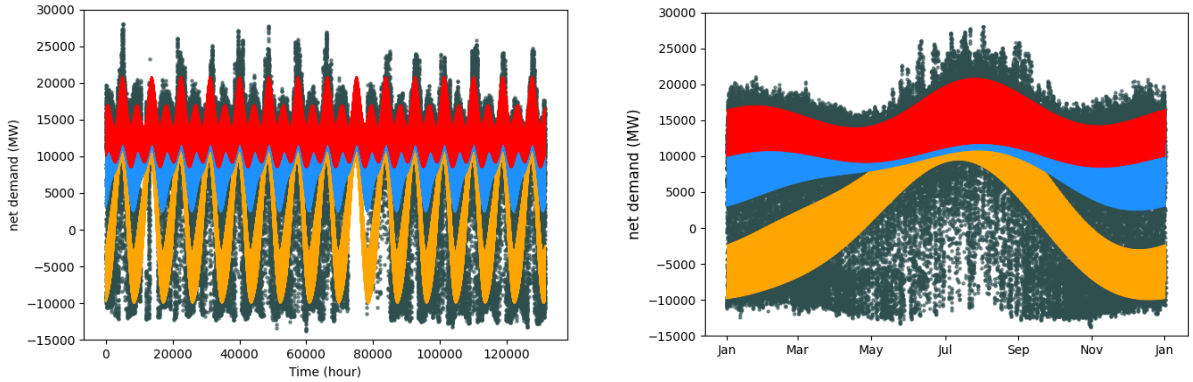


图1：采用两个回归变量，对15年的净需求数据进行拟合，同时考虑年度和日度周期性的分位数傅里叶回归。左图：常规图。右图：相位折叠图。

为了为第二个模型制定时变计划，我们引入了一个最大似然模型，其中允许全部十六个转移概率按年度以简单正弦曲线变化。详细说明见Khojaste等人（2024年）。

在示例中，我们假设备用系统由13座联合循环燃气轮机（CCGT）发电厂组成，总发电容量为21吉瓦。模型在每个状态下允许采取的行动包括“爬坡”“保持当前运行水平”和“降坡”。假设爬坡或降坡行动使发电量总计增加或减少1.5吉瓦，而基准发电量为6吉瓦。

2.3.1. 变量与简化

系统变量汇总见表1。

2.3.2. 状态转移模型

$$\ell' = \text{clamp}(\ell + a, \min(L), \max(L))$$

2.3.3. 阶段成本

$$\begin{aligned} \text{generation} &\coloneqq (\texttt{base_ramp} + \ell) \times \texttt{ramp_rate} \\ \text{Curtailed Demand} = CD_{t(lr)} &\coloneqq \max(w_{tr} - \text{generation}, 0) \\ c_{t(\ell r)a} &\coloneqq \text{generation} \times \texttt{fuel_cost} \\ &\quad + CD_{t(lr)} \times \texttt{penalty_cost} \end{aligned}$$

2.4. 模型设定：水电水库管理

本节将把我们的方法应用于另一个示例。我们采用 Khojaste 等人 (2024年) 详细阐述的水电水库管理问题设定。该设定对水电系统的运行进行建模，其中系统受到季节性来水不确定性的影响，且储水容量有限。目标是在来水不确定性下，满足恒定的电力需求，同时使目标函数最小化；为此需同时利用水力发电和非水电发电源。关于如何利用这一水库管理设定构建基准情景水力发电报价曲线的详细说明，请参阅 Pearce 等人 (2025年)。

系统需求是固定的，可变可再生能源的发电边际成本可以忽略不计，但净需求现在由运行策略决定，以平衡机会成本。由于每个规划期现在为一周（而非一小时），因此不再考虑火力发电机组的爬坡约束。

Name	描述	值
最小_出流	径流式发电	500 兆瓦
容量	储水容量	500 兆瓦
load	固定负荷	1400 兆瓦
燃料_成本	火电燃料价格	$50/MWh
惩罚项_成本	负荷削减价格	$1000/兆瓦时

表3：水库管理案例研究的参数值。

2.4.1. 变量和简化

系统变量汇总于表1中。

为简便起见，我们针对单个水库建立模型；不过，该模型很容易推广到多个水库，并且本研究所得结果也将（适当地）扩展到这种情况。在推导运行策略时，假设电力负荷 [兆瓦] 以及火力发电成本 [$/兆瓦时] 保持不变。在通过仿真评估该策略时，二者都可能发生变化。

2.4.2. 状态转移模型

$$\begin{aligned} \text{released} &\coloneqq \min(\ell + w_{tr}, \texttt{min_outflow} + a) \\ \ell' &= \text{clamp}(\ell + w_{tr} - \text{released}, \min(L), \max(L)) \\ \mathbb{P}_S(s' \mid s, a) &= \mathbb{P}_W(w \mid r', t)\, \mathbb{P}_R(r' \mid r, t) \end{aligned}$$

2.4.3. 阶段成本

虽然水量下泄本身的边际成本为零，但a 决定了必须通过火力发电（非零边际成本）和需求削减（惩罚性成本）来满足的净需求。

释放 := min(l + w_{tr}, min_流出量 + a) 水电
_调度 := max(释放量, min_流出量) 火力_调度
:= 负荷 –水电_调度 未满足_负荷 := max(min_流
出量 – 释放量, 0)$c^{t((\ell r)a}$ = 火力_调度 ×燃料_成本+
未满足_负荷 × 惩罚项_成本

到目前为止，我们根据马尔可夫决策过程得到了系统的最优运行方案，该过程基于平均成本，因为我们根据问题（2）最小化系统的期望成本。接下来的章节将说明如何将风险厌恶纳入决策过程中。

3. 风险厌恶型马尔可夫决策过程

在某些应用中，仅依据平均成本来实现最优运行方案并不足够，因为决策者未必是风险中性的。因此，有必要考虑决策者的风险厌恶。这需要将成本函数分布的尾部行为纳入考量。一种实现方式是在原有形式化表述中加入一致性风险度量。Artzner 等人（1999）提出了风险度量所应具备的四项自然属性，并将满足这些属性的风险度量称为相干风险度量。这类度量已在包括金融和运筹学在内的多个领域得到广泛认可。条件风险价值（CVaR）是一种受到广泛关注的一致性风险度量，常用于马尔可夫决策过程（MDP）等决策问题中（Chow & Ghavamzadeh，2014年）。我们采用 CVaR 作为风险度量，以防范成本函数可能出现的最坏结果。这有助于构建一种 均值—风险模型，从而确保在不确定性下进行稳健决策。

3.1. 条件风险价值概述

表示状态-动作成本的随机变量C 的 β 分位数（风险价值）为:

$$\eta := \mathrm{VaR}(C,\beta) := \min\{\alpha : \beta \le \mathbb{P}_C(C \le \alpha)\}$$

相应的 在概率水平为 β 时的条件风险价值 定义为 β 尾部 :

$$f := \mathrm{CVaR}(C,\beta) := \mathbb{E}_C\left(\frac{\mathbb{1}_{\eta\le C}}{1-\beta}\,C\right)$$

如果C 服从固定分布 $\mathbb{P}(C = c_i) = p_i$，Rockafellar & Uryasev (2000年) 指出，f 可以通过线性规划计算:

$$f = \min_{\eta,\, u\ge 0}\ \eta + \frac{1}{1-\beta}\sum_i p_i(c_i-\eta)^+ \tag{3}$$

$$= \min_{\eta,\, u\ge 0}\left\{\eta + \frac{1}{1-\beta}\sum_i p_i u_i : u_i \ge c_i - \eta \quad \forall i\right\} \tag{4}$$

当 p已知时 n，这些等价形式都是凸的: （4）是线性的，而（3）中的可行集是一个简单的乘积 .

3.2. 条件风险价值的解释

在讨论p为决策变量的情形之前，先考虑两种便于理解的等价改写。这两种方法都已广为确立，但或许并不为人熟知。

在约束式（4）中引入两个非负松弛变量 $v \geq 0$ 和 u ≥ 0

$$c_i - \eta =: u_i - v_i,$$

并利用恒等式

$$\eta \equiv 1\eta \equiv \left(\sum_i p_i\right)\eta \equiv \sum_i p_i\eta,$$

(4) 的目标函数可以改写为：

$$\begin{aligned} 1\eta + \frac{1}{1-\beta}\sum_i p_i u_i &\equiv \sum_i p_i\left(\eta + \frac{1}{1-\beta}u_i\right) \\ &\equiv \sum_i p_i\left(c_i - u_i + v_i + \frac{1}{1-\beta}u_i\right) \\ &\equiv \sum_i \overbrace{\left(c_i + \frac{\beta u_i + (1-\beta)v_i}{1-\beta}\right)}^{\bar{c}_i :=} p_i \end{aligned}$$

因此，(4) 可等价地表示为：

$$f = \min_{\eta, u\geq 0, v\geq 0}\left\{\sum_i\left(c_i + \frac{\beta u_i + (1-\beta)v_i}{1-\beta}\right)p_i : u_i - v_i = c_i - \eta \quad \forall i\right\} \tag{5}$$

修改后的目标函 数也是一个期望：超过分位数 η 的原始成本 c_i，将按比例受到惩罚
，比例为
β。

3.3. 双线性规划形式化表述

在我们的语境中，概率 p 是需要确定的决策变量，因此（4）以及等价的（5）成为非凸双线性规划。利用（5），我们将 MDPLP（2）的风险规避版本定义为：

$$\begin{array}{lll} \text{MDPBL} \min\limits_{x,\eta} & \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \lambda x_{tsa}\left(\beta(c_{tsa}-\eta)^+ + (1-\beta)(\eta - c_{tsa})^+\right) \\ \text{s.t.} & x \in X \\ & \eta \text{ is free.} \end{array} \tag{6}$$

其中x_{tsa} 和 η 是决策变量，而 λ 和 β 是常数，并且（a）$^+$ 是**a**的正部函数，定义为：
$(a)^+ =$ 最大值$\{a, 0\}$.

这里， λ 是一个系数，用于确定均值-风险公式中风险组成部分的权重，其为$\lambda = \frac{1}{1-\beta}$。（Rockafellar & Uryasev，2000年）

我们可以看到，这个优化问题不再是线性规划问题，而是呈现为双线性问题。由于它是非凸的，即使对于小规模问题，这个双线性问题也很难求解。一般而言，非凸规划有两种不同但互补的方法：全局方法和局部方法。全局方法（如空间分支定界）可以保证解的全局最优性，但耗时较长，尤其是对于大规模问题。另一方面，局部方法速度快得多，但只能得到不一定是全局最优解的局部解（f）。Le Thi & Pham Dinh，2018年。

使用采用空间分支定界法的“Gurobi 12”求解器求解这个双线性问题需要很长时间。即使是一个仅有 24 个时间步（$|T| = 24$）的小问题，由于每天都采用相同的计划，证明其最优性仍需数小时：运行一天后，最优性差距仍超过 17%。随着问题规模增大，最佳界与当前目标函数之间的差距不断扩大，运行时间也显著增加。对于我们这个每天都需要制定唯一运营计划的问题而言，这使得问题规模大到难以求解

（一年中的每一天都如此，$|T| = 8760$）。下一节中，我们将简要讨论该问题的局部方法；不过，我们主要关注能够全局求解该问题的精确方法。

3.4. 通过差分凸规划达到局部最优

一种更高效地求解非凸问题的方法，是将其重新表述为差分凸（DC）规划。这样我们就可以使用差分凸规划中常用的各种算法。在此之前，为了简化问题，我们使用两个辅助变量 U_{tsa} 和 V_{tsa}，分别表示 $(c_{tsa} - \eta)^+$ 和 $(\eta - c_{tsa})^+$。通过添加约束 $\eta + U_{tsa} - V_{tsa} - c_{tsa} = 0$，即可确保这一点。

$$\begin{array}{lll} \text{MDPBL} \min\limits_{x,\eta,U,V} & \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \lambda x_{tsa}(\beta U_{tsa} + (1-\beta)V_{tsa}) & \\ \text{s.t.} & x \in X & \\ & \eta + U_{tsa} - V_{tsa} - c_{tsa} = 0 & \forall t, \forall s, \forall a \\ & U_{tsa} \geq 0 & \forall t, \forall s, \forall a \\ & V_{tsa} \geq 0 & \forall t, \forall s, \forall a \\ & \eta \text{ free.} & \end{array} \tag{7}$$

有多种方法可以将这个问题转化为差分凸规划。其中一种方法是利用以下简单事实：$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$。因此，式 6 中的目标函数可以重新表述为：

$$\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \frac{\lambda}{4}(\beta[(x_{tsa}+U_{tsa})^2 - (x_{tsa}-U_{tsa})^2] + (1-\beta)[(x_{tsa}+W_{tsa})^2 - (x_{tsa}-W_{tsa})^2]) \tag{8}$$

展开（8）后，我们可以得到两个凸函数之差，如下所示的 f 和 g，二者均为凸函数。于是，目标函数可表示为 $f - g$，并满足式（6）中的约束：

$$f = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \frac{\lambda}{4}\beta(x_{tsa}+U_{tsa})^2 + \frac{\lambda}{4}(1-\beta)(x_{tsa}+W_{tsa})^2 \tag{9}$$

$$g = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} \frac{\lambda}{4}\beta(x_{tsa}-U_{tsa})^2 + \frac{\lambda}{4}(1-\beta)(x_{tsa}-W_{tsa})^2 \tag{10}$$

$$\begin{array}{ll} \text{MDPDC min} & f - g \\ \text{s.t.} & \text{constraints of(7)} \end{array} \tag{11}$$

在此阶段，我们可以使用各种算法来求解这个 DC 问题。其中一种方法是 Pham Dinh 和 Le Thi 在早期工作中提出的差分凸算法 (DCA) (Pham Dinh 和 Le Thi Pham Dinh 和 Le Thi, 1997)。该算法是一种局部搜索方法，无法保证最优性。其他局部求解器（如 CONOPT）也能求解中等规模的问题。由于我们将在下一节介绍一种求得全局最优解的方法，因此不再考察局部解的结果，而将这项探索留给读者。

3.5. 求得全局最优解的精确搜索方法

由于双线性规划 (6) 具有非凸性质，使用空间分支定界等全局方法求解会带来难以承受的计算开销。为应对这一计算挑战，我们提出一种结构化搜索方法，以高效地找到全局解。

为求解这个问题，我们确定 η 是一个 复杂变量。如果固定 η，原始非凸问题 (6)（称为主问题）就会转化为线性规划 (12)（子问题），从而可以高效求解。

$$\begin{array}{ll} \text{subMDPBL} \min\limits_{x} & \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \lambda x_{tsa}\,(\beta(c_{tsa}-\eta)^+ + (1-\beta)(\eta - c_{tsa})^+) \\ \text{s.t.} & x \in X \end{array} \tag{12}$$

值得一提的是，子问题（与主问题（12）和主问题（6）之间的区别在于，在子问题中 η是参数，而不是决策变量。与MDPLP的情形类似2，subMDPBL的线性规划形式化表述 12 也能得到确定性策略的解，如以下命题2所述。

命题 2. 通过求解 *subMDPBL* 的线性规划表述，可以找到一个确定性而非随机化的最优策略。

对于固定的 η，求解该子问题可得 $f^*(\eta) = \min f(x|\eta)$。理想情况下，我们希望断言 $f^*(\eta)$ 关于 η 是凸的（或至少是拟凸的），这样便可轻松求解，但事实并非总是如此。$f^*(\eta)$ 关于 η 的凸性取决于我们如何定义 c_{tsa}。在我们的模型中，由于 c_{tsa} 包含非线性项（见第2节），因此 $f^*(\eta)$ 可能具有非凸性。这意味着 $f^*(\eta)$ 关于 η 可能呈现非凸行为（见图2）。

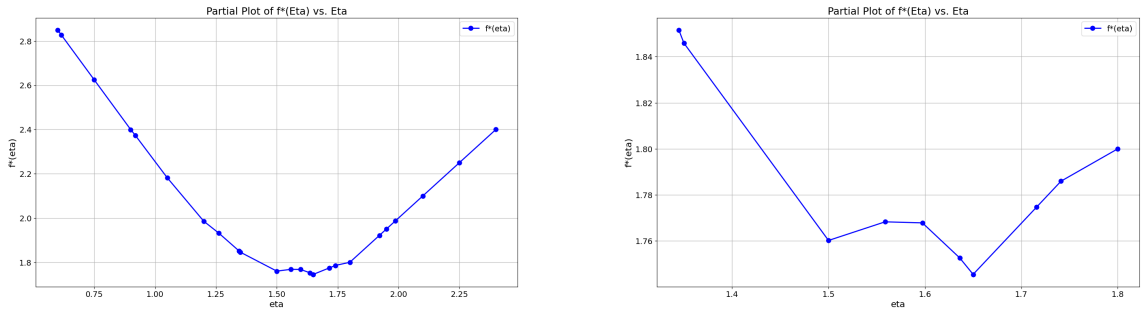


图 2：$f^*(\eta)$ 在某些情况下可能出现的非凸性。左图：缩小视图。右图：放大视图。

需要认识到，MDP 的线性规划表述考察的是一个分布。该分布是有限离散的，其原子为 c_{tsa}，线性规划旨在求得最优的 η，它是 c_{tsa} 分布的一个分位数。线性规划设定概率 x_{tsa}，但归根结底，x_{tsa} 只是权重，尽管它们还满足一个额外条件，即马尔可夫约束（式（6）中的第三个约束）。这种解释引出了下文的命题3。

命题3. 存在一个最优解 (x^*, η^*)，使得对于某个 t，s，a，有 $\eta^* = c_{tsa}$。

证明。 我们将目标函数记为

$$f(x,\eta) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \lambda x_{tsa}\left(\beta(c_{tsa}-\eta)^+ + (1-\beta)(\eta - c_{tsa})^+\right).$$

那么，对于所有满足 $\eta \geq \max_{tsa} c_{tsa}$ 的可行的 (x,η)，都有：

$$\begin{aligned} f(x,\eta) &= \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa} + \lambda x_{tsa}(1-\beta)(\eta - c_{tsa}) \\ &= \lambda(1-\beta)\eta \cdot \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} x_{tsa} + \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa}(1-\lambda(1-\beta)) \\ &= \lambda(1-\beta)\eta + \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa}(1-\lambda(1-\beta)). \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了这样一个事实：对于所有可行的 x，$\sum_{sa} x_{tsa} = 1\ \forall t$。

这意味着，对于所有满足 $\eta \geq \max_{tsa} c_{tsa}$ 的 η，$f(x,\eta)$ 关于 η 是线性递增的，因此任何最优解都满足$\eta^* \leq \max_{tsa} c_{tsa}$。类似地，对于所有满足 $\eta \leq \min_{tsa} c_{tsa}$ 的可行的 (x,η)，都有

$$f(x,\eta) = -\lambda\beta\eta + \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S}\sum_{a\in A} c_{tsa}x_{tsa}(1+\lambda\beta).$$

这意味着，对于所有 $\eta \leq \min_{tsa} c_{tsa}$，$f(x,\eta)$ 关于 η 是线性递减的，因此 $\eta^* \geq \min_{tsa} c_{tsa}$。

我们得出结论：如果 (x^*, η^*) 是一个最优解，那么必有

$$\min_{tsa} c_{tsa} \le \eta^* \le \max_{tsa} c_{tsa}.$$

现在，设（x^*, η^*）是一个最优解，并假设 $\eta^* \neq c_{tsa}\ \forall t, s, a$。令

$$c_0 = \max_{t,s,a:\ c_{tsa} \le \eta^*} c_{tsa}, \quad c_1 = \min_{t,s,a:\ c_{tsa} \ge \eta^*} c_{tsa}.$$

注意，由于我们假设 $\eta^* \neq c_{tsa}\ \forall t, s, a$，因此有 $c_0 < \eta^* < c_1$。现在，对于所有$c_0 \le \eta \le c_1$，，我们有

$$\begin{aligned} f(x^*, \eta) = {} & \frac{1}{|T|} \sum_{t,s,a} c_{tsa} x^*_{tsa} + \frac{\lambda\beta}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \ge c_1} x^*_{tsa}(c_{tsa} - \eta) \\ & + \frac{\lambda(1-\beta)}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \le c_0} x^*_{tsa}(\eta - c_{tsa}) \\ = {} & \eta \left[\frac{\lambda(1-\beta)}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \le c_0} x^*_{tsa} - \frac{\lambda\beta}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \ge c_1} x^*_{tsa} \right] \\ & + \frac{1}{|T|} \sum_{t,s,a} c_{tsa} x^*_{tsa} + \frac{\lambda\beta}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \ge c_1} x^*_{tsa} c_{tsa} - \frac{\lambda(1-\beta)}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \le c_0} x^*_{tsa} c_{tsa}. \end{aligned}$$

If

$$\frac{\lambda(1-\beta)}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \le c_0} x^*_{tsa} - \frac{\lambda\beta}{|T|} \sum_{t,s,a:\ c_{tsa} \ge c_1} x^*_{tsa} > 0$$

并且 $\eta^* > c_0$，，则 $f(x^*, c_0) < f(x^*, \eta^*)$，这与假设矛盾。

同样，如果该项为负且 $\eta^* < c_1$，，则 $f(x^*, c_1) < f(x^*, \eta^*)$，这也与假设矛盾。

最后，如果该项为零，则 $f(x^*, c_0) = f(x^*, \eta^*) = f(x^*, c_1)$，这意味着（$x^*, c_0$）和（$x^*, c_1$）也都是最优解。□

因此，最优阈值必然与某个成本原子 c_{tsa}重合。由于 η是所有c_{tsa} 值中的一个，逐一测试这些值即可找出具有最小 $f^*(\eta)$ 的最优 η。如果没有马尔可夫约束，只需将所有权重集中在具有$c_{tsa} < \eta$的状态上，就可以轻松实现所有x_{tsa}。然而，马尔可夫平衡约束确保所有时间点都通过有效转移相互连接。

这种寻找使$f^*(\eta)$最小的最优 η 的过程，自然是在所有c_{tsa} 值中进行的。然而，下面的引理可以帮助我们大幅缩小搜索空间。为了解释这一点，我们首先在以下命题中介绍问题的另一种等价形式化表述。

命题 4。 以下形式化表述与 *MDPBL* (6)等价：

$$\begin{array}{lll} MDPBL & \min\limits_{x,\eta} & \eta + \dfrac{1}{|T|} \lambda \sum_{t\in T} \sum_{s\in S} \sum_{a\in A} x_{tsa} \left((c_{tsa} - \eta)^+\right) \\ s.t. & & x \in X \\ & & \eta \text{ is free.} \end{array} \tag{13}$$

证明。 证明见小节3.2。 □

考虑在（13）中定义的优化问题，我们现在解释该引理如何进一步剪枝候选集合。引理 1 确定了使目标函数变为线性的最小阈值 η^*。

引理 1。 存在一个由马尔可夫结构定义的有限阈值 η^*，超过该阈值后，最优目标函数可精确简化为 $f^*(\eta) = \eta$。具体定义如下：

$$\eta^* = \text{最小值}\{\eta:\ \exists x_{tsa} \ge 0 \text{ 满足马尔可夫约束的可行条件，其中 } x_{tsa} = 0 \text{ 如果 } c_{tsa} > \eta\}$$

那么：

$$f^*(\eta) = \eta, \quad \forall \eta \geq \eta^*.$$

证明。 要使等式 $f^*(\eta) = \eta$ 在最优解处成立，我们必然需要：

$$x_{tsa} = 0, \quad \forall (t, s, a) \text{ with } c_{tsa} > \eta.$$

虽然人们可能会直接设置 $\eta = \max_{tsa} c_{tsa}$，使得 $\{(t, s, a) : c_{tsa} > \eta\} = \emptyset$，但我们注意到，马尔可夫约束施加了更强的结构限制：每个时间步 $t + 1$ 上的概率质量必须与从时间步 t转移而来的概率精确匹配。该连通性条件可能导致无法将概率限制在成本较低的状态/动作上，除非 η 超过某个阈值，从而确保这些状态/动作在所有时间上的连通性。这一关键点源于马尔可夫约束：

$$\sum_{a \in A} x_{(t+1)sa} = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A} x_{tka} p_{tks}(a), \quad \forall t, \forall s.$$

我们将阈值 η 下允许的状态/动作候选集合定义为：

$$S_\eta = \{(t, s, a) : c_{tsa} \leq \eta\}.$$

我们可以称之为 η-安全集合，因为它是成本不超过 η 的状态–动作对集合。然后我们定义 η^*：

$$\eta^* = \min\{\eta : \exists x_{tsa} \geq 0 \text{ feasible under Markov constraints, with } x_{tsa} = 0 \text{ if } c_{tsa} > \eta\}.$$

显然，对于所有 $\eta \geq \eta^*$，集合 S_η 包含集合 S_{η^*}，从而确保至少存在一个平稳可行解，进而得到：

$$f^*(\eta) = \eta, \quad \forall \eta \geq \eta^*.$$

反之，对于 $\eta < \eta^*$，不存在支撑集仅包含于 S_η 的可行解（根据 η^* 的最小性定义）。因此，在 η^* 以下，目标函数 $f^*(\eta)$ 必须严格大于 η。因此，η^* 恰好标示了最优目标值在 η 中从非线性行为转变为线性行为的阈值，从而完成证明。

□

如图 2（左）所示，从 $\eta = 1.8$ 开始，$f^*(\eta)$ 等于 η。这意味着超过这一点后，马尔可夫条件限制已得到满足，继续增大 η 不会改善目标函数。因此，$f^*(\eta)$ 的最小值必定出现在阈值 $f^*(\eta) = \eta$ 处或之前。这使我们能够缩小候选唯一 c_{tsa} 值的集合。因此，我们只需测试从 $\min c_{tsa}$ 到第一个满足 $f^*(\eta) = \eta$ 的 c_{tsa} 之间的 η 值。这显著降低了计算负担。基于这一结果，我们提出算法 1。利用该算法，我们可以高效地求得 MDPBL (6) 的全局最优解。

算法 1 寻找最优 η

```
f*, η* ← ∞, 非数值
对于所有 η ← sort(unique(c))执行
    f ← f*(η)                                   ▷ Solve (12)
    如果 f < f* 则
        f*, η* ← f, η                           ▷ 记录新的候选项
    结束如果
    如果 f = η则
        跳出                                    ▷ 进入线性增长区间
    结束如果
结束循环
返回 η*                                         ▷ 全局极小值点
```

4. 数值结果

4.1. 海上风电的火电备用

为了评估在基准模型中纳入条件风险价值（CVaR）的影响，我们以火电备用示例为例，将由此产生的风险厌恶策略与基准风险中性计划进行比较。图3展示了风险中性运行计划与采用不同风险厌恶程度的模型生成的计划之间的差异。增加 β意味着增加发电量，以避免发生成本高昂但概率较低的结果。表4 列出了海上风能应用中火电备用在 17 年模拟期间的需求削减总量和系统总成本。结果表明，风险厌恶程度提高（β）会减少需求削减，但代价是运营成本增加。不出所料，较大的 β 能够避免最坏情况结果，从而促使采取更保守的行动。在本例中，需求削减总量下降，而系统总成本上升。

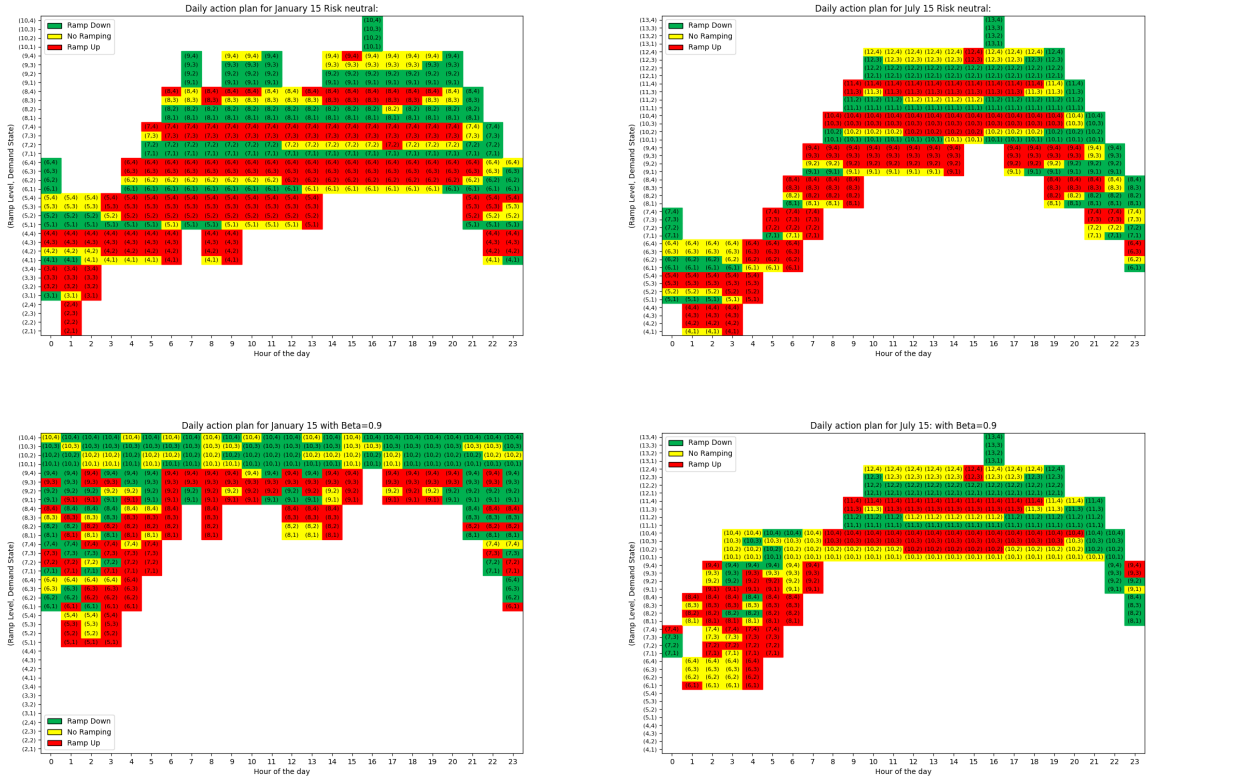


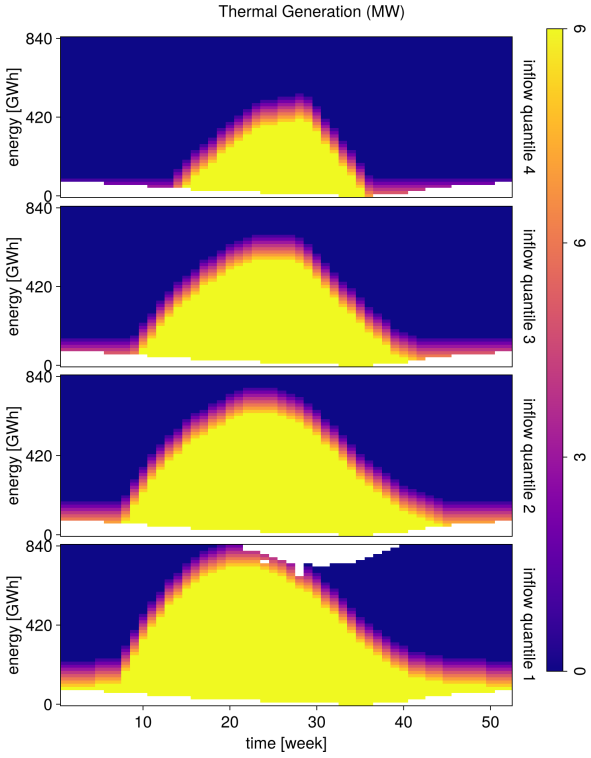
图3：冬季和夏季典型日的火力发电行动计划（每小时爬坡决策）。列分别显示1月15日（左）和7月15日（右）；行分别显示风险中性策略（上）和风险规避策略（下），其中 $\beta = 0.9$。颜色表示所选行动：降低出力（绿色）、不调整出力（黄色）和提高出力（红色）。

4.2. 水电水库管理

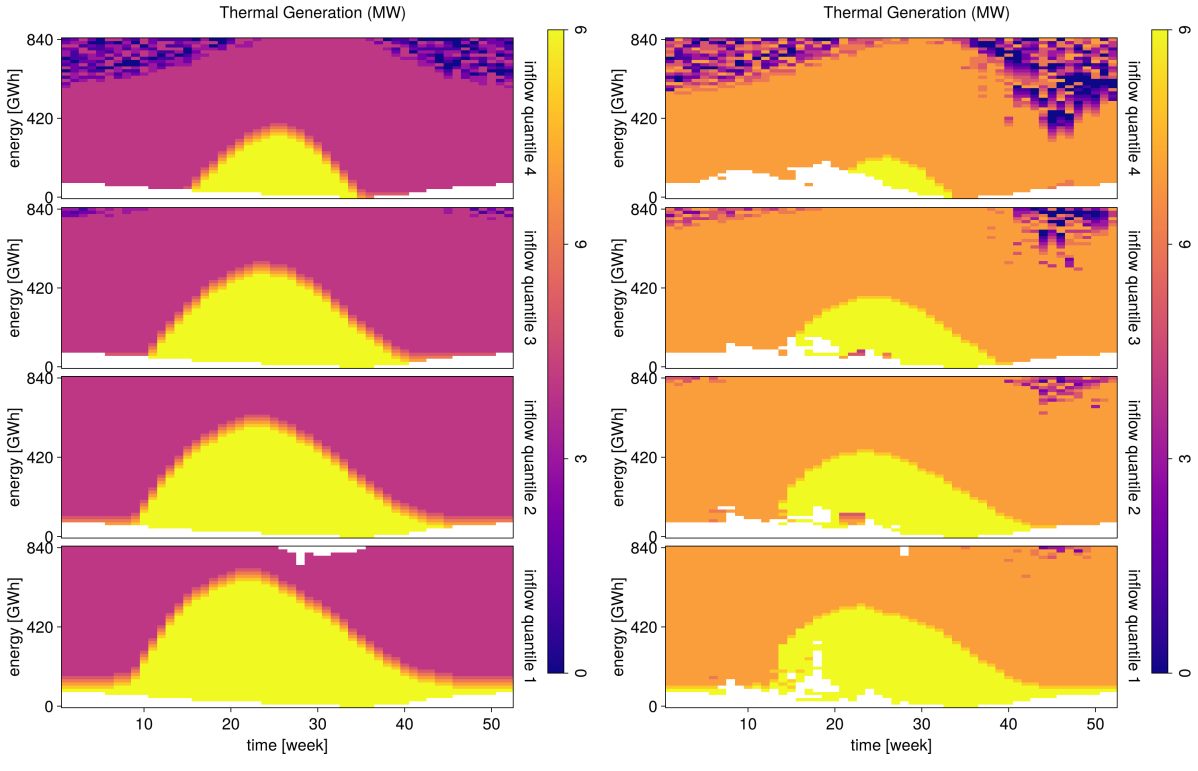
图4a–4c 展示了风险中性版本的最优运行策略，以及 $\beta \in \{0。5，0。9\}$各状态下相应的火力发电量——在假设的固定负荷中，这与水力发电量互为补数。时间t 沿横轴变化；状态r 沿各绘图区变化，水库水位l 则沿各绘图区的纵轴变化。

对于怀塔基集水区，最大的季节性流入量通常出现在夏季（12月至2月），而冬季（6月至8月）的流入量最低（Pritchard，2015年；Zheng & Thompson，2007年）。

每个面板下缘可见的未着色（White）区域表示，遵循相应的运行策略时不会 访问的状态。对于每个风险水平 β，图中都显现出若干趋势：



(a) 风险中性



(b) $\beta = 0.5$

(c) $\beta = 0.9$

图4：针对每种入流状况$r \in \{1, \ldots, 4\}$.，随t时间和储能水平1变化的最优水库运行策略，以满足固定负荷所需的火力发电量（兆瓦）表示（即水力发电量的补量）。分图：(a) 风险中性，(b) $\beta = 0.5$，(c) $\beta = 0.9$。

- 随着 l 增大（水情变湿），火力发电量减少。
- 在（干旱的）中间月份，湖泊水位较低时，火力发电持续的时段更长：每个面板底部的黄色区域大致以干旱的（冬季）月份为中心；随着入流状况趋于r高入流状态，其宽度和高度逐渐减小。
- 随着风险厌恶程度提高，在较高储能水平下，火力发电增加（水力发电减少）β。

另外两个特点或许不那么直观：

- 从部分水力发电过渡到完全不发电（沿任意垂直截面观察）时，随着 β 增大，过渡会越来越陡峭。
- 两种风险厌恶策略在高入流状态$r = 4$的高湖泊水位下，都显现出明显的“摇摆不定”；在湿润月份（例如十一月至二月）尤为如此，表现为一种“拼布”模式：状态（t,l）的微小变化可能导致水电与火电的分配发生巨大变化。这表明，随着 β 增大，线性规划的数值条件数也会增大。

5. 带线性约束的机会约束

本节探讨电网运营商可以采用的几种提高电网可靠性的方法。我们将仅关注离岸风能模型的火电备用，示例和结果也仅针对这一应用。每种方法都可以作为第3节中基于CVaR的方法的替代方案。这些变异具有相似的底层概念，因为每种方法都会在我们的主要公式MD- PLP（2）中引入额外的线性约束，以应对特定的可靠性问题。这些变异保持线性规划结构，因此仍然易于求解。在其中一些变异中，必须扩展状态空间以纳入额外信息，但总体MDP结构保持不变。在详细介绍这些变异之前，我们注意到，将这些约束添加到主要问题后得到的最优决策仍将保持确定性，而不是随机化，这一点已在命题5中得到强调。

命题5。 当MDPLP（2）通过本节介绍的任何线性约束进行扩展时，通过求解该问题得到的某个最优策略仍然是确定性的，而不是随机化的。

5.1. 变体 *1*：对平均削减需求量的限制

我们可以对特定时间范围内（例如单日或全年）的平均电力需求削减量设定限制。当电网运营商希望通过需求响应计划管理过剩需求时，这种方法尤其有用。由于这些计划的可用容量已知，运营商可以有策略地限制平均削减量，确保未得到满足的需求仅占可控的一部分。

- **日约束：** 对每天 n 的平均需求削减量的限制：

$$\sum_{t=(24n-23)}^{24n} \sum_{s\in S} \sum_{a\in A} \mathrm{CD}_{ts} \cdot x_{tsa} \le \tau_{day} \text{ for } n = 1, \ldots, 365; \tag{14}$$

- **年度约束：** 限制全年平均需求削减：

$$\sum_{t=1}^{|T|=8760} \sum_{s\in S} \sum_{a\in A} \mathrm{CD}_{ts} \cdot x_{tsa} \le \tau_{year}; \tag{15}$$

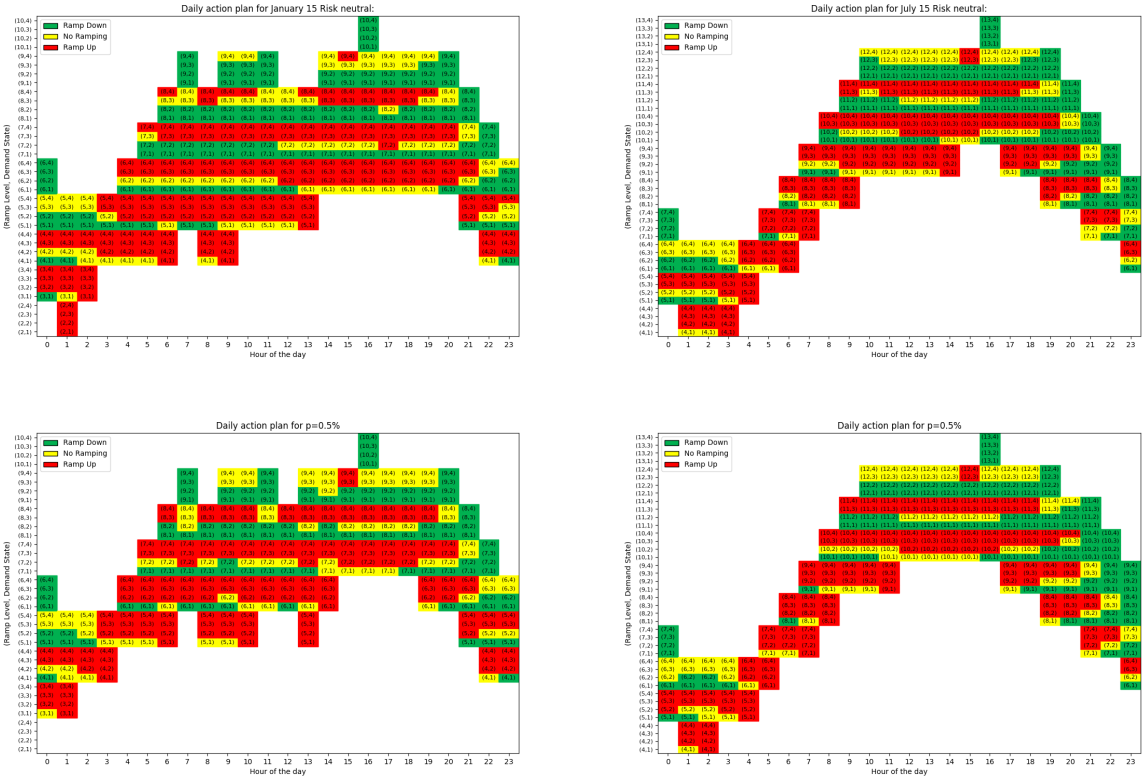


图5：年度上限对平均需求削减的影响（变体 1）。1月15日（左）和7月15日（右）的每日行动计划。顶行显示基准情景（无约束）的风险中性策略，底行则通过 $\tau_{\text{year}} = 43.8$ 吉瓦强制执行年度削减约束，从而限制全年未满足需求的平均量。

图 5 展示了采用年度约束且限值为 $\tau = 43.8$ 吉瓦时，这种变异所产生的行动计划。如图所示，对平均削减需求施加约束会使运行决策更加保守。表 4详细比较了仿真结果，重点说明这种变异对系统总成本和削减需求的影响。

5.2. 变体 *2*：对处于削减状态的概率的限制

另一种风险厌恶方法是限制系统进入与需求削减相关状态的概率。该概率约束可应用于特定日期或全年。为实现这一点，我们首先定义一个二元参数 e_t，用于指示在时间 t 是否发生削减。

- $e_t = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{CD}_{ts} > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \forall t \in T, \quad \forall (\ell, r) \in S$
- $s = (\ell, r, e_t)$ state of MDP

由于 e_t 是参数而非决策变量，将其纳入形式化表述不会改变问题的线性性质。根据所需的时间范围，可以使用以下约束来限制削减的频率。

- **日约束：** 对每一天 n 的需求削减日均概率的限制：

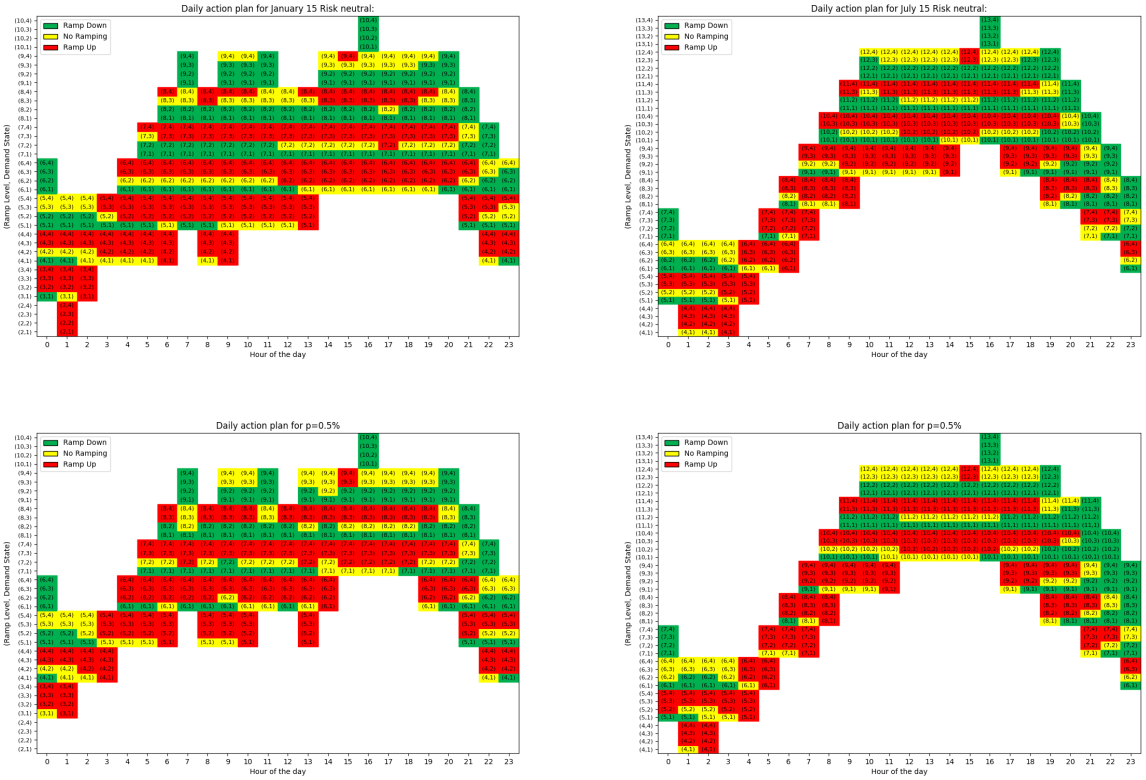


图 6：年度上限对削减概率的影响（变体 2）。1月15日（左）和7月15日（右）的每日行动计划。上排显示基准情景（无约束）的风险中性策略，下排则实施年度削减状态概率约束 (17)，将发生削减的小时数占比限制为 ($\mathcal{P}_{\text{year}} = 0.5\%$)

$$\frac{1}{24}\sum_{t=(24\cdot n-23)}^{24\cdot n}\sum_{s=(\ell,r,e=1)\in S}\sum_{a\in A} x_{tsa} \le \mathcal{P}_{day} \text{ for } n = 1,\dots,365; \tag{16}$$

- **年度约束：** 对全年需求削减平均概率的限制：

$$\frac{1}{|T|}\sum_{t=1}^{|T|=8760}\sum_{s=(\ell,r,e=1)\in S}\sum_{a\in A} x_{tsa} \le \mathcal{P}_{year}; \tag{17}$$

图 6将这一变体与时变计划的原始计划进行了比较。表4详细呈现了仿真结果的比较，重点展示削减约束对系统成本和削减需求的影响。

5.3. 变体*3*：对连续削减需求概率的限制

在现实电网中，电力需求削减若只持续一个小时，即使导致暂时停电，也可能被视为小问题。

尽管这种情况并不理想，人们仍可依靠电池完成必要的任务，继续日常活动。然而，电力需求削减若持续超过一个小时，情况就会严重得多，尤其是连续发生时。电网运营商可以通过需求响应计划较容易地应对持续一小时的负荷削减，但连续削减会大大增加长时间停电的风险。

此外，如果连续发生，这些情况会扰乱人们的日常生活，从住宅供暖和制冷到用冰箱保存食物，并且对脆弱群体尤其有害。这可能导致食物变质和不安全的居住环境。医院和其他设施还必须使用发电机等备用系统来维持关键系统运行；当停电持续超过一个连续小时，就会危及人们的生命。最后，此类停电持续发生会加剧个人和社区的心理压力。

为应对这些挑战，我们重新设计了原有的马尔可夫决策过程状态，以提供一种限制连续电力需求削减的方法。

令z表示截至目前连续削减时段的数量，因此

- $z_t = \begin{cases} min(z_{t-1}+1, n) & \text{若在时间} t \text{发生削减；否则为 } 0 \end{cases}$

- n = 要限制的连续需求削减次数

- $s = (l, r, z_t)$ 马尔可夫决策过程的状态

- **年度约束：** 限制全年连续削减需求达到n 个或以上时段：

$$\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\sum_{(\ell,r,z_t\geq n)\in S}\sum_{a\in A} x_{tsa} \leq \mathcal{P}_{year} \tag{18}$$

例如，我们可以通过在相应约束中设置 $\mathcal{P} = 0$ 来防止电力需求连续削减两个或以上、或三个或以上小时。图7 展示了四种情景下的行动计划：一种是不允许需求削减的情景；两种分别限制连续削减不得达到两个和三个小时的情景；以及一种没有削减约束的基准情景。需要注意的是，在现有配置的 13 台联合循环燃气轮机下，全年完全不允许削减的情景不可行；要实现可行性，需要增加一台联合循环燃气轮机。表4 比较了各情景下系统的需求削减总量和相关总成本。

5.4. 变体*4*：成本函数中对连续需求削减的惩罚项

与其对电力需求的连续削减实施硬约束，另一种方法是将对连续削减的惩罚项直接纳入成本函数。这一惩罚项应当关于连续削减时段的数量呈凸性。不同于前几种变异——它们向主要框架引入了额外约束——该变异改变了与每个状态相关的即时成本。不过，将其纳入本节仍然是有意义的，因为它同样有助于实现限制连续需求削减这一目标。

这是通过引入惩罚项$c_3(z)$实现的，该惩罚项会加到每个状态的基础成本上，并随着连续削减次数z的增加而增大。这提供了一种灵活的权衡方式。在这种形式化表述下，系统偶尔可以允许连续削减，但会通过产生额外惩罚来抑制这种情况。反映这一方法的线性规划如下。

$$\text{new } c_{tsa} = \text{old } c_{tsa} + c_3(z_t)$$

此外，也可以结合这两种方法，既设置削减惩罚项，又对削减施加硬约束。

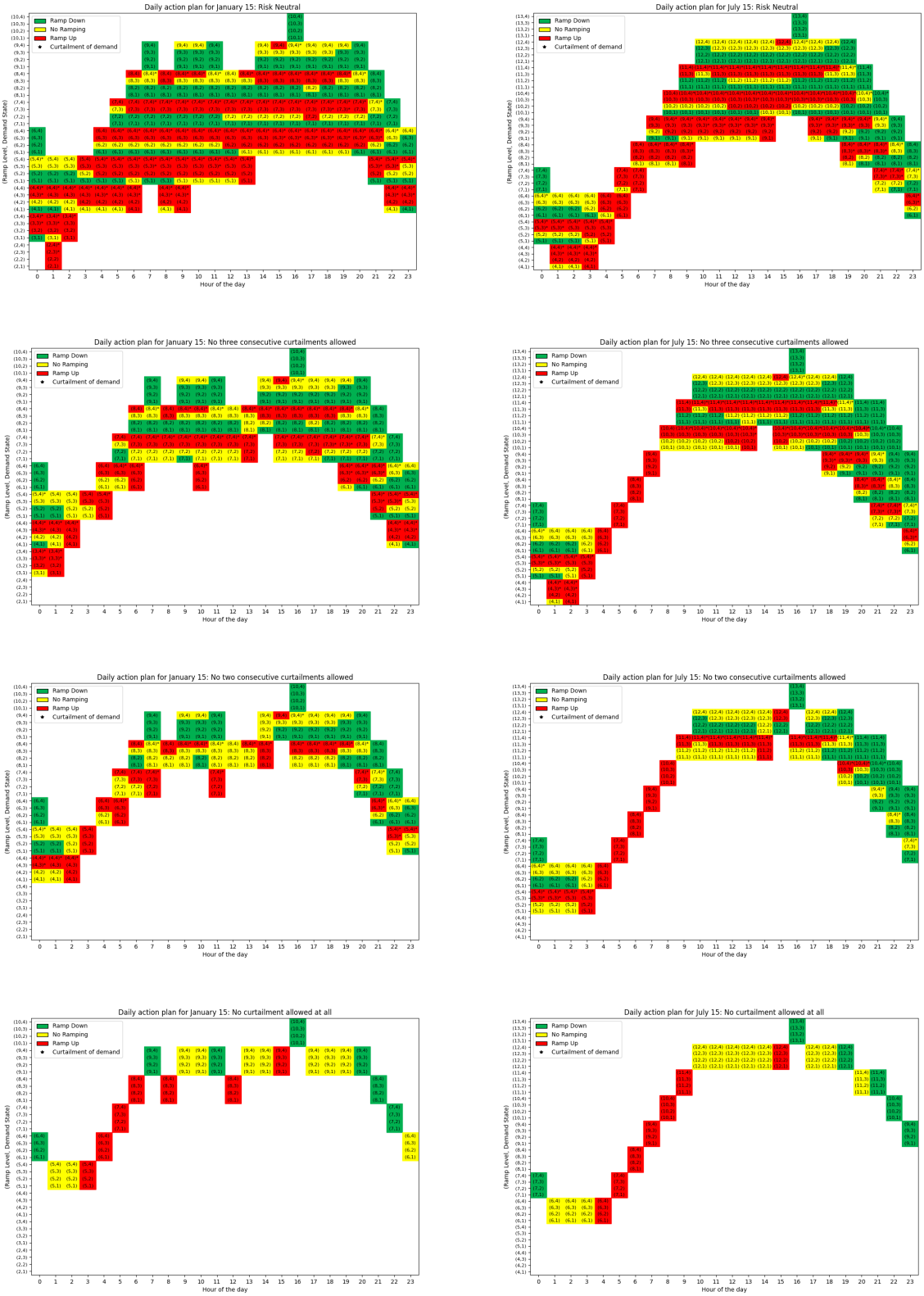


图7：限制连续需求削减的影响（变体3）。四种情景下1月15日（左）和7月15日（右）的每日行动计划（从上到下）：基准情景（无连续削减约束）、不允许连续削减三个小时、不允许连续削减两个小时，以及完全不允许削减。

表4：条件风险价值方法和机会约束变体与风险中性方法的综合比较

Year	基准线性规划：风险中性		条件风险价值：Beta = 0.9		条件风险价值：Beta = 0.99		变体 1：τ = 43.8		变体 2：$\mathcal{P}$ = 0.005		变体 3：3 次机会约束 NA		变体 3：2 次机会约束 NA	
	CD	Cost	CD	Cost	CD	Cost	CD	Cost	CD	Cost	CD	Cost	CD	Cost
2006	710	12,607	485	13,757	202	16,015	581	12,655	574	12,551	673	12,722	617	12,887
2007	178	3,696	73	4,096	13	4,798	125	3,707	125	3,668	156	3,731	133	3,805
2008	453	10,095	259	10,919	73	12,703	362	10,179	359	10,122	425	10,180	383	10,336
2009	248	10,089	167	11,522	65	14,021	192	10,422	194	10,300	242	10,288	203	10,553
2010	645	14,489	437	16,179	223	19,255	538	14,746	521	14,599	614	14,694	556	14,991
2011	267	8,257	168	9,045	72	10,967	203	8,358	212	8,310	247	8,317	215	8,430
2012	387	12,010	246	13,259	94	16,082	318	12,247	322	12,177	374	12,155	345	12,412
2013	378	11,157	253	12,391	149	14,993	297	11,387	300	11,284	352	11,274	319	11,522
2015	49	3,508	17	4,321	0	5,410	28	3,622	30	3,618	37	3,592	25	3,710
2016	274	13,245	173	15,309	49	18,671	217	13,687	217	13,564	256	13,501	226	13,909
2017	148	11,724	70	13,871	11	17,240	96	12,183	102	12,062	128	11,956	107	12,389
2018	296	13,181	202	15,374	105	18,773	236	13,667	237	13,515	282	13,470	256	13,912
2019	113	12,576	41	14,792	16	18,419	65	13,115	67	12,969	100	12,836	68	13,271
2020	105	11,948	44	14,104	29	17,449	64	12,461	61	12,324	82	12,163	65	12,611
2021	1,749	16,151	170	14,884	25	18,160	665	14,001	1,009	14,721	1,396	15,549	513	13,917
2022	997	14,144	86	14,959	6	18,522	276	13,110	454	13,319	765	13,918	222	13,325
2023	493	8,213	37	8,748	0	10,932	109	7,724	212	7,792	360	8,059	77	7,807
总计	**7,490**	**187,090**	**2,928**	**207,530**	**1,132**	**252,410**	**4,372**	**187,271**	**4,996**	**186,895**	**6,489**	**188,405**	**4,330**	**189,787**

缩写：变体：变异，CD：削减需求（单位：吉瓦），成本：规划期内的运行总成本。基准线性规划：风险中性基准多阶段随机线性规划 (2)，以期望成本最小化。Beta：条件风险价值置信水平；用于对冲成本分布中最差的 $(1-\beta)$ 尾部。β 越高，风险厌恶程度越强。变体 1：多阶段随机线性规划 (2)，其中 $\tau = 43.8$ 吉瓦为年度平均削减需求上限。变体 2：多阶段随机线性规划 (2)，其概率削减限制为 $\mathcal{P}_{year} = 0.005$，如式 (17) 所示。变体 3：多阶段随机线性规划 (2)，禁止连续削减电力需求，具体如下：3 次机会约束 NA：不允许连续削减三次或更多次。2 次机会约束 NA：不允许连续削减两次或更多次。由于数据不可比较，因此省略 2014年。

施加机会约束会系统性地使行动计划趋于更保守的运行方式，在关键时段更早启动爬坡，并减少持续降坡时段。这些模式与表 4中的成本—削减比较一致。

致谢

本材料基于美国能源部能源效率与可再生能源办公室（EERE）风能技术办公室（WETO）授奖编号 DE-EE0011269、马萨诸塞州清洁能源中心和马里兰州能源管理局支持开展的工作。本文所表达的观点不一定代表美国能源部、美国政府、马萨诸塞州清洁能源中心或马里兰州能源管理局的观点。

参考文献

Ahmadi, M., Rosolia, U., Ingham, M. D., Murray, R. M., & Ames, A. D.（2021年）。《受约束风险规避马尔可夫决策过程》。AAAI人工智能会议论文集，第35卷，11718–11725。https://doi.org/10.1609/aaai.v35i13.17393 Akbari, P. & MacKenzie, C. A.（2025年）。优化资源分配，以减轻国土安全和应急管理中颠覆性事件的风险。arXiv预印本 arXiv:2504.02652。https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.02652 Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D.（1999年）。相干风险度量。《数理金融》，9(3)，203–228。https://doi.org/ 10.1111/1467-9965.00068 Bakhtiari, H., Zhong, J., & Alvarez, M.（2022年）。独立式可再生能源微电网风险规避规划与运行的不确定性建模方法。《可再生能源》，199，866–880。https://doi.org/10.1016/j.renene.2022.09.038 Bertsekas, D. P.（2017年）。《动态规划与最优控制》（第4版），第1卷。Athena Scientific。http://www.athenasc.com/ dpbook.html Bäuerle, N. & Glauner, A.（2021年）。将谱风险度量应用于马尔可夫决策过程的最小化。《运筹学数学方法》，94(1)，35–69。https://doi.org/10.1007/s00186-021-00746-w Chow, Y. & Ghavamzadeh, M.（2014年）。马尔可夫决策过程中CVaR优化的算法。《神经信息处理系统进展》，第27卷。https://dl.acm.org/doi/10.5555/2969033.2969218 Farhang, M. & Jalali, H. H.（2025年）。采用随机壁厚损失建模，评估走滑断层活动下腐蚀埋地管道的性能。《土动力学与地震工程》，199，109697。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2025.109697 美国联邦能源管理委员会（2021年）。714号表格：年度电力平衡主管区域和规划区域报告。https://www.ferc.gov/industries-data/electric/general-information/electric-industry-forms/form-no-714-annual-electric/data。此页面最后更新于2021年12月23日；访问于2025年5月。Gaertner, E. 等（2020年）。国际能源署15兆瓦海上参考风力涡轮机的定义。技术报告 NREL/TP-5000-75698，美国国家可再生能源实验室。https://www.nrel.gov/docs/fy20osti/75698.pdf Ghadimi, S. & Powell, W. B.（2024年）。用于参数化成本函数近似的随机搜索：基于滚动预测的储能。《欧洲运筹学杂志》，312(2)，641–652。https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.08.003 Hans, C. A., Sopasakis, P., Raisch, J., Reincke-Collon, C., & Patrinos, P.（2020年）。孤岛微电网的风险规避模型预测运行控制。《IEEE控制系统技术汇刊》，28(6)，2136–2151。https://doi.org/10.1109/TCST.2019.2943565 Hillier, F. S. & Lieberman, G. J.（2021年）。《运筹学导论》（第11版）。麦格劳-希尔教育。https://www.mheducation.com/highered/product/introduction-operations-research-hillier-lieberman/M9781260586930.html Howard, R. A. & Matheson, J. E.（1972年）。风险敏感马尔可夫决策过程。《管理科学》，18(7)，356–369。https://doi.org/10.1287/mnsc.18.7.356 Khojaste, A., Pearce, J., Zakeri, G., & Sang, Y.（2025年）。考虑电价的数据中心冷却调度。https://doi.org/10.48550/ arXiv.2508.03160 Khojaste, A., Pritchard, G., & Zakeri, G.（2024年）。用于不确定性下决策的分位数傅里叶回归。《运筹学年鉴》。https://doi.org/10.1007/s10479-024-06306-9 Koenker, R.（2005年）。《分位数回归》。剑桥大学出版社。https://doi.org/10.1017/CBO9780511754098 Lara, J. D., Dowson, O., Doubleday, K., Hodge, B. M., & Callaway, D. S.（2022年）。采用可再生电力马尔可夫表示的多阶段随机风险评估。《IEEE可持续能源汇刊》，13(1)，414–426。https://doi.org/10.1109/TSTE.2021. 3115801 Le Thi, H. A. & Pham Dinh, T.（2018年）。DC规划与DCA：三十年的发展。《数学规划》，169(1)，5–68。https://doi.org/10.1007/s10107-018-1235-y Lobo, M. S., Vandenberghe, L., Boyd, S., & Lebret, H.（1998年）。二阶锥规划的应用。《线性代数及其应用》，284(1)，193–228。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10032-0 MacKenzie, C., Akbari, P., Gabriel, M., Nur, G. N., & Wall, K.（2024年）。艾奥瓦州新兴威胁分析：为定量风险评估奠定基础。技术报告，艾奥瓦州立大学。Mollaei Khass, A., Liu, G., Pandey, V., Jiang, W., Lei, B., Daniilidis, K., & Motee, N.（2025年）。面向风险规避路径规划的主动式下一最佳视点优化。arXiv预印本。https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.06481 Mortimer, T. & Mieth, R.（2024年）。在能源受限和随机能源系统中利用滚动预测管理风险。2024年第56届北美电力研讨会（NAPS），1–6。https://doi.org/10.1109/NAPS61145.2024.10741683 Nasr, M. A., Nasr-Azadani, E., Rabiee, A., & Hosseinian, S. H.（2019年）。基于信息间隙决策理论、考虑发电与需求不确定性的孤立微电网风险规避型能源管理系统。《IET可再生电力》，13(6)，940–951。https: //doi.org/10.1049/iet-rpg.2018.5856 美国国家海洋和大气管理局（2025年）。44025号站——长岛艾斯利普以南30海里，纽约州。https://www.ndbc.noaa. gov/station_page.php?station=44025。访问于2025年5月。Ning, C. & You, F.（2021年）。受约束线性不确定系统的基于在线学习的风险规避随机模型预测控制。《Automatica》，125，109402。https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109402 Pearce, J., Khojaste, A., Zakeri, G., & Pritchard, G.（2025年）。基准水力发电报价曲线。https://doi.org/10.48550/arXiv. 2508.04854 Pham Dinh, T. & Le Thi, H. A.（1997年）。DC规划的凸分析方法：理论、算法与应用。《越南数学学报》，22(1)，289–355。https://journals.math.ac.vn/acta/pdf/9701289.pdf Pritchard, G.（2015年）。水电调度问题的随机来水建模。《欧洲运筹学杂志》，246(2)，496–504。https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.05.022 Puterman, M. L.（2005年）。《马尔可夫决策过程：离散随机动态规划》。威利概率与统计丛书。约翰·威立父子出版公司。https://doi.org/10.1002/9780470316887

Rockafellar, R. T. & Uryasev, S.（2000年）。条件风险价值优化。风险期刊，2，21–42。https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038Saghezchi, A., Kashani, V. G., & Ghodratizadeh, F.（2024年）。规模化企业金融资源分配的综合优化方法。商业与管理研究期刊，6(6)，62–75。https://doi.org/https://doi.org/10.32996/jbms.2024.6.6.5 Shojaeighadikolaei, F., Xu, S., & Paarporn, K.（2025年）。利用不确定传感器信号优化预防性与反应性防御资源分配。arXiv预印本。https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.02881。获准在第61届阿勒顿通信、控制与计算会议上作报告 Sobhani, Z., Gharegozlu, M., Lin, J., & Farughi, H.（2025年）。采用扩展框图法评估含相关部件的多状态系统可靠性。*IISE*年度会议论文集，1–6。Sobhani, Z. & Shahrokhi, M.（2019年）。采用马尔可夫链方法优化多状态工业系统的可用度。工业管理期刊，11(3)，380–404。Stenclik, D.（2024年）。能源转型的新资源充裕性标准：推动可靠性要求现代化。技术报告 NREL/SR- 6A40-89334，美国国家可再生能源实验室（NREL）。https://doi.org/10.2172/2372882 Stenclik, D., Bloom, A., & Cole, W.（2021年）。量化不确定未来的风险：资源充裕性的发展。*IEEE*电力与能源杂志，19(6)，29–36。https://doi.org/10.1109/MPE.2021.3104076 Suresh, R., Akbari, P., & MacKenzie, C. A.（2024年）。运用价值聚焦思维衡量社区韧性。*arXiv*预印本 *arXiv:2408.00901*。https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.00901 White, D. J.（1993年）。《马尔可夫决策过程》。Wiley。Yankson, S., Ullah, S. S., Ebrahimi, S., Ferdowsi, F., Ritter, K. A., & Chambers, T.（2023年）。促进韧性的负荷灵活性与微电网资源充裕性投资。*2023*年*IEEE*德克萨斯电力与能源会议（*TPEC*），1–6。https://doi.org/10.1109/TPEC56611.2023.10078500Zeigham, M., Amani, S., & Majidifard, H.（2025年）。项目层级低交通量道路基于风险的路面养护策略开发。SSRN。可在SSRN 5749022查阅。Zheng, X. & Thompson, C. S.（2007年）。新西兰怀塔基河上游流域降水仿真及其与太平洋年代际振荡的关系：年际和季节内变率。水文学杂志，339(3)，105–117。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2006.12.020