arXiv:2601.02208v1 [math.AP] 5 Jan 2026

$\mathbb{R}^3$上 Nernst-Planck-Darcy 系统的长时间动力学

Elie Abdo、Joe Germany、Mohammad Khalil Hamdan 和 Kifah Kontar

摘要。我们研究由 Nernst–Planck方程描述的离子电扩散，该方程刻画了 N 种离子在穿过多孔介质的三维不可压缩流体中的演化。我们研究由此得到的系统在三维全空间 $\mathbb{R}^3$中的长时间动力学。我们证明，每种离子浓度的 k阶空间导数在 L^2中以 $t^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}$量级的锐利速率衰减至零。此外，我们考察与该模型相关的相对熵的行为，并证明其随时间发散，且锐利增长速率为 $\log t$量级。

1. 引言

我们研究一种电扩散模型，该模型描述离子输运、流体运动与自洽静电相互作用之间的耦合动力学。带正电和带负电的离子在浓度梯度、流体运动所产生的平流以及离子电荷分布产生的电场共同作用下迁移。这些耦合机制是物理学、化学和生物学中广泛现象的核心，包括电动流、离子通道和带电多孔介质。特别是，这些机制在神经科学 [6, 19, 22, 26, 28, 29, 30, 31],半导体理论 [5, 12, 27], 水净化、海水淡化和离子分离 [13, 23, 25, 35, 36]以及选择性离子膜 [10, 14]等领域已得到广泛研究。

这类电扩散模型由 Nernst–Planck 方程描述，该方程支配由 N 种离子种类构成的系统的演化，其浓度为 c_1、.....、 c_N。每种离子的演化遵循

$$(\partial_t + u\cdot\nabla)c_i = D_i \operatorname{div}\big(\nabla c_i + z_i c_i \nabla\phi\big), \qquad i = 1,\dots,N. \tag{1}$$

这里， $c_i(x,\ t)$ 表示位置 x 、时间 t 时第 i 种离子的浓度。正定常数 D_i 表示扩散系数，而 $z_i \in \mathbb{R}$ 表示离子价态。输运不仅由扩散以及速度场 u 引起的平流驱动，也由电势 ϕ 诱导的静电漂移驱动。

电势 ϕ 由泊松方程自洽地确定:

$$-\epsilon\Delta\phi = \rho := \sum_{i=1}^{N} z_i c_i, \tag{2}$$

whe其中 ρ 为总离子电荷密度。电势 ϕ 为无量纲形式

$$\phi = \frac{e}{K_\beta T_k}\,\Psi \tag{3}$$

物理电势 Ψ。其中， e 表示元电荷， K_β 表示玻尔兹曼常数，T_k 表示绝对温度。介电参数

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E} K_\beta T_k}{e^2} = c_0\left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2\right)\lambda_D^2 \tag{4}$$

日期：2026年1月6日。关键词和短语。电扩散、Nernst-Planck 方程、达西定律、多孔介质、长时间行为、熵。
MSC 分类：*35K57*、*35B40*、*35Q92*。

取决于溶剂的介电常数 $\mathrm{E} > 0$ 、参考体相浓度 $c_0 > 0$以及德拜屏蔽长度

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\mathcal{E} K_\beta T_k}{c_0 e^2 \sum_{i=1}^{N} z_i^2}}. \tag{5}$$

关于离子电扩散基本物理原理的全面讨论，可参见[32]。

离子动力学与周围流体的运动相耦合。如果后者具有黏性，其速度场 u 满足不可压缩纳维–斯托克斯方程

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = -K_\beta T_k \rho \nabla \phi, \tag{6}$$

以及不可压缩约束

$$\nabla \cdot u = 0. \tag{7}$$

这里， p 表示压力， $\nu > 0$ 表示运动黏度。洛伦兹型力项 $-K_\beta T_k \rho \nabla \phi$体现了静电场对流体运动的反馈作用，从而形成完全耦合的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯（NPNS）系统。

能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯（NPNS）系统在数学文献中已被广泛研究，作为离子电扩散与不可压缩流体流动之间非线性耦合的典型模型。早期研究确立了整体弱解和局部强解的存在性，强调了输运、扩散与静电力之间的相互作用 [11, 20, 34]。随后，研究人员考察了解的正则性、唯一性和长时间行为，通常依赖于该系统固有的熵方法和能量耗散结构 [7, 33]。之后的分析进一步拓展到多组分情形、各种边界条件以及电荷中性约束的作用 [8, 24]。近期研究则聚焦于平衡态附近的渐近稳定性、衰减率以及增强的正则性性质，包括解析性和平滑效应 [1, 2, 3, 9]。

在本研究中，我们关注多孔介质中的电扩散。在这种情形下，流体运动不再由纳维–斯托克斯方程支配，而是由达西定律描述。在此机制下，速度场 u由下式给出

$$u = -\kappa\big(\nabla p + K_\beta T_k \rho \nabla \phi\big), \tag{8}$$

其中， $\kappa > 0$表示多孔介质的渗透率， p表示压力。由此得到的系统称为能斯特–普朗克–达西（NPD）系统。与 NPNS 系统相比，由于速度 u对静电力的依赖更具奇异性，NPD 模型面临额外的分析挑战。这种奇异耦合加剧了 Nernst–Planck方程的非线性和非局部性，大大增加了数学分析的难度。

早期关于能斯特–普朗克–达西类型系统的数学研究，主要关注与多孔介质流动耦合的漂移–扩散模型，并建立了整体弱解和基本的能量耗散机制[15, 16, 17]。在周期情形下，文献 [18], 研究了环面上含两种离子的情形，证明无需小性假设即可获得整体适定性和光滑性，其依据是静电耦合的特殊代数结构。近期，文献 [4]将这一理论扩展至三维环面上的系统，其中含有任意数量的离子种类，且扩散系数均相同，并满足周期边界条件。在这一多组分周期框架下，研究建立了整体存在性、唯一性以及渐近收敛至平衡态，并给出了衰减估计。

本文研究具有无穷远衰减的 $\mathbb{R}^3$ 上、含有 N 种扩散系数相同 $D_1 = \cdots = D_N = D$ 且绝对价数相同 $|z_1| = \cdots = |z_N| = z$ 的离子种类的 NPD系统长时间动力学。由于物理常数 ϵ， κ， K_β，和 T_k 对问题的分析没有任何影响，为简便起见，我们假设 $\epsilon = \kappa = K_\beta T_k = 1$ ，并得到以下偏微分方程组

微分方程

$$\partial_t c_i + u \cdot \nabla c_i - D_i \Delta c_i - z_i D_i \nabla \cdot (c_i \nabla \phi) = 0 \tag{9}$$

$$u + \nabla p = -\rho \nabla \phi \tag{10}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{11}$$

$$-\Delta \phi = \rho. \tag{12}$$

我们首先证明，每种离子浓度的 k 阶导数的 L^2 范数随时间衰减，且其精确衰减率为 $t^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}$ 阶。主要困难源于模型的非线性和非局部结构，这些结构由平流项和电迁移项产生。我们证明，这些非线性不会影响解的渐近衰减率；具体而言，每种浓度都以与线性齐次三维热方程解相同的速率衰减。证明依赖于傅里叶分裂方法、自举论证以及非线性和非局部分析。

此外，我们还研究了该模型相关的熵结构。随着扩散使离子分布到越来越大的空间区域，其浓度变得非常低，从而导致熵增长。我们证明，每种离子的相对熵

$$\mathcal{E}_i(t) = \int_{\mathbb{R}^3} c_i \log c_i \, dx,$$

以 $t \to \infty$ 为极限发散，且增长速率的阶为 $\log t$，并且该速率是尖锐的。这一论证新颖且极具挑战性。为得到上界，我们研究量 $N_i = e^{-c\mathcal{E}_i}$ （其中 c经过适当选取）的演化，并证明 $\mathbb{R}^3$ 上的索ոբ列夫对数不等式，从而推出 N_i 随时间线性有下界。由此可得 –E关于时间的对数型下界。另一方面，我们证明总相对熵 $\mathrm{E}(t) = \sum_i \mathrm{E}_i(t)$ 满足

$$-\mathcal{E}(t) \le C \log\left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)^6 c_i^2 \, dx \right),$$

这促使我们研究解的多项式矩。在这方面，我们证明 $\||x|^3 c_i\|_{L^2}^2$ 的渐近增长阶为 $t^{\frac{5}{2}}$，并得到 –E关于时间的对数型上界。最后，我们证明

$$\lim_{t\to\infty} \left| \int_{\{|x|\le A\}} c_i \log c_i \, dx \right| = 0,$$

对于任意 $A > 0$ 以及任意 $i \in \{1, \dots, N\}$。这表明，随着时间趋于无穷，任意固定有界区域内相对熵的贡献都会消失。尽管总熵随时间呈对数增长，但这种增长并非源自区域的核心部分。相反，从熵的意义上说，离子浓度在局部变得可以忽略不计，从而排除了紧集上的任何奇异行为。因此，熵的增加完全是由质量向大尺度扩散所驱动的。

本文结构如下。第 2 节证明，每种离子浓度的 k 阶导数的 L^2 范数以 $t^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}$ 量级的速率衰减至 0。第 3 节通过与线性齐次热方程进行比较，证明该衰减速率是尖锐的。最后，第 4 节证明，在 $\mathbb{R}^3$ 上，与 NPD系统相关的相对熵随时间发散，其尖锐速率为 $\log t$ 的量级；而当空间区域紧致时，相对熵则收敛至 0。

记号。我们用 $A \lesssim B$ 表示：对于某个正定常数 C，有 $A \le C\,B$。该常数仅依赖于初始数据、问题参数及通用常数。C 的值可能因行而异。

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们用 $\widehat{f}$ 表示 f的傅里叶变换，定义如下：

$$\widehat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i\, x\cdot\zeta}\, \mathrm{d}x.$$

最后，我们用 $W^{k,\,p}(\mathbb{R}^3)$ 表示经典索伯列夫空间，并采用缩写 $H^k(\mathbb{R}^3) := W^{k,\,2}(\mathbb{R}^3)$ 和 $L^p(\mathbb{R}^3) := W^{0,\,p}(\mathbb{R}^3)$。在不引起歧义的情况下，将从记号中省略空间区域 $\mathbb{R}^3$。

2. 索伯列夫空间中的衰减

本节将讨论 NPD系统在所有索伯列夫空间中的解的长时间行为。由于势 ϕ 满足泊松方程，下面的椭圆估计将在全文中频繁使用：

命题1 （椭圆估计）。 设 g 属于 $H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，满足 $\int_{\mathbb{R}^3} g = 0$。设 Ψ 是泊松方程 $-\Delta\Psi = g$ 的一个解。则有以下估计：

$$\|\nabla\Psi\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L^1}^{\frac{2}{3}} \|g\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}, \tag{13}$$

$$\|\nabla\Psi\|_{L^6} \lesssim \|g\|_{L^2}, \tag{14}$$

$$\|\nabla\Psi\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|g\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} + \|g\|_{L^4}, \tag{15}$$

$$\|\nabla\Psi\|_{L^\infty} \lesssim \|g\|_{L^2} + \|\nabla g\|_{L^2}. \tag{16}$$

证明。 对于（13），利用黎斯变换在 L^2 上的有界性、Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，以及随后对 L^p 范数的对数凸性，可得

$$\|\nabla\Psi\|_{L^2} = \left\|\nabla\Lambda^{-2}g\right\|_{L^2} \lesssim \left\|\Lambda^{-1}g\right\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L^{\frac{6}{5}}} \lesssim \|g\|_{L^1}^{\frac{2}{3}} \|g\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

对于（14），利用 S obolev 嵌入 H^1 到 L^6 中，以及黎斯变换在 L^2 上的有界性，可得

$$\|\nabla\Psi\|_{L^6} \lesssim \|\nabla\nabla\Psi\|_{L^2} = \left\|\nabla\nabla\Lambda^{-2}g\right\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L^2}. \tag{18}$$

对于 (15)，利用 $W^{1,\,4}$ 在 L^∞ 中的连续嵌入、三维 Ladyzhenskaya 插值不等式，以及黎斯变换在 L^4 上的有界性，我们估计

$$\|\nabla\Psi\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{W^{1,4}} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{L^4} + \|\nabla\nabla\Psi\|_{L^4} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\Delta\Psi\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} + \|g\|_{L^4}. \tag{19}$$

对于 (16)，利用 $W^{1,\,6}$ 在 L^∞ 中的连续嵌入、估计式 (14)、索伯列夫嵌入定理，以及黎斯变换在 L^6 上的有界性，我们得到

$$\|\nabla\Psi\|_{L^\infty} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{W^{1,6}} \lesssim \|\nabla\Psi\|_{L^6} + \|\nabla\nabla\Psi\|_{L^6} \lesssim \|g\|_{L^2} + \|g\|_{L^6} \lesssim \|g\|_{L^2} + \|\nabla g\|_{L^2}. \tag{20}$$

□

对于 H^1 初始数据，NPD 系统存在唯一的局部光滑解；这一事实可由标准的磨光论证，并通过利用奥宾-莱昂斯引理和范数的下半连续性取极限得到。此外，在保证解存在且唯一的任意时间区间内，离子浓度的非负性均得以保持（见 [7]）。在下面的命题中，我们推导先验一致全局界，这些界保证解可延拓至任意长时间，并描述时间趋于无穷时离子浓度的行为。

命题2. 假设对于所有 $i \in \{1, \dots, N\}$，均有 $c_i(0) \geq 0$, $c_i(0) \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。那么，存在正定常数 M_1 和 M_2，它们依赖于问题参数以及初始浓度 $c_i(0)$ 的 L^1 和 H^1 范数，使得

$$\|c_i\|_{L^2}^2 \leq \frac{M_1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \|\nabla c_i\|_{L^2}^2 \leq \frac{M_2}{(t+1)^{\frac{5}{2}}}, \tag{21}$$

对于所有 $t \geq 0$ 和 $i \in \{1, \dots, N\}$。

$_N$证明。 证明分为几个步骤。我们将 $\sigma = \sum c_i$ 定义为离子浓-$_{i=1}$度 N 之和。

步骤 1. 相容条件。 对每种离子浓度在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，并利用 u满足的无散条件，可得守恒律

$$\int_{\mathbb{R}^3} c_i(t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} c_i(0)\,dx, \tag{22}$$

对于每个 $i \in \{1、\ldots\ldots、N\}$。因此可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_0\,dx = 0 \tag{23}$$

在使用施加于初始电荷密度的假设 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0\,dx = 0$ 之后。这保证了泊松方程的相容性条件。

步骤 2。**一致有界性**。将离子浓度 c_i 所满足的方程乘以 z_i，并对所有指标 $i \in \{1、\ldots\ldots、N\}$ 求和，我们推得电荷密度 ρ 随时间按照下式演化

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho - D\Delta \rho = Dz^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi). \tag{24}$$

一方面，将后一个式子乘以 $\Lambda^{-2}\rho$ 并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^{-1}\rho\right\|_{L^2}^2 + D\left\|\rho\right\|_{L^2}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla\rho)\,\Lambda^{-2}\rho - Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\nabla\phi\cdot\nabla\Lambda^{-2}\rho \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla\rho)\Lambda^{-2}\rho - Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\nabla\phi\cdot\nabla\phi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla\rho)\Lambda^{-2}\rho - Dz^2\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\phi\right\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{25}$$

另一方面，取（10）与 u 的 L^2 内积，并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分，得到

$$\|u\|_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}^3} \rho\nabla\phi\cdot u. \tag{26}$$

结合（25）和（26）可得恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u\cdot\nabla\rho)\Lambda^{-2}\rho = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(u\rho)\Lambda^{-2}\rho = -\int_{\mathbb{R}^3} u\rho\cdot\nabla\Lambda^{-2}\rho = -\int_{\mathbb{R}^3} u\rho\cdot\nabla\phi = \|u\|_{L^2}^2. \tag{27}$$

因此，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^{-1}\rho\right\|_{L^2}^2 + D\left\|\rho\right\|_{L^2}^2 + Dz^2\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\phi\right\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 = 0. \tag{28}$$

对时间进行 分，积分区间为 0 到 t，并利用椭圆估计 (13)，可得瞬时界
积

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\|\Lambda^{-1}\rho(t)\right\|_{L^2}^2 + D\int_0^t \|\rho\|_{L^2}^2\,ds + Dz^2\int_0^t \left\|\sqrt{\sigma}\nabla\phi\right\|_{L^2}^2\,ds + \int_0^t \|u\|_{L^2}^2\,ds \\ &\quad = \frac{1}{2}\left\|\Lambda^{-1}\rho_0\right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\left\|\nabla\phi_0\right\|_{L^2}^2 \lesssim \|\rho_0\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}\|\rho_0\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \tag{29}$$

对任意 $t \geq 0$ 均成立。

接下来，将每个离子浓度方程乘以 z^2，对所有指标 $i \in \{1，\ldots\ldots，N\}$ 求和，得到演化方程

$$\partial_t(z^2\sigma) + u\cdot\nabla(z^2\sigma) - D\Delta(z^2\sigma) = Dz^2\nabla\cdot(\rho\nabla\phi), \tag{30}$$

由 σ 满足。分别对由 ρ 和 σ 满足的方程（24）和（30）与 ρ 和 σ 取 L^2 内积，可得到能量等式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\rho\right\|_{L^2}^2 + D\left\|\nabla\rho\right\|_{L^2}^2 = -Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}\sigma\nabla\phi\cdot\nabla\rho\,dx, \tag{31}$$

and

$$\frac{z^2}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sigma\right\|_{L^2}^2 + Dz^2\left\|\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 = Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\rho\cdot\nabla\phi)\sigma\,dx + Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}\rho\Delta\phi\sigma\,dx, \tag{32}$$

分别成立。由于 u 所满足的无散性质，非线性速度项消失。将（31）与（32）相加，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2+z^2\|\sigma\|_{L^2}^2\right)+D\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+Dz^2\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2=-Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}\rho^2\sigma=-Dz^2\left\|\rho\sqrt{\sigma}\right\|_{L^2}^2. \tag{33}$$

从 0 到 t 对时间积分，得到

$$\begin{aligned}&\|\rho(t)\|_{L^2}^2+z^2\|\sigma(t)\|_{L^2}^2+2D\int_0^t\|\nabla\rho(s)\|_{L^2}^2\,ds\\&\quad+2Dz^2\int_0^t\|\nabla\sigma(s)\|_{L^2}^2\,ds+2Dz^2\int_0^t\left\|\rho\sqrt{\sigma}\right\|_{L^2}^2\,ds=\|\rho_0\|_{L^2}^2+z^2\|\sigma_0\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{34}$$

对任意 $t\geq 0$。**S**

tep 3. $|\widehat{\sigma}|$ **的逐点界**。将 N 离子浓度方程相加，得到

$$\partial_t\sigma+u\cdot\nabla\sigma-D\Delta\sigma=D\nabla\cdot(\rho\nabla\phi). \tag{35}$$

对 (35) 进行傅里叶变换，得到

$$\partial_t\widehat{\sigma}-D\widehat{\Delta\sigma}=D\nabla\cdot\widehat{(\rho\nabla\phi)}-\widehat{u\cdot\nabla\sigma}. \tag{36}$$

利用 u 的无散性质，我们可以推得

$$\widehat{u\cdot\nabla\sigma}(\xi)=\widehat{\nabla\cdot(u\sigma)}=2\pi i|\xi|\widehat{u\sigma}. \tag{37}$$

利用后者以及函数的傅里叶变换由其 L^1 范数控制这一有界性，可得微分不等式

$$\begin{aligned}\partial_t\widehat{\sigma}+4\pi^2D|\xi|^2\widehat{\sigma}&=2\pi i|\xi|\widehat{u\sigma}+2\pi i|\xi|\widehat{\rho\nabla\phi}\\&\leq 2\pi|\xi|(|\widehat{u\sigma}|+|\widehat{\rho\nabla\phi}|)\\&\leq 2\pi|\xi|(\|u\sigma\|_{L^1}+\|\rho\nabla\phi\|_{L^1}),\end{aligned} \tag{38}$$

因此我们得到

$$\partial_t\widehat{\sigma}+CD|\xi|^2\widehat{\sigma}\lesssim|\xi|(\|u\sigma\|_{L^1}+\|\rho\nabla\phi\|_{L^1}). \tag{39}$$

我们将两边乘以积分因子 $e^{CD|\xi|\ t}$，并在时间区间 0 到 t 上积分，得到如下估计

$$\begin{aligned}|\widehat{\sigma}(\xi,t)|&\lesssim|\widehat{\sigma_0}(\xi)|+|\xi|\int_0^t\|u\sigma\|_{L^1}\,ds+|\xi|\int_0^t\|\rho\nabla\phi\|_{L^1}\,ds\\&\lesssim\|\sigma_0\|_{L^1}+|\xi|\int_0^t\|u\sigma\|_{L^1}\,ds+|\xi|\int_0^t\|\sigma\nabla\phi\|_{L^1}\,ds.\end{aligned} \tag{40}$$

利用柯西-施瓦茨不等式以及一致有界性 (29) 和 (34)，我们有

$$\begin{aligned}|\widehat{\sigma}(\xi,t)|&\lesssim\|\sigma_0\|_{L^1}+|\xi|\left(\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\|\sigma\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad+|\xi|\left(\int_0^t\left\|\sqrt{\sigma}\right\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\phi\right\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\|\sigma_0\|_{L^1}+|\xi|\sqrt{t},\end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\left\|\sqrt{\sigma(t)}\right\|_{L^2}^2=\|\sigma(t)\|_{L^1}=\|\sigma_0\|_{L^1}$ 是一个常数。

步骤 4. L^2 **的衰减** ρ **和** σ**.** L^2 和 ρ与 $z^2\sigma$ 之和的演化由 b 描述 y

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2+z^2\|\sigma\|_{L^2}^2\right)+D\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+Dz^2\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2=-Dz^2\left\|\rho\sqrt{\sigma}\right\|_{L^2}^2. \tag{42}$$

鉴于项 $D\|\nabla\rho\|_{L^2}^2$ 的非负性，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2+z^2\|\sigma\|_{L^2}^2\right)+Dz^2\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\leq-Dz^2\left\|\rho\sqrt{\sigma}\right\|_{L^2}^2\leq 0. \tag{43}$$

根据帕塞瓦尔恒等式，我们有

$$\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 = \left\|\widehat{\nabla\sigma}\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{\nabla\sigma})^2 \, d\xi = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi. \tag{44}$$

令 $r : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个待定函数。我们将耗散项从下方估计为

$$\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 = C \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi \geq C \int_{|\xi|>r(t)} |\xi|^2 |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi, \tag{45}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|>r(t)} |\xi|^2 |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi &\geq r^2(t) \int_{|\xi|>r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 d\xi \\ &= r^2(t) \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi - r^2(t) \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi \\ &= r^2(t) \|\sigma\|_{L^2}^2 - r^2(t) \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi. \end{aligned} \tag{46}$$

这里再次用到了帕塞瓦尔恒等式。因此，我们得到微分不等式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) + CDz^2 r^2(t) \|\sigma\|_{L^2}^2 \leq CDz^2 r^2(t) \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi. \tag{47}$$

利用三角不等式，我们可以估计

$$\|\rho\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\rho|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left|\sum_{i=1}^N z_i c_i\right|^2 \, dx \lesssim z^2 \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} |c_i|^2 \, dx \lesssim z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2 . \tag{48}$$

我们将式（47）中的耗散项拆分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) + C\frac{D}{2} r^2(t) \left(z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) \leq CDz^2 r^2(t) \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi, \tag{49}$$

根据估计式（48），可化简为

$$\frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) + c_0 D r^2(t) \left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) \leq CDz^2 r^2(t) \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}|^2 \, d\xi. \tag{50}$$

这里， c_0 是一个仅依赖于 N的正定常数。由逐点界（41）、Young 不等式以及球坐标下的富比尼定理，可得

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|\leq r(t)} |\widehat{\sigma}(\xi,t)|^2 \, d\xi &\lesssim \int_{|\xi|\leq r(t)} \left(\|\sigma_0\|_{L^1}^2 + |\xi|^2 t\right) d\xi \\ &\lesssim \int_0^{r(t)} \int_{|\xi|=R} \left(\|\sigma_0\|_{L^1}^2 + |\xi|^2 t\right) da(\xi) \, dR \\ &\lesssim \int_0^{r(t)} \left(\|\sigma_0\|_{L^1}^2 R^2 + tR^4\right) dR \\ &\lesssim \|\sigma_0\|_{L^1}^2 \, r^3(t) + t\, r^5(t). \end{aligned} \tag{51}$$

将此不等式代入（50），并取 $r(t) = \sqrt{\frac{m}{c_0 D (t+1)}}$（其中 m 是一个稍后确定的常数），可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) + \frac{m}{t+1}\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2 \|\sigma\|_{L^2}^2\right) &\lesssim \|\sigma_0\|_{L^1}^2 \, r^5(t) + t\, r^7(t) \\ &\lesssim \|\sigma_0\|_{L^1}^2 \left(\frac{m}{t+1}\right)^{\frac{5}{2}} + t\left(\frac{m}{t+1}\right)^{\frac{7}{2}}. \end{aligned} \tag{52}$$

将微分不等式乘以积分因子

$$e^{\int_0^t c_0 D r^2(s)\, ds} = e^{\int_0^t \frac{m}{s+1}\, ds} = e^{m\ln(t+1)} = (t+1)^m, \tag{53}$$

并从 0 到 t对时间进行积分，我们得到

$$\left(\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2\|\sigma\|_{L^2}^2\right)(t+1)^m \lesssim \|\rho_0\|_{L^2}^2 + z^2\|\sigma_0\|_{L^2}^2 + \|\sigma_0\|_{L^1}^2\, m^{\frac{5}{2}} \int_0^t (s+1)^{m-\frac{5}{2}}\, ds + m^{\frac{7}{2}} \int_0^t s(s+1)^{m-\frac{7}{2}}\, ds. \tag{54}$$

计算右端的积分并除以 $(t+1)^m$，得到

$$\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2\|\sigma\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{\|\rho_0\|_{L^2}^2 + z^2\|\sigma_0\|_{L^2}^2}{(t+1)^m} + \frac{\|\sigma_0\|_{L^1}^2\, m^{\frac{5}{2}} + m^{\frac{7}{2}}}{m-\frac{3}{2}} \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{55}$$

取 $m = 2$，得到以下界

$$\|\rho\|_{L^2}^2 + z^2\|\sigma\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{56}$$

最后，由于 $c_i \le \sigma$，我们得到离子浓度按如下形式衰减

$$\|c_i\|_{L^2}^2 \le \|\sigma\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}, \tag{57}$$

从而证明了关于 $\|c_i\|_{L^2}^2$的所需界。现在我们转而估计 ∇c_i 在 L^2中的衰减 .

步骤 5。 L^p **衰减** σ。 我们将偏微分方程 (35) 乘以 σ^{p-1}，以得到 L^p σ 的演化方程

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^p}^p + D(p-1)\left\|\sigma^{\frac{p-2}{2}}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 = D\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(\rho\nabla\phi)\,\sigma^{p-1}\,dx. \tag{58}$$

子步骤 5.1. L^3 **衰减** σ。 具体而言， L^3 σ 的演化由下式描述

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^3 + 2D\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 = D\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(\rho\nabla\phi)\,\sigma^2\,dx. \tag{59}$$

分部积分后，再利用 Hölder 不等式和杨不等式，可得

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^3 + 2D\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 = -2D\int_{\mathbb{R}^3} \rho\nabla\phi\cdot\sigma\nabla\sigma\,dx \le D\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 + C\|\rho\nabla\phi\|_{L^3}^2\left\|\sqrt{\sigma}\right\|_{L^6}^2. \tag{60}$$

化简 (60)，并利用 $\left\|\sqrt{\sigma}\right\|_{L^6}^2 = \|\sigma\|_{L^3}$，得到

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^3 + 3D\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 \le C\|\rho\nabla\phi\|_{L^3}^2\|\sigma\|_{L^3}. \tag{61}$$

现在，若 $\|\sigma(\tau)\|_{L^3} = 0$ 对某个 $\tau \ge 0$ 成立，则 $\sigma(\tau) = 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中几乎处处成立，因此 $\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(\tau)\,dx = 0$。由离子浓度的空间平均值随时间守恒，可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\sigma(\tau)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3}\sigma(t)\,dx = 0, \tag{62}$$

对所有 $t \ge 0$ 均成立。因此，对所有 $t \ge 0$， $\sigma(t) = 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中几乎处处成立。

否则，在 $\|\sigma(t)\|_{L^3} \neq 0$ 对所有 $t \ge 0$ 均成立的情况下，将描述 σ 的演化的微分不等式 (61) 除以 $\|\sigma\|_{L^3}$，得到

$$\frac{1}{\|\sigma\|_{L^3}}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^3 + 3D\frac{\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2}{\|\sigma\|_{L^3}} \le C\|\rho\nabla\phi\|_{L^3}^2, \tag{63}$$

从而得到

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^2 \lesssim \|\rho\nabla\phi\|_{L^3}^2. \tag{64}$$

利用 Hölder 不等式、索伯列夫不等式、估计式 (14) 以及由 (57) 得到的 c_i 衰减界，我们可得

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^2 \lesssim \|\rho\nabla\phi\|_{L^3}^2 \lesssim \|\rho\|_{L^6}^2\|\nabla\phi\|_{L^6}^2 \lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}. \tag{65}$$

现在，我们对 $(t+1)\|\sigma\|_{L^3}^2$ 关于时间求导，并利用估计式 (65)，得到

$$\frac{d}{dt}\left((t+1)\|\sigma\|_{L^3}^2\right)=(t+1)\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^3}^2+\|\sigma\|_{L^3}^2\lesssim\frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{1}{2}}}+\|\sigma\|_{L^3}^2\lesssim\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\sigma\|_{L^3}^2. \tag{66}$$

应用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式、Young 不等式以及 (57) 中关于c_i 的衰减界，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((t+1)\|\sigma\|_{L^3}^2\right)&\lesssim\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\sigma\|_{L^2}\|\nabla\sigma\|_{L^2}\lesssim\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\sigma\|_{L^2}^2+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2\\&\lesssim\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}+\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{67}$$

对时间从 0 到 t积分，并利用 (34) 中的界，得到

$$\begin{aligned}(t+1)\,\|\sigma(t)\|_{L^3}^2&\lesssim\|\sigma_0\|_{L^3}^2+\int_0^t\|\nabla\rho(s)\|_{L^2}^2\,ds+\int_0^t\|\nabla\sigma(s)\|_{L^2}^2\,ds+\int_0^t\frac{1}{(s+1)^{\frac{3}{2}}}\,ds\\&\lesssim\|\sigma_0\|_{L^3}^2+\|\sigma_0\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2+1\lesssim\|\sigma_0\|_{L^2}^2\|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2+\|\sigma_0\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2\lesssim 1.\end{aligned} \tag{68}$$

两边除以 $(t+1)$，得到关于 $\|\sigma\|_{L^3}$的如下衰减界

$$\|\sigma(t)\|_{L^3}^2\lesssim\frac{1}{t+1}. \tag{69}$$

代入 第 5.2 节。 L^4 的衰减 σ。 L^4 的演化满足以下微分方程

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^4+3D\|\sigma\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2=D\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot(\rho\nabla\phi)\,\sigma^3\,dx. \tag{70}$$

分部积分后，再利用 H¨older 不等式和杨不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^4+12D\|\sigma\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2=-12D\int_{\mathbb{R}^3}\rho\nabla\phi\cdot\sigma^2\nabla\sigma\,dx\le 6D\|\sigma\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2+C\|\rho\nabla\phi\|_{L^4}^2\|\sigma\|_{L^4}^2. \tag{71}$$

化简（71）得到

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^4\lesssim\|\rho\nabla\phi\|_{L^4}^2\|\sigma\|_{L^4}^2. \tag{72}$$

沿用子步骤 5.1 的相同思路，若 $\|\sigma(\tau)\|_{L^4}=0$ 对于某个 $\tau\ge 0$ 成立，则 $\sigma(t)=0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中几乎处处成立，因此此处无需证明。

否则，将（72）除以 $\|\sigma\|_{L^4}^2$，得到以下微分不等式

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^2\lesssim\|\rho\nabla\phi\|_{L^4}^2. \tag{73}$$

利用 H¨older 不等式、Young 不等式、估计（15）、加利亚多-尼伦伯格插值不等式，以及分别由（57）和（69）得到的 c_i 的 L^2 和 L^3 衰减，我们推得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^2&\lesssim\|\rho\|_{L^4}^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2\lesssim\|\rho\|_{L^4}^4+\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^4\lesssim\|\rho\|_{L^4}^4+\left(\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\rho\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}+\|\rho\|_{L^4}\right)^4\\&\lesssim\|\rho\|_{L^4}^4+\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}^3\lesssim\|\rho\|_{L^3}^2\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}^3\\&\lesssim\frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{t+1}+\frac{\|\nabla\phi\|_{L^2}}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}.\end{aligned} \tag{74}$$

现在，对 $(t+1)\|\sigma\|_{L^4}^2$ 求导并利用估计 (74)，可得

$$\frac{d}{dt}\left((t+1)\|\sigma\|_{L^4}^2\right)=(t+1)\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^4}^2+\|\sigma\|_{L^4}^2\lesssim\|\nabla\rho\|_{L^2}^2+\frac{\|\nabla\phi\|_{L^2}}{(t+1)^{\frac{5}{4}}}+\|\sigma\|_{L^4}^2. \tag{75}$$

注意，由椭圆估计 (13) 以及 (29) 中推导出的估计可知

$$\|\nabla\phi\|_{L^2} \lesssim \|\rho_0\|_{L^1}^{\frac{2}{3}} \|\rho_0\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \lesssim 1. \tag{76}$$

接着，我们简化 (75)，并利用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式、Young 不等式以及 (57) 中 c_i 的 L^2 衰减，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((t+1)\|\sigma\|_{L^4}^2\right) &\lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{4}}} + \|\sigma\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\sigma\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \\ &\lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{4}}} + \|\sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{4}}} + \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 .\end{aligned} \tag{77}$$

对时间从 0 到 t 积分，进行插值，并使用界 (34)，可得

$$\begin{aligned}&(t+1)\|\sigma(t)\|_{L^4}^2 \\ &\lesssim \|\sigma_0\|_{L^4}^2 + \int_0^t \|\nabla\rho(s)\|_{L^2}^2 \, ds + \int_0^t \|\nabla\sigma(s)\|_{L^2}^2 \, ds + \int_0^t \frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{4}}} \, ds + \int_0^t \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} \, ds \\ &\lesssim \|\sigma_0\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\rho_0\|_{L^2}^2 + \|\sigma_0\|_{L^2}^2 + 1.\end{aligned} \tag{78}$$

因此，两边除以 $(t+1)$，即可得到所需的 L^4 范数衰减 σ

$$\|\sigma(t)\|_{L^4}^2 \lesssim \frac{\|\sigma_0\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\rho_0\|_{L^2}^2 + \|\sigma_0\|_{L^2}^2 + 1}{t+1} \lesssim \frac{1}{t+1}. \tag{79}$$

子步骤 5.3. L^6 **的衰减** σ。接下来，σ 的 L^6 衰减由以下微分方程控制

$$\frac{1}{6}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^6 + 5D\left\|\sigma^2\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 = D\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(\rho\nabla\phi)\,\sigma^5 \, dx, \tag{80}$$

应用 H¨older 不等式和杨不等式后，可将其简化为

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^6 + 30D\left\|\sigma^2\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 \le 30D\|\rho\nabla\phi\|_{L^6}\left\|\sigma^2\nabla\sigma\right\|_{L^2}\left\|\sigma^2\right\|_{L^3} \lesssim 15D\left\|\sigma^2\nabla\sigma\right\|_{L^2}^2 + \|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^2\|\sigma\|_{L^6}^4 . \tag{81}$$

这里我们用到了恒等式 $\left\|\sigma^2\right\|_{L^3} = \|\sigma\|_{L^6}^2$ 简化 (81) 后，我们由此推出

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^6 \lesssim \|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^2\|\sigma\|_{L^6}^4 . \tag{82}$$

再一次，我们注意到，若 $\|\sigma(\tau)\|_{L^6}^4 = 0$对某个 τ成立，则 $\sigma(t) = 0$在 $\mathbb{R}^3$ 中几乎处处成立，并且 $\|\sigma\|_{L^6}$ 的衰减显然成立。
否则，我们将 (82) 除以 $\|\sigma\|_{L^6}^4$，得到

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^2 \lesssim \|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^2 . \tag{83}$$

利用 H¨older 不等式、估计式 (15)、(76) 中推导出的 $\nabla\phi$ 在 L^2 中的有界性、索伯列夫嵌入定理，以及分别由 (57) 和 (79) 得到的 c_i 的 L^2 和 L^4 衰减，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^2 &\lesssim \|\rho\|_{L^6}^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 \lesssim \|\rho\|_{L^6}^2\left(\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\rho\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} + \|\rho\|_{L^4}\right)^2 \\ &\lesssim \|\rho\|_{L^6}^2\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\rho\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\rho\|_{L^6}^2\|\rho\|_{L^4}^2 \lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\nabla\rho\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^4}^2 \\ &\lesssim \frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{9}{8}}} + \frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{t+1}.\end{aligned} \tag{84}$$

对 $(t+1)\|\sigma\|_{L^6}^2$ 求导并应用索伯列夫嵌入定理，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((t+1)\|\sigma\|_{L^6}^2\right) &= (t+1)\frac{d}{dt}\|\sigma\|_{L^6}^2 + \|\sigma\|_{L^6}^2 \lesssim \frac{\|\nabla\rho\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{1}{8}}} + \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 + \|\sigma\|_{L^6}^2 \\ &\lesssim \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 .\end{aligned} \tag{85}$$

对时间从 0 积分到 t，得到

$$(t+1)\ \|\sigma(t)\|_{L^6}^2 \lesssim \|\sigma_0\|_{L^6}^2 + \int_0^t \|\nabla\rho\|_{L^2}^2\ ds + \int_0^t \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2. \tag{86}$$

利用索伯列夫嵌入定理和界 (34)，可得

$$\|\sigma(t)\|_{L^6}^2 \lesssim \frac{\|\nabla\sigma_0\|_{L^2}^2}{t+1} + \frac{\|\rho_0\|_{L^2}^2 + \|\sigma_0\|_{L^2}^2}{t+1} \lesssim \frac{1}{t+1}. \tag{87}$$

步骤 6. $|\widehat{\nabla c_i}|$**的逐点界，其中** $i \in \{1,\dots,N\}$。对能斯特–普朗克偏微分方程 (9) 求梯度，然后应用傅里叶变换，得到

$$\partial_t\widehat{\nabla c_i} + |\xi|^2\widehat{\nabla c_i} \lesssim |\xi|^2\left(|\widehat{uc_i}| + |\widehat{c_i\nabla\phi}|\right) \lesssim |\xi|^2\left(\|uc_i\|_{L^1} + \|c_i\nabla\phi\|_{L^1}\right), \tag{88}$$

由此得到以下逐点界

$$|\widehat{\nabla c_i}| \lesssim \|c_i(0)\|_{L^1}|\xi| + |\xi|^2\sqrt{t}. \tag{89}$$

步骤 7. $\int_0^t (s+1)^\gamma\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\,ds$**的界**。将离子浓度方程 (9) 乘以 c_i，并在空间区域 $\mathbb{R}^3$ 上积分。利用 u 的无散性质，u 中的非线性项消失。对于电迁移项，我们分部积分，并应用柯西–施瓦茨不等式和杨不等式，将其上界估计为 $\frac{D}{2}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2$ 与 $\|c_i\nabla\phi\|_{L^2}^2$ 的某个常数倍之和。后者导出微分不等式

$$\frac{d}{dt}\|c_i\|_{L^2}^2 + D\|\nabla c_i\|_{L^2}^2 \le C\|c_i\nabla\phi\|_{L^2}^2 . \tag{90}$$

对 $(s+1)^\gamma\|c_i\|_{L^2}^2$ 求导并使用 (90)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left((s+1)^\gamma\|c_i\|_{L^2}^2\right) + D(s+1)^\gamma\|\nabla c_i\|_{L^2}^2 &\lesssim \gamma(s+1)^{\gamma-1}\|c_i\|_{L^2}^2 + (s+1)^\gamma\|c_i\nabla\phi\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \gamma(s+1)^{\gamma-1}\|c_i\|_{L^2}^2 + (s+1)^\gamma\|c_i\|_{L^2}^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 \\ &\lesssim \gamma(s+1)^{\gamma-1}\|c_i\|_{L^2}^2 + (s+1)^\gamma\|c_i\|_{L^2}^2\left(\|\nabla\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\rho\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} + \|\rho\|_{L^4}^2\right) \\ &\lesssim \gamma(s+1)^{\gamma-\frac{5}{2}} + (s+1)^{\gamma-\frac{21}{8}} + (s+1)^{\gamma-\frac{5}{2}}.\end{aligned} \tag{91}$$

接下来，我们对时间从 0 积分到 t，取 $\gamma \ge 2$，从而得出

$$\int_0^t (s+1)^\gamma\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\ ds \lesssim 1 + (t+1)^{\gamma-\frac{3}{2}}. \tag{92}$$

步骤 8. L^2 **衰减** ∇c_i **当** $i \in \{1,\dots,N\}$**.** 首先，将能斯特–普朗克偏微分方程 (9) 乘以 Δc_i，并在空间区域 $\mathbb{R}^3$ 上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2 + D\|\Delta c_i\|_{L^2}^2 \le \int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla c_i\Delta c_i|\,dx + Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\Delta c_i|\,dx. \tag{93}$$

我们估计

$$Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\Delta c_i|\,dx \le Dz^2\|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\|_{L^2}\|\Delta c_i\|_{L^2} \le \frac{D}{6}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\|_{L^2}^2, \tag{94}$$

其中

$$\begin{aligned}\|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\|_{L^2}^2 &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla\cdot(c_j\nabla\phi)\|_{L^2}^2 \lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\cdot\nabla\phi+c_j\Delta\phi\|_{L^2}^2\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\cdot\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|c_j\Delta\phi\|_{L^2}^2 \lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\|_{L^3}^2\|\nabla\phi\|_{L^6}^2+\|c_j\|_{L^6}^2\|\Delta\phi\|_{L^3}^2\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\|_{L^2}\|\Delta c_j\|_{L^2}\|\nabla\nabla\phi\|_{L^2}^2+\|\nabla c_j\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^3}^2\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\|_{L^2}\|\Delta c_j\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}^2+\|c_j\|_{L^2}\|\Delta c_j\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}\|\nabla\rho\|_{L^2}\\ &\le \frac{D}{6N}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta c_j\|_{L^2}^2+C\sum_{j=1}^{N}\|\nabla c_j\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^2}^4+C\|c_j\|_{L^2}^2\|\rho\|_{L^2}^2\|\nabla\rho\|_{L^2}^2\\ &\le \frac{D}{6N}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta c_j\|_{L^2}^2+C\sum_{j=1}^{N}\frac{\|\nabla c_j\|_{L^2}^2}{(t+1)^3}.\end{aligned} \tag{95}$$

上述计算由 Minkowski 不等式、H¨older 不等式和杨不等式，以及插值不等式和式（57）中为 c_i 的 L^2 衰减所建立的界推出。因此，我们得到

$$Dz^2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\cdot(\sigma\nabla\phi)\Delta c_i|\,dx \le \frac{D}{6}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2+\frac{D}{6N}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta c_j\|_{L^2}^2+C\sum_{j=1}^{N}\frac{\|\nabla c_j\|_{L^2}^2}{(t+1)^3}. \tag{96}$$

接下来，利用加利亚多-尼伦伯格插值和杨不等式，我们对其进行估计

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla c_i\Delta c_i|\,dx &\le \|u\|_{L^6}\|\nabla c_i\|_{L^3}\|\Delta c_i\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^6}\|\nabla c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta c_i\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\\ &\le \frac{D}{6}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L^6}^4\|\nabla c_i\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{97}$$

我们转而利用 Leray投影算子在 L^6 中的有界性、估计式（15）、式（76）中由初始数据得到的 $\nabla\phi$ 有界性，以及式（57）、（79）和（87）中分别针对 c_i 在 L^2、L^4 和 L^6 中所建立的衰减界，对 $\|u\|_{L^6}^4$ 进行估计，从而得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^6}^4 = \|\mathbb{P}(\rho\nabla\phi)\|_{L^6}^4 &\lesssim \|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^4 \lesssim \|\rho\|_{L^6}^4\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^4 \lesssim \|\rho\|_{L^6}^4\left(\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}^3+\|\rho\|_{L^4}^4\right)\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\|c_j\|_{L^6}^4\left(\|\nabla\phi\|_{L^2}\|\rho\|_{L^2}^3+\|\rho\|_{L^4}^4\right) \lesssim \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(t+1)^2}\left(\frac{1}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}+\frac{1}{(t+1)^2}\right)\\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^4}.\end{aligned} \tag{98}$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u\cdot\nabla c_i\Delta c_i|\,dx \le \frac{D}{6}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2+C\frac{\|\nabla c_i\|_{L^2}^2}{(t+1)^4}. \tag{99}$$

将界（95）和（99）代入（93），即可得到微分不等式

$$\frac{d}{dt}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+\frac{4D}{3}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2-\frac{D}{3N}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta c_j\|_{L^2}^2 \lesssim \sum_{j=1}^{N}\frac{\|\nabla c_j\|_{L^2}^2}{(t+1)^3}+\frac{\|\nabla c_i\|_{L^2}^2}{(t+1)^4}. \tag{100}$$

对离子指标求和（从 $i=1$ 到 N），可得 ∇c_i 的 L^2 范数之和的演化不等式，

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+\frac{4D}{3}\sum_{i=1}^{N}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2-\frac{D}{3N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\|\Delta c_j\|_{L^2}^2\lesssim\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\|\nabla c_j\|_{L^2}^2}{(t+1)^3}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\|\nabla c_i\|_{L^2}^2}{(t+1)^4}. \tag{101}$$

化简后，我们推得

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+D\sum_{i=1}^{N}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2\lesssim\frac{1}{(t+1)^3}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+\frac{1}{(t+1)^4}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2. \tag{102}$$

现在，我们对耗散项 $\sum_{i=1}^{N}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2$ 应用 Fourier分裂技巧，方法与上面的步骤 4 类似。首先注意到，根据帕塞瓦尔恒等式，有

$$\begin{aligned}\|\Delta c_i\|_{L^2}^2&=\big\|\widehat{\Delta c_i}\big\|_{L^2}^2=C\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi\geq C\int_{|\xi|>r(t)}|\xi|^2|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi\\&\geq Cr^2(t)\int_{|\xi|>r(t)}|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi=Cr^2(t)\|\nabla c_i\|_{L^2}^2-Cr^2(t)\int_{|\xi|\leq r(t)}|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi,\end{aligned} \tag{103}$$

对某个函数 $r(t)$，该函数稍后确定。将其代入 (102)，得到能量不等式 y

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+CDr^2(t)\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\\&\qquad\lesssim Cr^2(t)\sum_{i=1}^{N}\int_{|\xi|\leq r(t)}|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi+\frac{1}{(t+1)^3}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+\frac{1}{(t+1)^4}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{104}$$

根据逐点界 (89) 以及球坐标下的富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq r(t)}|\widehat{\nabla c_i}|^2\,d\xi&\lesssim\int_{|\xi|\leq r(t)}(\|c_i(0)\|_{L^1}^2|\xi|^2+|\xi|^4t)d\xi\\&=\int_0^{r(t)}\int_{|\xi|=R}(\|c_i(0)\|_{L^1}^2|\xi|^2+|\xi|^4t)\,da(\xi)\,dR\\&\lesssim\|c_i(0)\|_{L^1}^2\;r^5(t)+t\,r^7(t).\end{aligned} \tag{105}$$

将其代入 (104)，得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+CDr^2(t)\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\\&\qquad\lesssim\sum_{i=1}^{N}r^7(t)+\sum_{i=1}^{N}t\,r^9(t)+\frac{1}{(t+1)^3}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2+\frac{1}{(t+1)^4}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{106}$$

我们选取 $r(t)=\sqrt[m]{\frac{CD}{(t+1)}}$，其中 m 是一个待定常数。乘以积分因子 $(t+1)^m$，并对时间从 0 到 t进行积分，可得

$$\begin{aligned}(t+1)^m\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i(t)\|_{L^2}^2\lesssim&\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i(0)\|_{L^2}^2+m^{\frac{7}{2}}\frac{(t+1)^{m-\frac{5}{2}}}{m-\frac{5}{2}}+m^{\frac{9}{2}}\frac{(t+1)^{m-\frac{5}{2}}}{m-\frac{5}{2}}\\&+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t(s+1)^{m-3}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\,ds+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t(s+1)^{m-4}\|\nabla c_i\|_{L^2}^2\,ds,\end{aligned} \tag{107}$$

利用（92）中得到的界，可得

$$(t+1)^m\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i(t)\|_{L^2}^2\lesssim 1+m^{\frac{7}{2}}\frac{(t+1)^{m-\frac{5}{2}}}{m-\frac{5}{2}}+m^{\frac{9}{2}}\frac{(t+1)^{m-\frac{5}{2}}}{m-\frac{5}{2}}+(t+1)^{m-\frac{9}{2}}+(t+1)^{m-\frac{11}{2}}, \tag{108}$$

条件是 $m-3\geq 2$ 且 $m-4\geq 2$。我们取 $m=6$ 并简化该不等式，最终推得 ∇c_i 在 L^2 中的衰减界，对所有 $i\in\{0,\ldots\ldots,N\}$均成立：

$$\sum_{i=1}^{N}\|\nabla c_i(t)\|_{L^2}^2\lesssim\frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{2}}}. \tag{109}$$

□

通过归纳论证，可以将时间衰减性提升到离子浓度的高阶导数，如下述命题所示：

命题3。 设 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $k\geq 2$。假设 $c_i(0)\geq 0$, $c_i(0)\in H^k(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)$ 对所有 $i\in\{1,\ldots,N\}$ 均成立，且 $\int_{\mathbb{R}^3}\rho_0=0$。那么，存在一个正定常数 M_k，它取决于问题参数以及初始浓度 $c_i(0)$的 L^1 范数和 H^k 范数，使得

$$\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\leq\frac{M_k}{(t+1)^{k+\frac{3}{2}}}, \tag{110}$$

对所有 $t\geq 0$ 以及 $i\in\{1,\ldots,N\}$均成立。

证明。 证明分为若干步骤。

步骤1。的逐点界，适用于 $i\in\{1,\ldots,N\}$ 。 我们对能斯特–普朗克偏微分方程（9）施加 Λ^k 算子，并对所得方程进行傅里叶变换，得到

$$\partial_t\widehat{\Lambda^k c_i}+CD|\xi|^2\widehat{\Lambda^k c_i}\lesssim|\xi|^{k+1}\left(\|u\|_{L^2}\|c_i\|_{L^2}+\left\|\sqrt{\sigma}\nabla\phi\right\|_{L^2}\right). \tag{111}$$

分部积分 并利用适当的衰减界，我们得到逐点界

$$\left|\widehat{\Lambda^k c_i(t)}\right|\lesssim\|c_i(0)\|_{L^1}|\xi|^k+|\xi|^{k+1}+|\xi|^{k+1}\sqrt{t}\lesssim\|c_i(0)\|_{L^1}|\xi|^k+|\xi|^{k+1}\sqrt{t+1}. \tag{112}$$

步骤 2。 L^2 衰减 $\Lambda^k c_i$ 对于 $i\in\{1,\ldots\ldots,N\}$。 我们通过归纳法证明 L^2 衰减。事实上，假设以下估计

$$\left\|\Lambda^{k-1}c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim\frac{1}{(t+1)^{k+\frac{1}{2}}}, \tag{113}$$

$$\int_0^t(s+1)^\gamma\left\|\Lambda^k c_i(s)\right\|_{L^2}^2\,ds\lesssim 1+(t+1)^{\gamma-k-\frac{1}{2}}, \tag{114}$$

对 $\gamma>k+\frac{1}{2}$ 成立，并证明

$$\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim\frac{1}{(t+1)^{k+\frac{3}{2}}}, \tag{115}$$

$$\int_0^t(s+1)^\gamma\left\|\Lambda^{k+1}c_i(s)\right\|_{L^2}^2\,ds\lesssim 1+(t+1)^{\gamma-k-\frac{3}{2}}, \tag{116}$$

对 $\gamma>k+\frac{3}{2}$ 成立。我们首先将能斯特–普朗克偏微分方程（9）乘以 $\Lambda^{2k}c_i$，并在空间上积分，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2+D\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2\leq D|z_i|\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot(c_i\nabla\phi)\,\Lambda^{2k}c_i\,dx\right|+\left|\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\nabla c_i\,\Lambda^{2k}c_i\,dx\right|. \tag{117}$$

通过分部积分以及 Hölder 不等式和 Young 不等式，我们对 (117) 的第一项积分进行化简，得到

$$\begin{aligned}D|z_i|\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot(c_i\nabla\phi)\,\Lambda^{2k}c_i\,dx\right|&\leq D|z_i|\left|\int_{\mathbb{R}^3}\Lambda^{k-1}\nabla\cdot(c_i\nabla\phi)\,\Lambda^{k+1}c_i\,dx\right|\\&\leq\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\left\|\Lambda^k(c_i\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{118}$$

利用 Kato-Ponce不等式（见 [21]）、估计式 (16)、 c_i 的 L^3 衰减、Sobolev 嵌入定理，以及分别在 (57) 和 (109) 中得到的 c_i 和 ∇c_i 的 L^2 衰减，我们有

$$\begin{aligned} C\left\|\Lambda^k(c_i\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2+\|c_i\|_{L^3}^2\left\|\Lambda^k\nabla\phi\right\|_{L^6}^2 \\ &\lesssim \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\left(\|\rho\|_{L^2}^2+\|\nabla\rho\|_{L^2}^2\right)+\frac{\left\|\Lambda^k\rho\right\|_{L^2}^2}{t+1}\lesssim\frac{\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{j=1}^N\frac{\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2}{t+1}. \end{aligned} \tag{119}$$

接下来，我们利用分部积分、 u的无散性质以及 Hölder 不等式和杨不等式，处理 (117) 中的第二个积分项，如下所示

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}u\cdot\nabla c_i\,\Lambda^{2k}c_i\,dx\right|\le\left|\int_{\mathbb{R}^3}\Lambda^{k-1}\nabla\cdot(uc_i)\,\Lambda^{k+1}c_i\,dx\right|\le\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\left\|\Lambda^k(uc_i)\right\|_{L^2}^2. \tag{120}$$

这里，为了估计 $\left\|\Lambda^k(uc_i)\right\|_{L^2}^2$，我们使用 Kato-Ponce不等式、Leray投影算子在L^2中的有界性、 $W^{1,4}$ 在 L^∞ 中的连续嵌入、Gagliardo-Nirenberg不等式、索伯列夫嵌入定理、Young 不等式、估计 (16)、(119) 中推导出的 $\left\|\Lambda^k(c_i\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2$ 的界，以及分别由 (57) 和 (109) 得到的 c_i 和 ∇c_i 的 L^2衰减，从而得到

$$\begin{aligned} C\left\|\Lambda^k(uc_i)\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \left\|\Lambda^k u\right\|_{L^2}^2\|c_i\|_{L^\infty}^2+\|u\|_{L^6}^2\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^3}^2 \\ &\lesssim \left\|\Lambda^k(\rho\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2\|c_i\|_{W^{1,4}}^2+\|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^2\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2} \\ &\le C\sum_{j=1}^N\left\|\Lambda^k(c_j\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2\left(\|c_i\|_{L^4}^2+\|\nabla c_i\|_{L^4}^2\right)+\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^4\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2 \\ &\le C\sum_{j=1}^N\left\|\Lambda^k(c_j\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2\left(\|c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla c_i\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}+\|\nabla c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta c_i\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\qquad+\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\|\rho\|_{L^6}^4\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^4\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2 \\ &\le\frac{C}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}\sum_{j=1}^N\left\|\Lambda^k(c_j\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2+\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\|\nabla\rho\|_{L^2}^4\left(\|\rho\|_{L^2}^4+\|\nabla\rho\|_{L^2}^4\right)\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2 \\ &\le\frac{C}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}\sum_{j=1}^N\left(\frac{\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{m=1}^N\frac{\left\|\Lambda^k c_m\right\|_{L^2}^2}{t+1}\right)+\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\frac{\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^8} \\ &\le\frac{D}{6}\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2+C\frac{\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^8}+C\sum_{j=1}^N\frac{\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{13}{4}}}. \end{aligned} \tag{121}$$

因此，将 (119) 和 (121) 代入 (117)，可得

$$\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2+D\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim\frac{\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{j=1}^N\frac{\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2}{t+1}. \tag{122}$$

为求解这一微分不等式，我们对 $\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2$ 应用 Fourier分裂技巧。利用帕塞瓦尔恒等式，

$$\begin{aligned} \left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2&=\left\|\widehat{\Lambda^{k+1}c_i}\right\|_{L^2}^2=C\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2\left|\widehat{\Lambda^k c_i}\right|^2\,d\xi\ge C\int_{|\xi|>r(t)}|\xi|^2\left|\widehat{\Lambda^k c_i}\right|^2\,d\xi \\ &\ge Cr^2(t)\int_{|\xi|>r(t)}\left|\widehat{\Lambda^k c_i}\right|^2\,d\xi=Cr^2(t)\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2-Cr^2(t)\int_{|\xi|\le r(t)}\left|\widehat{\Lambda^k c_i}\right|^2\,d\xi, \end{aligned} \tag{123}$$

其中 $r(t)$ 将在稍后确定。根据 (123)、逐点界 (112) 以及球坐标下的富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le r(t)}\left|\widehat{\Lambda^k c_i}\right|^2\,d\xi &\lesssim \int_{|\xi|\le r(t)}\left(\|c_i(0)\|_{L^1}^2\,|\xi|^{2k}+|\xi|^{2k+2}(t+1)\right)\,d\xi\\ &\lesssim \int_0^{r(t)}\int_{|\xi|=R}\left(\|c_i(0)\|_{L^1}^2\,|\xi|^{2k}+|\xi|^{2k+2}(t+1)\right)\,d\sigma(\xi)\,dR\\ &\lesssim \|c_i(0)\|_{L^1}^2\;r^{2k+3}(t)+(t+1)\,r^{2k+5}(t).\end{aligned}\tag{124}$$

利用 (124)，微分不等式 (122) 变为

$$\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2+CDr^2(t)\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim r^{2k+5}(t)+(t+1)\,r^{2k+7}(t)+\frac{\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}+\sum_{j=1}^N\frac{\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2}{t+1}.\tag{125}$$

我们选择 $r(t)=\sqrt[m]{CD(t+1)}$（其中 m 的选择仍待定）。然后，我们将 (125) 乘以 $(t+1)^m$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left((t+1)^m\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\right)\\ &\quad\lesssim m^{k+\frac{5}{2}}(t+1)^{m-k-\frac{5}{2}}+m^{k+\frac{7}{2}}(t+1)^{m-k-\frac{5}{2}}+(t+1)^{m-\frac{3}{2}}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2+\sum_{j=1}^N(t+1)^{m-1}\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{126}$$

对时间从 0 到 t 进行积分，我们得到

$$\begin{aligned}&(t+1)^m\left\|\Lambda^k c_i(t)\right\|_{L^2}^2\\ &\quad\lesssim\left\|\Lambda^k c_i(0)\right\|_{L^2}^2+\frac{(t+1)^{m-k-\frac{3}{2}}}{m-k-\frac{3}{2}}+\int_0^t(t+1)^{m-\frac{3}{2}}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\,ds+\sum_{j=1}^N\int_0^t(t+1)^{m-1}\left\|\Lambda^k c_j\right\|_{L^2}^2\,ds,\end{aligned}\tag{127}$$

根据归纳假设 (114)，这可化简为

$$(t+1)^m\left\|\Lambda^k c_i(t)\right\|_{L^2}^2\lesssim 1+\frac{(t+1)^{m-k-\frac{3}{2}}}{m-k-\frac{3}{2}}+(t+1)^{m-k-2}+(t+1)^{m-k-\frac{3}{2}},\tag{128}$$

只要 $m-\frac{3}{2}>k+\frac{1}{2}$ 和 $m-1>k+\frac{1}{2}$ 成立即可。我们选择 $m>k+2$，并除以 $(t+1)^m$，从而建立了 $\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2$ 如 (115) 所示的所需衰减。我们仍需证明积分界 (116) 成立。为此，我们从先前在 (122) 中得到的关于 $\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2$ 的微分不等式出发，并利用 (115) 中关于 $\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2$ 的最新衰减结果，得到

$$\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2+D\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim\frac{1}{(t+1)^{k+3}}+\frac{1}{(t+1)^{k+\frac{5}{2}}}\lesssim\frac{1}{(t+1)^{k+\frac{5}{2}}}.\tag{129}$$

将后者乘以 $(s+1)^\gamma$，并利用 $\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2$ (115) 的衰减性，我们得到

$$\frac{d}{dt}\left((s+1)^\gamma\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2\right)+D(s+1)^\gamma\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2\lesssim\gamma(s+1)^{\gamma-k-\frac{5}{2}}+(s+1)^{\gamma-k-\frac{5}{2}}.\tag{130}$$

对时间从 0 积分到 t 并取 $\gamma>k+\frac{3}{2}$，即可得到 (116) 中所述的 $\int_0^t(s+1)^\gamma\left\|\Lambda^{k+1}c_i\right\|_{L^2}^2\,ds$ 的所需界。□

3. 衰减率的锐性

在本节中，w 我们讨论离子浓度所有阶导数时间衰减率的尖锐性。

命题 *4.* 假设对所有 $i \in \{1, \dots, N\}$，$c_i(0) \geq 0$, $c_i(0) \in H^k(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。对每个 $i \in \{1, \dots, N\}$，我们用 $\tilde{c}_i$ 表示定义在 $\mathbb{R}^3$ 上（无穷远衰减）、初始数据为 $\tilde{c}_i(0) = c_i(0)$ 的热方程 $\partial_t \tilde{c}_i - D\Delta \tilde{c}_i = 0$ 的解。存在一个正定常数 O_k，它取决于问题参数以及初始浓度的 L^1 和 H^k 范数，使得

$$\left\| \Lambda^k (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{O_k}{(t+1)^{k+2}} \tag{131}$$

对所有 $t \geq 0$ 以及所有 $i \in \{1, \dots, N\}$。

证明。 为证明 $\Lambda^k c_i$ 在 L^2 中衰减率的锐性，我们先从能斯特–普朗克偏微分方程 (9) 中减去由 $\partial_t \tilde{c}_i - D\Delta \tilde{c}_i = 0$ 给出的线性热偏微分方程，得到

$$\partial_t (c_i - \tilde{c}_i) - D\Delta (c_i - \tilde{c}_i) + u \cdot \nabla c_i - D z_i \nabla \cdot (c_i \nabla \phi) = 0. \tag{132}$$

接下来，我们将偏微分方程 (132) 乘以 $\Lambda^{2k}(c_i - \tilde{c}_i)$，并在空间上积分，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \Lambda^k (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2}^2 + D \left\| \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2}^2 \\ &\qquad \leq D|z_i| \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (c_i \nabla \phi)\, \Lambda^{2k} (c_i - \tilde{c}_i)\, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla c_i\, \Lambda^{2k} (c_i - \tilde{c}_i)\, dx \right|. \end{aligned} \tag{133}$$

对于 (133) 的第一项积分，应用分部积分以及 H¨older 不等式和杨不等式可得

$$\begin{aligned} D|z_i| \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (c_i \nabla \phi)\, \Lambda^{2k} (c_i - \tilde{c}_i)\, dx \right| &= D|z_i| \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda^{k-1} \nabla \cdot (c_i \nabla \phi)\, \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i)\, dx \right| \\ &\leq \frac{D}{4} \left\| \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2}^2 + C \left\| \Lambda^k (c_i \nabla \phi) \right\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{134}$$

其中

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda^k (c_i \nabla \phi) \right\|_{L^2}^2 &\lesssim \left\| \Lambda^k c_i \right\|_{L^6}^2 \left\| \nabla \phi \right\|_{L^3}^2 + \left\| c_i \right\|_{L^\infty}^2 \left\| \Lambda^k \nabla \phi \right\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \left\| \Lambda^{k+1} c_i \right\|_{L^2}^2 \left\| \nabla \phi \right\|_{L^2} \left\| \nabla \nabla \phi \right\|_{L^2} + \left(\left\| \nabla c_i \right\|_{L^2}^2 + \left\| \nabla \nabla c_i \right\|_{L^2}^2 \right) \left\| \Lambda^{k-1} \rho \right\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{k+\frac{13}{4}}} + \frac{1}{(t+1)^{k+3}} \lesssim \frac{1}{(t+1)^{k+3}}, \end{aligned} \tag{135}$$

利用 Kato-Ponce不等式、 $W^{1,6}$ 在 L^∞ 中的连续嵌入、索伯列夫嵌入定理、Gagliardo-Nirenberg 插值不等式、由 (76) 得到的 $\|\nabla \phi\|_{L^2}$ 的有界性，以及关于 c_i 的衰减结果。对于 (133) 的第二个积分项，利用 u 的无散性质、分部积分、H¨older 不等式和杨不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla c_i\, \Lambda^{2k} (c_i - \tilde{c}_i)\, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \Lambda^{k-1} \nabla \cdot (u c_i)\, \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i) \right| dx \\ &\leq \left\| \Lambda^k (u c_i) \right\|_{L^2} \left\| \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{D}{4} \left\| \Lambda^{k+1} (c_i - \tilde{c}_i) \right\|_{L^2}^2 + C \left\| \Lambda^k (u c_i) \right\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{136}$$

其中，同理，

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^k(uc_i)\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \left\|\Lambda^k u\right\|_{L^2}^2 \|c_i\|_{L^\infty}^2 + \|u\|_{L^6}^2 \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^3}^2 \\ &\lesssim \left\|\Lambda^k(\rho\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla c_i\|_{L^2}^2 + \|\Delta c_i\|_{L^2}^2\right) + \|\rho\nabla\phi\|_{L^6}^2 \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2} \left\|\Lambda^{k+1} c_i\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{2}}} \sum_{j=1}^{N} \left\|\Lambda^k(c_j\nabla\phi)\right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(t+1)^{k+2}} \|\rho\|_{L^6}^2 \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{k+\frac{11}{2}}} + \frac{1}{(t+1)^{k+2}} \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 \left(\|\rho\|_{L^2}^2 + \|\nabla\rho\|_{L^2}^2\right) \\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{k+\frac{11}{2}}} + \frac{1}{(t+1)^{k+6}} \lesssim \frac{1}{(t+1)^{k+\frac{11}{2}}},\end{aligned} \tag{137}$$

利用 (135) 和估计式 (16)，代回 (133) 可得

$$\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 + D\left\|\Lambda^{k+1}(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{(t+1)^{k+3}}. \tag{138}$$

为了应用 Fourier分裂技巧，我们推导出 $\left|\widehat{\Lambda^{k+1}(c_i-\tilde{c}_i)}\right|$ 的一个改进的逐点界。对 (132) 应用 Λ^k 算子并进行傅里叶变换，可得微分不等式

$$\partial_t \Lambda^k\widehat{(c_i-\tilde{c}_i)} + CD|\xi|^2\Lambda^k\widehat{(c_i-\tilde{c}_i)} \lesssim |\xi|^{k+1}\left(\|c_i\nabla\phi\|_{L^1} + \|uc_i\|_{L^1}\right). \tag{139}$$

接着，我们乘以积分因子 $e^{CD|\xi|^2 t}$，并对时间从 0 到 t 积分，得到逐点界

$$\begin{aligned}\left|\Lambda^k\widehat{(c_i-\tilde{c}_i)}(\xi,t)\right| &\lesssim |\xi|^{k+1}\left(\int_0^t \|c_i\nabla\phi\|_{L^1}\,ds + \int_0^t \|uc_i\|_{L^1}\,ds\right) \\ &\lesssim |\xi|^{k+1}\left(\int_0^t \|c_i\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}\,ds + \int_0^t \|\rho\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|c_i\|_{L^2}\,ds\right) \\ &\lesssim |\xi|^{k+1}\left(\int_0^t \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{4}}}\,ds + \int_0^t \frac{\|\rho\|_{L^2}+\|\nabla\rho\|_{L^2}}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\,ds\right) \\ &\lesssim |\xi|^{k+1}\left((t+1)^{\frac{1}{4}} + \int_0^t \frac{1}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}\,ds\right) \\ &\lesssim |\xi|^{k+1}(t+1)^{\frac{1}{4}},\end{aligned} \tag{140}$$

其中使用了 H¨older 不等式、由 (76) 得到的 $\|\nabla\phi\|_{L^2}$ 有界性、由 (57) 和 (109) 得到的 $\|c_i\|_{L^2}$ 和 $\|\nabla c_i\|_{L^2}$ 的衰减界，以及椭圆估计式 (16)。此外，根据帕塞瓦尔恒等式、逐点界 (140) 和球坐标下的富比尼定理，我们有

$$\left\|\Lambda^{k+1}(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 \gtrsim r^2(t)\left\|\Lambda^k(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 - (t+1)^{\frac{1}{2}}\,r^{2k+7}(t), \tag{141}$$

其中 r 取为 $r(t) = \sqrt[m]{\frac{}{CD\,(t+1)}}$。根据 (141)，微分不等式 (138) 变为

$$\frac{d}{dt}\left\|\Lambda^k(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 + CDr^2(t)\left\|\Lambda^k(c_i-\tilde{c}_i)\right\|_{L^2}^2 \lesssim (t+1)^{\frac{1}{2}}\,r^{2k+7}(t) + \frac{1}{(t+1)^{k+3}}. \tag{142}$$

乘以积分因子，并对时间从 0 到 t 积分后，我们得到所需的界 (131)，其中 $m > k+2$ 取为所选值。□

利用线性齐次热方程解的时间衰减锐性，我们得到如下命题：

命题 5. 假设对于所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$，都有 $c_i(0) \geq 0, c_i(0) \in H^k(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。存在一个时间 t_0，它取决于问题参数以及初始浓度的 L^1 范数和 H^k 范数，使得对于所有 $t \geq t_0$，我们有

$$\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2 \gtrsim \frac{1}{(t+1)^{k+\frac{3}{2}}} \tag{143}$$

对所有 $i \in \{1、\ldots、N\}$。

证明。对于每个 $i \in \{1、\ldots、N\}$，记 $\tilde{c}_i$ 为在 $\mathbb{R}^3$ 上满足无穷远衰减条件、具有相同初始数据 $\tilde{c}_i(0) = c_i(0)$ 的热方程 $\partial_t \tilde{c}_i - D\Delta \tilde{c}_i = 0$ 的解。利用反三角不等式和衰减界 (131)，可得

$$\left\|\Lambda^k \tilde{c}_i\right\|_{L^2} - \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2} \lesssim \left\|\Lambda^k (c_i - \tilde{c}_i)\right\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{k}{2}+1}}, \tag{144}$$

整理并调用界 (115) 后，得到

$$\begin{aligned} \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2} &\gtrsim -\frac{1}{(t+1)^{\frac{k}{2}+1}} + \left\|\Lambda^k \tilde{c}_i\right\|_{L^2} \gtrsim -\frac{1}{(t+1)^{\frac{k}{2}+1}} + \frac{1}{(t+1)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}} \\ &\geq \frac{C_1(t+1)^{\frac{1}{4}} - C_2}{(t+1)^{\frac{k}{2}+1}}. \end{aligned} \tag{145}$$

现在我们希望找到一个时间 t_0 和一个常数 C_3，使得对于所有 $t \geq t_0$，都有 $C_1(t+1)^{\frac{1}{4}} - C_2 \geq C_3(t+1)^{\frac{1}{4}}$。选取 $C_3 = \frac{C_1}{2}$ 并整理可得，t_0 的取值必须为 $t_0 \geq \left(\frac{2C_2}{C_1}\right)^4 - 1$。因此，我们得到不等式

$$\left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2} \geq \frac{C_1}{2(t+1)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}, \tag{146}$$

对于 $t \geq t_0$，如所需。 □

根据命题 2、3、4 和 5，我们得到以下定理：

定理 1. 假设对于所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$，$c_i(0) \geq 0, c_i(0) \in H^k(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$. 存在一个时间 t_0 和正定常数 N_1, N_2，它们依赖于问题参数以及初始浓度的 $L^1(\mathbb{R}^3)$ 范数和 $H^k(\mathbb{R}^3)$ 范数，使得

$$\frac{N_1}{(t+1)^{k+\frac{3}{2}}} \leq \left\|\Lambda^k c_i\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{N_2}{(t+1)^{k+\frac{3}{2}}}. \tag{147}$$

对于所有 $t \geq t_0$ 以及所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$。

4. 熵分析

本节中，我们研究 $\mathbb{R}^3$ 上与 NPD 模型相关的相对熵行为。我们用 $\mathrm{E}_i(t) = \int_{\mathbb{R}^3} c_i(x,t) \log c_i(x,t)\, dx$ 表示各个熵量，并用 $\mathrm{E}(t) = \sum_{i=1}^N \mathrm{E}_i(t)$ 表示总熵。

以下命题给出了 –E的下界，该下界随时间呈对数增长：

命题 *6.* 假设 $c_i(0) \geq 0, c_i(0) \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且对于任意 $i \in \{1, \ldots, N\}$，$\int_{\mathbb{R}^3} c_i(0) \log c_i(0) \in \mathbb{R}$，并且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。那么，存在正定常数 Γ_1 和 Γ_2，它们取决于问题参数、$E_i(0)$ $\|c_i(0)\|_{L^1}$ 和 $\|c_i(0)\|_{L^2}$；还存在一个正定常数 Γ_3，它仅取决于扩散率 D 和 $\|c_i(0)\|_{L^1}$，使得

$$-\mathcal{E}_i \geq \Gamma_1 + \frac{3}{2}\|c_i(0)\|_{L^1} \log(\Gamma_2 + \Gamma_3 t) \tag{148}$$

对于任意 $t \geq 0$ 和所有 $i \in \{1, \ldots, N\}$。因此，熵 $\mathcal{E}$ 满足

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{E}(t) = -\infty. \tag{149}$$

证明。 将能斯特–普朗克偏微分方程 (9) 乘以 $\log c_i$，在空间区域 $\mathbb{R}^3$ 上积分，分部积分，并利用泊松方程 (12)，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_i(t) &= -D \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla c_i \cdot \nabla c_i}{c_i}\, dx - z_i D \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla c_i \, dx \\ &= -4D \left\| \nabla \sqrt{c_i} \right\|_{L^2}^2 - z_i D \int_{\mathbb{R}^3} \rho c_i \, dx. \end{aligned} \tag{150}$$

由于 $\frac{c_i\, dx}{\int_{\mathbb{R}^3} c_i}$ 是概率测度，且 $\log x$ 是凹函数，因此我们可以应用詹森不等式，得到以下熵的上界

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} c_i \log c_i \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^3} c_i \, dx \right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c_i}{\int_{\mathbb{R}^3} c_i \, dx} \log c_i \, dx \\ &\leq \|c_i\|_{L^1} \log \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^3} c_i^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^3} c_i \, dx} \right) = \|c_i\|_{L^1} \log \left(\frac{\left\| \sqrt{c_i} \right\|_{L^4}^4}{\|c_i\|_{L^1}} \right). \end{aligned} \tag{151}$$

根据 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式，我们有

$$\mathcal{E}_i(t) \leq \|c_i\|_{L^1} \log \left(\frac{C \left\| \sqrt{c_i} \right\|_{L^2} \left\| \nabla \sqrt{c_i} \right\|_{L^2}^3}{\|c_i\|_{L^1}} \right) = \frac{3}{2} \|c_i\|_{L^1} \log \left(\frac{C \left\| \nabla \sqrt{c_i} \right\|_{L^2}^2}{\|c_i\|_{L^1}^{\frac{1}{3}}} \right), \tag{152}$$

因此，两边取指数后可得

$$\exp\left(-\frac{2\mathcal{E}_i}{3 \|c_i\|_{L^1}} \right) \frac{\left\| \nabla \sqrt{c_i} \right\|_{L^2}^2}{\|c_i\|_{L^1}^{\frac{1}{3}}} \geq \frac{1}{C}. \tag{153}$$

随后，我们对 $N_i(t) = \exp\left({}^{-2\mathcal{E}_i}/_{3\|c_i\|_{L^1}} \right)$ 关于时间求导，并利用等式 (150)、界 (153) 以及衰减估计 (57)，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_i(t) &= -\frac{2}{3 \|c_i\|_{L^1}} N_i(t) \, \frac{d}{dt}\mathcal{E}_i = \frac{2}{3 \|c_i\|_{L^1}} N_i(t) \left(4D \left\| \nabla \sqrt{c_i} \right\|_{L^2}^2 + z_i D \int_{\mathbb{R}^3} \rho c_i \, dx \right) \\ &\geq \frac{8D}{3C \|c_i\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}} + \frac{2 z_i D}{3 \|c_i\|_{L^1}} N_i(t) \int_{\mathbb{R}^3} \rho c_i \, dx \geq \frac{8D}{3C \|c_i\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}} - \frac{2|z_i| D}{3 \|c_i\|_{L^1}} N_i(t) \|\rho\|_{L^2} \|c_i\|_{L^2} \\ &\geq \frac{8D}{3C \|c_i\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}} - \frac{2|z_i| D \, \Gamma}{3 \|c_i\|_{L^1} (t+1)^{\frac{3}{2}}} N_i(t). \end{aligned} \tag{154}$$

为便于记号，我们记 $c = \frac{2|z_i| D \, \Gamma}{3\|c_i\|_{L^1}}$，并将微分不等式 (154) 乘以积分因子 $e^{c \int_0^t (s+1)^{-1.5}\, ds} = e^{c\left(2 - 2(t+1)^{-0.5}\right)}$ 后求解，得到

$$N_i(t) \geq e^{-2c} \left(N_i(0) + \frac{8D}{3C \|c_i\|_{L^1}^{\frac{2}{3}}} t \right). \tag{155}$$

应用 对后一个不等式两边取对数函数，即可得到所需结果 . □

该方 下面的命题给出了 –E 的上界，其随时间呈对数增长：

命题 7. 假设 $c_i(0) \geq 0, c_i(0) \in H^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$，且对于任意 $i \in \{1, \dots, N\}$，$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^6 c_i(0)^2 \in \mathbb{R}$，并且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。那么，存在一个时间 T_Γ（取决于初始浓度的 L^1 范数和 H^2 范数）以及正定常数 Γ_4、Γ_5 和 Γ_6，它们取决于 $\|c_i(0)\|_{L^1}$、$\|c_i(0)\|_{H^2}$ 和 $\||x|^3 c_i(0)\|_{L^2}$，使得

$$-\mathcal{E}(t) \leq \Gamma_4 \log(\Gamma_5 + \Gamma_6\, t^{\frac{15}{16}}) \tag{156}$$

对任意 $t \geq t_\Gamma$。

证明。 证明分为两个主要步骤。

步骤 1. 矩估计。 将能斯特–普朗克偏微分方程 (9) 乘以 $|x|^6 c_i$，得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^2 + D\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 \\ &\qquad = -D\int_{\mathbb{R}^3} \nabla c_i \cdot \nabla\left(|x|^6\right) c_i\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla c_i\, |x|^6 c_i\, dx - z_i D \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (c_i \nabla \phi)\, |x|^6 c_i\, dx \\ &\qquad = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \end{aligned} \tag{157}$$

现在我们逐项处理。对于第 I 项，利用指数为 $3\ 2, 3$ 的霍尔德不等式以及衰减界 (57)，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -D\int_{\mathbb{R}^3} c_i \nabla c_i \cdot \left(6x|x|^4\right) dx \leq \frac{D}{4}\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 + C\left\||x|^2 c_i\right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{D}{4}\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 + C\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|c_i\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \leq \frac{D}{4}\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 + \frac{C}{(t+1)^{\frac{1}{2}}}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}. \end{aligned} \tag{158}$$

对于第 II 项，利用 u 的无散性质并分部积分，得到

$$\mathrm{II} = \int_{\mathbb{R}^3} u c_i \cdot \nabla c_i\, |x|^6\, dx + 6\int_{\mathbb{R}^3} u c_i^2 \cdot x|x|^4\, dx = -\mathrm{II} + 6\int_{\mathbb{R}^3} u c_i^2 \cdot x|x|^4\, dx. \tag{159}$$

利用连续索об列夫嵌入、势估计 (16) 以及衰减界 (57)、(109) 和 (115)，我们对 L^∞ 中的速度作如下估计

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &\lesssim \|u\|_{W^{1,6}} \lesssim \|u\|_{L^6} + \|\nabla u\|_{L^6} \\ &\lesssim \|\rho\|_{L^6}\|\nabla\phi\|_{L^\infty} + \|\nabla\rho\|_{L^6}\|\nabla\phi\|_{L^\infty} + \|\rho\|_{L^6}\|\Delta\phi\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \left(\|\nabla\rho\|_{L^2} + \|\Delta\rho\|_{L^2}\right)\left(\|\rho\|_{L^2} + \|\nabla\rho\|_{L^2}\right) + \|\nabla\rho\|_{L^2}\left(\|\nabla\rho\|_{L^2} + \|\Delta\rho\|_{L^2}\right) \lesssim \frac{1}{(t+1)^2}, \end{aligned} \tag{160}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= 3\int_{\mathbb{R}^3} u c_i^2 \cdot x|x|^4\, dx \lesssim \left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}\left\||x|^2 c_i\right\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty} \lesssim \left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}\|c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\|u\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{9}{4}}}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}, \end{aligned} \tag{161}$$

在对 $\left\||x|^2 c_i\right\|_{L^2}$ 使用与 (158) 中类似的插值后，再次利用势能估计 (16)，我们以类似方式估计项 III，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{III} &= z_i D\int_{\mathbb{R}^3} c_i \nabla\phi \cdot \left(\nabla c_i |x|^6 + 6x|x|^4 c_i\right) dx \\ &\lesssim \left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty} + \left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}\left\||x|^2 c_i\right\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{D}{4}\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 + C\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^2\|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 + C\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}\|c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\|\nabla\phi\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{D}{4}\left\||x|^3 \nabla c_i\right\|_{L^2}^2 + \frac{C}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^2 + \frac{C}{(t+1)}\left\||x|^3 c_i\right\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}. \end{aligned} \tag{162}$$

因此，结合这些单独的估计并使用 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{2}}}\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{(t+1)}\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^2\\ &\leq \frac{C_0}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^2+C(t+1)^{\frac{3}{2}},\end{aligned} \tag{163}$$

应用格朗沃尔不等式后，得到

$$\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^2 \leq C_1+C_2(t+1)^{\frac{5}{2}}, \tag{164}$$

其中， C_1 和 C_2 取决于 $\left\||x|^3c_i(0)\right\|_{L^2}$、 $\|c_i(0)\|_{H^2}$、 $\|c_i(0)\|_{L^1}$以及问题参数。

步骤 2. 绝对熵上界。 根据 $W^{1,6}$ 在 L^∞ 中的连续嵌入以及索伯列夫嵌入定理，我们知道

$$\|c_i\|_{L^\infty}\leq\|c_i\|_{W^{1,6}}\lesssim\|\nabla c_i\|_{L^2}+\|\Delta c_i\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{(t+1)^{\frac{5}{4}}}\leq\frac{1}{2}, \tag{165}$$

对于 $t\geq T_\Gamma$，其中 T_Γ 是一个常数，取决于初始离子浓度的 L^1 范数和 H^2 范数。因此，对于 $t\geq T_\Gamma$ 和几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^3$，有 $|c_i(x,t)|\leq\frac{1}{2}$。由于对数函数的凹性，且 $\frac{c_i\,dx}{\int_{\mathbb{R}^3}c_i}$ 是一个概率测度，我们可以利用詹森不等式将熵上界估计为

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}(t)|&\leq\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^3}|c_i\log c_i|\,dx=\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^3}c_i\log\frac{1}{c_i}\,dx=4\sum_{i=1}^N\left(\int_{\mathbb{R}^3}c_i\,dx\right)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{c_i}{\int_{\mathbb{R}^3}c_i\,dx}\log\left(\frac{1}{c_i}\right)^{\frac{1}{4}}\,dx\\ &\lesssim\sum_{i=1}^N\|c_i\|_{L^1}\log\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{c_i^{\frac{3}{4}}}{\|c_i\|_{L^1}}\,dx\right),\end{aligned} \tag{166}$$

对于任意 $t\geq t_\Gamma$。利用指数为 $8\,3$、$8\,5$的 H¨older 不等式以及矩估计 (164)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}c_i^{\frac{3}{4}}\,dx&=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(1+|x|)^{\frac{9}{4}}\,c_i^{\frac{3}{4}}}{(1+|x|)^{\frac{9}{4}}}\,dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^6\,c_i^2\,dx\right)^{\frac{3}{8}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{18}{5}}}\,dx\right)^{\frac{5}{8}}\\ &\lesssim\|c_i\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}+\left\||x|^3c_i\right\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\lesssim 1+(t+1)^{\frac{15}{16}}.\end{aligned} \tag{167}$$

因此，将其代回 (166)，即可得到所需的估计 (156)。 □

当空间区域有界时，熵随时间衰减至 0:

命题 8。设 $A>0$。假设 $c_i(0)\geq 0$， $c_i(0)\in H^2(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^3}\rho_0=0$ 对所有 $i\in\{1,\ldots\ldots,N\}$均成立。那么，有

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int_{\{|x|\leq A\}}c_i\log c_i\,dx\right|=0 \tag{168}$$

对所有 $i\in\{1,\ldots\ldots,N\}$。

证明。 为证明有限空间区域上的熵收敛性，我们将半径为 A 的有限球面上的熵积分分解为以下两个积分

$$\begin{aligned}\left|\int_{\{|x|\le A\}} c_i \log c_i \, dx\right| &\le \int_{\{|x|\le A\}} |c_i \log c_i| \, dx \\ &= \int_{\{|x|\le A\}\cap\{c_i\le 1\}} |c_i \log c_i| \, dx + \int_{\{|x|\le A\}\cap\{c_i>1\}} |c_i \log c_i| \, dx \\ &\le \int_{\{|x|\le A\}\cap\{c_i\le 1\}} c_i \log \frac{1}{c_i} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} c_i^2 \, dx \lesssim \int_{\{|x|\le A\}} c_i^{\frac{1}{2}} \, dx + \|c_i\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \left(\int_{\{|x|\le A\}} c_i^2 \, dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\{|x|<A\}} 1 \, dx\right)^{\frac{3}{4}} + \|c_i\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \left(\frac{4}{3}\pi A^3\right)^{\frac{3}{4}} \|c_i\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|c_i\|_{L^2}^2 \lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{8}}} + \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} \lesssim \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{8}}}.\end{aligned} \tag{169}$$

令 $t \to \infty$，即可得到所需结果。 □

根据命题6、7和8，我们得到以下定理：

定理*2.* 假设 $c_i(0) \ge 0$, $c_i(0) \in H^2(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, $\int_{\mathbb{R}^3} c_i(0) \log c_i(0) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^3} |x|^6 c_i(0)^2 \in \mathbb{R}$ 对任意 $i \in \{1, \dots, N\}$ 均成立，且 $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0 = 0$。那么，存在一个时间 T_Γ，它取决于初始浓度的 L^1 范数和 H^2 范数；并且存在正定常数 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$，它们取决于初始数据和问题参数，使得

$$-\gamma_1(1+\log(1+t)) \le \mathcal{E}(t) \le -\gamma_2(1+\log(1+t)) \tag{170}$$

对任意 $t \ge t_\Gamma$ 均成立。此外，还有

$$\lim_{t\to\infty} \left|\int_{\{|x|\le A\}} c_i \log c_i \, dx\right| = 0 \tag{171}$$

对任意 $A > 0$ 以及任意 $i \in \{1, \dots, N\}$ 均成立。

数据可用性声明。 本研究没有相关数据。

利益冲突。 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Elie Abdo 和 Mihaela Ignatova. 带电流体的长时间有限维性. *Nonlinearity*, 34(9):6173, 2021. [2] Elie Abdo 和 Mihaela Ignatova. 关于能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统的空间解析性. 《数学流体力学杂志》, 24(2):51, 2022.[3] Elie Abdo 和 Mihaela Ignatova. 能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统的长时间动力学. 微分方程杂志, 379:794–828, 2024.[4] Elie Abdo 和 ¯Dor¯de Nikoli´c. 三维能斯特–普朗克–达西模型的长时间动力学. *Nonlinearity*, 38(9):095009, 2025. [5] Piotr Biler、Waldemar Hebisch 和 Tadeusz Nadzieja. 德拜系统：解的存在性与长时间行为. 《非线性分析：理论、方法与应用》, 23(9):1189–1209, 1994. [6] Kenneth S Cole. 枪乌贼巨轴突膜的电扩散模型. 《生理学评论》, 45(2):340–379, 1965. [7] Peter Constantin 和 Mihaela Ignatova. 关于能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统. 《理性力学与分析档案》, 232(3):1379–1428, 2019. [8] Peter Constantin、Mihaela Ignatova 和 Fizay-Noah Lee. 远离平衡的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统. 《理性力学与分析档案》, 240(2):1147–1168, 2021. [9] Peter Constantin、Mihaela Ignatova 和 Fizay-Noah Lee. 近平衡的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统. 《纯粹与应用泛函分析》, 7(1):175–196, 2022.[10] Scott M Davidson、Matthias Wessling 和 Ali Mani. 图案加速电对流的动力学状态. 《科学报告》, 6(1):22505, 2016.

[11] Andr´e Fischer 和 J¨urgen Saal. 三维空间中电动流动过程的整体弱解. 演化方程期刊, 17(1):309–333, 2017. [12] Herbert Gajewski 和 Konrad Gr¨oger. 半导体载流子输运的基本方程. 数学分析与应用杂志, 113(1):12–35, 1986. [13] Jun Gao、Wei Guo、Dan Feng、Huanting Wang、Dongyuan Zhao 和 Lei Jiang. 用于盐度梯度发电的高性能离子二极管膜. 美国化学会志, 136(35):12265–12272, 2014. [14] David E Goldman. 膜中的电扩散. 载于《膜运输：人物与思想》, 第251–259页. 施普林格, 1989.[15] Matthias Herz 和 Peter Knabner. 电解质溶液模型弱解的整体存在性——第1部分：双组分情形. arXiv 预印本 arXiv:1605.07396, 2016. [16] Matthias Herz 和 Peter Knabner. 电解质溶液模型弱解的整体存在性——第2部分：多组分情形. arXiv 预印本 arXiv:1605.07445, 2016. [17] Matthias Herz、Nadja Ray 和 Peter Knabner. 达西–能斯特–普朗克–泊松系统整体弱解的存在性与唯一性. GAMM-Mitteilungen, 35(2):191–208, 2012. [18] Mihaela Ignatova 和 Jingyang Shu. 能斯特–普朗克–达西系统的整体光滑解. 《数学流体力学杂志》, 24(1):26, 2022. [19] Jerzy J Jasielec. 神经科学中的电扩散现象与能斯特–普朗克–泊松方程. Electrochem, 2(2):197–215, 2021.[20] Joseph W Jerome. 运动介质中电荷输运的解析方法. 输运理论与统计物理, 31(4-6):333–366, 2002. [21] Tosio Kato 和 Gustavo Ponce. 对易子估计与欧拉方程、纳维–斯托克斯方程. 纯粹与应用数学通讯, 41(7):891–907, 1988. [22] Christof Koch. 计算生物物理学：单个神经元中的信息处理. 牛津大学出版社, 2004. [23] Anna Lee、Jeffrey W Elam 和 Seth B Darling. 用于水净化的膜材料：设计、开发与应用 . 环境科学：水研究与技术 , 2(1):17–42, 2016. [24] Fizay-Noah Lee. 具有混合边界条件的能斯特–普朗克–纳维–斯托克斯系统的整体正则性. Nonlinearity, 36(1):255, 2022.[25] Hyomin Lee、Junsuk Kim、Jina Yang、Sang Woo Seo 和 Sung Jae Kim. 连续水净化中胶体颗粒的扩散泳排斥. 芯片实验室, 18(12):1713–1724, 2018.[26] Courtney L Lopreore、Thomas M Bartol、Jay S Coggan、Daniel X Keller、Gina E Sosinsky、Mark H Ellisman 和 Terrence J Sejnowski. 生物系统中三维电扩散的计算建模：在郎飞结中的应用. 生物物理学杂志, 95(6):2624–2635, 2008. [27] M.S. Mock. 半导体器件数学模型分析. 数值计算进展丛书. Boole Press, 1983.[28] Yoichiro Mori 和 Charles Peskin. 一种基于电扩散方程并在膜处采用内部边界条件的细胞电生理数值方法. 应用数学与计算科学通讯, 4(1):85–134, 2009. [29] Charles Nicholson、Kevin C Chen、Sabina Hrabˇetov´a 和 Lian Tao. 脑细胞外空间中的分子扩散：理论与实验. 脑研究进展, 125:129–154, 2000. [30] Jurgis Pods、Johannes Sch¨onke 和 Peter Bastian. 使用泊松–能斯特–普朗克方程的神经元与细胞外空间电扩散模型——轴突模型内外电势的数值模拟. 生物物理学杂志, 105(1):242–254, 2013. [31] Ning Qian 和 TJ Sejnowski. 一种用于计算分支树突、树突棘和轴突中膜电位与离子浓度的电扩散模型. 生物控制论, 62(1):1–15, 1989. [32] I. Rubinstein. 离子电扩散. 应用与数值数学研究. 工业与应用数学学会, 1990.[33] Rolf J Ryham. 电流体动力学建模耗散系统的存在性、唯一性、正则性与长期行为. arXiv 预印本 arXiv:0910.4973, 2009. [34] Markus Schmuck. 纳维–斯托克斯–能斯特–普朗克–泊松系统分析. 应用数学模型与方法, 19(06):993–1014, 2009. [35] Zi Yang、Yi Zhou、Zhiyuan Feng、Xiaobo Rui、Tong Zhang 和 Zhien Zhang. 水净化用反渗透与纳滤膜综述. Polymers, 11(8):1252, 2019. [36] Haitao Zhu、Bo Yang、Congjie Gao 和 Yaqin Wu. 电渗析过程中海水淡化的能斯特–普朗克理论离子传输建模. 亚太化学工程杂志, 15(2):e2410, 2020.

(E. Abdo) 贝鲁特美国大学数学系，贝鲁特 1107-2020，黎巴嫩。电子邮箱: ea94@aub.edu.lb (J.Germany) 贝鲁特美国大学数学系、物理系，贝鲁特 1107-2020，黎巴嫩。电子邮箱: jmg15@mail.aub.edu (M.K. Hamdan) 贝鲁特美国大学数学系、哲学系，贝鲁特 1107-2020，黎巴嫩。电子邮箱: mkh28@mail.aub.edu (K. Kontar) 贝鲁特美国大学物理系、数学系，贝鲁特 1107-2020，黎巴嫩。电子邮箱: ksa34@mail.aub.edu