arXiv:2601.02217v1 [math.CV] 5 Jan 2026

局部狄利克雷空间中的正交投影

EMMANUEL FRICAIN 和 贾瓦德·马什雷希

Abstract. 我们给出了一个显式公式，用于将函数正交投影到局部狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\mu$ 中次数至多为 n 的解析多项式子空间上，其中正测度 μ 由位于单位圆 $\mathbb{T}$ 上若干点处的有限个狄拉克测度组成。该结果有两个关键方面：首先，尽管已知多项式在 $\mathcal{D}_\mu$ 中稠密，但这种方法在该空间内提供了一种具体的线性逼近方案。其次，由于所涉及多项式之间具有正交性，该方案是定性的，因为任意函数 $f \in \mathcal{D}_\mu$ 到所投影子空间的距离都可以明确确定。

1. Introduction

设 $\mathbb{D}$ 为复平面中的开单位圆盘，$\mathbb{T}$ 表示其边界。对于每个 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，即定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数族，f 的局部狄利克雷积分定义为

$$\mathcal{D}_\zeta(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \,\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, dA(z), \tag{1.1}$$

其中 $\zeta \in \mathbb{T}$ 和 $dA(z) = dx\,dy$ 是平面勒贝格测度。局部狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\zeta$ 由所有满足条件$\mathcal{D}_\zeta(f) < \infty$的函数 $f \in$Hol(𝔻)构成。众所周知，$f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 属于 $\mathcal{D}_\zeta$ 当且仅当

$$f(z) = a + (z-\zeta)g(z), \tag{1.2}$$

其中 $g \in H^2$ 和 $a \in \mathbb{C}$。此外，我们有 $\mathcal{D}_\zeta(f) = \|g\|^2_{H^2}$，如 [9] 和 [2, 第 111] 页所示。这种表示保证了

$$f(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta) = a. \tag{1.3}$$

2020年数学主题分类：33C45、33C47、42B35。关键词和短语：局部狄利克雷空间、正交归一基、差商算子。本研究部分由NSERC探索研究基金、加拿大研究讲席计划以及Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01）资助。

因此，差商算子 $Q_\zeta : \mathcal{D}_\zeta \to H^2$,

$$(Q_\zeta f)(z) := \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

是定义良好的。因此，我们可以在 $\mathcal{D}_\zeta$ 上赋予范数

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\zeta} := |f(\zeta)|^2 + \|Q_\zeta f\|^2_{H^2}. \tag{1.4}$$

利用极化恒等式，我们还可以得到内积

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\mathcal{D}_\zeta} = f_1(\zeta)\,\overline{f_2(\zeta)} + \langle Q_\zeta f_1, Q_\zeta f_2\rangle_{H^2}. \tag{1.5}$$

Richter 和 Sundberg [9, 10, 11] 系统地研究了局部狄利克雷空间，并将其与经典狄利克雷空间上移位算子的不变子空间联系起来。这些空间也出现在其他各种研究中 [12, 13, 14]。尽管本文主要关注局部狄利克雷空间，但我们还必须考虑如下给出的一种推广：

$$\mathcal{D}_\mu(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, P\mu(z)\, dA(z), \tag{1.6}$$

其中

$$P\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2}\, d\mu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D},$$

是 μ 的泊松积分。关于这些空间的详细描述可见 [2, 第 7] 章。注意， $P\mu$ 是 $\mathbb{D}$ 上的正调和函数；根据 Herglotz 定理， [5], 任意正调和函数都具有这样的表示。S. Richter 证明了多项式在 $\mathcal{D}_\mu$ [8] 中稠密。Richter 和 Sundberg [9], 、Aleman [1], 以及 Sarason [12] 进一步改进了关于膨胀 f_r 的狄利克雷积分所需的估计。

本文其余部分安排如下。第2节陈述主要结果，包括定理 2.2 和 2.3。第3节简要讨论 $\mathcal{D}_\mu$ ，并介绍我们所用的正交多项式。第4节介绍关于 s 个变量 ζ_0，...，ζ_{s-1} 的 k 次完全齐次对称多项式，以及齐次对称多项式。最后，第5节给出主要结果的证明。

2. The main result

对于一个解析函数

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j) z^j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}),$$

定义

$$\begin{aligned}\Delta(n,j) &= \sum_{k=2j-n+s}^{j+s}\left(\sum_{m=j-n+s}^{k-j}(-1)^m T_m S_{k-j-m}\right)\hat{f}(k)\\ &+ \sum_{k=j+s+1}^{\infty}\left(\sum_{m=j-n+s}^{s}(-1)^m T_m S_{k-j-m}\right)\hat{f}(k),\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中，指标 n 和 j 的取值范围分别为 $n \geq s$ 和 $n-s+1 \leq j \leq n$。上文表达式中使用的对称多项式 $S_k = S_k(z_1,\ldots,z_s)$ 和 $T_k = T_k(z_1,\ldots,z_s)$，将在第4节中作进一步讨论。此外，参数 $z_1,\ldots,z_s$ 是测度 μ 的谱中的点；为方便起见，将它们记作 $\zeta_0,\ldots,\zeta_{s-1}$。

以下结果给出了调和加权狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\mu$ 中次数至多为 n 的多项式子空间 $\mathcal{P}_n$ 上正交投影 $\mathbf{P}_n$ 的显式公式。这里，$c_j > 0$ 和 $\mu = c_0\delta_{\zeta_0} + \cdots + c_{s-1}\delta_{\zeta_{s-1}}$ 是支撑于圆周 $\mathbb{T}$ 上的点 ζ_0、ζ_1、…、ζ_{s-1} 处的离散测度。

定理 2.2。设 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{f}(j)z^j \in \mathcal{D}_\mu$，并且对于 $n \geq s$ 和 $n-s+1 \leq j \leq n$，按（2.1）定义 $\Delta(n,j)$。那么，对于 $n \geq s$，

$$\mathbf{P}_n f(z) = \sum_{j=0}^{n-s}\hat{f}(j)z^j + \sum_{j=n-s+1}^{n}\Delta(n,j)z^j.$$

且 $\mathbf{P}_n f \to f$ 属于 $\mathcal{D}_\mu$-范数。

此外，还可以根据 f 的泰勒系数，给出 $\mathcal{D}_\mu$ 中任意元素与由次数至多为 n 的多项式构成的子空间 $\mathcal{P}_n$ 之间距离的显式公式。回顾一下，在赋范空间中，点 x 到集合 M 的距离定义为

$$\operatorname{dist}(x,M) := \inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

该公式提供了一种根据给定函数的泰勒级数计算距离的清晰方法。

定理 2.3。采用定理 2.2 的记号，对于 $n \geq s$，有

$$dist_{\mathcal{D}_\mu}(f,\mathcal{P}_n) = \left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}(\zeta_0,\ldots,\zeta_{s-1})\right|^2\right\}^{1/2}.$$

$\mathcal{D}_\zeta = \mathcal{D}_{\delta_\zeta}$ 的特殊情形是，在 $\mathbb{T}$ 上某一点处集中一个狄拉克测度。这类研究最初便聚焦于此。最初的证明绕过了正交性的概念，直接证明了

在 [6] 中，$\mathbf{P}_n f \to f$ 在 $\mathcal{D}_\zeta$-范数下。后来，这一结果在强调正交多项式的基础上重新得到，并进一步推广到涉及 [3] 中 $\mathbb{T}$ 上有限个狄拉克测度组成的测度的情形。然而，在早期的方法中，$\mathcal{D}_\mu$ 上的范数定义为

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\zeta} = \|f\|^2 + \|Q_\zeta f\|^2_{H^2},$$

这与 (1.4) 等价。

3. Discrete measures with finite support

设 $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ 是 s 上互不相同的点（为克服后续公式中的记号困难，此处我们从零开始编号）。令 $c_j > 0$，并考虑离散测度

$$\mu = c_0\delta_{\zeta_0} + \cdots + c_{s-1}\delta_{\zeta_{s-1}}.$$

作为 (1.2) 的直接推广，每个 $f \in \mathcal{D}_\mu$ 都有唯一的表示

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{s-1}z^{s-1} + (z-\zeta_0)(z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_{s-1})g(z), \tag{3.1}$$

其中 $g \in H^2$。容易看出

$$g := Q_{\zeta_0}Q_{\zeta_1}\cdots Q_{\zeta_{s-1}}f, \qquad f \in \mathcal{D}_\mu.$$

因此，我们定义算子

$$Q := Q_{\zeta_0}Q_{\zeta_1}\cdots Q_{\zeta_{s-1}}$$

其顺序与 Q_{ζ_j} 无关。为简化记号，令

$$q(z) := (z-\zeta_0)(z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_{s-1}) \tag{3.2}$$

因此可将 (3.1) 改写为

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{s-1}z^{s-1} + q(z)(Qf)(z). \tag{3.3}$$

根据 (1.4)，$\mathcal{D}_\mu$ 上的一个可能的范数为

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\mu} := \sum_{k=0}^{s-1} |f(\zeta_k)|^2 + \|Qf\|^2_{H^2}, \tag{3.4}$$

相应的内积为

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_\mu} := \sum_{k=0}^{s-1} f(\zeta_k)\overline{g(\zeta_k)} + \langle Qf, Qg\rangle_{H^2}. \tag{3.5}$$

然而，还可以通过其他方式在半范数 $\|Qf\|_{H^2}$ 中添加一项，从而构造真正的范数。本文研究了其中三种可能性

，见 [7]。所有这些范数都等价，但相对于（3.4），计算更为简单。

相对于上述内积，多项式的正交基很容易求得。首先，令

$$p_k(z) := \frac{q(z)}{(z-\zeta_k)q'(\zeta_k)}, \qquad 0 \le k \le s-1.$$

那么，对于所有满足 $k \neq \ell$ 的 $k, \ell, j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$，$Qp_k = 0$，$p_k(\zeta_j)p_\ell(\zeta_j) = 0$ 且 $p_k(\zeta_k) = 1$。因此，$p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$ 是一组张成空间为 $\mathcal{P}_{s-1}$ 的多项式正交归一集。不过，注意到 $\deg(p_0) = \cdots = \deg(p_{s-1}) = s-1$。接着令

$$p_j(z) = q(z)z^{j-s}, \qquad j \ge s. \tag{3.6}$$

经直接验证可知，$(p_j)_{j\ge 0}$ 是 $\mathcal{D}_\mu$ 的正交归一基。

4. 对称多项式

为了推导出到次数不超过 n 的多项式子空间的正交投影的显式公式，我们需要回顾对称多项式理论中的一些关键事实。以下是变量为 s 个（$z_1, \dots, z_s$）的 k 次对称多项式的两种主要类型：

(i) 完全齐次对称多项式定义为

$$S_k(z_1, \dots, z_s) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le s} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}, \qquad k \ge 1,$$

其中 $S_0(z_1, \dots, z_s) := 1$。该和由所有可以用变量 $z_1, \dots, z_s$ 构成的 k 次单项式组成，变量可以重复使用。

(ii) 齐次对称多项式定义为

$$T_k(z_1, \dots, z_s) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le s} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}, \qquad k \ge 1,$$

其中 $T_0(z_1, \dots, z_s) := 1$。在这种情况下，变量不能重复使用，因此 k 至多为 s。

注意，$S_0 = T_0$ 和 $S_1 = T_1$，但对于 $k \ge 2$，$S_k \neq T_k$。

第一次遇到对称多项式是在展开 (3.2) 中的 q 时。我们可以将取决于参数 ζ_0、……、ζ_{s-1} 和变量 z 的 q 表示如下：

$$q(z) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} T_{s-j}(\zeta_0, \dots, \zeta_{s-1}) z^j. \tag{4.1}$$

为简便起见，以下我们将一直使用 S_k 和 T_k，并理解其自变量为 ζ_0、.....、ζ_{s-1}。

有许多恒等式突出了对称多项式的各种特征。有关对称多项式的详细论述，请参见 [4]。在本文中，我们将用到两个众所周知的恒等式：

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m T_m S_{k-m} = 0, \qquad 1 \le k \le s, \tag{4.2}$$

$$\sum_{m=0}^{s}(-1)^m T_m S_{k-m} = 0, \qquad k \ge s+1. \tag{4.3}$$

5. Proofs of Theorem 2.2 and Theorem 2.3

定理 2.2 的证明。设 $f \in \mathcal{D}_\mu$。存在 $g \in H^2$ 和系数 a_0、...、a_{s-1}，使得（3.1）成立。由于 p_0、...、p_{s-1} 也张成 $\mathcal{P}_{s-1}$，因此存在系数 b_0、...、b_{s-1}，使得

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{s-1}z^{s-1} = b_0 p_0(z) + \cdots + b_{s-1}p_{s-1}(z).$$

由于 $p_j(\zeta_k) = \delta_{jk}$、$0 \le j$、$k \le s-1$，系数 b_k 可通过下列方程组唯一确定

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_0 & \cdots & \zeta_0^{s-1} \\ 1 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_1^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_{s-1} & \cdots & \zeta_{s-1}^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{s-1} \end{pmatrix}.$$

现在，利用 g 的泰勒级数展开，我们得到

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_{s-1}z^{s-1} + q(z)\sum_{j=0}^{\infty}\hat{g}(j)z^j \\ &= b_0 p_0(z) + \cdots + b_{s-1}p_{s-1}(z) + \sum_{j=s}^{\infty}\hat{g}(j-s)p_j(z), \end{aligned} \tag{5.1}$$

这就是 f 关于正交归一基 $(p_n)_{n\ge 0}$ 的分解，而且该级数在 $\mathcal{D}_\mu$-范数下收敛。为用 $f(j)$ 表示 b_jˆ 和 ˆ$g(j)$，我们进一步利用 (5.1)。首先，代入 $z = \zeta_k$，并注意 $p_j(\zeta_k) = \delta_{jk}$, $0 \le j, k \le s-1$ 以及 $p_j(\zeta_k) = 0$, $j \ge s$，得到

$$b_k = f(\zeta_k) = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{f}(j)\zeta_k^j, \qquad 0 \le k \le s-1.$$

其次，对 (5.1) 两边应用 Q。由于 $Qp_j = 0,\ 0 \le j \le s-1$和 $Qp_j = z^{j-s},\ j \ge s$，我们得到

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{g}(j) z^j = Qf(z). \tag{5.2}$$

为显式地用 $f(n)$ 表示 $\hat{g}(n)$，我们考虑仅在 ζ 处存在一个狄拉克测度的情形。此时公式变为

$$\begin{pmatrix} \hat{g}(0) \\ \hat{g}(1) \\ \hat{g}(2) \\ \hat{g}(3) \\ \hat{g}(4) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \hat{f}(2) \\ \hat{f}(3) \\ \hat{f}(4) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

将右侧矩阵记为 M_ζ。由于 $Q = Q_{\zeta_0} Q_{\zeta_1} \cdots Q_{\zeta_{s-1}}$，我们需要求出

$$M := M_{\zeta_0} M_{\zeta_1} \cdots M_{\zeta_{s-1}}.$$

经简单计算可得

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & S_1 & S_2 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & S_1 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中前 s 列为零。因此，去掉零列后，由 (5.2) 可得

$$\begin{pmatrix} \hat{g}(0) \\ \hat{g}(1) \\ \hat{g}(2) \\ \hat{g}(3) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \\ 0 & S_0 & S_1 & S_2 & \cdots \\ 0 & 0 & S_0 & S_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & S_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(s) \\ \hat{f}(s+1) \\ \hat{f}(s+2) \\ \hat{f}(s+3) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

换言之，

$$\hat{g}(j) = \sum_{k=s+j}^{\infty} \hat{f}(k) S_{k-s-j}(\zeta_0, \ldots, \zeta_{s-1}), \qquad j \ge 0. \tag{5.3}$$

因此， f 关于正交归一基（p_j）$_{j\geq 0}$ 的正交归一分解为

$$f=\sum_{j=0}^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\zeta_j^k\right)p_j+\sum_{j=s}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}(\zeta_0,\ldots,\zeta_{s-1})\right)p_j. \tag{5.4}$$

因此， $f\in\mathcal{D}_\mu$ 到 $\mathcal{P}_n$、 $n\geq s$上的正交投影为

$$\mathbf{P}_nf=\sum_{j=0}^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\zeta_j^k\right)p_j+\sum_{j=s}^{n}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}(\zeta_0,\ldots,\zeta_{s-1})\right)p_j. \tag{5.5}$$

最后，我们根据单项式 z^n给出$\mathbf{P}_nf$ 的另一个公式。由(3.6)和(4.1),

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=s}^{n}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}\right)p_j(z)=\sum_{j=s}^{n}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}\right)q(z)z^{j-s}\\
=&\sum_{j=s}^{n}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}\right)\left(\sum_{m=0}^{s}(-1)^{s-m}T_{s-m}z^{m+j-s}\right)\\
=&\sum_{j=s}^{n}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}\right)\left(\sum_{\ell=j-s}^{j}(-1)^{j-\ell}T_{j-\ell}z^{\ell}\right).
\end{aligned}$$

现在，我们遇到一个有趣的现象。对于 $s\leq j\leq n-s$， z^j 的系数为

$$\sum_{m=0}^{s}\left(\sum_{k=j+m}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j-m}\right)(-1)^mT_m,$$

对求和进行变换后，得到

$$\sum_{k=j}^{j+s}\left(\sum_{m=0}^{k-j}(-1)^mT_mS_{k-j-m}\right)\hat{f}(k)+\sum_{k=j+s+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{s}(-1)^mT_mS_{k-j-m}\right)\hat{f}(k).$$

然而，通过直接改变指标，由(4.2)可得,

$$\sum_{m=0}^{k-j}(-1)^mT_mS_{k-j-m}=0,\qquad j+1\leq k\leq j+s,$$

并且，由 (4.3),

$$\sum_{m=0}^{s}(-1)^mT_mS_{k-j-m}=0,\qquad k\geq j+s+1.$$

因此，唯一保留的项对应于 $k = j$，我们得到

$$\sum_{m=0}^{k-j}(-1)^m T_m S_{k-j-m} = T_0 S_0 = 1.$$

因此，在多项式 $\mathbf{P}_n f$ 中，z^j 的系数至少对于 $s \le j \le n-s$ 而言是 $\hat{}\, f(j)$。对于 $j < s$，一方面，$\mathbf{P}_n f$ 的系数不依赖于 n；另一方面，这些系数必须收敛到 f 的相应系数，因此我们得出它们也 $\hat{}$等于 $f(j)$。然而，用类似的推理，对于 $n-s+1 \le j \le n$，z^j 的系数是

$$\sum_{m=j-n+s}^{s}\left(\sum_{k=j+m}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j-m}\right)(-1)^m T_m,$$

将求和变换后，这变为 $\Delta(n, j)$。因此，$\mathbf{P}_n f$ 的公式随之得出。

□

定理 2.3 的证明。这个证明很简单，因为关键工作已经完成。恒等式 (5.4) 给出了 f 关于正交归一基 $(p_j)_{j\ge 0}$ 的正交分解，因此 $\mathbf{P}_n f$ 由 (5.5) 给出。因此，根据 p_n 的正交归一性，我们立即得出，对于 $n \ge s$，有

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}_{\mathcal{D}_\mu}(f, \mathcal{P}_n) &= \|f - \mathbf{P}_n f\|_{\mathcal{D}_\mu} \\
&= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}(\zeta_0, \ldots, \zeta_{s-1})\right)p_j \right\|_{\mathcal{D}_\mu} \\
&= \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\sum_{k=j}^{\infty}\hat{f}(k)S_{k-j}(\zeta_0, \ldots, \zeta_{s-1})\right|^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

定理的证明至此完成。

注：利用 (5.5) 以及对每个 $0 \le \ell \le s-1$ 都有这一事实，

$$p_j(\zeta_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = \ell \text{ and } 0 \le j \le s-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

我们得到

$$(\mathbf{P}_n f)(\zeta_\ell) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\zeta_\ell^k = f(\zeta_\ell).$$

特别地，$\mathbf{P}_n f = P_n^\Gamma f$，其中 P_n^Γ正是 [3] 中针对 $\Gamma = \{\zeta_0, \ldots, \zeta_{s-1}\}$给出的多项式。

□

References

[1] 亚历山德鲁·阿莱曼。介于 Hardy 空间与狄利克雷空间之间的解析函数希尔伯特空间。美国数学会会刊，115(1)：97–104，1992年。[2] 奥马尔·埃尔-法拉赫、卡里姆·凯莱、贾瓦德·马什雷希和托马斯·兰斯福德。《狄利克雷空间入门》，剑桥数学丛书第203卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[3] Emmanuel Fricain 和贾瓦德·马什雷希。局部狄利克雷空间中用修正泰勒多项式进行逼近。复分析与算子理论，即将出版，2025年。[4] 伊恩·格兰特·麦克唐纳。《对称函数与霍尔多项式》。牛津物理科学经典文本。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第二版，2015年。附有 A. V. 泽列文斯基的贡献及理查德·斯坦利的序言，重印自2008年平装本 [MR1354144]。[5] 贾瓦德·马什雷希。《Hardy 空间中的表示定理》，伦敦数学会学生读物第74卷。剑桥大学出版社，剑桥，2009年。[6]贾瓦德·马什雷希和托马斯·兰斯福德。加权狄利克雷空间中的多项式逼近。复分析协同，7(2)：11，2021年。[7] 贾瓦德·马什雷希、穆罕默德·设拉子和马希尚卡·维塔纳奇。局部狄利克雷空间上的泰勒部分和。数学物理分析，12(6)：第147号论文，26页，2022年。[8] 斯特凡·里希特。循环解析二等距算子的表示定理。美国数学会汇刊，328(1)：325–349，1991年。[9] 斯特凡·里希特和卡尔·桑德伯格。局部狄利克雷积分的一个公式。密歇根数学杂志，38(3)：355–379，1991年。[10] 斯特凡·里希特和卡尔·桑德伯格。狄利克雷空间中的乘子与不变子空间。算子理论杂志，28(1)：167–186，1992年。[11] 斯特凡·里希特和卡尔·桑德伯格。狄利克雷移位算子的不变子空间与伪延拓。美国数学会汇刊，341(2)：863–879，1994年。[12] 唐纳德·萨拉森。作为德布朗日-罗夫尼亚克空间的局部狄利克雷空间。美国数学会会刊，125(7)：2133–2139，1997年。[13] 唐纳德·萨拉森和若热-努诺·O. 席尔瓦。局部狄利克雷空间上的复合算子。第87卷，433–450页，2002年。谨以此文集纪念托马斯·H·沃尔夫。[14] 乔治奥斯·斯蒂洛吉安尼斯。局部狄利克雷空间上的复合算子半群。澳大利亚数学会通报，94(1)：144–154，2016年。

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000Lille, France.电子邮箱：emmanuel.fricain@univ-lille.fr
Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, QC, Canada G1K 7P4.电子邮箱：
Javad.Mashreghi@mat.ulaval.ca