arXiv:2601.02221v1 [math.RT] 5 Jan 2026

簇代数的折叠与量子环面代数

Lior Silberberg

摘要

本文研究无限秩量子仿射代数 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty})$ 的表示论与量子环面代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$ 的表示论之间的关系。利用 Hernandez-Leclerc 和 Nakajima 提出的幺半范畴化，我们建立了 Hernandez 引入的 q-特征折叠映射 ϕ_{2n} 的簇论解释。为此，我们引入了由无限箭图产生的簇代数的可折叠性概念，并研究了 A_∞ 型簇代数的一个特定情形。

利用对 ϕ_{2n} 的这一解释，我们在新的情形下证明了 Hernandez 的一个猜想。最后，我们研究了一个特殊的简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模，其 q-特征不是簇变量，并猜想它是虚的。

目录

1 引言 1 2 预备知识 5 3 量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 12 4 箭图与簇代数的折叠 15 5 折叠该 A_∞ 箭图 19 6 范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 23 7 折叠与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$ 26 8 进一步的评论与展望 35 参考文献 38

1 引言

20 世纪 80 年代，Drinfeld 和 Jimbo 为任意复可对称化 Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ 构造了一个带有一般参数 $q \in \mathbb{C}^*$ 的 Hopf 代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$，称为与 $\mathfrak{g}$ 相关联的量子 Kac–Moody 代数

。反过来，对于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$，可以构造其仿射化 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$。它是一个 $\mathbb{C}$-代数，通常尚不知它是否为 Hopf 代数。尽管如此，可积$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模的范畴 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 具有融合积，从而赋予其 Grothendieck 群交换环结构，见 [Her05b；Her07]。

仿射量子 Kac–Moody 代数的表示论中的一个重要概念是 q-特征，它最初由 Frenkel 和 Reshetihkin 在 [FR99] 中引入，并在 [Her05b]中推广到一般情形。简言之，模 V 在 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$中的 q-特征通常是一个无穷和，用以编码其 l-权空间的维数。

设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{fin}}$是一个复有限维单李代数，令 $\mathfrak{g}$为与之对应的仿射李代数。事实证明， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}_{\mathrm{fin}}})$，而这些是“最小”的仿射 Kac–Moody 代数实例。我们将以这种方式得到的代数称为量子仿射代数。过去几十年来，人们对它们进行了广泛研究，例如参见 [CP91; CP95; FR99; Nak01; FM01]。

然而，对于仿射李代数 $\mathfrak{g}$，其“双仿射”量子代数 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$与任何量子 Kac–Moody 代数都不同构。我们称这些代数为量子环面代数。它们最初在类型 A 中由 [GKV95]引入。与量子仿射代数相比，它们的结构和表示论要复杂得多。例如，直到最近才为它们的可积表示定义了张量积，参见 [Lau25]。

人们自然会提出以下问题：

问题 1.1. 我们能否利用对量子仿射代数表示论的深入研究，来理解量子环面代数的表示论?

在这一方向上的第一个结果由 [Her11] 给出。在本文中，Hernandez 将仿射型 $A_n^{(1)}$ 的 Dynkin 图视为双向无限 Dynkin 图 A_∞ （在两个方向上均为无限）的折叠。尽管无法直接将量子仿射代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$“折叠”到量子环面代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1,\ \mathrm{tor}}) := \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 上，但他证明存在一个态射 ϕ_n ，可将可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征“折叠”为可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1,\ \mathrm{tor}})$-模的虚拟 q-特征。此外，他证明该 ϕ_n 映射可将 Kirillov–Reshetikhin $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征映射为 Kirillov–Reshetikhin $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1,\ \mathrm{tor}})$-模的 q-特征。最后，他提出了以下猜想。

猜想 1.2 （ [Her11]中的猜想5.3）。 该同态 ϕ_n 将可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征映射为实际（非虚）可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。

联系不同量子群的 q-特征理论这一思路也见于 [Her10; Wan23], ，其中该思路被用于获得新的乘法公式。不直接涉及 q-特征的类似思路可见于 [KKKO15]。

量子仿射代数（更一般地说，仿射 Kac–Moody 代数）表示论中的一个重要概念是幺半范畴化。这一概念由 Hernandez 和 Leclerc 在 [HL10], 中提出，随后在 [Nak11；HL13；Qin17；BC19；KKOP20；中得到了进一步研究。

KKOP24], 等文献也对此进行了研究。简而言之，其思想是研究一个阿贝尔幺半范畴 $\mathcal{C}$，将其格罗滕迪克环 $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ 与一个簇代数 $\mathcal{A}$ 认同起来，使得 $\mathcal{A}$ 中的簇单项式对应于 $\mathcal{C}$ 中实简单对象的类。如果一个对象与自身的张量积仍然是简单对象，则称其为实简单对象。可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模的张量积（或融合积）提供了许多作为簇代数单幺范畴化的范畴实例。

本文基于 [Her11] 的结果，证明可以用簇论的方式理解 $\widehat{\phi_n}$。我们首先引入范畴 $\mathcal{C}_1$，其对象为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模，并给出簇代数 $\mathcal{A}_\infty$ 的单幺范畴化；该簇代数与一个冰箭图 Γ_∞ 相关联，其主部的类型为 A_∞，且具有交替定向。随后，我们引入一种适用于带有群作用的（局部有限）无限箭图的簇代数折叠概念，称为 强全局可折叠性。借助这一概念，我们得到一些特殊的簇变量集合，称为 轨道簇，它们对应于折叠簇代数的簇。我们的第一个主要结果如下：设 Q 为一个箭图，其底层图为 $A_n^{(1)}$ 型（因此它是一个（$n+1$）-圈的定向），并设 A_Q 为与 Q 对应的 A_∞ 的定向（详见第 5 节）。再设 G 为由将顶点平移 $n+1$ 所生成的（A_∞）$_0$ 的置换群，使得 $A_Q^G = Q$。

定理1.3。 在上述设定中，箭图 A_Q 关于 G强全局可折叠，当且仅当 Q 不是循环定向的。

这一初步结果表明，类型为 A_∞ 的簇代数与类型为 $A_n^{(1)}$ 的簇代数之间存在紧密联系。

在 [Nak11], Nakajima 构造了一个范畴 $\mathcal{C}_1$，适用于任意 Dynkin 图不含奇圈的单边对称仿射量子 Kac–Moody 代数。他证明，该范畴为一个相关簇代数提供了幺半范畴化。对于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$ 这一特例，这种幺半范畴化对应于一个簇代数 $\mathcal{A}_{2n}$，该代数与冰箭图 Γ_{2n} 相关，其主部是类型为 $A_{2n-1}^{(1)}$、具有交替定向的箭图。

我们证明存在一个群 G 作用于 Γ_∞ 的顶点上，使得 $\Gamma_\infty^G = \Gamma_{2n}$。接着，我们证明以下结果，这也是本文的主定理（下文中，我们将格罗滕迪克环中的模类与其 q-特征对应起来）。

定理1.4。 冰箭图 Γ_∞ 相对于 G是强全局可折叠的。

如果 $\chi_q(L)$ 是属于 $\mathcal{A}_\infty$的某个轨道簇的簇变量，那么 $\phi_{2n}(\chi_q(L))$ 就是 $\mathcal{A}_{2n}$的一个簇变量。$\mathcal{A}_{2n}$ 的每个簇变量都可以通过这种方式得到。

特别地，$\phi_{2n}(\chi_q(L))$ 是一个简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。

该定理有以下推论：

1. 映射 ϕ_{2n} 不仅仅是 q-特征的投影，它还关联了与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 和 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$ 相关的簇结构 $\widehat{\ }$。

2. 我们可以利用 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 的 q-特征的一些已知乘法公式，推导出 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$ 的类似公式。

3. 如果 L 是一个简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模，且其类属于 $\mathcal{A}_\infty$ 中的一个轨道簇，那么 $\phi_{2n}(\chi_q(L))$ 就是某个简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模的 q-特征。特别地，我们在此情形下证明了猜想 1.2。这是首批满足猜想 1.2 且不属于 Kirillov–Reshetikhin 情形的模的例子。

作为应用，我们计算了一些 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模的 q-特征，这些模并不对应簇变量。我们还得到了几个满足猜想 1.2 的非Kirillov–Reshetikhin模的例子。作为一个特例，我们研究一个简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模，并将其记为 $L(m_{1,\ 2n})$，进而提出如下猜想。

猜想1.5。 简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模 $L(m_{1,\ 2n})$ 是一个虚模,—也就是说，融合积 $L(m_{1,\ 2n}) * L(m_{1,\ 2n})$ 不是简单的。

对于 $n = 1$, [Nak11], 中的例 6.15 已研究了这个模，并证明它是虚的。我们证明猜想 1.2 蕴含猜想1.5。

论文结构

本文的组织如下。

- 第 2 节介绍簇代数和量子群的必要背景知识。
- 第 3 节回顾关于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$的有用结果。
- 第 4 节研究无限箭图及其相关簇代数的折叠。
- 第5节包含定理1.3的证明。
- 第 6 节讨论了源自某个范畴 $\mathcal{C}_1$ 的单幺范畴化，该范畴由 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$- 模构成。
- 第 7 节利用 [Nak11] 的结果以及前几节的结果，给出定理1.4的证明。
- 第 8 节将定理1.4应用于研究某些非簇变量的 q-特征，这些对象是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模；此外还讨论猜想1.5，并概述了进一步的问题。

致谢

我谨向我的导师 David Hernandez 和 Yann Palu 致谢，感谢他们的指导与支持。本项目获得了欧盟 Horizon Europe 研究与创新计划资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 n° 101126554。

本项目由欧盟共同资助。本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，不一定反映欧盟的立场。欧盟及资助机构均不对这些观点和意见承担责任。



2 预备知识

2.1 无限箭图与簇代数

本节介绍簇代数的基础知识，并约定本文所需的一些记号。更详细的介绍可参见例如 [FZ02; FWZ24] ，或综述[Kel10]。

定义 2.1. 箭图 Q 是一个有向图，其顶点集为 Q_0 ，箭集为 Q_1，并配有两个函数 $s,t:Q_1\to Q_0$。给定 $\alpha\in Q_1$，我们称 $s(\alpha)$ 为 α 的源点，称 $t(\alpha)$ 为 α 的终点。

对于箭图 Q 及其两个子集 $X,Y\subseteq Q_0$，我们定义

$$\mathrm{Arr}_Q(X,Y):=\#\{\alpha\in Q_1\mid s(\alpha)\in X,t(\alpha)\in Y\}\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

从 X 到 Y 的箭的数量，以及

$$\mathrm{Ed}_Q(X,Y)=\mathrm{Arr}_Q(X,Y)+\mathrm{Arr}_Q(Y,X)$$

X 与 Y之间边的数量。如果 $X=\{x\}$，我们将用 $\mathrm{Arr}_Q(x,Y)$ 表示 $\mathrm{Arr}_Q(X,Y)$，用 $\mathrm{Ed}_Q(x,Y)$ 表示 $\mathrm{Ed}_Q(X,Y)$（对 $Y=\{y\}$也类似）。

因此，要描述一个箭图 Q 在同构意义下的形式，只需给出其顶点集 Q_0 ，以及对每一对顶点 $x,y\in Q_0$给出 $\mathrm{Arr}_Q(x,y)$ 即可。

在本文中，我们假设箭图不含环或二环。这意味着对于所有 $x,y\in Q_0$，$\mathrm{Arr}_Q(x,y)\cdot\mathrm{Arr}_Q(y,x)=0$。我们允许箭图 Q 具有可数无限的顶点集。然而，我们要求它是局部有限的，即对于每个 $x\in Q_0$，$\mathrm{Ed}_Q(x,Q_0)<\infty$。

冰箭图（Q,F）是一个箭图 Q 及其顶点的一个子集 $F\subseteq Q_0$。我们称 F 中的顶点为冻结顶点，称 $Q_0\setminus F$ 中的顶点为可变顶点。为简便起见，并结合下一节中的应用，我们假设冻结顶点之间没有箭。任意箭图 Q 都可以通过令 $F=\emptyset$而视为一个冰箭图。

给定一个冰箭图（Q,F）和一个可变顶点 $z\in Q_0$，我们可以如下定义一个新的冰箭图（$\mu_z(Q)$ F）。$\mu_z(Q)$ 的顶点集为 Q_0。箭如下给出：

$$\mathrm{Arr}_{\mu_z(Q)}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x,y\in F\\ \max\{0,b_{x,y}-b_{y,x}\} & \text{if } x,y\notin F\cup\{z\}\\ \mathrm{Arr}_Q(y,x) & \text{otherwise}\end{cases},$$

其中 $b_{x,y} = \mathrm{Arr}_Q(x,y) + \mathrm{Arr}_Q(x,z) \cdot \mathrm{Arr}_Q(z,y)$。我们称这个新的冰箭图为（$Q, F$）在顶点 z 处的突变。注意， $\mu_z(\mu_z(Q)) \simeq Q$。

定义突变运算后，我们可以如下将冰箭图 (Q, F) 与一个交换代数关联起来。固定 (Q, F)，并考虑域

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathbb{Q}(x_v \mid v \in Q_0),$$

其中 x_v 对 $v \in Q_0$ 而言是不定元。种子 $((Q', F')\ y)$ 是由冰箭图 (Q', F')、以及 $u = \{u_v \in \mathcal{F} \mid v \in Q_0\}$（$\mathcal{F}$ 的一个自由生成集）组成的二元组。

我们将突变运算推广到种子。对于一个可变的 $z \in Q'_0$，我们将种子 $((Q', F')\ u)$ 在 z 处的突变定义为种子 $((\mu_z(Q')\ F')\ \mu_z(u))$，其中 $\mu_z(u) = u \cup \{u'_z\} \setminus \{u_z\}$ 并且

$$u'_z = \frac{\prod_{w \in Q'_0} u_w^{\mathrm{Arr}_{Q'}(z,w)} + \prod_{w \in Q'_0} u_w^{\mathrm{Arr}_{Q'}(w,z)}}{u_z}.$$

注意， $\mu_z(\mu_z(u)) = u$。

我们将集合 $x = \{x_v \mid v \in Q_0\}$ 与冰箭图 (Q, F) 关联起来。我们称 $((Q, F)\ x)$ 为初始种子。令 $\mathcal{S}$ 为通过有限次突变从初始种子得到的所有种子构成的集合。设 $s \in \mathcal{S}$ 为某个种子，且 $s = ((Q_s, F_s)\ u_s)$。容易看出，$(Q_s)_0 = Q_0$ 且 $F_s = F$。此外， u_s 包含所有满足 $v \in F$ 的 x_v。我们称 u_s 为一个簇，并称任意 $u_v \in u_s$ 为一个簇变量。

定义 2.2. 簇代数 $\mathcal{A}_{(Q,F)}$ 是由所有簇变量生成的 $\mathcal{F}$ 子环。也就是说 $\mathcal{A}_{(Q,F)} := \mathbb{Z}[\mathcal{X}] \subseteq \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{X} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} u_s$。

Laurent 现象是一个广为人知的结果，它指出每个簇变量都是初始簇中变量的 Laurent 多项式，且系数为整数。在我们的语境中，令 $\mathcal{F} = \mathbb{Z}[x_v \mid v \in F][x_v^{\pm 1} \mid v \in Q_0 \setminus F]$，则 Laurent 现象可表述为 $\mathcal{A}_{(Q,F)} \subseteq \mathcal{F}$。

2.2 对称 Kac-Moody 量子群及其仿射化

这里我们介绍量子群及其表示论的一些必要背景。为使讨论具体明确，我们将注意力限于对称 Cartan 数据。证明及更多细节，参见 [CP91; CP95; Nak01; Her05b]。

设 I 是有限指标集，且 $|I| = n$。令 $C = (C_{i,\ j})_{i,\ j \in I}$ 为一个对称矩阵，满足 $C_{i,\ i} = 2$ 且 $C_{i,\ j} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 对于 $i \neq j$ 成立。根据这些信息，我们关联一个实现 $(\mathfrak{h},\ \Pi,\ \Pi^\vee)$（参见 [Kac90]），其中 $\mathfrak{h}$ 是维数为 $2n - \mathrm{rank}(C)$ 的复向量空间，$\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{h}^*$ 是单根集，$\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{h}$ 是单余根集，且满足 $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = C_{i,\ j}$。我们将关联的根系记为 Δ，并设 $Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$。我们用

by

$$P^\vee = \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha_i(h) \in \mathbb{Z},\ i \in I\},$$

表示整余权群，记作

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z},\ i \in I\}$$

整权群，以及

$$P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N},\ i \in I\}$$

其由主导整权组成的子幺半群。

从现在起，我们固定 $q \in \mathbb{C}^*$，且它不是单位根。给定 a，$b \in \mathbb{N}$ 使得 $a \le b$，我们定义

$$[b]_q = \frac{q^b - q^{-b}}{q - q^{-1}}, \qquad [b]_q! = [b]_q \cdots [1]_q, \qquad \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}_q = \frac{[b]_q!}{[b-a]_q![a]_q!}.$$

定义 2.3。量子 Kac–Moody 代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 是具有生成元 k_h和 $x_i^\pm$ 的 $\mathbb{C}$-代数，满足 $h \in P^\vee$ 和 $i \in I$，并服从以下关系：

$$\begin{gathered} k_h k_{h'} = k_{h+h'}, \qquad k_0 = 1, \\ k_h x_j^\pm k_{-h} = q^{\pm \alpha_j(h)} x_j^\pm, \\ [x_i^+, x_j^-] = \delta_{i,j} \frac{k_{\alpha_i^\vee} - k_{-\alpha_i^\vee}}{q - q^{-1}}, \\ \sum_{r=0}^{1-C_{i,j}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - C_{i,j} \\ r \end{bmatrix}_q (x_i^\pm)^{1-C_{i,j}-r} x_j^\pm (x_i^\pm)^r = 0. \end{gathered}$$

令 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+$、$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^-$ 和 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$ 分别为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 中由 x_i^+ 、 x_i^- 和 k_h 生成的子代数。我们有三角分解 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^- \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+$。

定义 2.4。$\mathcal{U}_q$（$\mathfrak{g}$）的量子仿射化是由生成元 k_h、$h_{i,\,m}$ 和 $x_i^\pm$、$_r$ 生成的 $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{U}_q$（$\hat{\mathfrak{g}}$），其中 $h \in P^\vee$、$i \in I$、$r \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$满足以下关系

$$\begin{gathered} k_h k_{h'} = k_{h+h'}, \qquad k_0 = 1, \qquad [k_h, h_{i,m}] = 0, \qquad [h_{i,m}, h_{j,m'}] = 0, \\ k_h x_{j,r}^\pm k_{-h} = q^{\pm \alpha_j(h)} x_{j,r}^\pm, \\ [h_{i,m}, x_{j,r}^\pm] = \pm \frac{1}{m} [m C_{i,j}]_q x_{j,m+r}^\pm, \\ [x_{i,r}^+, x_{j,r'}^-] = \delta_{i,j} \frac{\phi_{i,r+r'}^+ - \phi_{i,r+r'}^-}{q - q^{-1}}, \\ x_{i,r+1}^\pm x_{j,r'}^\pm - q^{\pm C_{i,j}} x_{j,r'}^\pm x_{i,r+1}^\pm = q^{\pm C_{i,j}} x_{i,r}^\pm x_{j,r'+1}^\pm - x_{j,r'+1}^\pm x_{i,r}^\pm, \end{gathered}$$

$$\sum_{\pi\in S_d}\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\begin{bmatrix}d\\k\end{bmatrix}_q x^{\pm}_{i,r_{\pi(1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(k)}}x^{\pm}_{j,r'}x^{\pm}_{i,r_{\pi(k+1)}}\cdots x^{\pm}_{i,r_{\pi(d)}}=0,$$

其中 $d=1-C_{i,\,j}$、 r_1，……， r_d 是任意一个整数序列，而 $\phi_i^{\pm}$、m 由下式确定

$$\sum_{m=0}^{\infty}\phi^{\pm}_{i,\pm m}z^{\pm m}=k_{\pm\alpha_i^\vee}\exp\left(\pm(q-q^{-1})\sum_{m'=1}^{\infty}h_{i,\pm m'}z^{\pm m'}\right),$$

以及 $\phi_{i\ ,\pm m}^{\pm}=0$ 对于 $m<0$。

令 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^+$、 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^-$ 和 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{h}})$ 分别为由 $x_{i\ r}^{+}$, $x_{i}^{-}{}_{\ ,r}$ 和k_h,$h_{i,m}$生成的 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的子代数。我们有 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的三角分解，即线性同构$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})\simeq\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^-\otimes\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{h}})\otimes\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^+$。

$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 中由 $x_i^{\pm}$ 和 k_h 生成的子代数与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 同构。将二者等同后，有 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^{\pm}\subseteq\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^{\pm}$ 以及 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})\subseteq\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{h}})$。

若满足以下条件，则称 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$-模 V 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$-可对角化的:

$$V=\bigoplus_{\omega\in P}V_\omega,\qquad V_\omega:=\{v\in V\mid k_h(v)=q^{\omega(h)}v,\ \forall h\in P^\vee\}.$$

若 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模 V 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{h})$-可对角化的，其权空间 V_ω 均为有限维，并且对于任意 $\omega\in P$和 $i\in I$，当 r 足够大时都有 $V_{\omega\pm r\alpha_i}=0$，则称其为可积的。

定义 2.5. 范畴 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 是 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模的满子范畴，其对象为满足以下条件的模 V:

1. V 作为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模是可积的,
2. 存在有限个权 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\mathfrak{h}^*$，使得

$$V_\omega\neq0\implies\omega\in\bigcup_{j=1}^{s}(\lambda_j-Q^+).$$

若一对 (λ,γ) 满足 $\lambda\in P$和 $\gamma=(\gamma_i^{\pm}{}_{\ ,\pm m})_{i\in I,m\in\mathbb{N}}$，且 $\gamma_i^{\pm}{}_{\ ,\pm m}\in\mathbb{C}$ 以及 $\gamma_i^{\pm}{}_{\ ,0}=q^{\pm\lambda(\alpha_i^\vee)}$，则称其为一个 l-权。我们用 P_l 表示 l-权的集合，并将其视为权这一概念的细化。

若存在一个 $v\in V$，使得某个 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模 V是 l-最高权 $(\lambda,\ \gamma)\in P_l$，则称其为

$$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})^+(v)=0,\qquad\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})(v)=V,\qquad\phi^{\pm}_{i,\pm m}(v)=\gamma^{\pm}_{i,\pm m}v,\qquad k_h(v)=q^{\lambda(h)}v.$$

对于一个 l-权（λ,γ）$\in P_l$，我们用 L（λ,γ）表示唯一的（在同构意义下）$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模，其 l-最高权为（λ,γ）。

我们令 P_l^+ b 为支配 l-权的集合，即满足以下条件的 l-权（λ,γ）：存在多项式（P_i）$_{i\in I}$，使得 $P_i \in 1+u\mathbb{C}[u]$ 满足

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \gamma_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m} = q^{\deg(P_i)} \frac{P_i(zq^{-1})}{P_i(zq)} \qquad \text{in } \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]].$$

我们称 $(P_i)_{i\in I}$ 为 $(\lambda,\ \gamma)$ 的 Drinfeld 多项式。注意，若一个 l-权 $(\lambda,\ \gamma)$ 属于 P_l^+，则 $\lambda \in P^+$。

定理 2.6（[Her05b] 中的定理 4.9 和命题 5.2）。 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 的简单对象是模 $L(\lambda,\ \gamma)$，其中 $(\lambda,\ \gamma)\in P_l^+$。 □

对于 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 中的一个模 V，我们有分解 $V=\bigoplus_{(\lambda,\ \gamma)\in P_l} V_{(\lambda,\gamma)}$，其中 $V_{(\lambda,\gamma)}$ 是 V_γ 的子空间，在该子空间上，对于所有 $i\in I, m\in\mathbb{N}$, $\left(\phi_{i,\ \pm m}^{\pm}-\gamma_{i,\ \pm m}^{\pm}\right)$ 均幂零作用。

命题 2.7（[Her05b] 中的命题 5.4）。设 V 是 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 中的一个模，并且 (λ,γ) 是一个满足 $V_{(\lambda,\gamma)}\neq 0$ 的 l-权。那么存在多项式 $Q_i, R_i \in 1+u\mathbb{C}[u]$，使得

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \gamma_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m} = q^{\deg(Q_i)-\deg(R_i)} \frac{Q_i(zq^{-1})R_i(zq)}{Q_i(zq)R_i(zq^{-1})} \qquad in\ \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$$

对每个 $i\in I$。 □

从现在起，我们只考虑类型 A_n 和 $A_n^{(1)}$。在类型 A_n中，我们取$I=\{1,...,n\}$ 作为指标集；在类型 $A_n^{(1)}$中，我们取 $I=\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$。

~我们考虑形式变量 $Y_{i,\ a}$ 和 k_ω，其中 $i\in I$、$a\in\mathbb{C}^*$ 和 $\omega\in\mathfrak{h}^*$。令 $A(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 为形如以下形式的单项式所构成的交换乘法群

$$m = k_{\omega(m)} \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)}$$

其中 $\omega(m)\in P$ 和 $u_{i,\ a}(m)\in\mathbb{Z}$ 几乎全为零，并满足 $\omega(m)(\alpha_i^\vee)=\sum_{a\in\mathbb{C}^*} u_{i,\ a}(m)$。两个单项式 $m_1,\ m_2\in\tilde{A}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 的乘积按以下规则定义

$$\omega(m_1\cdot m_2)=\omega(m_1)+\omega(m_2), \qquad u_{i,a}(m_1\cdot m_2)=u_{i,a}(m_1)+u_{i,a}(m_2).$$

注 2.8。在 A_n 情形下，权 $\omega(m)$ 完全由 $(u_{i,\ a}(m))_{i\in I,\ a\in\mathbb{C}^*}$ 确定。因此，我们可以在记号中省略变量 k_h，而不会丢失任何信息。需要指称单项式 m的权时，我们仍将使用记号 $\omega(m)$。

对于一个模 V in $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))$ 和一个满足 $V_{(\lambda,\gamma)}\neq 0$ 的 l-权 (λ,γ)，我们将命题 2.7 中的多项式记作 $Q_i(u)=\prod_{a\in\mathbb{C}^*}(1-ua)^{\mu_{i,a}}$ 和 $R_i(u)=\prod_{a\in\mathbb{C}^*}(1-ua)^{\nu_{i,a}}$，并设

$$m_{(\lambda,\gamma)} = k_\lambda \prod_{i\in I, a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{\mu_{i,a}-\nu_{i,a}} \in \tilde{A}(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})).$$

~我们看到，单项式 $m \in A(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 满足 $u_{i,a}(m) \geq 0$ 当且仅当存在 $m = m_{(\lambda,\gamma)}$，使得 $(\lambda, \gamma) \in P_l^+$（且唯一）。此时，我们称 m 为支配单项式。此外，若 m 是支配的，且 $m = m_{(\lambda,\gamma)}$ 与 $(\lambda, \gamma) \in P_l^+$，则我们将 $L(\lambda, \gamma)$ 记作 $L(m)$。

我们将 $\mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 定义为如下环：

~1. 其元素是 $A(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 中带有整数系数的单项式的形式无穷和，

2. 对于每个这样的形式无穷和 χ，存在有限多个权 λ_1、.....、$\lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ 使得

$$m \text{ is a monomial of } \chi \implies \omega(m) \in \bigcup_{j=1}^{s} (\lambda_j - Q^+).$$

定义 2.9。模 $V \in \mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 的 q-特征定义为

$$\chi_q(V) = \sum_{(\lambda,\gamma)\in P_l} \dim V_{(\lambda,\gamma)} m_{(\lambda,\gamma)} \in \mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})).$$

令 $\mathcal{R}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 为 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 中有限长度模的 Grothendieck 群。

定理 2.10（[Her05b]中的定理 5.15 和定理 6.2）。q-特征给出一个单射 χ_q：$\mathcal{R}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})) \to \mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$，其像是 $\mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 的子环。

此外，给定两个模 $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$，存在一个模 $W \in \mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$，使得 $\chi_q(V_1) \cdot \chi_q(V_2) = \chi_q(W)$。 □

注 2.11。代数 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 先验上并非 Hopf 代数。上述定理可以视为融合积存在的推论，该融合积由 [Her05b] 引入。

对于 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^*$，我们定义

$$A_{i,a} := k_{\alpha_i} Y_{i,aq^{-1}} Y_{i,aq} Y_{i-1,a}^{-1} Y_{i+1,a}^{-1} \in \mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})).$$

在 A_n 情形下，取 $I = \{1, ..., n\}$，有 $Y_{0,\,a} = 1$ 和 $Y_{n+1,\,a} = 1$；而在 $A_n^{(1)}$情形下，取 $I = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$，有 $Y_{0,\,a} = Y_{n+1,\,a}$。我们在 $\tilde{A}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 上定义一个偏序如下

$$m' \leq m \iff m'm^{-1} \in \mathbb{Z}[A_{i,a}^{-1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^*].$$

我们称其为 Nakajima 偏序。

~**定理 2.12**（[Her05a]中的定理 3.2）。设 $m \in A(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}))$ 为一个支配单项式，并设 m' 为出现在 $\chi_q(L(m))$ 中的单项式。于是 $m' \leq m$。

注 2.13. 本文研究代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\text{tor}})$。对于 $n > 1$，它们由 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\text{tor}}) := \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n})$ 给出$\widehat{\ }$。不过，对于 $n = 1$，我们采用一种修正后的定义，见

Her11] 中的 [。简言之，代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2,\ \mathrm{tor}})$ 的生成元与关系的表示形式类似于定义 2.4，但其关系

$$x^{\pm}_{i,r+1}x^{\pm}_{j,r'} - q^{\pm C_{i,j}}x^{\pm}_{j,r'}x^{\pm}_{i,r+1} = q^{\pm C_{i,j}}x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{j,r'+1} - x^{\pm}_{j,r'+1}x^{\pm}_{i,r}$$

未作出规定。

由于本文的结果对所有 $n \geq 1$ 均统一适用于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$，因此我们不区分 $n = 1$ 情形与 $n > 1$ 情形。

2.3 关于 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$的回顾

我们总结范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 的一些事实，这些事实将在本文后文中派上用场。我们沿用 [HL10] 的记号。

我们令 $I_n = \{1, ..., n\}$，并令 $(I_n)_0$（分别为 $(I_n)_1$）表示由偶数（分别由奇数）组成的 I_n 子集。令 $\xi\colon I_\infty \to \{0, 1\}$ 为如下定义的映射：

$$\xi(i) = \begin{cases} 0 & i \in (I_n)_0 \\ 1 & i \in (I_n)_1 \end{cases}.$$

我们用 $\mathcal{M}_n \subseteq A(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 表示由 $Y_{i,\ q^{\xi(i)}}$ 和 $Y_{i,\ q^{\xi(i)+2}}$（对所有 $i \in I_n$）生成的单项式子群。令 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 为 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 的满子范畴，其中对象为有限长度模，且其合成因子同构于某个 $m \in \mathcal{M}_\infty$ 对应的 $L(m)$。

命题 2.14 ([HL10]的命题 3.2。范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 是幺半范畴。多项式环

$$\mathbb{Z}\left[[L(Y_{i,q^{\xi(i)}})], [L(Y_{i,q^{\xi(i)+2}})] \mid i \in I_n\right]$$

同构于 *Grothendieck* 群 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})))$。 □

我们令 Γ_n 为如下箭图（参见 [HL10] 的第 4.2 节）。其顶点集为 $\{1, ..., n\} \cup \{1', ..., n'\}$。我们将顶点 i 和 i' 视为 I_n的元素。Γ_n 的箭如下给出：

$$\mathrm{Arr}_{\Gamma_n}(i, j) = \begin{cases} \delta_{i,i+1} + \delta_{i,i-1} & i \in (I_n)_0 \\ 0 & i \in (I_n)_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\Gamma_n}(i', j') = 0,$$

$$\mathrm{Arr}_{\Gamma_n}(i', j) = \begin{cases} \delta_{i,j} & i \in (I_n)_0 \\ 0 & i \in (I_n)_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\Gamma_n}(i, j') = \begin{cases} 0 & i \in (I_n)_0 \\ \delta_{i,j} & i \in (I_n)_1 \end{cases}.$$

顶点 i' 被视为冻结顶点。

记 $\mathcal{F}_n = \mathbb{Z}[f_i, x_i^{\pm 1} \mid i \in I_n]$。令 $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ 为由 Γ_n定义的簇代数，其初始簇为 $(f_i,\ x_i)_{\ i\in I_n}$，其中规定 x_i 对应可变顶点 i，而 f_i 对应

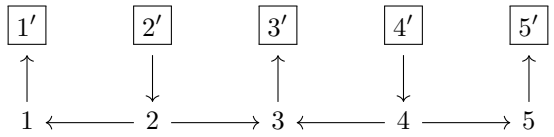


图 1：箭图 Γ_n 及其 $n = 5$。方形顶点是冻结的

冻结顶点 i'。

对于一个几乎正根 $\alpha \in \Delta$ （属于 A_n 型根系），令 $x[\alpha] \in \mathcal{A}_n$ 为与之对应的（非冻结）簇变量。特别地，$x[-\alpha_i] = x_i$。

命题 2.15 (引理 *4.4*见 [HL10])。簇代数 $\mathcal{A}_n$ 同构于

$$\mathbb{Z}\left[x[-\alpha_i], x[\alpha_i] \mid i \in I_n\right],$$

一个以 $2n$ 个变量为元的多项式代数。 □

我们将单项式 $m_\alpha \in \mathcal{M}_n$ 与几乎正根 $\alpha \in \Delta$ 对应如下。令

$$m_{-\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_0, \\ Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_1, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad m_{\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_0, \\ Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_1, \end{cases}$$

对于单根。对于非单根正根 $\alpha = \sum_{i \in [i_1, i_2]} \alpha_i$，令 $m_\alpha = \prod_{i \in [i_1, i_2]} m_{\alpha_i}$。我们令

$$\iota : \mathcal{A}_n \to \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_{n+1}})))$$

是由 $\iota(x[\pm\alpha_i]) = [L(m_{\pm\alpha_i})]$ 定义的环同态。

定理 2.16 （猜想 4.6 以及 [HL10]）。映射 ι 是一个同构，并且满足

$$\iota(x[\alpha]) = [L(m_\alpha)] \qquad \textit{and} \qquad \iota(f_i) = [L(Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}})]$$

对于任意几乎正根 α 和 $i \in I_n$。 □

$\widehat{\ }$在这种情形下，$\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$ 中的单模都是实的，且其对应类与簇单项式一一对应。

$\widehat{\ }$3 量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$

本节遵循 [Her11], ，完整细节和证明可见其中。

令 A_∞ 为顶点集为 $I_\infty \coloneqq \mathbb{Z}$ 的 Dynkin 图，并且当 $|j-i|=1$ 时，i 与 j 之间有一条边。我们将其视为当 $n \to \infty$ 时，类型为 A_n 的 Dynkin 图的极限。

$$\cdots \text{——} -2 \text{——} -1 \text{——} 0 \text{——} 1 \text{——} 2 \text{——} 3 \text{——} 4 \text{——} 5 \text{——} 6 \text{——} \cdots$$

图 2：Dynkin 图 A_∞

我们令 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}^*$ 为相应的空间，$\Delta \subseteq \mathfrak{h}^*$ 为根系，$\{\alpha_i \mid i \in I_\infty\} \subseteq \Delta$ 为单根集，并设 $Q^+ = \sum_{i \in I_\infty} \mathbb{N}\alpha_i$。我们还令 $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ 为整权群，P^+ 为其主导整权子幺半群。我们使用定义 2.4，将此 Dynkin 图 $\widehat{\ }$ 与代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 联系起来，其中 $q \in \mathbb{C}^*$不是单位根。我们将其视为量子仿射代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ 的一种双无限类比。我们令 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 按照定义 2.5 类似地定义。另见 [Her11] 的定义 2.1 和第 3.2 节。我们令

$$P_l = \{\gamma = (\gamma_{i,\pm m}^{\pm})_{i \in I_\infty, m \in \mathbb{N}} \mid \gamma_{i,\pm m}^{\pm} \in \mathbb{C}\}$$

为 l-权的集合。

我们还定义 P_l^+，即支配 l-权的集合。这些是满足以下条件的 l-权 $\gamma \in P_l$：存在 Drinfeld 多项式 $(P_i)_{i \in I}$，使得 $P_i \in 1 + u\mathbb{C}[u]$，并且对于几乎所有的 $i \in I_\infty$，$P_i = 1$ 满足

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \gamma_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m} = q^{\deg(P_i)} \frac{P_i(zq^{-1})}{P_i(zq)} \qquad \text{in } \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]].$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，代数 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty})$ 都包含一个子代数 $\hat{\ }\mathcal{U}_{[-n,n]}$，它与 $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_{2n+2}})$ 同构，$\hat{\ }\hat{\ }$ 并满足 $\mathcal{U}_{[-n,n]} \subseteq \mathcal{U}_{[-(n+1),n+1]}$，且

$$\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\mathcal{U}}_{[-n,n]}.$$

$\widehat{\ }$定理 3.1 ([Her11]中的定理 3.8)。$\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 中的单模是 $L(\gamma)$ 的简单l-最高权模，其中 $\gamma \in P_l^+$。此外，

$$L(\gamma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(\gamma),$$

其中 $L_n(\gamma) = \hat{\ }\mathcal{U}_{[-n,n]} v_\gamma$，而 v_γ 是 $L(\gamma)$ 的 l-最高权向量。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\widehat{\ }\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n+2})$ 模 $L_n(\gamma)$ 都是与 ***Drinfeld*** 多项式 $(P_i)^{i \in [-n,n]}$ 对应的简单有限维模。

□

命题 3.2 (命题 3.11 和推论 3.12，见 [Her11])。设 V 是$\widehat{\ }\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 中的一个模，并设 γ 是一个 l-权，满足 $V_\gamma \neq 0$。对于每个 $i \in I_\infty$，存在多项式

nomials $Q_i, R_i \in 1+u\mathbb{C}[u]$ 使得

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \gamma_{i,\pm m}^{\pm} z^{\pm m} = q^{\deg(Q_i)-\deg(R_i)} \frac{Q_i(zq^{-1})R_i(zq)}{Q_i(zq)R_i(zq^{-1})} \qquad in\ \mathbb{C}[[z^{\pm 1}]]$$

对于几乎所有 $i \in I_\infty$，都有 $Q_i = 1$、 $R_i = 1$ 。 □

˜我们考虑形式变量 $Y_{i,\ a}$ 其中 $i \in I_\infty$ 且 $a \in \mathbb{C}^*$。我们令 A_∞ 和 $\mathcal{Y}_\infty$ 按第 2.2 节中的定义给出（另见注 2.8）。

⌢对于 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 中的 V以及满足 V_γ 的 l-权 γ，我们将 $Q_i(u) = \prod_{a\in\mathbb{C}^*}(1-ua)^{\mu_{i,\ a}}$ 和 $R_i(u) = \prod_{a\in\mathbb{C}^*}(1-ua)^{\nu_{i,\ a}}$ 记作命题 3.2 中的多项式。我们将单项式与 γ 关联

$$m_\gamma = \prod_{i\in I_\infty,\ a\in\mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{\mu_{i,a}-\nu_{i,a}} \in \tilde{A}_\infty,$$

并将 V 的 q-特征定义为 $\chi_q(V) = \sum_\gamma \dim(V_\gamma) m_\gamma$。我们以一种显然的方式，将 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_{2n+1}}))$ 中 ˆ$\mathcal{U}_{[-n,n]}$-模的 q- 特征视为 $\mathcal{Y}_\infty$ 中的元素。

˜对于一个满足 $c_j \in \mathbb{Z}$ 和 $m_j \in A_\infty$ 的元素 $\chi = \sum_j c_j m_j \in \mathcal{Y}_\infty$，以及一个权 $\lambda \in P$，我们记

$$\chi_\lambda = \sum_{j,\ \omega(m_j)=\lambda} c_j m_j.$$

⌢**命题 3.3**（ [Her11]中的命题 3.11）。设 $L(\gamma)$ 是一个简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模，且设 $L_n(\gamma)$ 是定理 *3.1* 中的简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n+2})$-模。则对于任意权 $\lambda \in P$,

$$\chi_q(L(\gamma))_\lambda = \chi_q(L_n(\gamma))_\lambda$$

当 n 足够大时。 □

R ⌢**注 3.4**。设 $L(\gamma_1)$ 和 $L(\gamma_2)$ 是 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 中的两个简单模，且位于 $\mathcal{O}_{\text{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 中。 n

$$(\chi_q(L(\gamma_1))\chi_q(L(\gamma_2)))_\lambda = (\chi_q(L_n(\gamma_1))\chi_q(L_n(\gamma_2)))_\lambda$$

⌢当 n 足够大时。特别地，我们可以利用 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ 的已知乘法公式，推导出 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 的⌢类似公式。

对于每个支配单项式 $m \in \tilde{A}_\infty$，都存在唯一的 $\gamma \in P_l^+$ 使得 $m = m_\gamma$; ˜我们将记作 $L(m) = L(\gamma)$。对于 $i \in I_\infty$、 $a \in \mathbb{C}^*$，我们令 $A_{i,\ a} \in A_\infty$ 为单项式$Y_{i,\ aq^{-1}}Y_{i,\ aq}Y_{i-1,\ a}^{-1}Y_{i+1,\ a}^{-1}$。我们在 $\tilde{A}_\infty$ 上定义偏序如下

$$m \le m' \iff m'm^{-1} \in \mathbb{Z}[A_{i,a}^{-1} \mid i \in I_\infty, a \in \mathbb{C}^*].$$

推论 3.5. 设 $m \in A_\infty$ 是一个支配单项式， m' 是一个出现在 $\chi_q(L(m))$ 中的单项式。那么 $m' \leq m$。

证明。 由命题 3.3 和定理 2.12 可得。 □

4 箭图与簇代数的折叠

本节将讨论局部有限无限箭图及其关联簇代数的一种折叠概念。由于我们将处理无限箭图及其突变，因此需要在相对一般的框架下讨论折叠。本节的大部分内容受到[FWZ21]的启发。

定义 4.1。 设 Q 是一个局部有限箭图，并设 $G \subseteq \mathrm{Sym}(Q_0)$ 是作用于顶点集 Q_0 上的一个群。若满足以下条件，则称 Q 为强 G-可容许的

1. 对任意 $v_1, v_2 \in Q_0$, $g \in G$， 有 $\mathrm{Arr}_Q(v_1, v_2) = \mathrm{Arr}_Q(gv_1, gv_2)$,

2. G 在 Q_0 上的作用是自由的，即任意顶点 $v \in Q_0$ 的稳定子都是平凡群,

3. $\mathrm{Arr}_Q(Gv,\ Gv) = 0$ 对任意 $v \in Q_0$， 4. $\mathrm{Arr}_Q(Gv_1,\ v_2) \cdot \mathrm{Arr}_Q(v_2,\ Gv_1) = 0$ 对任意 $v_1,\ v_2 \in Q_0$。

此外，如果 Q 具有冻结部分 F，则冰箭图（$Q,\ F$）称为强 G-可容许的，当且仅当 Q 是强 G-可容许的，并且 $G(F) = F$。在这种情况下，每个 G-轨道要么是可变的，要么是冻结的。

定义 4.2。 设 Q 为一个箭图， G 为作用在 Q_0上的群。假设 Q 是 G-可容许的。我们定义一个新的箭图 Q^G ，其顶点集为 Q_0/G ，箭为 $\mathrm{Arr}_{Q^G}(Gv_1,\ Gv_2) = \mathrm{Arr}_Q(Gv_1,\ v_2)$，对任意 v_1, $v_2 \in Q_0$。我们称 Q^G 为关于 G的 Q 折叠 $Q\ \ G$。

若 Q 有冻结部分 F，则令 F^G 为 Q^G的冻结顶点 F/G 集合。我们称$(Q^G,\ F^G)$为$(Q,\ F)$关于 G的折叠。

注 4.3. 条件 1 和 2 意味着，对于任意 $v_1,\ v_2 \in Q_0$，$\mathrm{Arr}_Q(Gv_1,\ v_2) = \mathrm{Arr}_Q(v_1,\ Gv_2)$。事实上,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arr}_Q(Gv_1, v_2) &= \sum_{v \in Gv_1} \mathrm{Arr}(v, v_2) = \sum_{g \in G} \mathrm{Arr}(gv_1, v_2) \\ &= \sum_{g \in G} \mathrm{Arr}(v_1, g^{-1}v_2) = \sum_{v' \in Gv_2} \mathrm{Arr}(v_1, v') = \mathrm{Arr}_Q(v_1, Gv_2).\end{aligned}$$

注 4.4。 我们的定义不同于 [FWZ21]中的定义。在这里，我们允许箭图 Q 具有无限多个顶点，但要求它折叠到一个（非赋值）箭图上（条件 2）。如果不施加某些对称性条件，就没有显然的方法将一个无限箭图折叠到一个（可能是赋值的）箭图上。我们使用“强”一词，以区别于 [FWZ21]中的容许性概念。

注 4.5。 条件 3 和 4 确保箭图 Q 没有"虚拟"环或二环。这意味着，属于同一个 G-轨道的两个顶点之间既没有箭，也没有有向 2-路径。特别地，这确保了折叠箭图没有环或二环。

引理 4.6. 设 Q 是一个箭图，且 $G \subseteq$对称群(Q_0)，使得 Q 是强 G-可容许的。则有以下结论。

1. 设 v_1 和 v_2 是同一个 G-轨道中的两个顶点，则 $\mu_{v_1}\mu_{v_2}Q = \mu_{v_2}\mu_{v_1}Q$。

2. 设 w_1 和 w_2 是 Q中的两个顶点，则 $\mathrm{Arr}_Q(w_1, Q_0) \cdot \mathrm{Arr}_Q(Q_0, w_2) < \infty$。

3. 设 w_1、 w_2 和 v 是 Q中的顶点，则 $\mathrm{Arr}_{\mu_{gv}Q}(w_1, w_2) = \mathrm{Arr}_Q(w_1, w_2)$ 对几乎所有$g \in G$都成立。

证明。 1. 这立即由定义 4.1 的条件 3 得出。另见 [FWZ21]。

2. 不等式 $\mathrm{Arr}_Q(w_1, Q_0) \cdot \mathrm{Arr}_Q(Q_0, w_2) < \infty$ 直接由 Q的局部有限性得出。3. 不等式 $\mathrm{Arr}_Q(w_1, Q_0) \cdot \mathrm{Arr}_Q(Q_0, w_2) < \infty$ 意味着，对于几乎所有 $g \in G$， $\mathrm{Arr}_Q(w_1, gv) \cdot \mathrm{Arr}_Q(gv, w_2) = 0$。对于几乎所有 $g \in G$ ，等式 $\mathrm{Arr}_{\mu_{gv}Q}(w_1, w_2) = \mathrm{Arr}_Q(w_1, w_2)$ 成立，这是变异规则的推论。

□

定义 4.7。 设 Q 是一个箭图，且 $G \subseteq \in$ 对称群(Q_0)，使得 Q 是强 G-可容许的。给定一个 G-轨道 K，我们将 $\hat{}\mu_K Q$ 定义为 在 Q 处进行 K 的轨道变异，即对 K 中的所有顶点应用突变所得到的箭图。根据上面的引理，该操作定义良好。

引理 4.8。 设 Q 是一个箭图，且 $G \subseteq$ 对称群(Q_0)。假设 Q 是强 G-可容许的，并设 K 是一个 G-轨道。则以下陈述成立。

1. 箭图 $\hat{}\mu_K Q$ 关于 G 满足定义 *4.1* 的条件 *1*、*2* 和 *3*。

2. $\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2) \leq \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2)$ *for every* $v_1, v_2 \in Q_0$.

3. $\hat{}\mu_K Q$ 满足定义 *4.1* 的条件 *4*，当且仅当

$$\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2) = \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2)$$

对于每个 v_1、 $v_2 \in Q_0$。在此情况下， $\mu_K(Q^G) = (\hat{}\mu_K Q)^G$。

证明。 1. 条件 2 对于 $\hat{}\mu_K Q$ 显然成立。我们可以使用以下公式计算轨道变异后的箭图中的箭

$$\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(v_1, v_2) = \begin{cases} \mathrm{Arr}_Q(v_2, v_1) & \text{if } v_1 \in K \text{ or } v_2 \in K \\ \max\{0, a_{v_1,v_2} - a_{v_2,v_1}\} & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中 $a_{w_1,\ w_2} = \mathrm{Arr}_Q(w_1,\ w_2) + \sum_{k\in K} \mathrm{Arr}_Q(w_1,\ k)\cdot \mathrm{Arr}_Q(k,\ w_2)$ 对于 $w_1,\ w_2 \in Q_0$ 成立。条件 1 和 3 随即得证。

2. 若 v_1 或 v_2 属于 K，显然 $\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1,\ v_2) = \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1,\ Gv_2)$。因此设$v_1,\ v_2 \notin K$。若 $\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1,\ Gv_2) = 0$，则该命题显然成立。否则，根据突变的定义，我们必有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2) &= \mathrm{Arr}_Q(Gv_1, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, Gv_1) \\
&\quad + \mathrm{Arr}_Q(v_1, K)\mathrm{Arr}_Q(K, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, K)\mathrm{Arr}_Q(K, v_1) \\
&= \mathrm{Arr}_Q(Gv_1, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, Gv_1) \\
&\quad + \sum_{k'\in K}\sum_{k\in K} (\mathrm{Arr}_Q(v_1, k')\mathrm{Arr}_Q(k, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, k)\mathrm{Arr}_Q(k', v_1)) \\
&= \mathrm{Arr}_Q(Gv_1, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, Gv_1) \\
&\quad + \sum_{g\in G}\sum_{k\in K} (\mathrm{Arr}_Q(gv_1, k)\mathrm{Arr}_Q(k, v_2) - \mathrm{Arr}_Q(v_2, k)\mathrm{Arr}_Q(k, gv_1)) \\
&= \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2) - \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(v_2, Gv_1) \\
&\le \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2).
\end{aligned}$$

这就证明了所需的不等式。

3. 根据前一部分，我们只需证明顶点$v_1,\ v_2 \notin K$满足当且仅当这一命题。

若 $\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1,\ v_2)\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(v_2,\ Gv_1) = 0$，则不失一般性，$\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1,\ v_2) = 0$，这意味着 $0 = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1,\ v_2) \ge \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1,\ Gv_2)$，特别是

$$\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2) = \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2).$$

由前一部分可推出

$$\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_2, Gv_1) = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_2, v_1) - \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2) = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_2, v_1).$$

反过来，我们有

$$\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(Gv_1, v_2)\mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K Q}(v_2, Gv_1) = \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2)\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_2, Gv_1) = 0.$$

当上述条件成立时，等式 $\mu_K(Q^G) = (\hat{\mu}_K Q)^G$ 立即成立。 □

定义 4.9. 设 Q 为一个箭图，且 $G \subseteq$对称群(Q_0) 满足 Q 是强 G-容许的。若对于任意有限轨道序列$K_1, ..., K_l$，箭图 $(\hat{\mu}_{K_i} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(Q)$ 对所有 $1 \le i \le l$ 都是强 G-容许的，则称 Q关于 G 强全局可折叠。

设 $F \subseteq Q_0$ 为冻结部分，且 (Q, F) 是强 G-容许的。若对于任意有限可变轨道序列 $K_1, ..., K_l$，箭图 $(\hat{}\mu_{K_i} \circ \cdots \circ \hat{}\mu_{K_1})(Q)$ 对所有 $1 \leq i \leq l$ 都是强 G-容许的，则称冰箭图 (Q, F) 关于 G 强全局可折叠。

注 4.10. 根据引理 4.8，对于强 G-可容许箭图 Q，箭图 $\hat{}\mu_K Q$ 是强 G-可容许的，当且仅当它满足定义 4.1 的条件 4。也就是说，当且仅当我们在对某个轨道进行突变时没有产生“虚拟”2-圈。因此，要验证箭图 Q 关于 G 强全局可折叠，只需验证通过轨道变异过程不会产生这些虚拟 2-圈。

此外，我们注意到等式

$$\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_2, Gv_1) - \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2) = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K(Q)}(Gv_2, v_1) - \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K(Q)}(Gv_1, v_2)$$

始终成立，因此

$$\mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_1, Gv_2) = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K(Q)}(Gv_1, v_2) \iff \mathrm{Arr}_{\mu_K(Q^G)}(Gv_2, Gv_1) = \mathrm{Arr}_{\hat{\mu}_K(Q)}(Gv_2, v_1).$$

这将是我们稍后证明属于某一类的无限箭图强全局可折叠的策略。

设 (Q, F) 是一个冰箭图，且 $G \subseteq \mathrm{Sym}(Q_0)$ 满足 (Q, F) 关于 G 强全局可折叠。设 (Q^G, F^G) 为折叠箭图。我们考虑代数

$$\mathcal{F} = \mathbb{Z}[x_v | v \in F][x_v^{\pm 1} \mid v \in Q_0 \setminus F],$$
$$\mathcal{F}^G = \mathbb{Z}[x_{Gv} | Gv \in F^G][x_{Gv}^{\pm 1} \mid Gv \in Q_0^G \setminus F^G].$$

我们分别将 (Q, F) 和 (Q^G, F^G) 与簇代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^G$ 联系起来，它们的初始簇分别为 $(x_v)_{v \in Q_0}$ 和 $(x_{Gv})_{Gv \in Q_0^G}$。我们分别将这些簇代数视为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^G$ 的子代数。

从 $\mathcal{A}$ 的初始簇经过一系列轨道突变得到的任意簇变量集合，称为一个轨道簇。特别地，轨道簇中的每个簇变量都是通常意义下的簇变量。

我们有显然的同态 $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^G$，其定义为 $\psi(x_v) = x_{Gv}$。给定 $\mathcal{A}$ 的一个簇变量 x，若其属于某个轨道簇，则称 $\psi(x)$ 为 $\mathcal{A}^G$ 中 x 的折叠簇变量。以下命题说明了这一术语的合理性。

命题 4.11。 沿用上述记号。设 $K_1, ..., K_l$ 是 (Q, F) 中的一列可变轨道。映射 ψ 将 $\mathcal{A}$ 中在 $K_1, ..., K_l$ 处依次进行轨道突变得到的轨道簇映射到 $\mathcal{A}^G$ 中在 $K_1, ..., K_l$ 处依次进行突变得到的簇。

证明。 根据递归，只需证明单次轨道变异的情形。因此，设 K 是 (Q, F) 的一个可变 G-轨道。在 K 处进行轨道变异，我们得到新的簇 $(x'_v)_{v \in Q_0}$，使得 $x'_v = x_v$ 若

$v \notin K$，且

$$x'_v = \frac{\prod_{w \in Q_0} x_w^{\mathrm{Arr}_Q(v,w)} + \prod_{w \in Q_0} x_w^{\mathrm{Arr}_Q(w,v)}}{x_v} \tag{1}$$

若 $v \in K$。类似地，通过在 K 处对 $(Q^G,\ F^G)$ 进行变异得到的簇 $(x'_{Gv})^{Gv \in Q_0^G}$定义为 $x'_{Gv} = x_{Gv}$ 对于 $Gv \neq K$ 且

$$x'_K = \frac{\prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_{Q^G}(K,Gw)} + \prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_{Q^G}(Gw,K)}}{x_K}. \tag{2}$$

将 ψ 应用于 (1)，得到

$$\begin{aligned}
\psi(x'_v) &= \frac{\prod_{w \in Q_0} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_Q(v,w)} + \prod_{w \in Q_0} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_Q(w,v)}}{x_K} \\
&= \frac{\prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\sum_{g \in G} \mathrm{Arr}_Q(v,gw)} + \prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\sum_{g \in G} \mathrm{Arr}_Q(gw,v)}}{x_K} \\
&= \frac{\prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_Q(v,Gw)} + \prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_Q(Gw,v)}}{x_K} \\
&= \frac{\prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_{Q^G}(K,Gw)} + \prod_{Gw \in Q_0^G} x_{Gw}^{\mathrm{Arr}_{Q^G}(Gw,K)}}{x_K}.
\end{aligned}$$

将此结果与 (2) 比较，即得结论。 □

我们立即得到以下推论。

推论 4.12. 用上述记号， $\mathcal{A}^G$ 中的每个簇变量都是 $\mathcal{A}$中某个簇变量的折叠簇变量。

5 折叠 A_∞ 箭图

令 Q 为一个箭图（不含环或二环），其底层图是一个具有 n 个顶点的圈 $n \geq 2$，顶点由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 编号。令 A_Q 为底层图示为 A_∞ 的箭图，因此其顶点由 $\mathbb{Z}$ 编号。当且仅当 $[i]$ 到 $[i \pm 1]$ 在 Q 中有一条箭头时， i 到 $i \pm 1$ 在 A_Q 中也有一条箭头，见图 3。令 $\Sigma \in$ Sym$((A_Q)_0)$ 由 $\Sigma(i) = i + n$ 给出。令 G 为 Sym$((A_Q)_0)$ 中由 Σ 生成的子群。

命题 5.1. 箭图 A_Q 是强 G-容许的，并且 $Q \simeq A_Q^G$。

证明。 箭图 A_Q 和群 G 显然满足定义 4.1 的假设。根据上文 A_Q 的定义，可得同构 $Q \simeq A_Q^G$。 □

我们希望了解 Q 的哪些定向使箭图 A_Q 相对于 G 强全局可折叠。以下一般命题将给出一个部分结果。

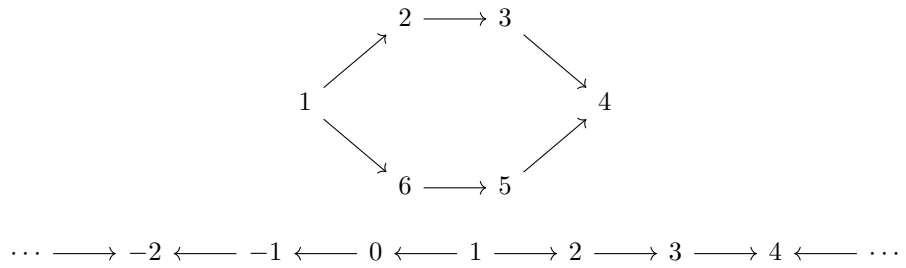


图 3：具有 6 个顶点的循环箭图及其关联的 A_∞ 定向

命题 5.2。设 A 是一个连通箭图，$G \subseteq$对称群(A_0) 是 A 顶点的一个置换群，并且 A 是强 G-可容许的。若 A^G 是一棵有限树，则 $G = \{\mathrm{Id}_A\}$ 且$A = A^G$。

证明。令 $\{O_1, ..., O_n\}$为 A中的 G-轨道。若 G 非平凡，则 $|O_1| = |G| > 1$。令v_1, $v_2 \in O_1$ 为 A中的两个不同顶点。

由于 A是连通的，因此存在一条（不一定有向的）路径连接 v_1 和 v_2。此外，我们可以假设这条路径经过任一给定顶点至多一次。特别地，这意味着存在 A 中的互异顶点序列 $(a_1, ..., a_k)$，其中 $a_1 = v_1$, $a_k = v_2$满足

$$\mathrm{Ed}_A(a_1, a_2) \cdot ... \cdot \mathrm{Ed}_A(a_{k-1}, a_k) > 0.$$

但现在我们可以找到 $1 < j \leq k$，使得对于任意 $1 < s < j$，$Ga_1 = Ga_j$ 和 $Ga_1 \neq Ga_s$。注意，$j > 2$，否则对于属于同一 G-轨道的 a_1，a_2，我们将有 $\mathrm{Ed}_A(a_1, a_2) > 0$，这与 A_Q 的强 G-容许性矛盾。

如果 $j = 3$，那么 $\mathrm{Ed}_A(a_2, O_1) \geq \mathrm{Ed}_A(a_2, a_1) + \mathrm{Ed}_A(a_2, a_3) \geq 2$。因此 $\mathrm{Ed}_{A^G}(Ga_2, O_1) \geq 2$, 这与 A^G 是一棵树相矛盾。

如果 $j > 3$，根据构造可得

$$\mathrm{Ed}_A(a_1, a_2) \cdot ... \cdot \mathrm{Ed}_A(a_{j-1}, a_j) > 0.$$

由于 $\mathrm{Ed}_A(a_i, a_{i+1}) \leq \mathrm{Ed}_{A^G}(Ga_i, Ga_{i+1})$，我们得到

$$\mathrm{Ed}_{A^G}(O_1, Ga_2) \cdot ... \cdot \mathrm{Ed}_{A^G}(Ga_{j-1}, O_1) > 0,$$

这再次与 A^G 是一棵树相矛盾。 □

推论5.3. 如果 Q 是循环定向的，那么 A_Q 相对于 G并非强全局可折叠。

证明. 众所周知（例如参见 [FWZ21]）， Q 属于 D_n型，也就是说， Q 与一个箭图 Q突变-˜等价，其底层图为 D_n。

假设 A_Q 相对于 G是强全局可折叠的，并折叠到 Q。那么，对 A_Q 施加有限次轨道突变，可得到一个箭图 $\tilde{A}$ ，使得 $\tilde{A}^G = \tilde{Q}$。根据上述推论˜， A是有限的，这就产生了矛盾。

□

现在我们可以精确地说明， A_Q 何时相对于 G是强全局可折叠的。

定理 5.4. 箭图 A_Q 相对于 G 是强全局可折叠的，当且仅当 Q 不是循环定向的。

证明. 根据上述推论，我们只需证明：若 Q 不是循环定向的，则A_Q 相对于 G是强全局可折叠的。

根据 [FST08], ，若 Q 不是循环定向的，则它是环带的一个三角剖分 T 的箭图，其中一个边界分支上有 k_1 个标记，另一个边界分支上有 k_2 个标记，并且 $k_1 + k_2 = n$。这里， k_1 是 Q 中顺时针指向的箭的数量。

Q 的变异对应于翻转 T中与之关联的弧。我们注意到， T 中至少有一条弧连接两个边界分支。我们按顺时针定向，分别将外侧边界上的标记编号为 v_1，.....， v_{k_1}，将内侧边界上的标记编号为 u_1，.....， u_{k_2}，并且使得 T 中有一条弧连接 v_1 和 u_1。

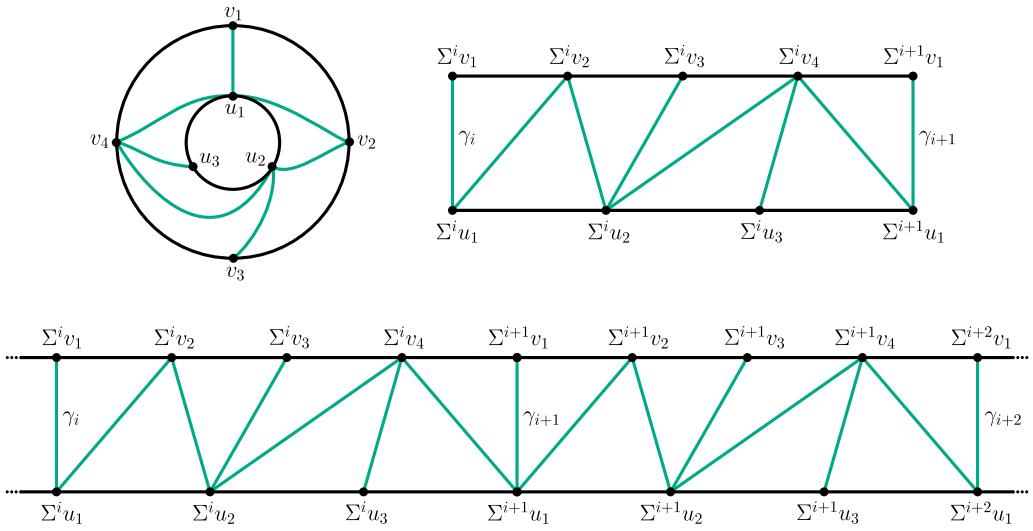
我们将这个三角剖分提升为无限带状曲面 $\mathcal{S}$上的一个周期三角剖分。为此，我们考虑一个无限矩形，其边界由两条无限直线组成，每条边界上都有一个无限可数的标记点集 $\mathcal{M}$ 。我们将上边界上的标记点编号为 $\{\Sigma^i v_j \mid i \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq k_1\}$ ，将下边界上的标记点编号为 $\{\Sigma^i u_j \mid i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq k_2\}$，使得 $\Sigma^i v_j$ 位于 $\Sigma^{i'} v_{j'}$ 左侧，当且仅当 $i < i'$ 或 $i = i'$且 $j < j'$。我们以显然的方式定义平移 Σ : $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ，也就是说，对于 $m \in \mathcal{M}$ ，有

$$\Sigma(m) = \begin{cases} \Sigma^{i+1} v_j & \text{if } m = \Sigma^i v_j \\ \Sigma^{i+1} u_j & \text{if } m = \Sigma^i u_j \end{cases}.$$

$(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 中的弧与 $\mathcal{M}$ 中不同点组成的非相邻点对一一对应。因此，我们也可以将平移 Σ 扩展到弧上；如果 β 是端点为 $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ 的弧，那么 $\Sigma(\beta)$ 就是端点为 $\Sigma(m_1)$ $\Sigma(m_2)$ 的弧。

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们添加一条弧 γ_i ，连接 $\Sigma^i v_1$ 和 $\Sigma^i u_1$ 。令 R_i 为由 γ_i 和 γ_{i+1}围成的矩形。我们对 R_i 作三角剖分，使得若将 $\Sigma^i v_1$ 与 $\Sigma^{i+1} v_1$、$\Sigma^i u_1$ 与 $\Sigma^{i+1} u_1$ 以及 γ_i 与 γ_{i+1} 识别起来，就得到带有三角剖分 T 的环带。

˜令 T 为 $\mathcal{S}$ 的三角剖分，它对每个 $i \in \mathbb{Z}$ 都与 R_i 上的三角剖分重合。我们看到， T 在弧的平移 Σ 下保持稳定。不难看出，这个三角剖分的箭图恰好是 A_Q，而 $(A_Q)_0$ 的自同构 Σ 对应于弧的平移 Σ 。



Fig图 4：由环带的三角剖分构造无限带状曲面的三角剖分 s

由于 A_Q 是强 G-可容许的，我们可以在 Σ-轨道上进行变异。这等价于能够在 T 中同时翻转弧的 Σ-轨道。显然，我们得到的新三角剖分仍然是 Σ-稳定的。为了证明 A_Q 是强全局可折叠的，根据注 4.10，只需证明：给定 $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ 的一个 Σ-稳定三角剖分，其箭图不含虚拟 2-圈。

Σ-稳定三角剖分中的虚二环对应于一对弧 β_1 和 β_2，它们属于同一个 Σ轨道，共享一个端点，并围成一个矩形。记 β_1的端点为 m_1 和 m_2，其中 m_2 也是 β_2 的一个端点。不失一般性，$\beta_2 = \Sigma^a \beta_1$对 $a \geq 1$成立，且 $m_1 = v_i$。特别地，β_1 的端点为 $m_1 = v_i$ 和 $m_2 = \Sigma^a m_1 = \Sigma^a v_i$，而 $\beta_2 = \Sigma^a \beta_1$ 的端点为 $\Sigma^a m_1 = \Sigma^a v_i$ 和 $\Sigma^a m_2 = \Sigma^{2a} v_i$。

由于 β_1 和 β_2 位于一个矩形上，因此存在一个标记点 m_3 以及属于同一个 Σ-稳定三角剖分的弧 δ_1 和 δ_2，它们分别连接 m_1 与 m_3、$\Sigma^{2a} m_1$ 与 m_3。我们考虑 m_3的可能构型。

情况 1：$m_3 = \Sigma^j v_k$，且它位于 m_1 的左侧。该三角剖分是 Σ-稳定的，$\Sigma^{-a}\delta_2$ 也是三角剖分中的一条弧。但 $\Sigma^{-a}\delta_2$ 和 δ_2 相交。因此，这种构型不可能存在。

情况 2：$m_3 = \Sigma^j v_k$，且它位于 $\Sigma^a m_2$ 的右侧。与上述情况类似，$\Sigma^a \delta_1$ 和 δ_1 相交，因此这种构型不可能存在。

情况 3：$m_3 = \Sigma^j u_k$。在这种情况下，$\Sigma^a \delta_1$ 与 δ_2 相交，这是不可能的。

这些情形的直观描述见图5。总而言之，我们已经证明，不可能存在一种 Σ-稳定三角剖分，使其箭图包含一个虚二环。因此 (A_Q, Σ) 是

强全局可折叠。 □

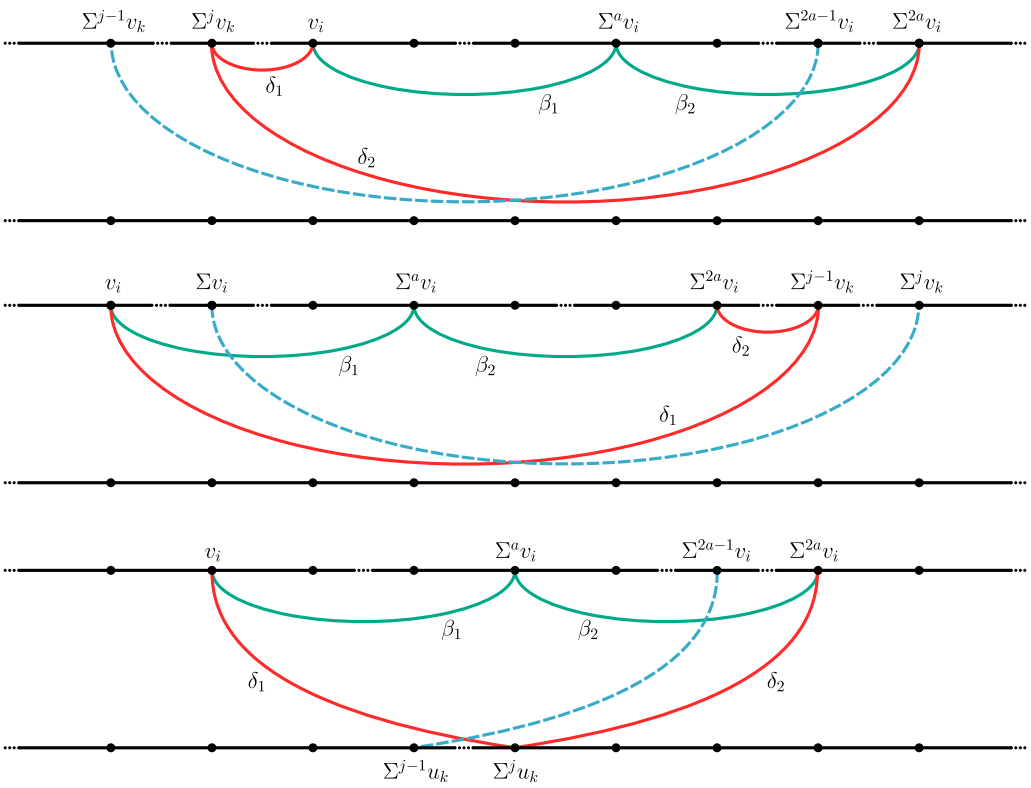


图5：从上到下，定理 5.4 证明中的情形 1–3

注 5.5. 由命题 5.2 可知，对于不同于 A-型的仿射箭图，不可能存在类似于定理 5.4 的结果。也就是说，不存在这样的无限箭图 Γ ：有一个群 G 作用于其顶点，使得 Γ 是强 G-容许的，并且 Γ^G 是仿射-D 型或仿射-E 型。

备注 5.6. A_∞ 的几何模型是 [LP17], 中所考虑的模型，他们在那里研究了相应的加法簇范畴。另见 [GG14]。

备注 5.7. 不难看出，$(\mathcal{S}, \mathcal{M})$的任意两个 Σ-稳定三角剖分都可以通过有限次 Σ-轨道翻转相互连接。此外，如果 γ 是一条弧，对任意$i \in \mathbb{Z}$都不与 $\Sigma^i\gamma$ 相交，那么它可以补全为一个 Σ-稳定三角剖分。

6 范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$

本节中，我们定义范畴 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 的子范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$，并利用 [HL10] 的结果，将其格罗滕迪克环识别为一个簇代数。

我们回顾一下记号 $I_\infty = \mathbb{Z}$。此外，我们定义 $(I_\infty)_0 = 2\mathbb{Z}$ 和 $(I_\infty)_1 = 2\mathbb{Z}+1$。

我们定义箭图 Γ_∞ 如下。其顶点集为 $I_\infty \sqcup I'_\infty$，其中有 $I'_\infty = \mathbb{Z}$，因此 $(\Gamma_\infty)_0$ 由两份 $\mathbb{Z}$ 组成。我们用 i 表示 I_∞ 中的顶点，用 i' 表示 I'_∞中的顶点。Γ_∞ 的箭定义如下

$$\mathrm{Arr}_{\Gamma_\infty}(i,j) = \begin{cases} \delta_{i,i+1}+\delta_{i,i-1} & i \in (I_\infty)_0 \\ 0 & i \in (I_\infty)_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\Gamma_\infty}(i',j') = 0,$$

$$\mathrm{Arr}_{\Gamma_\infty}(i',j) = \begin{cases} \delta_{i,j} & i \in (I_\infty)_0 \\ 0 & i \in (I_\infty)_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\Gamma_\infty}(i,j') = \begin{cases} 0 & i \in (I_\infty)_0 \\ \delta_{i,j} & i \in (I_\infty)_1 \end{cases}.$$

我们声明顶点 i' 为冻结顶点。我们将 Γ_∞ 视为第2.3节中引入的箭图 Γ_n的双无限版本。

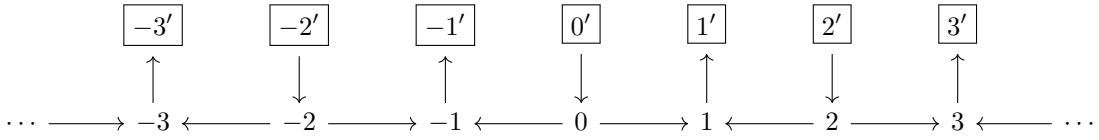


图 6：箭图 Γ_∞。方形顶点为冻结顶点

我们令 $\xi\colon I_\infty \to \{0,1\}$ 为由 $\xi(i) = \begin{cases} 0 & i \in (I_\infty)_1 \\ 1 & i \in (I_\infty)_0 \end{cases}$ 定义的映射。

我们令 $\mathcal{M}_\infty \subseteq A_\infty$ 为由 $Y_{i,q^{\xi(i)}}$ 和 $Y_{i,q^{\xi(i)+2}}$（对所有 $i \in I_\infty$）生成的单项式子群。我们将范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$定义为 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$的满子范畴，其中对象是具有有限合成列的模，且每个合成因子都同构于某个 $m \in \mathcal{M}_\infty$对应的 $L(m)$。这是第2.3节中的范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}))$的一个类似物。

沿用 [Her05b; Her07], ，可积（不一定具有有限长度） $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$- 模的范畴具有融合积。

命题6.1。设 V和 W 是 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$中的两个模，因此它们都有有限合成列。那么它们的融合积 $V * W$ 也有有限合成列。特别地，$\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$ 上的融合积赋予 *Grothendieck* 群 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)))$一种交换环结构。

证明。不失一般性，我们可以假设 V和 W 是单的，记 $V = L(m_{\gamma_1})$ 和 $W = L(m_{\gamma_2})$ 为 $\gamma_1, \gamma_2 \in P_l^+$。那么 $\chi_q(V*W) = \chi_q(V)\cdot\chi_q(W)$，因此只需证明 $\chi_q(V*W)$ 中只含有限个主导单项式。若 $\lambda \in P^+$满足 $(V*W)_\lambda \neq 0$，则 $\lambda \in (\omega(m_{\gamma_1}) + \omega(m_{\gamma_2}) - Q^+) \cap P^+$。但是 $|(\omega(m_{\gamma_1}) + \omega(m_{\gamma_2}) - Q^+) \cap P^+| < \infty$，所以 $\chi_q(V*W)$ 中出现的主导单项式只有有限个。

□

引理 6.2。 范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty}))$ 在融合积下封闭，其 *Grothendieck* 环 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty})))$ 同构于一个含有可数无穷多个变量的多项式环

$$\mathbb{Z}\left[[L(Y_{i,q^{\xi(i)}})], [L(Y_{i,q^{\xi(i)+2}})] \mid i \in I_\infty\right].$$

证明。 这与命题 2.14 完全类似。 □

我们考虑代数 $\mathcal{F}_\infty = \mathbb{Z}[f_i, x_i^{\pm 1} \mid i \in \mathbb{Z}]$。令 $\mathcal{A}_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty$ 为与 Γ_∞ 相关联的簇代数，其初始簇为 $(f_i,\ x_i)_{i\in I_\infty}$，其中 x_i 对应可变顶点i，而 f_i 对应冻结顶点 i'。

显然，当 n 足够大时， Γ_∞ 的每个突变序列都支撑在 $[-n, n]$ 的顶点上。特别地，我们可推出，簇变量与 A_∞ 的根系的几乎正根一一对应，而这些根可由其分母向量读出。

对于一个几乎正根 $\alpha \in \Delta$，令 $x[\alpha] \in \mathcal{A}_\infty$ 为其对应的（非冻结）簇变量。特别地，$x[-\alpha_i] = x_i$。

引理 6.3。 簇代数 $\mathcal{A}_\infty$ 同构于由可数无穷多个变量生成的多项式代数

$$\mathbb{Z}\left[x[-\alpha_i], x[\alpha_i] \mid i \in I_\infty\right].$$

证明。 这由上述讨论和命题 2.15 得出 □

对于一个几乎正根 $\alpha \in \Delta$，我们按如下方式关联一个单项式 $m_\alpha \in \mathcal{M}_\infty$。令

$$m_{-\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_0, \\ Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_1, \end{cases} \qquad \text{and} \qquad m_{\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_0, \\ Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_1, \end{cases}$$

对于单根。对于非单根正根 $\alpha = \sum_{i\in[i_1,i_2]} \alpha_i$，令 $m_\alpha = \prod_{i\in[i_1,i_2]} m_{\alpha_i}$。我们令

$$\iota : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\infty})))$$

为由 $\iota(x[\pm\alpha_i]) = [L(m_{\pm\alpha_i})]$ 定义的环同态。由引理 6.2 和引理 6.3，映射 ι 是良定义的代数同构。

命题 6.4。 同构 ι 满足

$$\iota(x[\alpha]) = [L(m_\alpha)] \qquad \textit{and} \qquad \iota(f_i) = [L(Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}})]$$

对于任意几乎正根 α 和 $i \in \mathbb{Z}$。

证明。 这是命题 3.3、注 3.4 和定理 2.16 的推论 □

⌢**注 6.5**。 在下文中，我们将把 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)))$ 与其在 q-特征映射下的像等同起来，并且可以将 ι 视为从 $\mathcal{A}_\infty$ 到 $\mathcal{Y}_\infty$的映射。

7 折叠与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$

本节中，我们沿用 [Nak11], 的结果，并将其限制在 $A_n^{(1)}$情形。由于 [Nak11]要求 Dynkin 图没有奇圈，因此我们实际上只考虑 $A_{2n-1}^{(1)}$，其中 $n>0$。特别是，我们研究代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$。记 $I_{2n}=\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$, $A_{2n}:=A(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$，以及 $\mathcal{Y}_{2n}:=\mathcal{Y}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$。

7.1 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$的一个子范畴

⌢我们希望引入一个类似于此前介绍的 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$的 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$子范畴，但定义时需要更加谨慎。

令$(I_{2n})_0$ 为 I_{2n}的偶整数子集，令$(I_{2n})_1$ 为 I_{2n}的奇整数子集。定义映射 $\xi\colon I_{2n}\to\{0,1\}$ 如下:

$$\xi(i)=\begin{cases}0 & i\in(I_{2n})_0\\ 1 & i\in(I_{2n})_1\end{cases}.$$

˜我们令 $\mathcal{M}\subseteq A_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 为由以下形式的单项式生成的子群:

- $k_\omega Y_{i,\ q^{\xi(i)}}$ 其中 $\omega\in P$ 满足 $\omega(\alpha_j^\vee)=\delta_{i,\ j}$,
- $k_\omega Y_{i,\ q^{\xi(i)+2}}$ 其中 $\omega\in P$ 满足 $\omega(\alpha_j^\vee)=\delta_{i,\ j}$,

对 $i\in I_{2n}$。

我们令 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$ 为 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$ 的满子范畴，其对象为具有有限合成列的模，并且每个合成因子 S 都同构于 $L(m)$，其中 $m\in\mathcal{M}$。

命题 2.14 的证明表明，范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$ 对 Her05b 的融合积以及 Her07] 的张量积封闭，其中 Her07] 和 Lau25]。特别地，Grothendieck 群 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})))$ 具有环结构（由融合积和张量积给出的环结构相同，参见 [Lau25] 的第 6 节）。

˜**注 7.1**。 与 A 型情形不同，给定单项式 $m\in A_{2n,\ \mathrm{tor}}$，权 $\omega(m)$˜ 并不能完全由 $(u_{i,\ a}(m))_{i\in I_{2n},\ a\in\mathbb{C}^*}$ 确定。特别地，如果两个单项式 $m,\ m'\in A_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 满足 $(u_{i,\ a}(m))_{i\in I_{2n},\ a\in\mathbb{C}^*}=(u_{i,\ a}(m'))_{i\in I_{2n},\ a\in\mathbb{C}^*}$，那么对于某个 $t\in\mathbb{C}$，有 $m^{-1}m'=k_{t\delta}$，其中$\delta=\sum_{i=0}^{2n-1}\alpha_i$。

现在我们将说明如何将注意力限制在一类较小的单项式上，同时保留 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$的结构。这样我们就能更好地理解[Her11]和 [Nak11]的结果。

对于 $i \in I_{2n}$，设$\omega_{i,\ \xi(i)}, \omega_{i,\ \xi(i)+2} \in P$满足$k_{\omega_{i,\ \xi(i)}} Y_{\omega_{i,\ \xi(i)}},\ k_{\omega_{i,\ \xi(i)+2}} Y_{\omega_{i,\ \xi(i)+2}} \in \mathcal{M}$。令 $\mathcal{M}'$为由$k_{\omega_{i,\ \xi(i)}} Y_{\omega_{i,\ \xi(i)}},\ k_{\omega_{i,\ \xi(i)+2}} Y_{\omega_{i,\ \xi(i)+2}}$生成的 $\mathcal{M}$ 的子群。由此可知，若 $m \in \mathcal{M}'$，则 $\omega(m)$由$(u_i, a(m))_{i \in I_n,\ a \in \mathbb{C}^*}$确定。

令 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$ 为 $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$ 的子范畴，它由合成因子同构于某个 $L(m)$（其中 $m \in \mathcal{M}'$）的模组成。原则上，没有理由认为 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$ 在融合积下封闭，但我们可以证明，可以选择 $\mathcal{M}'$ 使其确实具有这一性质。

引理 7.2。对于 $i \in I_{2n}$，存在 $\omega_{i,\ \xi(i)}, \omega_{i,\ \xi(i)+2} \in P$ 的一个（非唯一）选择，使得 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$ 在融合积下封闭。

证明。沿用命题 2.14 证明中的论证，只需证明：若 $m \in \mathcal{M}'$ 和 $A \in \mathbb{Z}[A_{i,a} \mid i \in I_{2n}, a \in \mathbb{C}^*]$ 满足 mA^{-1} 是一个支配单项式，则 $mA^{-1} \in \mathcal{M}'$。

因此，设 m 和 A 如上所述，使得 mA^{-1} 是支配的。由[HL10] 的第 7 节可知， A 实际上是 $A_{i,\ q^{\xi(i)+1}}$ 的乘积，其中 $i \in I_{2n}$。但是

$$A_{i,q^{\xi(i)+1}} = k_{\alpha_i} Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}} Y^{-1}_{i-1,q^{\xi(i)+1}} Y^{-1}_{i+1,q^{\xi(i)+1}},$$

我们看到，如果

$$k_{\alpha_i} = k_{\omega_{i,\xi(i)}} k_{\omega_{i,\xi(i)+2}} k^{-1}_{\omega_{i-1,\xi(i)+1}} k^{-1}_{\omega_{i+1,\xi(i)+1}} \tag{3}$$

成立，则 $mA^{-1} \in \mathcal{M}'$。我们注意到，对于 $i \in (I_{2n})_0$, , 项 $k_{\omega_{i,\ \xi(i)}}$ 只出现在 k_{α_i}中。类似地，对于 $i \in (I_{2n})_1$, , 项 $k_{\omega_{i,\ \xi(i)+2}}$ 只出现在 k_{α_i}中。因此，我们可以选取 $\omega_{i,\ \xi(i)}$和 $\omega_{i,\ \xi(i)+2}$ ，使得 (3) 成立，从而得到引理中的断言。 □

从现在起，固定 $\mathcal{M}'$ ，使得 $C_1(\mathcal{M}')$ 关于融合积封闭。我们得到一个环嵌入

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')) \hookrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}}))).$$

应当注意， $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$中的每个单模 $L(m)$ 都同构于乘积$L(k_{t\delta}) * L(m')$，其中 $m' \in \mathcal{M}'$ 和 $t \in \mathbb{C}$是唯一的。因此， $\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}}))$的结构由 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$的结构决定，并且我们有一个环的同构

$$\theta : \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')) \to \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})))$$

由.....给出

$$\theta(t \otimes [L(m')]) = [L(k_{t\delta}) * L(m')] = [L(k_{t\delta} \cdot m')],$$

wh其中 $\mathbb{Z}[\mathbb{C}]$ 是复数加法群的群代数。其乘法

$\mathbb{Z}[\mathbb{C}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{M}'))$ 中的运算由下式给出

$$(t \otimes [L(m')]) \cdot (t' \otimes [L(m'')]) = (t + t') \otimes [L(m') * L(m'')].$$

这为我们使用范畴 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$ 及其格罗滕迪克环提供了依据。

由于 $\mathcal{M}'$ 的定义方式，为了简化记号，在描述 $\mathcal{C}_1(\mathcal{M}')$ 中的简单模及模的 q-特征时，我们可以省略 k_ω 变量。因此，从现在起，我们忽略出现在 A_{2n} 和 $\mathcal{Y}_{2n}$ 中的变量 k_ω。令 $\mathcal{K}_{2n,\,\mathrm{tor}} \coloneqq \mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{M}'))$，并将其与它在 $\mathcal{Y}_{2n}$ 中的像等同起来。

7.2 映射 ϕ_{2n} 与 q-特征的折叠

定义 7.3 ([Her11])**.** 令 $\phi_{2n} : A_\infty \to A_{2n}$ 为如下给出的群同态:

$$\phi_{2n}(Y_{i,a}) = Y_{[i],a},$$

其中 $i \in \mathbb{Z}$、$[i] \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ 是模 $2n$ 的等价类，且 $a \in \mathbb{C}^*$。

注 7.4. 由于我们忽略了变量 k_ω，如何将 ϕ_{2n} 扩展为态射 $\mathcal{Y}_\infty \to \mathcal{Y}_{2n}$ 存在歧义。不过，我们要求 $\phi_{2n}(A_{i,\,a}) = A_{[i],\,a}$，这样在实际应用中，我们就能按照以下方式，将映射 ϕ_{2n} 应用于简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征。设 V 为一个可积的简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模，其最高支配单项式为 m。因此，它的 q-特征具有如下形式

$$\chi_q(V) = \sum_{m' \le m} a_{m'} m'$$

其中 $m' \in A_\infty$、$a_{m'} \in \mathbb{N}$ 和 $a_m = 1$。我们将把 $\phi_{2n}(\chi_q(V))$理解为

$$\phi_{2n}(\chi_q(V)) = \sum_{m' \le m} a_n k_{\omega_{m'}} \phi_{2n}(m') \in \mathcal{Y}_{2n},$$

其中 $\omega_m \in P$满足 $k_{\omega_m}\phi_{2n}(m) \in A_{2n}$（因此 ω_m 由 m 确定至多相差一个 $t\delta$），而 $\omega_{m'} \in P$是满足 $k_{\omega_{m'}}\phi_{2n}(m') \le k_{\omega_m}\phi_{2n}(m)$ 的 A_{2n}中的唯一元素。若对每个支配单项式m，我们都固定这样一个 ω_m，便可将 ϕ_{2n} 线性延拓，从而得到一个从 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)))$到 $\mathcal{Y}_{2n}$的阿贝尔群同态。

在 [Her11], Hernandez 的研究中表明，ϕ_{2n} 将可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征映射为 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\mathrm{tor}})))$中的虚 q-特征。更明确地说，这意味着如果 V 是$\mathcal{O}_{\mathrm{int}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty))$中的一个模，那么

$$\phi_{2n}(\chi_q(V)) = \sum_{\substack{m' \in \tilde{A}_{2n}, \\ m' \text{ dominant}}} a_{m'} \chi_q(L(m')),$$

其中$a_{m'} \in \mathbb{Z}$，并且对于几乎所有的 m'，$a_{m'} = 0$ 。

特别地，通过固定 ω_m 的适当取值，我们可以将 ϕ_{2n} 理解为从 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)))$ 到 $\mathcal{R}(\mathcal{C}_1(\mathcal{M}'))$ 的环同态。

在 [Her11], Hernandez 提出了如下猜想。

猜想 7.5 （ [Her11] 中的猜想 5.3）。映射 ϕ_{2n} 将可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征映射为实际 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。

随后证明，该猜想对一类特定的可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模成立。

定理 7.6 （ [Her11] 中的定理 4.2）。令 $i \in \mathbb{Z}$，令 $a \in \mathbb{C}^*$ 和 $k \geq 0$，并设

$$m^{\mathrm{KR}}_{i,a,k} = \prod_{j=1}^{k} Y_{i,aq^{2(j-1)}} \in \tilde{A}_\infty \qquad and \qquad m^{\mathrm{KR}}_{[i],a,k} = \prod_{j=1}^{k} Y_{[i],aq^{2(j-1)}} \in \tilde{A}_{2n}.$$

那么 $\phi_{2n}\left(\chi_q\left(L\left(m^{\mathrm{KR}}_{i\,a,\;,\;k}\right)\right)\right) = \chi_q\left(L\left(m^{\mathrm{KR}}_{[i],\;a,\;k}\right)\right)$ 。也就是说，映射 ϕ_{2n} 将 *Kirillov–Reshetikhin* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模的 q-特征映射为 *Kirillov–Reshetikhin* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。 □

值得注意的是，除 Kirillov–Reshetikhin 模的情形外，这一猜想仍未解决。本文后文将给出满足此猜想的非Kirillov–Reshetikhin模的例子（见推论 7.12 和第 8 节）。

7.3 C1(M′) 的单幺范畴化

现在我们回到本节的主要目标。对于 $n > 0$，我们令 Γ_{2n} 为具有 $4n$个顶点的箭图，记作 $\{1, ..., 2n\} \cup \{1', ..., 2n'\}$。我们将它们视为 $I_{2n} := \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ 的元素。$\tilde{\Gamma}_{2n}$ 的箭由下式给出：

$$\mathrm{Arr}_{\tilde{\Gamma}_{2n}}(i,j) = \begin{cases} \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1} & i \in (I_{2n})_0 \\ 0 & i \in (I_{2n})_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\tilde{\Gamma}_{2n}}(i',j') = 0,$$

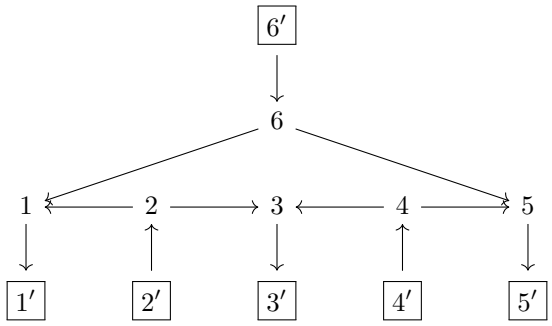
$$\mathrm{Arr}_{\tilde{\Gamma}_{2n}}(i',j) = \begin{cases} \delta_{i,j} & i \in (I_{2n})_0 \\ 0 & i \in (I_{2n})_1 \end{cases}, \qquad \mathrm{Arr}_{\tilde{\Gamma}_{2n}}(i,j') = \begin{cases} 0 & i \in (I_{2n})_0 \\ \delta_{i,j} & i \in (I_{2n})_1 \end{cases}.$$

我们将顶点 i' 设为冻结顶点。

我们可以将 $\tilde{\Gamma}_{2n}$ 识别为 Γ_∞ 关于群 $G \subseteq \mathrm{Sym}((\Gamma_\infty)_0)$ 的折叠 Γ_∞^G ；该群由对 $(\Gamma_\infty)_0$，平移 Σ $2n$ 生成，其定义如下：

$$\Sigma(i) = i + 2n \qquad \text{and} \qquad \Sigma(i') = (i+2n)'$$

对于 $i \in I_\infty$。



˜图7：箭图 Γ_{2n}，其中有 $n = 3$。方形顶点是冻结的

我们考虑代数 $\mathcal{F}_{2n,\ \mathrm{tor}} = \mathbb{Z}[f_i, x_i^{\pm 1} \mid i \in I_{2n}]$。令 $\mathcal{A}_{2n,\ \mathrm{tor}} \subseteq \mathcal{F}_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 为与 Γ_{2n} 相关联的簇代数，其初始簇为 $(x_i,\ f_i)_{i \in I_{2n}}$，其中 x_i 对应于顶点 i，而 f_i 对应于顶点 i'。

定理 7.7（第5节，Nak11]中的命题7.5、7.6）。存在代数同构

$$\iota : \mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}} \to \mathcal{K}_{2n,\mathrm{tor}}$$

使得

$$\iota(x_i) = \begin{cases} \chi_q(L(Y_{i,q^{\xi(i)+2}})) & \text{for } i \in (I_{2n})_0 \\ \chi_q(L(Y_{i,q^{\xi(i)}})) & \text{for } i \in (I_{2n})_1 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \iota(f_i) = \chi_q(L(Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}})).$$

每个非初始簇变量都具有如下形式

$$\chi_q\left(L\left(\prod_{i \in (I_{2n})_0} Y_{i,q^{\xi(i)}}^{a_i} \prod_{i \in (I_{2n})_1} Y_{i,q^{\xi(i)+2}}^{b_i}\right)\right)$$

其中 a_i、$b_i \in \mathbb{N}$为某些值。

最后，设 m_1，...，m_s 是支配单项式，使得 χ_q（L（m_1）...，χ_q（L（m_s））对应于簇变量。则

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_q(L(m_i)) = \chi_q\left(L\left(\prod_{i=1}^{s} m_i\right)\right)$$

当且仅当 $\chi_q(L(m_1))$ ..., $\chi_q(L(m_s))$ 属于同一个簇。 □

注7.8. 我们可以将定理的最后一部分改述如下：单模 $L(m_1)$ ..., $L(m_s)$ 对应的簇变量属于同一个簇，当且仅当

当且仅当

$$L(m_1) * \cdots * L(m_s)$$

是一个单模，当且仅当 $\prod_{i=1}^{s}[L(m_i)]$ 是某个单模的类。

下文中，利用同构 ι，我们将 q-特征与其在格罗滕迪克环中对应的类，以及相关簇代数中的元素等同起来。

7.4 将 $\mathcal{A}_\infty$ 折叠到 $\mathcal{A}_{2n,\ \mathrm{tor}}$

~正如我们之前所述，箭图 Γ_{2n} 是 Γ_∞ 关于由平移 Σ生成的群 G折叠得到的。根据定理 5.4，Γ_∞ 的可变部分关于 G是强全局可折叠的，并折叠到 Γ_{2n}的可变部分。我们的目标是利用上述结果证明，整个冰箭图 Γ_∞ 关于 G是强全局可折叠的。

在此之前，我们需要以下技术引理。对于 $L \in \mathcal{Y}_{2n}$，我们用 $D(L) \subseteq \mathcal{A}_{2n} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 表示 L 中出现的单项式集合，并计入其重数。这意味着 $(m',\ a_{m'}) \in D(L)$ 当且仅当单项式 m' 在 L 中的系数为 $a_{m'} \neq 0$。如果 L 被 μ支配，且其 μ主导权为 $m \in \mathcal{M}'$，我们就称之为

1. m 是一个支配单项式，使得 $(m,1) \in D(L)$ ，

2. 若 $(m', a_{m'}) \in D(L)$，则 $m' \leq m$；3. $m \cdot Y_i^{-1}{}_{i,\xi()}$ $Y_i^{-1}{}_{i,\xi()+2}$ 对任何 $i \in I_{2n}$ 都不是支配的。

例如，根据定理 7.7，对应于簇变量 $\mathcal{K}_{2n,\mathrm{tor}}$ 的每个单模都是 μ-支配的，其 μ-支配权是以下之一：

- $Y_{i,q^{\xi_{(i)+2}}}$，其中 $i \in (I_{2n})_0$,
- $Y_{i,q^{\xi_{(i)}}}$，其中 $i \in (I_{2n})_1$,
- $\prod_{i\in(I_{2n})_0} Y_i^{a_i}{}_{,q^{\xi_{(i)}}} \prod_{i\in(I_{2n})_1} Y_i^{b_i}{}_{,q^{\xi_{(i)+2}}}$，其中 a_i, $b_i \in \mathbb{N}$。

引理 7.9。设 M、S_1、$S_2 \in \mathcal{K}_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 是简单可积 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\ \mathrm{tor}})$-模的特征，且设 F_1、$F_2 \in \mathcal{K}_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 是一对由冻结变量构成的簇单项式，使得

$$N \cdot M = S_1 \cdot F_1 + S_2 \cdot F_2 \tag{4}$$

对于某个由 μ 支配的 $N \in \mathcal{Y}_{2n}$。假设 F_1'、$F_2' \in \mathcal{K}_{2n,\ \mathrm{tor}}$ 是另一对由冻结变量构成的簇单项式，使得

$$N' \cdot M = S_1 \cdot F_1' + S_2 \cdot F_2'$$

对于某个由 μ 支配的 $N' \in \mathcal{Y}_{2n}$。那么 $F_1 = F_1'$ 或 $F_2 = F_2'$。

证明。分别用 m、s_1 和 s_2 表示 M、S_1 和 S_2 的最高支配单项式。将 N 的 μ-支配单项式记为 k。最后，分别用 l_1 和 l_2 表示 F_1 和 F_2 的最高支配单项式。

我们定义群态射 $d\colon \mathcal{M}' \to \mathbb{Z}$，定义如下：

$$d(Y_{i,q^{\xi(i)}}) = \begin{cases} -1 & i \in (I_{2n})_0 \\ 1 & i \in (I_{2n})_1 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad d(Y_{i,q^{\xi(i)+2}}) = \begin{cases} 1 & i \in (I_{2n})_0 \\ -1 & i \in (I_{2n})_1 \end{cases}.$$

我们可以很容易地计算出

$$d(Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}}) = d(Y_{i,q^{\xi(i)}}) + d(Y_{i,q^{\xi(i)+2}}) = 0$$

对每个 $i \in I_{2n}$ 都成立，因此 $d(l_1) = d(l_2) = 0$。

同样，我们可以计算出

$$\begin{aligned} d(A^{-1}_{i,\xi(i)+1}) &= d(Y^{-1}_{i,q^{\xi(i)}} Y^{-1}_{i,q^{\xi(i)+2}} Y_{i-1,q^{\xi(i)+1}} Y_{i+1,q^{\xi(i)+1}}) \\ &= -d(Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}}) + d(Y_{i-1,q^{\xi(i)+1}}) + d(Y_{i+1,q^{\xi(i)+1}}) \\ &= d(Y_{i-1,q^{\xi(i)+1}}) + d(Y_{i+1,q^{\xi(i)+1}}) \\ &= \begin{cases} d(Y_{i-1,q^{\xi(i-1)+2}}) + d(Y_{i+1,q^{\xi(i+1)+2}}) & i \in (I_{2n})_0 \\ d(Y_{i-1,q^{\xi(i-1)}}) + d(Y_{i+1,q^{\xi(i+1)}}) & i \in (I_{2n})_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

因此，对于任意 $i \in I_{2n}$，$d(A_i^{-1}, \xi(i)+1) = -2$。

我们推得，若 m' 是 $N \cdot M$的任意支配单项式，则 $d(m') \leq d(k \cdot m)$。此外，$d(m') = d(k \cdot m)$ 当且仅当 $m' = k \cdot m$。

由 (4) 可知，$s_1 \cdot l_1$和 $s_2 \cdot l_2$是出现在 $N \cdot M$中的单项式，且它们中恰有一个等于 $k \cdot m$。我们推得 $d(s_1) = d(s_1 \cdot l_1) < d(s_2 \cdot l_2) = d(s_2)$ 或 $d(s_2) = d(s_2 \cdot l_2) < d(s_1 \cdot l_1) = d(s_1)$。不失一般性，假设后者成立。那么 $k \cdot m = s_1 \cdot l_1$，也就是说$k = m^{-1} \cdot s_1 \cdot l_1$。由于

$$l_1 = \prod_{i \in I_{2n}} (Y_{i,q^{\xi(i)}} Y_{i,q^{\xi(i)+2}})^{a_i}$$

对某个 $a_i \in \mathbb{N}$成立，并且由于 k 是一个 μ-支配单项式，因此 a_i 的值完全由 $m^{-1} \cdot s_1$确定。这意味着 l_1 完全由 $m^{-1} \cdot s_1$确定。

现在令 l_1' 和 l_2' 分别为 F_1' 和 F_2' 的最高支配单项式。通过对方程进行完全类似的论证，

$$N' \cdot M = S_1 \cdot F_1' + S_2 \cdot F_2',$$

我们推得 $l_1 = l'_1$。这表明 $F_1 = F'_1$，从而完成证明。 □

我们现在证明本节的主定理，这也是本文的主要结果。该定理的核心结论是， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$ 的简单模与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$ 的简单模通过映射 ϕ_{2n} 联系起来。此外，这个映射是相关簇代数之间的折叠映射。

在证明中，给定一个簇代数的簇 X，我们将 X 中与顶点 v 对应的簇变量记为 X_v。

定理 7.10. 冰箭图 Γ_∞ 关于 G 是强全局可折叠的。

设 $\psi : \mathcal{F}_\infty \to \mathcal{F}_{2n,\mathrm{tor}}$ 是由 $\psi(f_i) = f_{[i]}$ 和 $\psi(x_i) = x_{[i]}$ 定义的同态（见命题 *4.11*）。若 $\chi_q(L(m))$ 是属于 $\mathcal{A}_\infty$ 的某个轨道簇的簇变量，则折叠簇变量满足

$$\psi(\chi_q(L(m))) = \phi_{2n}(\chi_q(L(m))).$$

证明。 根据定义 4.9，为了证明 Γ_∞ 是强全局可折叠的，我们需要证明：给定 Γ_∞中有限个可变 G-轨道簇的序列 $K_1, ..., K_l$，若 $(\hat{\mu}_{K_i} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)$ 对 $1 \le i \le l-1$是强 G-容许的，那么箭图 $(\hat{\mu}_{K_l} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)$ 也对 G 是强容许的。

在上述情形中，命题 4.11 的证明直接推出：若 X是 $\mathcal{A}_\infty$ 中与在 $K_1, ..., K_l$处进行轨道变异的序列相对应的轨道簇，而 X是$\mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}}$ 中与在 $K_1, ..., K_l$处进行突变的序列相对应的簇，那么 $X_{[i]} = \psi(X_i) = \phi_{2n}(X_i)$。证明过程中我们将用到这一事实。此外，这表明要证明该定理，只需证明 Γ_∞ 是强全局可折叠的。

因此，我们来证明 Γ_∞ 是强全局可折叠的。

设 $K_1, ..., K_l$ 是 Γ_∞ 中有限个可变 G-轨道的序列，使得 $(\hat{\mu}_{K_i} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)\tilde{}$ 对 $1 \le i \le l-1$ 是强 G-可容许的。设 X 和 X 分别是 $\mathcal{A}_\infty$ 和 $\mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}}$ 的簇，它们对应于在 $K_1, ..., K_l$ 处进行突变的序列。

为了证明 $(\hat{\mu}_{K_l} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)$ 是强 G-可容许的，根据引理 4.8 和注记 4.10，只需验证

$$\mathrm{Arr}_{(\hat{\mu}_{K_l} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)}(Gv_1, v_2) = \mathrm{Arr}_{(\mu_{K_l} \circ \cdots \circ \mu_{K_1})(\Gamma_{2n})}(Gv_1, Gv_2) \tag{5}$$

对任意 $v_1, v_2 \in (\Gamma_\infty)_0$。根据定理 5.4，当 v_1, v_2 为可变时，此等式成立。因此，我们只需证明 v_1 冻结或 v_2 冻结时的等式。

我们用 f_j 表示与 γ_∞的顶点 j' 对应的冻结变量 $\mathcal{A}_\infty$。类似地，我们˜用 $f_{[j]}$ 表示与 Γ_{2n}的顶点 $[j]'$ 对应的冻结变量$\mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}}$。固定某个 $i \in \mathbb{Z}$，并在 i处变异$(\hat{\mu}_{K_l} \circ \cdots \circ \hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)$，在 $[i]$ 处变异$(\mu_{K_l} \circ \cdots \circ \mu_{K_1})(\Gamma_{2n})$。相应的

交换关系为

$$X_i' \cdot X_i = \prod_{j\in\mathbb{Z}} X_j^{a_j} f_j^{b_j} + \prod_{j\in\mathbb{Z}} X_j^{c_j} f_j^{d_j}, \tag{6}$$

$$\tilde{X}'_{[i]} \cdot \tilde{X}_{[i]} = \prod_{[j]\in\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \tilde{X}_{[j]}^{a_{[j]}} f_{[j]}^{b_{[j]}} + \prod_{[j]\in\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \tilde{X}_{[j]}^{c_{[j]}} f_{[j]}^{d_{[j]}}, \tag{7}$$

with

$$\begin{aligned} a_j &= \mathrm{Arr}_{(\hat{\mu}_{K_l}\circ\cdots\circ\hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)}(i,j), & b_j &= \mathrm{Arr}_{(\hat{\mu}_{K_l}\circ\cdots\circ\hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)}(i,j'),\\ c_j &= \mathrm{Arr}_{(\hat{\mu}_{K_l}\circ\cdots\circ\hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)}(j,i), & d_j &= \mathrm{Arr}_{(\hat{\mu}_{K_l}\circ\cdots\circ\hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)}(j',i), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} a_{[j]} &= \mathrm{Arr}_{(\mu_{K_l}\circ\cdots\circ\mu_{K_1})(\Gamma_{2n,\mathrm{tor}})}([i],[j]), & b_{[j]} &= \mathrm{Arr}_{(\mu_{K_l}\circ\cdots\circ\mu_{K_1})(\Gamma_{2n,\mathrm{tor}})}([i],[j]'),\\ c_{[j]} &= \mathrm{Arr}_{(\mu_{K_l}\circ\cdots\circ\mu_{K_1})(\Gamma_{2n,\mathrm{tor}})}([j],[i]), & d_{[j]} &= \mathrm{Arr}_{(\mu_{K_l}\circ\cdots\circ\mu_{K_1})(\Gamma_{2n,\mathrm{tor}})}([j]',[i]). \end{aligned}$$

由引理 4.8、注 4.10 和定理 5.4，我们可知

$$\sum_{s\in j\mathbb{Z}} a_s = a_{[j]}, \qquad \sum_{s\in j\mathbb{Z}} b_s \geq b_{[j]}, \qquad \sum_{s\in j\mathbb{Z}} c_s = c_{[j]}, \qquad \sum_{s\in j\mathbb{Z}} d_s \geq d_{[j]},$$

对每个 $j\in\mathbb{Z}$ 都成立。此外，由注 4.10 可推得，对每个 $j\in\mathbb{Z}$ 都有

$$\sum_{s\in j\mathbb{Z}} b_s = b_{[j]} \iff \sum_{s\in j\mathbb{Z}} d_s = d_{[j]}. \tag{8}$$

将映射 ϕ_{2n} 应用于 (6)，得到

$$\phi_{2n}(X_i') \cdot \tilde{X}_{[i]} = \prod_{[j]\in\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \tilde{X}_{[j]}^{a_{[j]}} f_{[j]}^{\sum_{s\in[j]} b_s} + \prod_{[j]\in\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} \tilde{X}_{[j]}^{c_{[j]}} f_{[j]}^{\sum_{s\in[j]} d_s}. \tag{9}$$

~ $\phi_{2n}(X_i')$ 和 X_i' 都是 μ-支配的（意义同引理 7.9）。将引理 7.9 应用于方程 (7) 和 (9) 这一对方程，我们可推得：对每个 $j\in\mathbb{Z}$，$\sum_{s\in j\mathbb{Z}} b_s = b_{[j]}$；或者对每个 $j\in\mathbb{Z}$，$\sum_{s\in j\mathbb{Z}} d_s = d_{[j]}$。

但 (8) 告诉我们两者都成立，因此 (5) 得以满足。因此，$(\hat{\mu}_{K_l}\circ\cdots\circ\hat{\mu}_{K_1})(\Gamma_\infty)$ 是强 G-可容许的。证明完毕。 □

推论 7.11。设 $\chi_q(L(m))$ 是属于 $\mathcal{A}_\infty$的一个轨道簇中的簇单项式。该

折叠簇变量满足

$$\psi(\chi_q(L(m))) = \phi_{2n}(\chi_q(L(m))) = \chi_q(L(\phi_{2n}(m))).$$

证明。我们只需验证最后一个等式。

由定理 7.7 和定理 7.10，我们知道

$$\phi_{2n}(\chi_q(L(m))) = \chi_q(L(m'))$$

对于某个 $m' \in \mathcal{M}'$。但是，对于任意 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $a \in \mathbb{C}^*$，$\phi_{2n}(A_{i,a}) = A_{[i],a}$。特别地，$\phi_{2n}(m)$ 是关于 Nakajima 偏序的 $L(m')$ 的极大单项式。等式 $m' = \phi_{2n}(m)$ 由此得出。

□

直接可得以下推论。

推论 7.12。与 $\mathcal{A}_\infty$ 的簇单项式对应的简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模满足猜想 7.5。

□

8 进一步的评论与展望

我们回顾第 6 节中的记号。对于 A_∞ 的一个几乎正根，我们按如下方式将其与单项式 $m_\alpha \in A_\infty$ 关联。令

$$m_{-\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_0 \\ Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_1 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad m_{\alpha_i} = \begin{cases} Y_{i,q^{\xi(i)}} & i \in (I_\infty)_0 \\ Y_{i,q^{\xi(i)+2}} & i \in (I_\infty)_1 \end{cases}$$

对于负单根和正单根，以及 $\alpha = \sum_{k=i}^{j} \alpha_k$ 的正根 $m_\alpha = \prod_{k=i}^{j} m_{\alpha_k}$。为了简化记号，对于 $i \le j$，我们用 $\alpha_{i,\,j}$ 表示根 $\sum_{k=i}^{j} \alpha_k$。固定 n 时，我们将记 $\zeta := \phi_{2n}(\zeta)$ 为 $\zeta \in \mathcal{Y}_\infty$。此外，我们用 $\chi_q^\infty(m)$ 表示简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$-模 $L(m)$ 的 q-特征，并用 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m)$ 表示简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\mathrm{tor}})$-模 $L(m)$ 的 q-特征。

对于给定的 n，利用定理 5.4 和备注 5.7 的几何模型，不难看出，$\chi_q^\infty(m_\alpha)$ 是 $\mathcal{A}_\infty$ 的一个簇变量，且属于一个轨道簇，当且仅当以下情况之一成立：

1. 根 α 的长度为奇数，
2. 根 α 的长度为小于 $2n$ 的偶数。

由定理 7.10 和推论 7.11 可知，$\mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}}$ 的簇变量恰好是此类的 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_\alpha)$（其中 α）。但从这一描述中无法看出 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{1,2n}})$ 究竟是什么。我们预期它的表现会有所不同，因为按照我们的描述，$m_{\alpha_{1,2n}}$ 对应于 $A_{2n-1}^{(1)}$ 的虚根。

命题 8.1。设 $n \geq 3$。则

$$\overline{\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})} = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n}}}) + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-2}}}) \cdot f,$$

其中 f 是 $\mathcal{A}_{2n,\mathrm{tor}}$ 的冻结变量中的某个簇单项式。

证明。我们在 $\mathcal{A}_\infty$ 中写出几条标准交换关系，其中 $i+2 \leq j$:

$$\chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{\alpha_{j+1}}) = \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j+1}}) + \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j-2}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{-\alpha_{j+2}}) \cdot f, \tag{10}$$

$$\chi_q^\infty(m_{\alpha_{i-1}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j}}) = \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i-1,j}}) + \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i+2,j}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{-\alpha_{i-2}}) \cdot f, \tag{11}$$

$$\chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{-\alpha_j}) = \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j-1}}) \cdot f + \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j-2}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{-\alpha_{j+1}}) \cdot f, \tag{12}$$

$$\chi_q^\infty(m_{-\alpha_i}) \cdot \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i,j}}) = \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i+1,j}}) \cdot f + \chi_q^\infty(m_{\alpha_{i+2,j}}) \cdot \chi_q^\infty(m_{-\alpha_{i-1}}) \cdot f. \tag{13}$$

这里 f 表示冻结变量中的某个簇单项式。将 ϕ_{2n} 应用于含有 $i=1$ 和 $j=2n-1$ 的方程 (10)，以及含有 $i=1$ 和 $j=2n-3$ 的方程 (13)，得到

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-1}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2n}}}) = \overline{\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-3}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_{2n+1}}})) \cdot \overline{f}$$

and

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-3}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_1}}) = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n-3}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-3}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_0}})) \cdot \overline{f}.$$

但由于 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_{2n+1}}})) = \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_1}}))$，我们可以将这两个方程合并，得到

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-1}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2n}}}) = \overline{\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n-3}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-3}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_0}})) \cdot \overline{f}. \tag{14}$$

用 (11) 和 (12) 进行类似论证可得

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_1}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n}}}) = \overline{\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{4,2n-1}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{4,2n-2}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_1}})) \cdot \overline{f}.$$

q-特征 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{2,2n-3}}) \cdot f$, $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{3,2n-3}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(m_{-\alpha_0})) \cdot f$, $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{4,2n-1}}) \cdot f$ 和 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{4,2n-2}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(m_{-\alpha_1})) \cdot f$ 都是两两不同构的简单 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征（定理 7.7）。由此我们推得，$\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})$ 是一个实际的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。当然，$\chi_q^\infty(m_{\alpha_{1,2n}})$ 包含 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{1,2n}})$。我们来找出它的所有合成因子。

通过用 $i=1$ 和 $j=2n-1$计算 (11)，并用 $i=3$ 和 $j=2n-1$计算 (12)，我们可以

得到（与之前的计算类似）

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-1}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2n}}}) = \overline{\chi_q^{\infty}(m_{\alpha_{0,2n-1}})} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-2}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-3}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(L(\overline{m_{-\alpha_0}})) \cdot \overline{f}.$$

将这个表达式与 (14) 比较，我们可以推得 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{\alpha_{3,2n-2}}) \cdot f$ 是 $\chi_q^{\infty}(\overline{m_{\alpha_{1,2n}}})$ 的一个直和项。与前面的论证类似，我们可以得到以下方程

$$\overline{\chi_q^{\infty}(m_{\alpha_{1,2n}})} \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_1}}) = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-1}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-2}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_1}}) \cdot \overline{f}$$

and

$$\overline{\chi_q^{\infty}(m_{\alpha_{1,2n}})} \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_{2n}}}) = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{1,2n-1}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n-2}}}) \cdot \overline{f} + \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-2}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_{2n}}}) \cdot \overline{f}.$$

由此我们可以推得，$\chi_q^{\infty}(m_{1,2n})$ 至多有三个直和项。若它恰有三个直和项，则这将意味着

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_{2n}}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{3,2n-1}}}) \cdot \overline{f} = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{-\alpha_1}}) \cdot \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{\alpha_{2,2n-2}}}) \cdot \overline{f},$$

这显然荒谬。证明完毕。 □

类似的计算给出

事实 8.2. 设 $i, j \in \mathbb{Z}$ 满足 $j - i \leq 4n - 2$。那么 $\chi_q^{\infty}(m_{\alpha_{i,j}})$ 是一个实际的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模的 q-特征。在特别地，简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{\infty})$-模 $L(m_{\alpha_{i,j}})$ 满足猜想 7.5。

然而，（作者）并不清楚是否可以对长度为 $4n$ 的 α 得出相同的结果，也就是说，对 $j - i = 4n - 1$ 得出相同的结果。

在 [Nak11], Nakajima 的例 6.15 中，他解释说，对于 $n = 1$，模 $L(m_{1,\,2n})$ 不是实的，这在 q-特征理论中意味着

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{1,2n}})^2 \neq \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{1,4n}}).$$

这引出了一个问题：这是否是一种普遍现象。

猜想 8.3。简单的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\,\mathrm{tor}})$-模 $L(m_{1,\,2n})$ 是一个虚模，也就是说，$L(m_{1,\,2n}) * L(m_{1,\,2n})$ 不是简单的。

尽管已有一些仿射量子 Kac-Moody 代数的虚模实例，例如 [Lec03；BC23；BM25], ，但这些实例很难找到。证明这一猜想将为量子环面代数提供一个新的有趣实例。

计算 $\chi_q^{\mathrm{tor}}(m_{1,\ 4n})$ 的困难，使我们无法根据上述论证直接证明或否定这一猜想。对于 $n \geq 3$，我们确实设法证明了

$$\chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{1,2n}})^2 = \chi_q^{\mathrm{tor}}(\overline{m_{1,4n}}) + \lambda f$$

与 $\lambda \in \{0, 1, 2\}$。然而，当且仅当 $\chi_q^{\infty}(m_{1,4n})$ 是一个虚的 q-特征时，$\lambda = 0$。我们可以推导出

命题 8.4. 假设猜想 *7.5* 成立。那么，$L(m_{1,2n})$ 是 $n \geq 3$ 的一个虚 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{2n,\mathrm{tor}})$-模。

参考文献

[BC19] Matheus Brito 和 Vyjayanthi Chari。“HL-模的张量积与 qq-特征及幺半范畴化”。载于：*Journal del'Ecole polytech-nique—Math´ematiques* 6（2019年），第581–619页。[BC 23] Matheus Brito 和 AdrianoMoura。由蛇模张量积产生的虚模。2025年。arXiv: 2505.21159。[CP91] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。“量子仿射代数”。载于：*Communi-cations in mathematical physics* 142.2（1991年），第261–283页。[CP95] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。“量子仿射代数及其表示”。载于：*Representations of groups (Banff, AB, 1994)* 16（1995年），第59–78页。[FM01] Edward Frenkel 和 Evgeny Mukhin。“量子仿射代数有限维表示的q-特征组合学”。载于：*Communications inMathematical Physics* 216.1（2001年），第23–57页。[FR99] Edward Frenkel 和 Nicolai Reshetikhin。“量子仿射代数表示的 qq-特征与 $\mathcal{W}$代数的变形”。载于：*Contemporary Math-ematics* 248（1999年），第163–205页。[FST08] Sergey Fomin、Michael Shapiro 和 Dylan Thurston。“簇代数与三角剖分曲面。第一部分：簇复形”。载于：《数学学报》201.1（2008年），第83–146页。[FWZ21] Sergey Fomin、Lauren Williams 和 Andrei Zelevinsky。《簇代数导论》第*4–5*章。2021年。arXiv: 1707.07190。

[FWZ24] Sergey Fomin、Lauren Williams 和 Andrei Zelevinsky。《簇代数导论》第1–3章。2024年。arXiv: 1608.05735。[FZ02] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。“簇代数I：基础”。载于：《美国数学会杂志》15.2（2002年），第497–529页。[GG14] Jan E. Grabowski 和 Sira Gratz。“无限秩簇代数”。载于：《伦敦数学会杂志》89.2（2014年），第337–363页。[GKV95] Victor Ginzburg、Mikhail Kapranov 和 Eric Vasserot。“代数曲面的朗兰兹互反”。载于：《数学研究快报》2.2（1995年），第147–160页。[Her05a] David Hernandez。“非单纯李型量子仿射化的q与q,t-特征单项式”。载于：《数学杂志》250.2（2005年），第443–473页。[Her05b] David Hernandez。“量子仿射化的表示与融合积”。载于：《变换群》10.2（2005年），第163–200页。[Her07] David Hernandez。“Drinfeld余积、量子融合张量范畴及其应用”。载于：《伦敦数学会会刊》95.3（2007年6月），第567–608页。[Her10] David Hernandez。“Kirillov–Reshetikhin猜想：一般情形”。载于：International mathematics research notices 2010.1（2010年），第149–193页。[Her11] David Hernandez。“代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_\infty)$及其应用”。载于：《代数杂志》329.1（2011年）。纪念 Corrado De Concini 60岁生日专刊，第147–162页。ISSN：0021-8693。[HL10] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。“簇代数与量子仿射代数”。载于：《杜克数学杂志》154.2（2010年），第265页。[HL13] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。“A型和D型簇代数的幺半范畴化”。载于：《对称性、可积系统与表示》。施普林格，2013年，第175–193页。[Kac90] Victor G. Kac。《无限维李代数》。第3版。剑桥大学出版社，1990年。[Kel10] Bernhard Keller。“簇代数、箭图表示与三角范畴”。载于：《三角范畴》。第375卷。《伦敦数学会讲义丛书》。剑桥大学出版社，剑桥，2010年，第76–160页。[KKKO15] Seok-Jin Kang、Masaki Kashiwara、Myungho Kim 和 Se-jin Oh。“对称箭图Hecke代数与量子仿射代数的R矩阵III”。载于：《伦敦数学会会刊》111.2（2015年），第420–444页。[KKOP20] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。“幺半范畴化与量子仿射代数”。载于：《数学汇刊》156.5（2020年），第1039–1077页。

[KKOP24] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park. “单项范畴化与量子仿射代数 II”。载于：数学创刊236.2 (2024年), 第 837–924 页。[Lau25] Duncan Laurie. 张量积， q-字符与 R量子环面代数的-矩阵。2025年。arXiv: 2503.08839。[Lec03] Bernard Leclerc. “ $U_q(\mathfrak{n})$的对偶典范基中的虚向量”。载于：变换群8.1 (2003), 第 95–104 页。[LP17] Shiping Liu 和 Charles Paquette. “类型 $\mathbb{A}_\infty^\infty$ 的簇范畴与无限带的三角剖分”。载于：《数学杂志》286.1 (2017), 第 197–222 页。[Nak01] Hiraku Nakajima. “箭图簇与量子仿射代数的有限维表示”。载于：《美国数学会杂志》14.1 (2001), 第 145–238 页。[Nak11] Hiraku Nakajima. “箭图簇与簇代数”。载于：《京都大学数学杂志》51.1 (2011), 第 71–126 页。[Qin17] Fan Qin. “量子簇代数中的三角基与单项范畴化猜想”。载于：《杜克数学杂志》166.12 (2017), 第 2337–2442 页。[Wan23] Keyu Wang. “扭量子仿射代数的 QQ-系统”。载于：《数学物理通讯》400.2 (2023), 第 1137–1179 页。

Lior Silberberg, Université Paris Cité, Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG,F-75013 Paris, France电子邮件地址：lior.silberberg@imj-prg.fr