arXiv:2601.02229v1 [math.OC] 5 Jan 2026

通过戴德金分割构造扩展实数算术

Andreas H. Hamel*

2026年1月6日

摘要

本文展示了如何利用戴德金分割，通过一条简单的集合加法规则引入扩展实数及其可靠的算术法则。关键思想在于，分别使用分割的下部和上部，会得到两种不同的加法，文献中称为下确界加法和上确界加法。此外，由此得到的两种结构都是共线性空间，同时相对于自然序还是完备格。这使得我们可以在扩展实数上定义伪差，并为诸如 $(+\infty) - (+\infty)$、$(-\infty) - (-\infty)$ 这样的表达式提供公式。其主要动机有两个：其一，可以统一处理正常和非正常的扩展实值函数；其二，集值函数往往可以表示为标量函数族，其中可能包含非正常函数。

关键词。 扩展实数、戴德金分割、锥线性空间、剩余化、凸函数、集合优化

数学主题分类。 49J53

1 引言

尽管在实数中添加一个底元素和一个顶元素（通常分别记作 $-\infty$ 和 $+\infty$）所得到的扩展，在变分分析和优化理论中极为有用且广受欢迎，但大多数作者在为扩展实数系统引入并论证适当的算术规则时都颇感困难。下面给出几个例子。

*博尔扎诺-博岑自由大学，经济与管理学院，an-dreas.hamel@unibz.it

在 [2, 第 29] 页可以读到：“表达式 $\infty-\infty$ 和 $-\infty+\infty$ 通常都不作定义。本书中我们约定，

$$5. \qquad 0\cdot\infty=0.'$$

在 [23, 第 39], 页中，通过詹森不等式给出了凸函数的定义，并规定：“约定：$(+\infty)+(-\infty)=+\infty$，$0\cdot(+\infty)=+\infty$，$0\cdot(-\infty)=0$。”

两部广为人知的著作——Rockafellar 的 [20, 第 6] 页和 Aubin 的 [3, 第 10] 页——将算术运算 $(+\infty)+(-\infty)$ 视为“有风险的”（Rockafellar），甚至是“未定义且禁止的”（Aubin，原文着重标示）。

有时，人们只是回避这一困难。Phelps [18, 第 40] 页安慰读者道：“我们不必担心 $+\infty-\infty$。在 [19, 第 24], 页中，Rockafellar 也写道：“ 组合 $\infty-\infty$ 和 $-\infty+\infty$ 是未定义的，应当避免。”然而，在后来的著作 [20, 第 6] 页中，已经可以看到这样的评论：规则 $(+\infty)+(-\infty)=+\infty$ 适用于凸函数，而 $(+\infty)+(-\infty)=-\infty$“则是凹函数所需要的”。

Rockafellar 和 Wets 较近期出版的著作 [21, 第 15] 页讨论了 $(+\infty)+(-\infty)$ 的两种版本，但指出“处理 $\infty-\infty$ 并没有唯一且对称的方式”。第一种变体称为下确界加法，被作为一种“约定”引入，并在书中主要采用。书中还提醒读者：“相反的约定是上确界加法 （即 $(+\infty)+(-\infty)=-\infty$，原文着重——A.H.）；未经明确提醒，我们不会使用它。”

Aliprantis 和 Border 的著作 [1] 非常受欢迎，也被广泛用作参考书。读者在第 2 页就能看到：“符号 $+\infty-\infty$ 的组合没有意义。符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 并非真的用于运算，它们只是用来避免出现涉及下确界和上确界的繁琐表达式。”

此外，人们已经认识到，可能需要通过两个“非普通”分割 $(\mathbb{Q},\varnothing)$ 和 $(\varnothing,\mathbb{Q})$ 来扩展戴德金分割，以解决这一问题；但据我们所知，尚无人系统地尝试基于广义戴德金分割，为扩展实数推导适当的算术规则。本文通过给出一条集合加法规则，弥补了这一空白，并以此为扩展实数构建了两种算术结构。关键在于必须聚焦于分割的“下半部分”或“上半部分”之一——这对于普通戴德金分割并无影响，但对于非普通分割则有所不同。

在不少论文中，已经使用了双重扩展算术。Moreau[15, 16, 17] 最先将扩展实数算术应用于变分分析中的问题，尤其是下确界卷积。在 [20, 21] 中提出的观察，即下确界加法适用于凸性，而上确界加法适用于凹性，似乎已在变分分析领域广受认可。其他例子包括论文 [6] 和[4]（目的各不相同）；而在 [12]中，许多算术内容是在完全没有提及戴德金分割或其他（扩展）实数构造方法的情况下发展起来的

数。受集合优化中应用的启发， [9] 文中发展了一种用于代数结构的框架，这些结构同时也是完备格。

2 幂半群

设 $(W,+)$ 是一个交换半群。运算 $+\colon W\times W\to W$ 称为“加法”。由于主要应用对象——广义戴德金分割——具有交换性，因此这里假设运算满足交换律。加法可以扩展到 W 的幂集，记作 $\mathcal{P}(W)$，定义如下：

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,\,b\in B\} \tag{2.1}$$

对于 $A,B\in\mathcal{P}(W)\backslash\{\varnothing\}$ 以及

$$A+\varnothing=\varnothing+A=\varnothing \tag{2.2}$$

对所有 $A\in\mathcal{P}(W)$。特别地， $\varnothing+\varnothing=\varnothing$。等式（2.2）表示 $\varnothing$ 是（$\mathcal{P}(W)$ $+$中的吸收元，它是唯一的幂等元（例如，参见[8]及其中的参考文献）。

如果 W 关于加法有单位元，即 $0\in W$ 且满足 $0+0=0$，那么 $\{0\}+\{0\}=\{0\}$，也就是说， $\{0\}$ 是 $(\mathcal{P}(W)$ $+)$ 中的单位元。在这种情况下，$(W,+)$ 和 $(\mathcal{P}(W)$ $+)$ 都是（交换）幺半群。这一事实众所周知，在此列出以供参考。证明直截了当，故从略。

命题 2.1 若 $(W,+)$ 是一个（交换）半群，则 $(\mathcal{P}(W)$ $+)$也是半群。若$(W,+)$ 是一个（交换）幺半群，则 $(\mathcal{P}(W)$ $+)$也是幺半群。

方程（2.2）是将戴德金分割从仅涉及非空集合的情形扩展到下集或上集为空的情形时所需的关键约定。这将在下一节中完成。

3 普通的和非普通的戴德金分割

令 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集合。在 $\mathbb{Q}$ 上的通常序关系记作 $<$（严格小于；具有反对称性、传递性和全序性）和 $\leq$ （小于或等于；具有自反性、传递性、反对称性，并构成线性（完全）序）。

定义 3.1 戴德金分割是满足以下条件的序偶 $(A,B)\in\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$

（*D1*） $q\in\mathbb{Q}$ 蕴含 $q\in A$ 或 $q\in B$，但不能同时成立；（*D2*） $p\in A, q\in B$ 蕴含 $p<q$，且或者

（*DL3*）如果 $a\in A$，那么存在 $a'\in A$ 使得 $a<a'$ （A 不包含最大元），

or

（*DU3*）如果 $b \in B$，那么存在 $b' \in B$ 使得 $b' < b$ （B 不包含最小元）。

如果一个戴德金分割（A， B）满足 $A, B \notin \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$，则称它为普通的。

所有满足 (DL3) 的戴德金分割构成的集合记为 $\mathcal{D}_L$，满足 (DU3) 的那些记为 $\mathcal{D}_U$。恰好有两个非普通的戴德金分割，分别是 ($\varnothing$， $\mathbb{Q}$) 和 ($\mathbb{Q}$， $\varnothing$)。

如果 (A， B) 是一个戴德金分割，且对于某个 $a \in \mathbb{Q}$ 有 $A = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq a\}$，或者对于某个 $b \in \mathbb{Q}$ 有 $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid b \leq q\}$，那么分别称它由 a 和 b 生成。

一个戴德金分割可以同时满足 (DL3) 和 (DU3)，而且这些正是不能由有理数生成的戴德金分割。特别是，非普通的戴德金分割属于这一类型。设 (A， B) 是一个满足 (DL3) 但不满足 (DU3) 的普通戴德金分割。那么 B 有一个最小元，记作 $\bar{q}$，即 $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid \bar{q} \leq q\}$，并且 ($A \cup \{\bar{q}\}$， $B \backslash \{\bar{q}\}$) 是一个满足 (DU3) 但不满足 (DL3) 的戴德金分割，它由同一个有理数 $\bar{q}$ 生成。

为了恢复唯一性，通常会从分割（A， B）转而采用“下集”A，并满足（DL3）（例如，见 [22]），或采用满足（DU3）的“上集” B （例如，见 [7]）。这两种转换中的任意一种都足以将实数构造为普通戴德金分割。事实证明，若将非普通割也考虑在内，这两种方法会产生不同的结果。

命题 3.2 有序对 $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 是满足（*DL3*）的戴德金分割，当且仅当，

(A1) $B = \mathbb{Q} \backslash A$ *(A2)* $a, a' \in \mathbb{Q}$, $a' < a$ 和 $a \in A$ 蕴含 $a' \in A$ （A 向下封闭）（*A3*） A没有最大元。这样的有序对是普通戴德金分割，当且仅当 $A \notin \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$。

Proof. 若 $A = \mathbb{Q}$、 $B = \varnothing = \mathbb{Q} \backslash A$，则 A 也满足 (A1)、(A2) 以及 (D2)、(D3) 和 (DL4)。对于 $A = \varnothing$、 $B = \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \backslash A$，结论同样成立。若 ($A$， B) 是一个普通的戴德金分割，则 (A1) 由 (D1) 立即得到，(A2) 由 (D1) 和 (D2) 推出，而 (A3) 与 (DL3) 相同。

反之，设 (A， B) $\in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 满足 (A1)–(A3)。则 (D1) 由 (A1) 得出，(D2) 由 (A1) 和 (A2) 得出，而 (DL3) 与 (A3) 相同。

最后一个断言同样显而易见。 □

满足命题 $A \subseteq \mathbb{Q}$ 中 (A2) 和 (A3) 的集合族 3.2 记为$\mathcal{L}$。(A2) 条件也可以表述为： A 是

$$\mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+) = \{D \subseteq \mathbb{Q} \mid D - \mathbb{Q}_+ \subseteq D\}$$

其中，记号与 [11] 和 $D - \mathbb{Q}_+ = D + (-\mathbb{Q}_+)$ 中使用的记号一致，且 $-\mathbb{Q}_+ = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq 0\}$。 $\mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$ 的元素可能满足条件 (A3)，也可能不满足，即

$\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$。因此，引入函数 $I\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+) \to \mathcal{L}$，其定义如下

$$I(A) = \begin{cases} A & \text{if } A \text{ satisfies (A3)}, \\ A\backslash\{a\} & \text{if } a \text{ is the greatest element of } A. \end{cases}$$

尤其是，$I(\varnothing) = \varnothing$ 和 $I(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$。

命题 3.3 函数 $I\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+) \to \mathcal{L}$ 是一个 *Kuratowski* 内部算子。

Proof. 事实上，I 映射到 $\mathcal{L}$。此外，它显然满足 $I(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$，具有强度性（对于所有 $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$，$I(A) \subseteq A$），是幂等元（对于所有$A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$，$I(I(A)) = I(A)$），并保持二元交集，即，若 $A, A' \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$，则$I(A \cap A') = I(A) \cap I(A')$：若 $p \in I(A \cap A')$，则存在 $q \in A \cap A'$ 使得 $p < q$，因此 $p \in I(A) \cap I(A')$；反过来，若 $p \in I(A) \cap I(A')$，则存在 $a \in A$,$a' \in A'$ 使得 $p < a$, $p < a'$，因此 $p < \min\{a, a'\} \in A \cap A'$，这成立是因为$A, A' \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}, -\mathbb{Q}_+)$。

因此，I 是一个内部（或核）算子。 □

请注意，保持二元交集可推出单调性（$A \subseteq A'$蕴含 $I(A) \subseteq I(A')$），这也可直接由 I 的定义得出。

注 3.4 相应的“上集”构造导出集合$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$，其元素向上闭合（*B2*），且没有最小元素（*B3*）。命题 *3.2* 的对应结论显然成立。相应的内部算子为 $J\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+) \to \mathcal{U}$，定义如下

$$J(B) = \begin{cases} B & \textit{if } B \textit{ satisfies (B3)}, \\ B\backslash\{b\} & \textit{if } b \textit{ is the least element of } B. \end{cases}$$

构造作为普通分割的实数时，只需（甚至必须）考虑 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{U}$。事实上，只有考虑满足（DL3）或（DU3）的分割，将有理数嵌入分割集合才能得到唯一结果：$q \in \mathbb{Q}$ 生成分割 $(\{p \in \mathbb{Q} \mid p < q\}, \{p \in \mathbb{Q} \mid q \leq p\})$，该分割满足（DL3）；并生成 $(\{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq q\}, \{p \in \mathbb{Q} \mid q < p\})$，该分割满足（DU3）。

满足 (DL3) 的分割、$\mathcal{U}$ 中的元素、满足 (DU3) 的分割以及 $\mathcal{L}$ 中的元素之间存在一一对应关系。

定理 3.5 以下任意两个集合之间都存在一一对应关系：$\mathcal{D}_L$、$\mathcal{D}_U$、$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{U}$。

Proof. 命题 3.2 及其“上”对应命题（见注 3.4）分别给出了 $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{L}$与 $\mathcal{D}_U$, $\mathcal{U}$ 之间的一一对应。$\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{U}$ 之间的一一对应由下列公式给出：

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{L} \Rightarrow J(\mathbb{Q}\backslash A) \in \mathcal{U} \quad &\text{and} \quad I\left(\mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A)\right) = A, \\ B \in \mathcal{U} \Rightarrow I(\mathbb{Q}\backslash B) \in \mathcal{L} \quad &\text{and} \quad J\left(\mathbb{Q}\backslash I(\mathbb{Q}\backslash B)\right) = B. \end{aligned}$$

事实上，一方面，由于 $J(\mathbb{Q}\backslash A) \subseteq \mathbb{Q}\backslash A$，$A = \mathbb{Q}\backslash(\mathbb{Q}\backslash A) \subseteq \mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A)$。这对 $A \in \mathcal{L}$ 给出 $A = I(A) \subseteq I(\mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A))$。另一方面，$a \in I(\mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A))$ 意味着 $a \in \mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A)$，并且 a不是 $\mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A)$ 的最大元。有两种可能的情况。首先，$\mathbb{Q}\backslash A$ 没有最小元，此时 $J(\mathbb{Q}\backslash A) = \mathbb{Q}\backslash A$，进而得到 $a \in \mathbb{Q}\backslash(\mathbb{Q}\backslash A) = A$。其次，$\mathbb{Q}\backslash A$ 有最小元 $b \in \mathbb{Q}$，此时 $J(\mathbb{Q}\backslash A) = (\mathbb{Q}\backslash A)\backslash\{b\}$。由于 b 是 $\mathbb{Q}\backslash A$ 的最小元，因此它是 $\mathbb{Q}\backslash J(\mathbb{Q}\backslash A) = A \cup \{b\}$ 的最大元，所以不可能出现 $a = b$。因此，这种情况下 $a \in A$ 也成立。□

按照戴德金 [5]，$\mathcal{D}_L\backslash\{(\varnothing, \mathbb{Q}), (\mathbb{Q}, \varnothing)\}$ 或 $\mathcal{D}_U\backslash\{(\mathbb{Q}, \varnothing), (\varnothing, \mathbb{Q})\}$ 均与实数集等同，见 [7, 22]。由于定理 3.5，$\mathcal{L}\backslash\{\mathbb{Q}, \varnothing\}$ 或$\mathcal{U}\backslash\{\mathbb{Q}, \varnothing\}$ 也可以使用。对 $\mathbb{Q}, \varnothing$ 进行加法后，又增加了两个需要处理的元素，通常记作 $-\infty, +\infty$。这产生了具有更优序型性质的结构，即它们是完备格，而不是如今所谓的戴德金（或条件）完备格；同时其代数特征受到限制，即它们不再是群，而只是交换幺半群，并且与实数的乘法仅限于非负实数。然而，这些特征正是建立凸函数和凹函数理论，即凸分析理论所必需且充分的。此外，同类型的结构也构成集合优化的基础：见 [9, 10, 11, 14]。

4 序切割

通过如下定义，将序关系 $\leq$ 从 $\mathbb{Q}$ 扩展到 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned} A \leq A' \quad &\Leftrightarrow \quad A \subseteq A', \\ B \leq B' \quad &\Leftrightarrow \quad B \supseteq B' \end{aligned}$$

对于 $A, A' \in \mathcal{L}$, $B, B' \in \mathcal{U}$。显然，这是 $\leq$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的扩展，因为对于 $p, p' \in \mathbb{Q}$，例如，对于 $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < p\}$, $A' = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < p'\}$，有 $p \leq p'$ 当且仅当 $A \subseteq A'$。

容易验证，按上述定义的 $\leq$ 在 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{U}$ 上都是线性序。

注 4.1 在 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{U}$（分别已在 $\mathcal{P}(\mathbb{Q}、-\mathbb{Q}_+)$ 和 $\mathcal{P}(\mathbb{Q}、\mathbb{Q}_+)$上）中，上文定义的序关系与集合优化 *[9, 10, 11]*中所使用的集合关系的完备格扩张相一致。因此，可以将戴德金分割视为基于集合关系的优化的适当基础。这或许有助于理解康托尔的观察：通过基本序列构造实数“具有最适合解析微积分的优点”（见 *[7,* 第 *33* 页，德语译文由 *AH]*提供）。

定理 4.2 有序对 $(\mathcal{L}、\subseteq)$ 是一个具有最小元 $\varnothing$和最大元 $\mathbb{Q}$的完备格，并且

$$\sup_{A\in\mathcal{X}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A, \quad \inf_{A\in\mathcal{X}} A = I\left(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} A\right) \tag{4.1}$$

对每个集合 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}$，其中约定上确界为 $\varnothing$，且当 $\mathcal{X}=\varnothing$ 时，下确界为 $\mathbb{Q}$。

Proof. 对于 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{L}$，定义集合

$$\bar{S} := \bigcup_{A\in\mathcal{X}} A.$$

显然，$\bar{S}$ 满足 (A2)。它也满足 (A3)。事实上，集合 $\bar{S}$ 要么为空，要么是 $\mathbb{Q}$ 的全体，要么是 $\mathbb{Q}$ 的一个非平凡子集，且没有最大元：若 $\bar{a}\in\bar{S}$ 是最大元，那么它也会是 A 中的最大元，其中某个 $A\in\mathcal{X}$，这与 $A\in\mathcal{L}$ 这一事实矛盾。因此 $\bar{S}\in\mathcal{L}$。现在，只需例行验证 $\bar{S}$ 是 $\mathcal{X}$ 关于 $\subseteq$的上确界。

类似地，定义 $T = I(\bigcap_{A\in\mathcal{X}} A)$。由于 $\bigcap_{A\in\mathcal{X}} A$ 满足 (A2)，T 也满足 (A2)以及 (A3)。此外，对于所有 $A\in\mathcal{X}$，都有 $T\subseteq A$；并且，如果对于所有 $A\in\mathcal{X}$，$A'\subseteq A$ 都成立，那么对于某个 $A'\in\mathcal{L}$，成立，于是 $A'\subseteq\bigcap_{A\in\mathcal{X}} A$，因此也有 $A'\subseteq T$，因为 A' 不包含最大元。因此，T 确实是相对于 $\subseteq$而言 $\mathcal{X}$ 的下确界。□

备注 4.3 类似地，$(\mathcal{U},\supseteq)$ 是一个最小元为 $\mathbb{Q}$、最大元 $\varnothing$ 且

$$\sup_{B\in\mathcal{X}} B = \bigcap_{B\in\mathcal{X}} B, \quad \inf_{B\in\mathcal{X}} B = J\left(\bigcup_{B\in\mathcal{X}} B\right) \tag{4.2}$$

对于集合 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{U}$，其上确界为 $\mathbb{Q}$，而当 $\mathcal{X}=\varnothing$时，下确界为 $\varnothing$。

通过普通戴德金分割构造实数，需要证明 $(\mathcal{L}\backslash\{\mathbb{Q},\varnothing\},\subseteq)$ 具有最小上界性质，即它是一个条件完备格（例如参见 [22, 第 18 页，定理 1 的证明步骤 3。19]）。定理 4.2 可以视为这一结果的一个“完备”版本。

5 扩展分割的加法

本节的主要目标是说明，在 $\mathcal{L}$ 上还是在 $\mathcal{U}$ 上为非普通戴德金分割引入加法，会产生不同结果。引入非普通分割会产生两种不同的加法结构，这也解释了为何在 [21] 中以及更早的 Moreau 著作 [15, 16, 17] 中会出现“下确界加法”和“上确界加法”。

可以通过 $\mathcal{L}$ 式（2.1）、（2.2）在 A上引入加法：对于 $A' \in \mathcal{L}\backslash\{\varnothing\}$，定义

$$A + A' = \{a + a' \mid a \in A,\, a' \in A'\},$$

若涉及 2.2，则使用 $\varnothing$，并生成分割 $(A+A', \mathbb{Q}\backslash(A+A'))$ 作为和 $(A, \mathbb{Q}\backslash A)+(A', \mathbb{Q}\backslash A')$。由此得到 $(\varnothing, \mathbb{Q}) + (\mathbb{Q}, \varnothing) = (\varnothing, \mathbb{Q})$。

A或者，可以在 $\mathcal{U}$ 上引入加法：对于 $B, B' \in \mathcal{U}\backslash\{\varnothing\}$ 集合

$$B + B' = \{b + b' \mid b \in B,\, b' \in B'\},$$

若涉及 2.2，则使用 $\varnothing$，并生成分割 $(\mathbb{Q}\backslash(B + B')\ B + B')$ 作为和 $(\mathbb{Q}\backslash B, B) + (\mathbb{Q}\backslash B', B')$。由此得到 $(\varnothing, \mathbb{Q}) + (\mathbb{Q}, \varnothing) = (\mathbb{Q}, \varnothing)$。

定理 5.1 有序对 $(\mathcal{L}, +)$ 构成一个交换幺半群，其零元为 $N_L = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$。空集 $\varnothing$ 是$(\mathcal{L}, +)$中的吸收元。对于所有 $A \in \mathcal{L}$，$\mathcal{L}$ 上的序 $\leq$ 与 $+$ 兼容，且满足 $\varnothing \leq A$。

Proof. 对于 $\mathcal{L}\backslash\{\varnothing, \mathbb{Q}\}$ 的元素而言，这是标准的，参见 [22]。方程（2.1）、（2.2）为涉及 $\mathbb{Q}$、$\varnothing$ 的表达式提供了必要的性质。特别是，$\varnothing + N_L = N_L + \varnothing = \varnothing$ 以及 $\mathbb{Q} + N_L = N_L + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$。此外，由（2.2），$\varnothing$ 是吸收元。最后，A、A'、$C \in \mathcal{L}$、$A \subseteq A'$推出 $A + C \subseteq A' + C$以及 $\varnothing \leq A$，因为这正是 $\varnothing \subseteq A$。□

注记 5.2 同样，数对 $(\mathcal{U}, +)$ 构成一个带零元$N_U = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q\}$的交换幺半群。空集 $\varnothing$ 是 $(\mathcal{U}, +)$ 中的吸收元，并且在 $\mathcal{U}$ 上的序 $\leq$ 与 $+$ 相容，其中 $B \leq \varnothing$ 对所有 $B \in \mathcal{U}$ 均成立。

需要注意的是，在$\mathcal{L}$中，最小元与最大元的加法$\mathcal{U}$会得到不同的结果：在两种情况下都有 $\varnothing + \mathbb{Q} = \varnothing$，但 $\varnothing$ 是 $\mathcal{L}$ 中的最小元，而在$\mathcal{U}$中则是最大元。不过，这两个版本都源于同一规则，即（2.2），该规则将集合上的闵可夫斯基加法扩展到 $\varnothing$。

在 $\mathcal{L}$ 上的加法 $\mathcal{D}_L$ 生成了 $\mathcal{U}$ 上的一个加法，而$\mathcal{D}_U$ 上的加法则生成了相应的5.1定理之前所述的。

例 5.3 定义 $N_L = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$、$P_L = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q\}$ 以及 $O_L = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\}$、$Q_L = \{q \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq q\}$，可得到两个普通戴德金分割$(N_L$、$P_L)$和$(O_L$、$Q_L)$，它们满足（*DL3*）；它们分别由 *0* 和 *1* 生成。暂且假设两个非普通戴德金分割$(\varnothing$、$\mathbb{Q})$、$(\mathbb{Q}$、$\varnothing)$ 互为加法逆元，即$(\varnothing$、$\mathbb{Q})+(\mathbb{Q}$、$\varnothing) = (N_L$、$P_L)$ 成立。于是可得到两个方程

$$(\varnothing, \mathbb{Q}) + (N_L, P_L) = (\varnothing, \mathbb{Q})$$
$$(\mathbb{Q}, \varnothing) + (O_L, Q_L) = (\mathbb{Q}, \varnothing)$$

对分割的上集和下集都使用(2.2) 。然而，将这两个方程相加会得到$(N_L,\ P_L) = (O_L,\ Q_L)$，这是矛盾的。此外，定义$(\varnothing,\ \mathbb{Q}) + (\mathbb{Q},\ \varnothing) = (N_L,\ P_L)$不在闵可夫斯基加法的规则涵盖范围内，即(2.2)。

注*5.4* 普通戴德金分割的集合确定了实数的集合 *IR*。将非普通分割 $(\varnothing, \mathbb{Q})$ 与 $-\infty$ 等同，并将 $(\mathbb{Q}, \varnothing)$ 与 $+\infty$ 等同，反之亦然，可以得到扩展实数 $IR \cup \{\pm\infty\}$ 上两种不同版本的加法：一种给出 $(-\infty)+(+\infty) = -\infty$，另一种给出 $(-\infty)+(+\infty) = +\infty$。因此，$(IR \cup \{\pm\infty\}, +)$ 和 $(IR \cup \{\pm\infty\}, +)$ 是两个不同的交换幺半群，第一个以 $-\infty$ 为吸收元（并且按照 *[8]* 的意义，$+\infty$ 是准吸收的），而在第二个中，$+\infty$ 是吸收元（并且 $-\infty$ 是准吸收的）。按照 *[21]*，，第一个版本称为上确界加法，记作 $+$；第二个版本称为下确界加法，记作 $+$。当然，对于普通分割和实数，这两种加法是一致的。

定理 5.5 $(\mathcal{L}, +, \subseteq)$ 是上确界可加的，而$(\mathcal{U}, +, \supseteq)$ 是下确界可加的。

Proof. 需证明，对于 $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{L}$:

$$\sup\{\mathcal{A} + \mathcal{A}'\} = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{A}'$$

其中所有加法均按扩展的闵可夫斯基意义进行（2.2）。注意，左边的加法是在 $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ 中进行的，而右边的加法是在 $\mathcal{L}$ 中进行的。

若 $\mathcal{A} = \varnothing$ 或 $\mathcal{A}' = \varnothing$ 或二者皆有，则方程两边都得到 $\varnothing$。若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 都非空，则由（4.1）可得结论，因为上确界是并集。对于 $(\mathcal{U}, \leq)$ 的情形，证明类似，因为下确界是并集，见（4.2）。□

一个简单的例子表明，$(\mathcal{L}, +, \subseteq)$ 并非下确界可加。事实上，设 $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$满足 $A_n = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < -1/n\}$ 且 $\mathcal{A}' = \{\mathbb{Q}\}$。那么根据（$\mathcal{A} = \varnothing$，下确界 $\mathcal{A}' = \mathbb{Q}$ 由（4.1）可知（下确界是交集），从而得到下确界 $\mathcal{A}+$下确界 $\mathcal{A}' = \varnothing$，根据（2.2）。另一方面，$A_n + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ 对所有 n均成立，因此下确界$(\mathcal{A} + \mathcal{A}') = \mathbb{Q}$，故不满足下确界可加性。

在 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{U}$ 上的加法可以仅用真元素来刻画，即既不包括 $\varnothing$ 也不包括 $\mathbb{Q}$，并通过序 $\leq$来刻画。这基于这样一个事实：$(\mathcal{L}, \subseteq)$ 和 $(\mathcal{U}, \supseteq)$ 是完备格。下述定理中的性质曾在 $+$ 中被用作扩展实数上 [12, 定义 31]的定义。定理 5.5 与 [12,定理 22] 共同保证了以下构造是有意义的。

定理 5.6 对所有 A，均有

$$\begin{aligned} A + C &= \sup\{U + X \mid U, X \in \mathcal{L}\backslash\{\varnothing, \mathbb{Q}\}, U \leq A, X \leq C\} \\ &= \bigcup\{U + X \mid U, X \in \mathcal{L}\backslash\{\varnothing, \mathbb{Q}\}, U \subseteq A, X \subseteq C\}. \end{aligned}$$

Proof. 如果 $A=\varnothing$，那么不存在非空的 $U\subseteq A$，因此上确界取自空集，并得到 $\varnothing$。如果 $C=\varnothing$，同样适用。如果 $A=\mathbb{Q}$ 且 $C\neq\varnothing$，可以令 $U_p=\{a\in\mathbb{Q}\mid a<p\}$ 为 $p\in\mathbb{Q}$，并选取 $c\in C$，从而得到 $\mathbb{Q}=\bigcup_{p\in\mathbb{Q}}(U_p+X)$，其中 $X=\{a\in\mathbb{Q}\mid a<c\}$，因此在此情况下上确界为 $\mathbb{Q}$。如果 $A\neq\varnothing$ 且 $C=\mathbb{Q}$，同样适用。剩下的情况是 A, $C\notin\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$：可以选择 $U=A$、$X=C$，从而得到所需的等式。□

注5.7 同样，对于 B、$D\in\mathcal{U}$，有

$$\begin{aligned}B+D&=\inf\{V+Y\mid V,Y\in\mathcal{U}\backslash\{\varnothing,\mathbb{Q}\},B\leq V,D\leq Y\}\\&=\bigcup\{V+Y\mid V,Y\in\mathcal{U}\backslash\{\varnothing,\mathbb{Q}\},B\supseteq V,D\supseteq Y\}.\end{aligned}$$

以下构造可作为加法逆元的替代。

定义5.8 表达式

$$A-_{\cdot}C=\sup\{U\in\mathcal{L}\mid C+U\leq A\}=\bigcup\{U\in\mathcal{L}\mid C+U\subseteq A\}\tag{5.1}$$

称为 A、$C\in\mathcal{L}$的（下）伪差。

表达式

$$B-^{\cdot}D=\inf\{X\in\mathcal{U}\mid B\leq D+X\}=\bigcup\{X\in\mathcal{U}\mid B\subseteq D+X\}\tag{5.2}$$

称为 B、$D\in\mathcal{U}$的（上）伪差。

根据上下文，应当可以明确所指的是哪一种伪差。只有在可能引起混淆时，才使用“下”和“上”这两个形容词。伪差实际上是剩余映射的特例，并且已在更一般的背景下用于 [12, 13]。

推论5.9 设 $A\in\mathcal{L}$。则

(a) $A-_{\cdot}A=N_L$ 当 $A\neq\varnothing$、$A\neq\mathbb{Q}$时，

(b) $A-_{\cdot}\varnothing=\mathbb{Q}$ 并且

$$\varnothing-_{\cdot}A=\begin{cases}\mathbb{Q} & : \quad A=\varnothing\\ \varnothing & : \quad A\neq\varnothing\end{cases}$$

(c) $\mathbb{Q}-_{\cdot}A=\mathbb{Q}$ 并且

$$A-_{\cdot}\mathbb{Q}=\begin{cases}\varnothing & : \quad A\neq\mathbb{Q}\\ \mathbb{Q} & : \quad A=\mathbb{Q}\end{cases}$$

Proof. 根据 $-_{\cdot}$的定义，一切都是直接的。 □

特别地，以下公式成立：

$$\varnothing-_{\cdot}\varnothing=\mathbb{Q}-_{\cdot}\varnothing=\mathbb{Q}-_{\cdot}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}\text{ and }\varnothing-_{\cdot}\mathbb{Q}=\varnothing.\tag{5.3}$$

$\mathcal{U}$ 的相应结果如下。

推论 5.10 设 $B \in \mathcal{U}$。那么

(a) $B \dot{-} B = N_U$ 只要 $B \neq \varnothing$, $B \neq \mathbb{Q}$, *(b)* $B \dot{-} \varnothing = \mathbb{Q}$ 且

$$\varnothing \dot{-} B = \begin{cases} \mathbb{Q} & : \quad B = \varnothing \\ \varnothing & : \quad B \neq \varnothing \end{cases}$$

(c) $\mathbb{Q} \dot{-} B = \mathbb{Q}$ 且

$$B \dot{-} \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & : \quad B = \mathbb{Q} \\ \varnothing & : \quad B \neq \mathbb{Q} \end{cases}$$

奇怪的是，这会得到与 $\mathcal{L}$-情形相同的公式：

$$\varnothing \dot{-} \varnothing = \mathbb{Q} \dot{-} \varnothing = \mathbb{Q} \dot{-} \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \text{ and } \varnothing \dot{-} \mathbb{Q} = \varnothing. \tag{5.4}$$

将其转化为扩展实数的公式时，在 $\mathcal{L}$-情形中，必须将 $\varnothing$ 与$-\infty$ 对应，并将 $\mathbb{Q}$ 与 $+\infty$ 对应；例如可得 $(-\infty) \dot{-} (-\infty) = +\infty$ （式 (5.3) 的第一个等式）。在 $\mathcal{U}$-情形中，对应关系则相反： $\mathbb{Q}$ 变为 $-\infty$ ，而$\varnothing$ 变为 $+\infty$ ，由此得到 $(+\infty) \dot{-} (+\infty) = \infty$ （式 (5.4) 的第一个等式）。

这一过程得出了关于 $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 中最大元和最小元的伪差的恒等式。它们看起来有些奇怪，但定义良好，如下表所示。这些恒等式也已见于 [12] ，该文的推导完全没有用到戴德金分割。

	$\mathcal{L}$ 情况	$\mathcal{U}$ 情况
和：	$(+\infty) \dot{+} (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \dot{+} (-\infty) = +\infty$
差：	$(+\infty) \dot{-} (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \dot{-} (+\infty) = -\infty$
	$(+\infty) \dot{-} (-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \dot{-} (-\infty) = +\infty$
	$(-\infty) \dot{-} (+\infty) = -\infty$	$(-\infty) \dot{-} (+\infty) = -\infty$
	$(-\infty) \dot{-} (-\infty) = +\infty$	$(-\infty) \dot{-} (-\infty) = -\infty$

总而言之，不仅像 $(+\infty) + (-\infty)$ 这样的表达式可以获得精确的代数意义，$(+\infty) - (+\infty)$ 、 $(-\infty) - (-\infty)$ 等也可以。同样，一种定义基于下确界加法，另一种则基于上确界加法。其背后的结构性质是， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{U}$ 都是具有反向序关系的剩余（完备）格。

6 负数与相反数

将集合 $A \in \mathcal{L}$ 或 $B \in \mathcal{U}$ 分别与 -1 进行逐元素乘法，不会得到 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{U}$ 中的集合。相反，定义

$$(-1)X = \{-x \mid x \in X\}$$

对于满足 $(-1)\varnothing=\varnothing$ 的子集 $X\subseteq\mathbb{Q}$，可得

$$(-1)A\in\mathcal{U}\quad\text{and}\quad(-1)B\in\mathcal{L}$$

对于 $A\in\mathcal{L}, B\in\mathcal{U}$。由此得到以下结果。

命题 6.1 乘以 -1 是 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{U}$ 之间的代数同构和反序同构，即

$$(-1)(A+A')=(-1)A+(-1)A'\quad and\quad(-1)(B+B')=(-1)B+(-1)B'$$

and

$$A\leq A'\quad\Leftrightarrow\quad(-1)A'\leq(-1)A$$

对于 $A, A'\in\mathcal{L}$, $B, B'\in\mathcal{U}$。

Proof. 显然。 □

显然，若将 -1 替换为任意有理数 $q<0$，也可得到类似的同构。下文中，$-X$ 表示 $(-1)X$。由于 $(-1)\varnothing=\varnothing$、$(-1)\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$，乘以 -1 会将 $\mathcal{L}$ 的最小元和最大元分别映射到 $\mathcal{U}$ 中的最大元和最小元，反之亦然。

照例，可以利用乘以 -1 来表示关于加法的逆元。若 $A\notin\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$，则

$$A+I\left(-\mathbb{Q}\backslash A\right)=N_L\quad\text{and}\quad B+J\left(-\mathbb{Q}\backslash B\right)=N_U.$$

确实，$a\in A$ 且 $x\in I(-\mathbb{Q}\backslash A)$ 意味着 $x\in-\mathbb{Q}\backslash A$，但它不是该集合的最小元。此外，这意味着 $-x\in\mathbb{Q}\backslash A$，因此 $a<-x$ 且 $a+x<0$，所以$x+a\in N_L$。最后，若 $q<0$，则取满足 $-a\in I(-\mathbb{Q}\backslash A)$ 的 $a\in A$（总是存在，因为 $A\in\mathcal{L}\backslash\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$），并得到 $(a+q)+(-a)=q<0$，因此每个 $q\in N_L$ 都可以表示为 A 中的一个元素与 I 中的一个元素之和（$-\mathbb{Q}\backslash A$）。B 情形也类似。

下文中，符号

$$A^*=I\left(-\mathbb{Q}\backslash A\right)\quad\text{and}\quad B^*=J\left(-\mathbb{Q}\backslash B\right)$$

用于表示 $A\in\mathcal{L}\backslash\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$、$B\in\mathcal{U}\backslash\{\mathbb{Q},\varnothing\}$ 的加法逆元。不过，这些表达式对 A, $B\in\{\varnothing,\mathbb{Q}\}$ 也有定义，但此时它们不再是加法逆元：$I(-\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q})=\varnothing=J(-\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q})$，$I(-\mathbb{Q}\backslash\varnothing)=\mathbb{Q}=J(-\mathbb{Q}\backslash\varnothing)$。

7 乘法

记

$$\mathcal{L}_+=\{S\in\mathcal{L}\mid N_L\subseteq S\}\quad\text{and}\quad\mathcal{U}_+=\{T\in\mathcal{U}\mid N_U\supseteq T\}$$

并设 $\mathcal{L}'_+ = \mathcal{L}_+ \backslash \{\mathbb{Q}\}$、$\mathcal{U}'_+ = \mathcal{U}_+ \backslash \{\varnothing\}$。注意，$\varnothing \notin \mathcal{L}_+$、$\mathbb{Q} \notin \mathcal{U}_+$。

两个元素 $S \in \mathcal{L}'_+$、$A \in \mathcal{L}_+$ 和 $T \in \mathcal{U}'_+$、$B \in \mathcal{U}_+$ 的乘积定义为

$$S \cdot A = \{sa \mid s \in S, a \in A \text{ and } (s \geq 0, a \geq 0 \text{ or } sa < 0)\}$$
$$T \cdot B = \{tb \mid t \in T, b \in B\}$$

其中 $N_U \cdot \varnothing = N_U$ 和 $T \cdot \varnothing = \varnothing$ 对于 $T \in \mathcal{U}'_+ \backslash \{N_U\}$。由于 S、A 中存在负数，第一种情况更为繁琐。根据此定义，可以得到

$$N_L \cdot A = N_L,\ O_L \cdot A = A,\ N_U \cdot B = N_U,\ O_U \cdot B = B$$

对所有 $A \in \mathcal{L}_+$、$B \in \mathcal{U}_+$ 均成立。

通过以下方式将乘法扩展到 $A \in \mathcal{L}$：

$$S \cdot A = I\left(-\mathbb{Q} \backslash (S \cdot I(-\mathbb{Q} \backslash A))\right)$$

只要 $A \notin \mathcal{L}_+$，其中 $N_L \cdot \varnothing = N_L$，且 $S \cdot \varnothing = \varnothing$ 对于 $S \in \mathcal{L}'_+ \backslash \{N_L\}$。同样，

$$T \cdot B = J\left(-\mathbb{Q} \backslash (T \cdot J(-\mathbb{Q} \backslash B))\right)$$

对于 $B \notin \mathcal{U}_+$。

若 $A \in \mathcal{L} \backslash \{\varnothing, \mathbb{Q}\}$, $S \in \mathcal{L}'_+$ 且 $B \in \mathcal{U} \backslash \{\mathbb{Q}, \varnothing\}$, $T \in \mathcal{U}'_+$，则

$$S \cdot A = (S \cdot A^*)^* \quad \text{and} \quad T \cdot B = (T \cdot B^*)^*$$

这与已知定义相对应，例如 [22, 第 20 页，步骤 7]。

定理 7.1 若 $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}'_+$ 且 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}$，则有

(a) $S \cdot (A_1 +_{\cdot} A_2) = (S \cdot A_1) +_{\cdot} (S \cdot A_2)$,

(b) $S_1 \cdot (S_2 \cdot A) = (S_1 \cdot S_2) \cdot A$, ***(c)*** $O_L \cdot A = A$, ***(d)*** $N_L \cdot A = N_L$。最后，

若 $A_1 \leq A_2$，则 $S \cdot A_1 \leq S \cdot A_2$。

Proof. 当所有涉及的分割都是普通分割时，这一结果已广为人知。接下来只需验证算术规则是否也适用于非普通割，这是一项简单的练习。 □

推论 7.2 $(\mathrm{IR} \cup \{\pm\infty\}, +, \cdot)$ 和 $(\mathrm{IR} \cup \{\pm\infty\}, +_{\cdot}, \cdot)$ 都是 *[9]* 中定义的共线性空间，其中 $\cdot$ 表示与非负实数的乘法。

8 应用

8.1 凸函数

Rockafellar [19, 第 23] 通过函数的上图集定义扩展实值函数的凸性，即，函数 $f\colon \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR} \cup \{\pm\infty\}$ 是凸的，当且仅当集合

$$\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \le r\}$$

是凸的。作为等价条件的詹森不等式，只有在避免使用诸如 $(+\infty)+(-\infty)$ 这样的表达式时才能使用，相关讨论见 [19, 第 24] 页。改用下确界加法后，这个困难便消失了。

定理 8.1 设 X 是一个非平凡实线性空间。对于函数 $f\colon X \to \mathrm{IR} \cup \{\pm\infty\}$，以下两个条件等价：

(a) $\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in X \times \mathrm{IR} \mid f(x) \le r\}$ 是 $X \times \mathrm{IR}$ 的一个凸子集；*(b)* 有

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) \dot{+} (1-\alpha) f(y) \tag{8.1}$$

只要 x、$y \in X$ 和 $\alpha \in (0, 1)$。

Proof. (a)⇒(b)：对于 $f(x)$ $f(y) \in \mathrm{IR} \cup \{+\infty\}$，该结果已得到充分证明。如果 $f(x) = f(y) = -\infty$，那么 (x, r)，$(y, r) \in \operatorname{epi} f$ 对所有 $r \in \mathrm{IR}$ 均成立，因此根据假设

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon (\alpha x + (1-\alpha)y, r) \in \operatorname{epi} f.$$

因此 $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = -\infty$，这意味着 (8.1) 成立。最后假设 $f(x) = -\infty$。如果 $f(y) = +\infty$，则詹森不等式成立，因为 $(-\infty)\dot{+}(+\infty) = +\infty$。如果 $f(y) \in \mathrm{IR}$，则 $(y, f(y)) \in \operatorname{epi} f$，并且 $(x, r) \in \operatorname{epi} f$ 对所有 $r \in \mathrm{IR}$ 均成立，因此根据假设

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon (\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha r + (1-\alpha) f(y)) \in \operatorname{epi} f$$

im从而 $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = -\infty$，且在这种情况下詹森不等式同样成立。(b)⇒(a)：假设 (x, r)，$(y, s) \in \operatorname{epi} f$。利用 (8.1) 可得

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) \dot{+} (1-\alpha) f(y) \le \alpha s + (1-\alpha) r,$$

因此 $(\alpha x + (1-\alpha)y,\ \alpha s + (1-\alpha)r) \in \operatorname{epi} f$ 具有凸性，即 epi f 的凸性。 □

如果将下确界加法替换为上确界加法，定理 8.1 中的等价关系便不再成立 $\dot{+}$。例如，函数 $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR} \cup \{\pm\infty\}$ 定义如下（见[21,第 41]）

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -\infty & : \quad x > 0 \end{cases}.$$

它是凸的，满足（8.1），但有 $0 = f(0) > 1/2 f(-1) \dot{+} 1/2 f(1) = (-\infty) \dot{+} (+\infty) = -\infty$。

注 8.2 如果重点转向凹性，情况则相反。定理 *8.1*中的等价性转变为上图集的凸性与带有相反不等号的詹森不等式之间的等价性，并且使用 $+_{\cdot}$ 代替 $+^{\cdot}$。因此，尽管不存在处理 $\infty-\infty$*'[21,p. 15]*的唯一对称方式，理论仍然是完全对称的。

凸函数广泛使用的两种函数运算，都关键地依赖于加法：函数的逐点加法和下确界卷积。在 [19, 第33, 34], 节中，详细解释了为何相应定理仅针对真凸函数表述，即"为避免 $\infty-\infty$"。

T定理 8.3 设 $f_1, f_2\colon X \to \mathrm{IR}\cup\{\pm\infty\}$ 是两个凸函数。
n (a) $f(x) = (f_1 +^{\cdot} f_2)(x) := f_1(x) +^{\cdot} f_2(x)$ 是凸的；*(b)* $f(x) =$ 下确界$\{f_1(x_1) +^{\cdot} f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\}$ 是凸的。

Proof. (a) 利用（8.1）可直接得出。(b) 可以如下使用定理 8.1 。取（x, r），（y, s）$\in$上图 f。固定 $\varepsilon > 0$。于是存在 $x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, y_1^\varepsilon, y_2^\varepsilon \in X$满足$x_1^\varepsilon + x_2^\varepsilon = x$, $y_1^\varepsilon + y_2^\varepsilon = y$ 并且

$$f_1(x_1^\varepsilon) +^{\cdot} f_2(x_2^\varepsilon) \le r + \varepsilon,$$
$$f_1(y_1^\varepsilon) +^{\cdot} f_2(y_2^\varepsilon) \le s + \varepsilon.$$

特别地，$f_1(x_1^\varepsilon)$ $f_2(x_2^\varepsilon)$ $f_1(y_1^\varepsilon)$ $f_2(y_2^\varepsilon) \neq +\infty$。上面的两个不等式给出

$$\alpha f_1(x_1^\varepsilon) +^{\cdot} (1-\alpha) f_1(y_1^\varepsilon) +^{\cdot} \alpha f_2(y_1^\varepsilon) +^{\cdot} (1-\alpha) f_1(y_2^\varepsilon) \le \alpha r + (1-\alpha)s + \varepsilon.$$

詹森不等式（8.1）进一步得到

$$f_1(\alpha x_1^\varepsilon + (1-\alpha)y_1^\varepsilon) +^{\cdot} f_2(\alpha y_1^\varepsilon + (1-\alpha)y_2^\varepsilon) \le \alpha r + (1-\alpha)s + \varepsilon.$$

由于这对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，因此可得到带有 $\varepsilon = 0$ 的相同不等式，从而$\alpha(x,\ r) + (1-\alpha)(y,\ s) \in$epi f。□

读者可以验证，如果将下确界加法 $+^{\cdot}$ 替换为上确界加法 $+_{\cdot}$，这两个陈述都不成立。

注 8.4 还可以将定理*8.3*的 *(b)* 与基准文本中定理 *2.1.3* 的 *(ix)* *[23]*进行比较：其中，两个函数 f_1、f_2 都被假定为真函数。

因此，将扩展实值函数与适当的算术规则结合起来，就能以统一的方式处理适当和不适当的情形。

8.2 集值凸函数

本小节指出了一个与集值凸函数和集合优化相关的问题。有关更多细节和应用，读者可参阅相关文献，例如 [14], [10, 11, 12, 13], 。

设 $C \subseteq \mathrm{IR}^d$ 是满足 $C \notin \{\varnothing, \mathrm{IR}^d\}$ 的闭凸锥。函数 $f\colon X \to \mathcal{P}(\mathrm{IR}^d)$ 称为 C-凸的，当且仅当

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) + C \supseteq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{8.2}$$

当 $x, y \in X$ 且 $\alpha \in (0,1)$ 时成立。将 f 扩展为由 $f^{\triangle}(x) = \mathrm{cl}\,(f(x) + C)$（如果 $f(x) \neq \varnothing$，否则为 $f^{\triangle}(x) = \varnothing$）定义的 $f^{\triangle}$，便得到一个将 X 映射到 $f^{\triangle}$ 的函数

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^d, C) = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^d \mid A = \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,(A + C) \right\}.$$

利用标准的分离论证，可以证明这类函数可由标量函数族刻画，即

$$\varphi^{\triangle}_{f,w}(x) = \inf_{z \in f^{\triangle}(x)} w^{\top} x$$

其中 w 遍历对偶锥 $C^{+} = \{w \in \mathrm{IR}^d \mid \forall z \in C\colon\ w^{\top} z \geq 0\}$，参见 [12,公式 (34)]（记号有所不同）或 [11, 公式 (4.17)]。

下面的例子 [12, 例5.25] 表明，即使对于性质良好的集值函数，类型为$\varphi^{\triangle}_{f,w}$的标量化也可能是不适当的。

例8.5 设 $X = \mathrm{IR}$，$d = 2$，$v = (0,\ 1)^{\top}$ 且 $C = \{sv \mid s \geq 0\}$，考虑函数

$$f(x) = f^{\triangle}(x) = \begin{cases} H^{+}(v) & : \quad x > 0 \\ C & : \quad x = 0 \\ \varnothing & : \quad x < 0 \end{cases}$$

其中 $H^{+}(v) = \{z \in IR^2 \mid v^{\top} z = z_2 \geq 0\}$。此函数是 C-凸的，并且在以下意义下是 C-适当的：$dom\ f = \{x \in IR \mid f(x) \neq \varnothing\} \neq \varnothing$且 $f(x) \neq IR^2$对所有 $x \in IR$均成立（见 [10]）。然而，标量化$\varphi^{\triangle}_{f,w}$ 在传统意义下是适当的，即 $dom\varphi^{\triangle}_{f,w} \neq \varnothing$ 且$\varphi^{\triangle}_{f,w}(x) \neq -\infty$ 对所有 $x \in IR$均成立，当且仅当 w 与 v共线。例如，对于 $w = (1,1)^{\top}$，可得

$$\varphi^{\triangle}_{f,w}(x) = \begin{cases} -\infty & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ +\infty & : \quad x < 0 \end{cases}$$

此外，不能仅通过其适当标量化来刻画 f，因为 $f(0) = C \subsetneq H^{+}(v)$ 成立。

因此，考虑扩展实数 IR $\cup \{\pm\infty\}$ 并结合适当的算术规则，便可同时处理适当标量化与非适当标量化，而无需对集值函数施加特定限制来确保其标量化的适当性。此外，这也带来了适当的标量化函数共线性空间；这些函数基本上是集值函数取值的支撑函数，详见 [11, 第 4 节。2]。

致谢。 撰写本文期间未使用任何外部资金。不存在利益冲突。

数据声明。 本文没有相关的其他数据。

参考文献

[1] Aliprantis CD, Border KC,《无穷维分析：搭便车者指南》，第3版，Springer出版社，2006年（第1版于1999年出版）[2] Aliprantis CD, Burkinshaw O，《实分析原理》。Gulf Professional Publishing，第3版，1998年[3] Aubin JP，《博弈与经济理论的数学方法》，修订版，Dover Publications Inc.，2007年（原版于1979年出版）[4] Cohen G, Gaubert S, Quadrat JP, Singer I，*Max-plus*凸集与函数，载于：《幂等数学与数学物理》，《当代数学》第377卷，105-129页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年[5] Dedekind R，《连续性与无理数》，Vieweg出版社，不伦瑞克，1872年[6] Getan J, Martınez-Legaz JE, Singer I，*(*, s)*-对偶，《数学科学杂志》，115(4)，2506-2541页，2003年[7] Ebbinghaus HD, Hermes H, Hirzebruch F, Koecher M, Mainzer K, Neukirch J, Prestel A, Remmert R，《数》，《数学基础知识》第1卷，Springer出版社，第2版，1988年[8] Hager R, Hamel AH, Heyde F，半群中准吸收元的理想，arXiv预印本 arXiv:2312.09914，2023年[9] Hamel AH，《度量空间与一致空间上的变分原理》，国家博士资格论文（教授资格论文），哈雷-维滕贝格马丁·路德大学，2005年[10] Hamel AH，集值函数对偶理论 *I*：*Fenchel*共轭理论，《集值与变分分析》，17(2)，153-182页，2009年

[11] Hamel AH, Heyde F, L¨ohne A, Rudloff B, Schrage C（2015）集合优化——一个相当简短的介绍。载于：Hamel AH, Heyde F, L¨ohne A, Rudloff B, Schrage C（编）《集合优化及其应用——最新进展：从集合关系到集值风险测度》。Springer出版社，柏林，第65-141页[12] Hamel AH, Schrage C，关于扩展实值函数和集值函数的注记，《凸分析杂志》，19(2)，355-384页，2012年[13] Hamel AH, Schrage C，集值凸函数的方向导数、次微分与最优性条件，《太平洋优化杂志》10(4)，667-689页，2014年[14] L¨ohne A，《带有下确界和上确界的向量优化》，施普林格，2011年[15] Moreau JJ，取值于 `的函数 $[-\infty, +\infty]$; 代数概念´，蒙彼利埃科学学院，数学研讨会，蒙彼利埃大学，蒙彼利埃，1963年[16] Moreau JJ，关于定义在半群上、取值于 ` $[-\infty, +\infty]$ 的´函数的注记，《巴黎科学院报告》257，3107-3109页，1963年[17] Moreau JJ，凸泛函，J ean Leray研讨会2，1-108页，1966年[18] Phelps RR，《凸函数、单调算子与可微性》（第803卷）。Springer出版社，1989年[19] Rockafellar RT，《凸分析》，普林斯顿大学出版社，1970年[20] Rockafellar RT，《共轭对偶与优化》。工业与应用数学学会，1974年[21] Rockafellar RT, Wets RJ-B，《变分分析》第3版，第317卷，施普林格科学与商业媒体，2010年[22] Rudin W，《数学分析原理》。第3版，《纯粹与应用数学国际丛书》第3卷，麦格劳-希尔，纽约，1976年[23] Zalinescu C，《一般向量空间中的凸分析》，世界科技出版公司，2002年