arXiv:2601.02235v1 [math.AG] 5 Jan 2026

异常维数光滑射影曲线的希尔伯特概形及存在一个具有少于预期模数的分支

Changho Keem

数学主题分类（2010）。主要分类 14C05，次要分类 14H10，14H51。

关键词。 希尔伯特概形、射影代数曲线、完全线性级数、预期模数个数。

摘要。 我们将$\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 记为 $\mathbb{P}^r$中次数为 d 且亏格为 g 的光滑曲线的希尔伯特概形。将亏格为 g的光滑曲线的模空间记为 $\mathcal{M}_g$ ，令 μ: $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ $\dashrightarrow$ $\mathcal{M}_g$ 为自然态射，它将$X \in \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 映射到其同构类 μ（X） $= [X] \in \mathcal{M}_g$。

有人猜想，分支 $\mathcal{H}$ $\subset$ $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 具有可能的最小维数

$$\mathcal{X}(d,g,r) := 3g - 3 + \rho(d,g,r) + \dim \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^r)$$

若 $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) \leq g - 5$ provided $\mathcal{X}(d,g,r) \geq 0$，其中 $\rho(d,g,r)$: $=g -(r+1)(g-d+r)$ 是 Brill–Noether数。本文给出反例，针对这一猜想展开讨论，并沿此思路进一步研究函子映射 μ: $\mathcal{H}d,g,r$ $\dashrightarrow$ $\mathcal{M}_g$。

若一个分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,g,r}$ 满足 *expected number ofmoduli*，则称其具有该性质

$$\dim \mu(\mathcal{H}) = \min\{3g-3, 3g-3+\rho(d,g,r)\},$$

若 $3g - 3 + \rho(d,g,r) \geq 0$。此前尚未发现模数严格少于预期模数的分支。本文证明了存在模数少于预期模数的分支。

1. 概述、预备知识与基本设定

给定非负整数 d、 g 和 $r \geq 3$，令 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 表示光滑射影曲线的希尔伯特概形，它是由若干分支的并组成，这些分支的一般

点对应于 $\mathbb{P}^r$ 中次数为 d、亏格为 g 的光滑不可约非退化曲线。将亏格为 g 的光滑曲线的模空间记为 $\mathcal{M}_g$，令

$$\mu : \mathcal{H}_{d,g,r} \dashrightarrow \mathcal{M}_g$$

是自然的有理映射——我们称之为模映射——将 $X \in \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 映到其同构类 $\mu(X) = [X] \in \mathcal{M}_g$。

在本文中，我们关注 $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H})$ 与 $\dim \mathcal{H}$ 之间的关系。对于任意不可约分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$，已知

$$\dim \mathcal{H} \geq \mathcal{X}(d,g,r) := \dim \mathcal{M}_g + \rho(d,g,r) + \dim \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^r). \tag{1}$$

在*Brill-Noether* 范围内，即当

$$\rho(d,g,r) := g - (r+1)(g-d+r) \geq 0,$$

存在一个唯一的分支

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{d,g,r}$$

支配 $\mathcal{M}_g$ [13,定理 19.9，第 348]页。此外，该分支 $\mathcal{H}_0$ 具有预期维数

$$\dim \mathcal{H}_0 = \mathcal{X}(d,g,r).$$

另一方面，仍在假设 $\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$ 的情况下，目前还不完全清楚 $\mathcal{H}_0$ 是否是唯一具有最小可能（且符合预期）维数的分支。原则上，可能存在一个分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$，其维数为 $\dim \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$，但它并不支配 $\mathcal{M}_g$。若此情况发生，将导致 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 可约，正如 [18] 中所见。此时，我们可以提出以下看似朴素但自然的问题。

(A) 假设 $\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$。找出所有（或尽可能多的）分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$，使其维数为 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$。(B) 在不作出假设 $\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$ 的情况下，是否可以对 $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H})$ 作出估计（或给出上界）——最好是关于 g 的线性估计——从而得到 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$?

关于问题 (A)，目前仅知存在一个分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,g,r}$，它不同于 $\mathcal{H}_0$，且 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,g,r)$；参见 [18, 定理 3.4], [7, 命题 3.3 和 3.5]，或下文的例 2.1。我们将在例 2.1 中重现一个典型的此类例子。然而，在假设 $\rho(d,g,r) \geq 0$ 下，所有已知的此类例子都对应于一个分支，其一般元素是非线性正规曲线。下一节将更具体地讨论这一现象；问题 2.3。

在 Brill-Noether 范围 $\rho(d,\ g,\ r) < 0$之外，根据 Brill-Noether 定理，没有任何分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$支配 $\mathcal{M}_g$。然而，我们仍可探讨在什么数值或几何条件下，存在一个分支 $\mathcal{H}$，其维数 $\mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$? 粗略地说，人们预期，如果余维数 $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H})$变小，$\mathcal{H}$ 中的曲线就会趋近于一般曲线，因此它们很可能表现得像具有一般模数的曲线。因此，自然会预期维数估计 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$

对于由不太特殊的曲线构成的分支，这一结论可能仍然成立。沿着这一思路，有人提出了以下 [12,猜想，第142–143]页。

(C) 找到一个函数 $\beta(g)$（可能是关于 g 的线性函数），以确保在这种情况下存在一个具有预期维数的分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) \leq \beta(g).$$

具体而言，可以得到以下近期出现的更新版猜想 [13,猜想19.6，第 344]页。

猜想 1.1。若 余维数$_{\mathcal{M}_g}$ $\mu(\mathcal{H}) \leq \beta(g) = g-5$，则 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$。

♦ 本文给出了若干三元组 $(d,\ g,\ r)$ 的例子，使得猜想 1.1 不再成立；见例子 2.7、2.12。我们还沿着这一思路进一步讨论了模映射的研究；见注2.8。

♦ 我们研究了一个相关问题，即是否存在一个模数少于预期模数的分支；见例 3.1、注 3.3、问题 3.4

我们称分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,g,r}$ 具有预期模数，当且仅当

$$\dim \mu(\mathcal{H}) = \min\{3g-3, 3g-3+\rho(d,g,r)\}.$$

在条件

$$\lambda(d,g,r) := 3g-3+\rho(d,g,r) \geq 0.$$

当 $\rho(d,g,r) \geq 0$时，主分支 $\mathcal{H}_0$ 是唯一具有预期模数的分支。其他分支（如果存在）所具有的模数少于预期模数。因此，只有当 $\rho(d,g,r) < 0$时，也就是在 Brill-Noether 范围之外，我们才关注具有少于预期模数的分支是否存在。我们将在最后一节展示一类曲线，它们构成一个希尔伯特概形的分支，且其模数少于预期模数。

2. 预备知识、记号与一些例子

2.1. 预备知识、记号与约定

关于记号和约定，我们沿用 [2] 和 [3]中的记法；例如，$\pi(d,\ r)$是 $\mathbb{P}^r$中次数为 d 的不可约、非退化且既约曲线的最大可能算术亏格。按照经典术语，光滑曲线上的次数为 d、维数为 r 的线性级数记作 g^r_d。若光滑曲线 C 上的线性级数 $\mathcal{D} = g^r_d$ $(r \geq 2)$所诱导的态射 $C \to \mathbb{P}^r$，是由 $\mathcal{D}$ 的动部分诱导的，且双有理地映到其像上，则称该线性级数为双有理非常丰。若线性级数 g^r_d 所诱导的态射给出一个次数为$k \geq 2$的非平凡覆盖映射 $C \to C'$，则称该线性级数为复合的 。给定一条光滑非退化曲线 $C \subset \mathbb{P}^r$，C 的余曲线——有时记作 $C^\vee$ ——是由动部分所诱导的态射的像曲线

该态射由 $|K_C(-1)|$的动部分诱导。对于光滑曲线 C上的完全线性级数 $\mathcal{D}$，其余剩级数记作 $\mathcal{D}^\vee$。

我们的研究采用以下基本框架，取自 [3] 和 [1, §1 及 §2]。给定一个对应于光滑不可约曲线 C 的同构类 $[C] \in \mathcal{M}_g$，存在该类 $[C]$ 的一个邻域 $U \subset \mathcal{M}_g$，以及一个光滑连通簇 $\mathcal{M}$，它是有限分歧覆盖 $h : \mathcal{M} \to U$；此外，还有簇 $\mathcal{C}$、$\mathcal{W}^r_d$ 和 $\mathcal{G}^r_d$，它们在 $\mathcal{M}$ 上是适当的，并具有以下性质：

(1) $\xi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 是一条普适曲线，即对于每个 $p \in \mathcal{M}$，$\xi^{-1}(p)$ 都是一条亏格为 g 的光滑曲线，其同构类为 $h(p)$；(2) $\mathcal{W}^r_d$ 参数化由满足以下条件的对 $(p,\ L)$：L 是次数为 d 的线丛，且 $h^0(L)$ 在 $\xi^{-1}(p)$ 上 $\geq r+1$；(3) $\mathcal{G}^r_d$ 参数化对 $(p,\ \mathcal{D})$，其中 $\mathcal{D}$ 是 $\xi^{-1}(p)$ 上可能不完备的 g^r_d。

令 $\mathcal{G}$（分别为 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$）表示 $\mathcal{G}^r_d$ 的分支之并，其一般元素（$p,\ \mathcal{D}$）对应于曲线 $C = \xi^{-1}(p)$ 上的一个非常丰（分别为非常丰且完备的）线性级数 $\mathcal{D}$。回顾一下，$\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 中由光滑不可约非退化曲线组成的一个开子集是一个 Aut($\mathbb{P}^r$)-丛，它在 $\mathcal{G}$ 的一个开子集上。$\mathcal{G}$ 的不可约性保证了 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 的不可约性。同样，$\widetilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}}$ 的不可约性确保了 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 的不可约性；后者是 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 中一般元素为线性正规的分支之并。

给定一个不可约族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}^r_d$，其一般成员是完备的，则该族 $\{\mathcal{D}^\vee | \mathcal{D} \in \mathcal{F},\ \mathcal{D}$ 的闭包是完备的 $\} \subset \mathcal{W}^{g-d+r-1}_{2g-2-d}$，有时记作 $\mathcal{F}^\vee$。给定 $r \geq s$，$\mathbb{G}\ (s,\ r)$ 表示 $\mathbb{P}^r$ 中维数为 s 的线性子空间构成的格拉斯曼流形。全文中我们均在复数域上工作。

2.2. 一些新旧例子

我们从下面这个可约希尔伯特概形的例子开始，其中$\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$，这是定理 2.3] 的一个简化版本。这个例子已有数年历史；我们选择在此简要概述，以激发读者的兴趣，并让读者初步了解本文将要讨论的内容。

例 2.1。(i) 若 $11 \leq g \leq 16$, $\mathcal{H}_{2g-8,\ g,\ g-8}$ 非空且不可约，且其一般元素是线性正规的。
(ii) 若 $g \geq 17$，则存在一个额外的分支 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{2g-8,\ g,\ g-8}$, $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_0$，满足

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) = g - 4$$

$$\dim \mathcal{H} = \begin{cases} \mathcal{X}(2g-8, g, g-8) & \text{if } g = 17 \\ \mathcal{X}(2g-8, g, g-8) + (g-17), & \text{if } g > 17. \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ 的一般元素是一条三次曲线，它在$\mathbb{P}^{g-8}$中不是线性正规的。

证明。由于 $\rho(2g-8,\ g,\ g-8)\geq 0$，存在唯一一个主导 $\mathcal{M}_g$ 的分支 $\mathcal{H}_0$。假设存在一个分支 $\mathcal{H}\neq\mathcal{H}_0$。回顾一下，$\mathcal{H}$由满足 $\mathcal{O}_C(1)$ 是特殊的条件的曲线 C 构成 [14, 第 2], [21, 章命题 1.1]。

取一个一般的 $C\in\mathcal{H}$，其超平面线性系为 $\mathcal{D}=g^{g-8}_{2g-8}\subset|\mathcal{O}_C(1)|$。令 $\alpha=h^1(C,\ \mathcal{O}_C(1))>0$。由克利福德定理，$1\leq\alpha\leq 4$。若 $\alpha=4$, $|K_C(-1)|=g^3_6$，且 C 是双曲曲线，它确实具有双有理非常丰特殊线性系。若 $1\leq\alpha\leq 2$，则由固定曲线 [13, 上特殊线性系构成的 Brill-Noether 位 $W^{\alpha-1}_6(C)$ 的 H. Martens 定理（定理 5.16]），再转而考虑余剩级数

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{H}&\leq \text{自同构群 Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+\dim\mathbb{G}(g-8,\ g+\alpha-8)+\dim W^{g+\alpha-8}_{2g-8}(C)+\dim\mu(\mathcal{H})\\&\leq\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+\dim\mathbb{G}(g-8,g+\alpha-8)+\dim W^{\alpha-1}_6(C)+3g-4\\&\leq\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+\dim\mathbb{G}(g-8,g+\alpha-8)+(6-2(\alpha-1))+3g-4\\&<\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+\lambda(2g-8,g,g-8)=\mathcal{X}(2g-8,g,g-8),\end{aligned}$$

若 $g\geq 11$，这与 (1) 矛盾。因此，只剩下 $\alpha=3$, $\mathcal{E}:=|K_C(-1)|=g^2_6$，且 $\mathcal{E}$ 是复合的（因为 $g\geq 11$），从而诱导出 $\eta:\ C\longrightarrow E\subset\mathbb{P}^2$。$C$ 不是双椭圆的；若是如此，则 $|K_C-\eta^*(g^2_3)|$ 不是非常丰的；参见引理 2.6。因此，C 是三次覆盖的，$\mathcal{E}=2g^1_3$，并且超平面线性系

$$\mathcal{D}\subset|K_C(-2g^1_3)|=g^{g-5}_{2g-8}$$

是唯一非常丰的 $g^{g-5}_{2g-8}=|K_C(-2g^1_3)|$ 的一个（不完备）子线性系。由此可知，在 $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}^{g-8}_{2g-8}$ 上存在一个分支 $\mathcal{H}\neq\mathcal{H}_0$，其由三次曲线 $C\in\mathcal{M}^1_{g,\ 3}$ 上的不完备非常丰子线性系 $g^{g-8}_{2g-8}\subset|K_C(-2g^1_3)|$ 构成。因此，$\mathcal{H}$ 支配不可约轨迹 $\mathcal{M}^1_{g,\ 3}\subset\mathcal{M}_g$，该轨迹由三次曲线和

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{H}&=\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+\dim\mathbb{G}(g-8,g-5)+\dim\mathcal{M}^1_{g,3}\\&=\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+3(g-7)+2g+1\\&\geq\mathcal{X}(2g-8,g,g-8)=\dim\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-8})+4g-3\end{aligned}$$

若 $g\geq 17$。因此，我们得出结论

(i) $\mathcal{H}_{2g-8,\ g,\ g-8}$ 非空且不可约，只有一个分支 $\mathcal{H}_0$（主分支），若 $11\leq g\leq 16$。一般元素是非特殊且完备的；[17,第 IV 章，命题 6.1]。

(ii) 若 $g\geq 17$，则 $\mathcal{H}_{2g-8,\ g,\ g-8}$ 可约且有两个分支；唯一的额外分支 $\mathcal{H}$ 支配三次曲线轨迹 $\mathcal{M}^1_{g,\ 3}$，因此

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_g}\mu(\mathcal{H})=g-4.$$

每个成员 $C\in\mathcal{H}$ 都是一条非线性正规曲线 &

$$\dim\mathcal{H}=\begin{cases}\mathcal{X}(2g-8,g,g-8) & \text{if } g=17\\ \mathcal{X}(2g-8,g,g-8)+(g-17), & \text{if } g>17.\end{cases}$$

□

注记 2.2。这类例子不胜枚举，可见于 [18,定理 3.4], [7, 命题 3.5]。所有这些已知例子都至少有一个额外分支，由非线性正规曲线组成。因此，我们可以提出以下相当粗略的问题。

问题 2.3. 如果 $\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$，是否存在一个光滑射影曲线的希尔伯特概形，其分支$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 满足 $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_0$ & $\mathcal{H}$一般由线性正规曲线组成?

遗憾的是，作者不知道上述问题是否有合理的答案。事实上，有些人（例如 [11, 第 489] 页或 [MathSciNet；美国数学会《数学评论》MR1221726(95a:14026)]）认为，这正是塞韦里在两篇论文中的本意：他在这两篇论文中声称，$\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 在 Brill-Noether 范围 $\rho(d,\ g,\ r) \geq 0$ 内不可约，但证明并不完整； [25], [26]。

本文余下部分，我们只关注并讨论三元组 $(d,\ g,\ r)$ 处于 *Brill-Noether* 范围之外的情形，即 $\rho(d,\ g,\ r) < 0$，除非另有说明。下一个例子——与例 2.1 属于类似类型——表明，猜想 1.1 不能 修改为条件放宽后的版本

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) \leq g-4,$$

在施加额外的但看似自然的条件时， $\mathcal{H}$中的一般元素是线性正规的。

例 2.4. (i) 对于 $(d,\ g,\ r) = (15,\ 16,\ 5)$, $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r} = \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$是可约的，且有三个分支 [6,命题 5.1]。三个分支中有一个 $\mathcal{H}$

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) = g-4 \text{ dominating } \mathcal{M}^1_{g,3},\ \dim \mathcal{H} = 68 > \mathcal{X}(d,g,r) = 60.$$

容易证明，亏格为$g = 16$ 的曲线上的完备非常丰 $\mathcal{D} = g^5_{15}$，若满足 $\mathcal{D}^\vee = g^5_{15}$ 是复合的，则其形式为 $\mathcal{D} = |K_C - 5g^1_3|$，其中曲线是三次覆盖曲线，反之亦然。显然， $\mathcal{H}$ 中的一般元素是线性正规的。

(ii) 对于 $(d,\ g,\ r) = (14,\ 14,\ 5)$, $\mathcal{H}_{14,\ 14,\ 5} = \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{14,\ 14,\ 5}$是不可约的，并支配$\mathcal{M}^1_{g,\ 3}$ [5, 命题 4.3(iii)]。事实上，适用与上文相同的推理；一般的 $\mathcal{D} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{G}^5_{14}$ 形式为 $\mathcal{D} = |K_C - 4g^1_3|$，并且

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) = g-4, \dim \mathcal{H}_{d,g,r} = 64 > \mathcal{X}(14,14,5).$$

(iii) 因此， $\beta(g) = g-4$ 并不是在 μ 下预期维数的分支图像的余维数的正确上界；该分支通常由线性正规曲线构成。

在继续下一小节之前，我们给出一些例子 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$其 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$ 满足

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g} \mu(\mathcal{H}) \lneq g-4,$$

由此或许可以为猜想 1.1 的有效性提供积极线索，且其更小 $\beta(g)$。

例 2.5. (i) 对于 $(d,g,r) = (14,12,5)$, $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,g,r}$ 是可约的，有两个具有相同预期维数 的分支 $\mathcal{H}_i, i=1,2$ $\mathcal{X}(d,g,r)$； [5, 命题 4.3(v)], [19, 定理 3.4(ii)]。存在一个支 $\mathcal{H}_1$ 支配$\mathcal{M}^1_{g,4}$，由嵌入在一般四重覆盖曲线上的线性正规曲线组成，嵌入映射由 $|K_C - 2g^1_4|$ 给出，因此

$$\operatorname{codim}\mu(\mathcal{H}_1) = \operatorname{codim}\mathcal{M}^1_{g,4} = g-6 < g-5.$$

另一分支 $\mathcal{H}_2$ 的一般元素有一个次数为 8 的平面模型，具有 $\delta = 9$ 节点奇点。通常的维数计数给出

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g}\mu(\mathcal{H}_2) = g-6 < g-5.$$

(ii) 对于 $(d,g,r) = (14,11,5)$, $\mathcal{H}_{d,g,r}$ 是不可约的，具有预期维数并支配$\mathcal{M}^1_{g,6}$ [4, 定理 2.3]

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g}\mu(\mathcal{H}_{14,11,5}) = \operatorname{codim}_{\mathcal{M}_g}\mathcal{M}^1_6 = g-10 < g-5.$$

2.3. 反驳猜想 1.1 的例子，其中 $\beta(g) = g-5$

在本小节中，我们给出一个例子 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 表明带有 $\beta(g) = g-5$ 的猜想 1.1 事实上并不成立；见例 2.7。随后，我们将尝试理解这一例子，并寻求进一步的推广；见例 2.12。

引理 2.6。 （i）设 $C \xrightarrow{\eta} E$ 是亏格为 $h \geq 1$的曲线 E 的二重覆盖。设 $\mathcal{E} = g^s_e$ 是 E上的非特殊线性级数。假设 $|\eta^*(g^s_e)| = g^s_{2e}$。则完备的 $|K_C(-\eta^*(g^s_e))|$ 的无基点部分是复合的。（ii）设 C 是亏格为 $g \geq 5$的三次曲线。设对于某个有效因子 Δ 有维数 $|2g^1_3 + \Delta| = 2$，且次数 $\Delta > 0$。则 $|K_C - 2g^1_3 - \Delta|$ 不是非常丰。

证明。 (i) 注意，对于任意的 $p \in E$, $|g^s_e + p| = g^{s+1}_{e+1}$，由于 g^s_e 非特殊 1,

$$\dim|\eta^*(g^s_e) + \eta^*(p))| = \dim|\eta^*(g^s_e + p)| = \dim|\eta^*(g^{s+1}_{e+1})| \geq \dim\mathcal{E} + 1.$$

因此 $|K_C(-\eta^*(g^s_e))|$是复合的。

(ii) 选取 $q \in \operatorname{Supp}(\Delta)$ 以及包含 q 的三次因子 $q+t+s \in g^1_3$。$|2g^1_3 + \Delta|^\vee$ 不是非常丰，因为

$$\begin{aligned}\dim|2g^1_3 + \Delta + t + s| &= \dim|(2g^1_3 + (q+t+s) + (\Delta - q)| \\ &= \dim|3g^1_3 + (\Delta - q)| \geq \dim|2g^1_3 + \Delta| + 1.\end{aligned}$$

□

例 2.7. 固定 $r \geq 15$、 $g = r+7$、 $d = 2r+4$。那么 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r}$ 是可约的，其分支$\mathcal{H}_{4,\ 0}$ 支配$\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$,

$$\dim \mathcal{H}_{4,0} = \dim \mathcal{M}^1_{g,4} + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r) > \mathcal{X}(2r+4, r+7, r),$$
$$\mathrm{codim}\, \mu(\mathcal{H}_{4,0}) = \mathrm{codim}\, \mathcal{M}^1_{g,4} = g-6 < g-5.$$

证明。 假设$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,r+7,r} \neq \emptyset$。令$C \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,r+7,r}$ 为一个一般元素。由于 $g = r+7 \geq 22 > \binom{7}{2}$, $\mathcal{E} := |K_C(-1)| = g^2_8$ 是复合的，诱导出一个态射 η : $C \to E \subset \mathbb{P}^2$, $h =$ 亏格(E)。注意 $\deg \eta \cdot \deg\ E \leq \deg \mathcal{E} = 8, \deg\ E \geq 2$, 因此我们有

$$(\deg \eta, \deg E, h) \in \{(2,4,3),(2,4,2),(2,3,1),(2,3,0),(3,2,0),(4,2,0)\}.$$

由引理 2.6，我们有 $(\deg\ \eta, h)\ = (2,3)$ 或 $(4,0)$，即 $C \in \mathcal{X}_{2,3}$ 或$C \in \mathcal{M}^1_{g,4}$, 其中 $\mathcal{X}_{2,3} \subset \mathcal{M}_g$ 表示亏格为 $h = 3$ 的曲线的双覆盖轨迹。

(i) 对于 $C \in \mathcal{X}_{2.3}$, $|K_C - \eta^*(\mathcal{O}_E(1))| = |K_C - \eta^*(K_E)| = g^r_{2r+4}$ 是非常丰的；参见 [20, 命题 4.4]。设

$$\mathcal{F}_{(2.3)} := \{|K_C - \eta^*(\mathcal{O}_E(1))|; C \in \mathcal{X}_{2,3}, C \xrightarrow{\eta} E\} \subset \mathcal{G}^r_{2r+4}.$$

回想一下，$\mathcal{X}_{2,\ 3}$ 是纯维数 $2g-4$，因此

$$\dim \mathcal{F}_{(2,3)} = 2g-4 = 2r+10 > \lambda(2r+4, r+7, r) = r+22.$$

(ii) 设 C 是亏格为 g的一般四重覆盖曲线。注意， $|K_C - 2g^1_4| = g^r_{2r+4}$由推论 3.3]可知是非常丰的 [18, 。我们设

$$\mathcal{F}_{4,0} := \{|K_C - 2g^1_4|; C \in \mathcal{M}^1_{g,4}\} \subset \mathcal{G}^r_{2r+4}.$$

注意，在 C上只有一个 g^1_4 ，因此我们有

$$\dim \mathcal{F}_{4,0} = \dim \mathcal{M}^1_{g,4} = 2g+3 = 2r+17 \geq \lambda(2r+4, r+7, r). \qquad (2)$$

注意，$\dim \mathcal{F}_{4,\ 0} > \dim \mathcal{F}_{(2,3)}$，而 $\mathrm{gon}(C_{4,\ 0}) < \mathrm{gon}(C_{(2,3)}) = 6$ ($C_{4,\ 0} \in \mathcal{F}_{4,\ 0}$. & $C_{(2,3)} \in \mathcal{F}_{(2,3)}$)，因此由冈性的（下）半连续性可知，族 $\mathcal{F}_{(2,3)}$ 不在$\mathcal{F}_{4,\ 0}$ 的边界中，由此可推出$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r}$的可约性。

总之，$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r} \neq \emptyset$ 至少有两个分支，其中一个分支$\mathcal{H}_{4,\ 0}$ 支配$\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$,

$$\dim \mathcal{H}_{4,0} = \dim \mathcal{F}_{4,0} + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r) > \mathcal{X}(2r+4, r+7, r),$$
$$\mathrm{codim}\, \mu(\mathcal{H}_{4,0}) = \mathrm{codim}_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}^1_{g,4} = g-6 < g-5.$$

□

注2.8。 (i) 在例 2.7 中，我们假设 $r \geq 15$ ，以避免复杂的情况。对于 $3 \leq r \leq 14$、 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r} \neq \emptyset$ &，不可约分支的数量以及每个分支的维数会因 r 而异；参见 [19,表 1]。

异常维数曲线的希尔伯特概形，模数为 9

(ii) 值得注意的是，对于每个 $r \geq 5$，都有一个分支 $\mathcal{H}_{4,\ 0} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r}$ 支配 $\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$。等式 (2) 仅在 $r = 5$ 时成立，而在 $r \geq 6$ 时则为严格不等式。

(iii) 因此可以看出，$\operatorname{codim} \mu(\mathcal{H})$ 可能并非决定 $\dim\ \mathcal{H} = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$ 或 $\dim\ \mathcal{H} > \mathcal{X}(d,\ g,\ r)$ 的唯一量。若存在的话，则需要找到涉及其他不变量或属性（例如环境射影空间的维数）的更精细上界 $\beta(g)$。

接下来我们给出一个希尔伯特概形 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 具有多个不同分支 $\mathcal{H}_{k,\ \delta} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 支配 $\mathcal{M}^1_{g,\ k}$ 的例子，使得

$$\dim \mathcal{H}_{k,\delta} > \mathcal{X}(d,g,r), \operatorname{codim} \mu(\mathcal{H}_{k,\delta}) \leq g - 2k + 2$$

对于 k's ($k \geq 4$)，在相对于 ($d,\ g,\ r$) 的某个范围内均成立。其主要思路如下

注 2.9。(i) 首先考虑一条一般的 k-次曲线，$k \geq 4$。然后从典范级数中减去 g^1_k 的若干倍（双倍），以得到一个非常丰沛的 $\mathcal{L} = |K_C - mg^1_k|$，如同我们在例 2.7 中所做的那样。
(ii) 然后，我们从 $C_{\mathcal{L}}$ 上的若干个 δ 一般点出发，对由 $\mathcal{L}$ 诱导的光滑曲线 $C_{\mathcal{L}}$ 进行连续投影。
(iii) 通过这种方式，我们得到一个支配 $\mathcal{M}^1_{g,\ k}$ 的不可约族（希望它是一个分支）$\mathcal{H}_{k,\ \delta}$，而 $\dim \mathcal{H}_{k,\ \delta}$ 足够大，超过了 $\mathcal{X}$（$d,\ g,\ r$）。

事实上，这个例子源于对特殊指标为 $\alpha = g - d + r = 3$ 的线性正规曲线的希尔伯特概形的研究，而当时并未特别强调或关注猜想 1.1；[19]。其主要关注点是低特殊指标线性正规曲线的希尔伯特概形的经典不可约性问题。然而，我们利用并提取了其中经过调整、适用于当前主题的结果，并将例子 2.7 推广。为方便读者，同时也为了最大限度地使本文内容自洽，我们重现其中的关键要素和步骤。

引理 2.10。[10, 命题 1。1] 假设 $\rho(k, g, 1) = 2k - g - 2 < 0$。设 C是亏格为 g、$k \geq 2$ 的一般 k-重覆盖曲线。假设

$$g \geq 2m + n(k-1) \tag{3}$$

对某些 $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$ 成立。并设 $D \in C_m$。假设不存在满足 $E \leq D.$ 的 $E \in g^1_k$。那么维数 $|ng^1_k + D| = n$。

引理 2.11。设 C 是一条亏格为 g 的一般 k-重覆盖曲线。我们假设

$$\rho(k, g, 1) < 0,\ k \geq 4, r \geq 3,\ \delta := g - r + 1 - 2k \geq 0,\ g \leq 2r + 2.$$

对于一般的 $\Delta \in C_\delta = C_{g-r+1-2k}$，完全线性级数

$$|K_C - 2g^1_k - \Delta| = g^{g-2k+1-\delta}_{2g-2-2k-\delta} = g^r_{g+r-3}$$

是非常丰的。

证明。设 g^1_k 是 C 上次数为 k 的唯一束。考虑所有从属于 g^1_k 的次数为 2 的有效因子所构成的循环，即

$$g^1_{k,2} := \{D \in C_2 : D \le E \text{ for some } E \in g^1_k\}.$$

Set

$$\Sigma := \{(\Delta, D) : \Delta \ge D\} \subset C_\delta \times g^1_{k,2},$$

并令 $\pi_1 : \Sigma \longrightarrow C_\delta$， $\pi_2 : \Sigma \longrightarrow g^1_{k,\,2}$ 为投影。对于 $D \in g^1_{k,\,2}$,

$$\pi_2^{-1}(D) \cong C_{\delta-2}, \quad \dim \Sigma = \dim \pi_2^{-1}(D) + \dim g^1_{k,2} = \delta - 1.$$

因此 $\pi_1(\Sigma) \subsetneq C_\delta$. 集合

$$\overset{o}{C}_\delta := C_\delta \setminus \pi_1(\Sigma) \tag{4}$$

并取

$$\Delta = r_1 + \cdots + r_\delta \in \overset{o}{C}_\delta$$

也就是说，没有一对 $\{r_i, r_j\}$ 位于从 $\mathbb{P}^1$到 k 重覆盖的唯一纤维上。对于任意选取的 $s + t \in C_2$，我们在引理 2.10 中取 $D = \Delta + s + t$、 $n = 2$ 和 $m = \delta + 2$。根据假设 $g \le 2r + 2$，可知引理 2.10 中的数值假设 (3)（$g \ge 2m + n(k-1)$）成立。根据我们对 Δ 的选取，对于任意 $E \in g^1_k$，都有 $\deg \gcd(D,\ E) \le 3$，因此只要 $k \ge 4$，就不存在满足 $E \le D$ 的 $E \in g^1_k$。因此我们有

$$\dim |2g^1_k + \Delta + s + t| = 2,$$

对于任意 $s + t \in C_2$，这意味着 $|K_C - 2g^1_k - \Delta|$ 是非常丰的。 □

下一个例子是对 [19, 定理 3.9] 的简化变体。

例 2.12。 [19, 定理 3.9]。固定一个三元组 $(d,\ g,\ r)$，使得 $g - d + r = 3$, $r \ge 5$ 并假设

$$r + 7 \le g \le 2r + 2.$$

Then

(i) 存在一个分支 $\mathcal{H}_{k,\,\delta} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{g+r-3,\ g,\ r}$，支配 $\mathcal{M}^1_{g,\ k}$，对于每一对 $(k,\ \delta)$, 满足

$$4 \le k \le \left[\frac{g - r + 1}{2}\right] \text{ and } \delta := g - r + 1 - 2k \ge 0. \tag{5}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_{k,\delta} &= 3g - 4 - r + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r) \\ &\ge 4g - 3r - 6 + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r) = \mathcal{X}(d, g, r), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\operatorname{codim} \mu(\mathcal{H}_{k,\delta}) = g + 2 - 2k \le g - 6. \tag{7}$$

(iii) 当且仅当 $g = 2r + 2$ 时，(6) 中的等号成立。

(iv) 满足 (5) 的配对 (k, δ) 的数量为

$$\left[\frac{g - r + 1}{2}\right] - 3 = \begin{cases} 1; & g = r + 7, (k, \delta) = (4, 0) \\ 1; & g = r + 8, (k, \delta) = (4, 1) \\ \ge 2; & r + 9 \le g \le 2r + 2. \end{cases}$$

证明。我们注意到

$$\lambda(d,g,r)=3g-3+\rho(d,g,r)=\lambda(g+r-3,g,r)=4g-3r-6.$$

根据条件 $g\geq r+7$,

$$2g-2-d=2g-2-(g+r-3)=g-r+1\geq 8.$$

对于满足 $g-r+1\geq 2k$ 的任意 $k\geq 4$，令 $\delta=g-r+1-2k\geq 0$。

我们考虑该设置的相对版本——即我们在引理 2.11 的证明开头所做的设置——其基底为变化的 k-重曲线。令 $_o\mathcal{M}\subset\mathcal{M}^1_{g,\ k}\subset\mathcal{M}_g$ 为无自同构的 k- 重 $_o$ $_o$ 曲线的不可约族。令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{M}$ 上的万有曲线，并令 $\mathcal{C}_\delta\subset\mathcal{C}_\delta$ 为开$_o$ $_o$ $_o$ $_o$子集，使得 $\mathcal{C}_\delta\longrightarrow\mathcal{M}$ 在 $C\in\mathcal{M}$ 上的纤维为 $C_\delta:=C_\delta\setminus\pi_1(\Sigma)$；参见 (4)。对于每个满足 (5) 的 $(k,\ \delta)$，考虑两个单射态射

$$\mathcal{G}^1_k\underset{\overset{o}{\mathcal{M}}}{\times}\overset{o}{\mathcal{C}}_\delta \quad\xrightarrow{\zeta}\quad \mathcal{G}^2_{2k+\delta}=\mathcal{G}^2_{g-r+1} \quad\xrightarrow{\kappa}\quad {\mathcal{G}^2_{g-r+1}}^\vee\subset\mathcal{G}^r_{g+r-3}$$

$$(g^1_k,\Delta) \quad\mapsto\quad |2g^1_k+\Delta| \quad\mapsto\quad |K_C-2g^1_k-\Delta|.$$

令 $\iota:=\kappa\circ\zeta$ 和

$$\mathcal{F}_{k,\delta}:=\iota(\mathcal{G}^1_k\underset{\overset{o}{\mathcal{M}}}{\times}\overset{o}{\mathcal{C}}_\delta)\subset\mathcal{G}^r_{g+r-3}$$

be ι的像。由假设 $g\leq 2r+2$，有如下不等式 ;

$$\begin{aligned}\lambda(g+r-3,g,r)=4g-3r-6&\leq\dim\mathcal{F}_{k,\delta}\\&=\dim\mathcal{G}^1_k\underset{\overset{o}{\mathcal{M}}}{\times}\overset{o}{\mathcal{C}}_\delta\\&=\dim\mathcal{G}^1_k+\delta\\&=3g-3+\rho(k,g,1)+\delta\\&=3g-3+(2k-g-2)+(g-r+1-2k)\\&=3g-4-r.\end{aligned}$$

不可约轨迹 $\mathcal{F}_{k,\delta}$ （支配 $\mathcal{M}^1_{g,k}$）中的每个元素都是非常丰的，由引理 2.11 可知。令 $\mathcal{G}$ 为一个分支，使得

$$\mathcal{F}_{k,\delta}\subset\mathcal{G}\subset\tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}}\subset\mathcal{G}^r_{g+r-3}.$$

我们证明 $\mathcal{F}_{k,\delta}$ 在 $\mathcal{G}$ 中稠密。为此，我们区分以下三种情形。

（a）一般 $\mathcal{D}\in\mathcal{G}$ 的余剩级数 $\mathcal{E}=g^2_{g-r+1}=\mathcal{D}^\vee$ 是双有理非常丰的：回想一下，${\mathcal{F}_{k,\delta}}^\vee$ 中的元素都是复合的，因此 $\mathcal{F}_{k,\delta}\subsetneq\mathcal{G}$。根据众所周知的维数估计，若某个 $\mathcal{G}^2_e$ 分支的一般点不是复合的 [3,，则由定理 10.1，第 845-846],页

$$\dim\mathcal{F}_{k,\delta}=3g-4-r\lneq\dim\mathcal{G}\leq 3(g-r+1)+g-9=4g-3r-6,$$

这与假设 $g\leq 2r+2$ 不相容。

(b) 假设一般 $\mathcal{D} \in \mathcal{G}$ 的余剩级数 $\mathcal{E} = g^2_{g-r+1} = \mathcal{D}^\vee$ 是复合的，并诱导一个 n 重覆盖 $C \xrightarrow{\pi} E$，映到亏格为 $h \geq 1$ 的非有理曲线E：令 $\mathcal{X}_{n,\ h} \subset \mathcal{M}_g$ 为赫尔维茨空间，它是由亏格为h的曲线的次数为 n 的分歧覆盖组成的 $\mathcal{M}_g$ 的闭子概形。已知 $\mathcal{X}_{n,\ h}$ 的纯维数为 $2g + (2n-3)(1-h) - 2$; 参见[3, 定理 8.23，第 828] 页。根据假设，存在一个有理映射 $\eta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^\vee \dashrightarrow \mathcal{X}_{n,\ h}$。回想 H. Martens 的一个定理 [13, 定理 5.16],

$$\dim W^r_d(C) \leq d - 2r - 1$$

对于任意亏格为 g 的非双曲线 C，若 $g - d + r \geq 2$。对于一般的$[C] \in \eta$（$\mathcal{G}$），

$$\dim \eta^{-1}([C]) \leq \dim G^r_{g+r-3}(C) = \dim W^r_{g+r-3}(C) \leq g - r - 4.$$

因此我们有

$$\begin{aligned} 3g - 4 - r = \dim \mathcal{F}_{k,\delta} \leq \dim \mathcal{G} &\leq \dim \mathcal{X}_{n,h} + \dim \eta^{-1}([C]) \\ &\leq (2g-2) + (g - r - 4) = 3g - 6 - r, \end{aligned}$$

矛盾。

（c）假设一般 $\mathcal{D} \in \mathcal{G}$ 的余剩级数 $\mathcal{E} = g^2_{g-r+1}$ 的动部分 $\mathcal{E}'$ 诱导到一条有理曲线的多重覆盖。令 $C \xrightarrow{\eta} E \subset \mathbb{P}^2$ 为由 $\mathcal{E}'$ 诱导的态射，次数为 $\deg \eta = k$。设

$$\Psi := \mathrm{Bs}(\mathcal{E}), \quad \psi := \deg \Psi \quad \& \quad \mathcal{E}' := |\mathcal{E} - \Psi|.$$

注意，$\mathcal{E}'$ 是完备网（因为 $\mathcal{E}$ 是），$\mathcal{E}' = \eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \eta^*(\mathcal{O}_E(1))$，因此

$$\deg E = 2, \quad \deg \mathcal{E}' = (g - r + 1) - \psi = 2k.$$

因此，一般 $\mathcal{D} \in \mathcal{G}$ 的余剩级数 $\mathcal{E} = \mathcal{D}^\vee$ 具有如下形式

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}' + \Psi| = |2g^1_k + \Psi|,$$

其中 $g^1_k = |\eta^*(p)|$, $p \in E$。因此

$$\mathcal{D} = |K_C - 2g^1_k - \Psi| \text{ for some } 3 \leq k \leq \left[\frac{g-r+1}{2}\right].$$

如果 $k = 3$是三次覆盖的，C, $\mathcal{E} = |2g^1_3 + \Psi|$, $\Psi \neq \emptyset$。然而，根据引理 2.6(ii), 这不会发生。

结论： (i) 我们推得不可约轨迹

$$\mathcal{F}_{k,\delta} = (2\mathcal{G}^1_k + \overset{o}{\mathcal{C}}_\delta)^\vee$$

$\tilde{}$确实在一个分支 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$中稠密，这产生了一个维数为$\mathcal{H}_{k,\ \delta} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{g+r-3}$ 的分支

$$\dim \mathcal{M}^1_{g,k} + \delta + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r) = 3g - 4 - r + \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$$

不可约轨迹上的一个自同构群($\mathbb{P}^r$)-丛$\mathcal{F}_{k,\ \delta}$;

$$\mathcal{H}_{k,\delta} \dashrightarrow \mathcal{F}_{k,\delta} \dashrightarrow \mathcal{M}^1_{g,k} \subset \mathcal{M}_g.$$

异常维数曲线的希尔伯特概形，模数为 13

(ii) 论证 (a)、(b)、(c)并未断言分支$\mathcal{H}_{k,\ \delta} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{g+r-3} 4 \leq k \leq [\frac{g-r+1}{2}]$ 是 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{g+r-3}$的全部分支$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{g+r-3,\ g,\ r}$。可能还存在其他不同于 $\mathcal{H}_{k,\ \delta}$ 的分支。□

3. 模数少于预期的分支

希尔伯特概形中具有预期模数的分支这一概念最早由 Sernesi 在 [24] 中提出，他在那里确定了一大类三元组（$d,\ g,\ r$），使得 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 具有一个 $\mathcal{H}$ 模数符合预期的分支，即

$$\dim \mu(\mathcal{H}) = 3g - 3 + \rho(d, g, r).$$

A. Lopez 等人的研究沿着这一方向推进了对希尔伯特概形的研究；参见 [22], [23] 及其中的参考文献。不用说，许多希尔伯特概形都具有模数多于预期的分支。然而，正如 [24,第 53 页第一段], [23, 第 3467 页引言末尾], 所指出的，对于从事这一领域研究的人来说，希尔伯特概形中存在模数严格少于预期的分支这一事实尚未得到足够广泛的认知，并且在文献中也未曾在我们主要关注的语境下明确出现；模数 $= \dim \mu(\mathcal{H})$。我们展示了若干具有模数少于预期的分支的希尔伯特概形例子，这些例子主要基于前几节中的讨论。

3.1. 具有模数少于预期数量的分支的希尔伯特概形

我们举出以下可约希尔伯特概形的例子，其中的分支具有少于预期的模数。我们沿用上一节中的记号。

例 3.1. (i) 对于 $(d,\ g,\ r) = (17,\ 14,\ 6)$, $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 有一个模数少于预期的分支，其占优于 $\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$。

(ii) 对于 $(d,\ g,\ r) = (31,\ 21,\ 13)$, $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 有一个模数少于预期的分支，占优于 Hurwitz 概形的一个分支 $\mathcal{X}_{2,\ 3} \subset \mathcal{M}_g$。

(iii) Let $(d, g, r) = (3r - 1, 2r + 2, r), r \geq 7, r \equiv 1 \pmod 2$.

(iii-a) 对于每个满足以下条件的 $(k,\ \delta)$

$$4 \leq k \lneqq \frac{r+3}{2} \quad \& \quad \delta = g - r + 1 - 2k > 0,$$

$\mathcal{H}_{k,\ \delta}$ 的模数少于预期数量。

(iii-b) 对于 $(k, \delta) = (\frac{r+3}{2}, 0)$, $\mathcal{H}_{k,0}$ 具有预期模数。

(iv) 对于 $(d,\ g,\ r) = (3r-1,\ 2r+2,\ r)$ $r \geq 8,\ r \equiv 0$（模 2），$\mathcal{H}_{k,\ \delta}$ 对于所有满足以下条件的 $(k,\ \delta)$，其模数少于预期模数：

$$4 \leq k \lneqq \frac{r+3}{2} \quad \& \quad \delta = g - r + 1 - 2k > 0.$$

证明。 (i) 我们在例 2.12 中考察 $(d,\ g,\ r) = (2r+5,\ r+8,\ r)$ $r = 6$、$(k,\ \delta) = (4,\ 1)$。令$\mathcal{H}_{4,\ 1}$ 为支配 $\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$ 的分支。我们有

$$\dim \mu(\mathcal{H}_{4,1}) = \dim \mathcal{M}^1_{g,4} = 2g+3 = 31 < 3g-3+\rho(d,g,r) = 32.$$

~(ii) 对于 $(d,\ g,\ r) = (31,\ 21,\ 13)$，令 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}^r_d$为一个分支。我们考虑$\mathcal{F} := \mathcal{G}^\vee \subset \mathcal{G}^2_{9}$。以下情况是可能的。

(1) 一般的 $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ 无基点且双有理非常丰。不可约族 $\mathcal{F}$ 对应于塞韦里簇$\Sigma_{9,\ \zeta}$，它参数化具有 $\zeta = 7$ 个节点奇点的九次平面曲线，

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{F} &= \dim \Sigma_{9,\zeta} - \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)\\ &= \dim \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(9))) - \zeta - \dim \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)\\ &= 3g-3+\rho(d,g,r) = 39.\end{aligned}$$

令 $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$ 为 $\mathcal{G}$上的分支。我们有

$$\dim \mu(\mathcal{H}) = \dim \mathcal{F} = 3g-3+\rho(d,g,r)$$

并且 $\mathcal{H}$ 是一个具有预期模数的分支。

(2) 一般的 $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ 无基点，且为复合的，诱导出 $C \xrightarrow{\eta} E \subset \mathbb{P}^2$,$\eta$次 $E = 3$，E 为椭圆曲线。在椭圆曲线的三重覆盖 $C \longrightarrow E$ 上，$|K_C - \eta^*(K_E)|$ 非常丰；否则存在 $p+q \in C_2$ 使得$|\eta^*(K_E) + p + q| = g^3_{11}$，它无基点且双有理非常丰，因此 $\pi(11,\ 3) \leq 20$，矛盾。因此

$$C \in \mathcal{X}_{3,1},\ \dim \mathcal{G} \geq \dim \mathcal{X}_{3,1} = 2g-2 = 40 > \lambda(d,g,r) = 39.$$

这个不可约族的模数多于预期。

(3) 一般的 $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ 有非空基点集 Δ，次数为 $\deg \Delta = 1$。$|\mathcal{E} - \Delta|$诱导出 $C \longrightarrow F \subset \mathbb{P}^2$，次数为 $\deg F = 4$，F 是亏格为 $h = 3$ 的光滑曲线。我们断言 $|K_C - \pi^*(K_F) - \Delta|$ 是非常丰的：由于 $|K_C - \pi^*(K_F)|$ 是非常丰的，由命题 4.4], $\dim |\pi^*(K_F) + p + q| = \dim |\pi^*(K_F)| = 2$ 对任意 $p+q \in C_2$ 均成立。假设 $\dim |\pi^*(K_F) + p + q + \Delta| \geq 3$。那么$|\pi^*(K_F) + p + q + \Delta| = g^3_{11}$ 无基点且双有理非常丰，$g \leq \pi(11,\ 3) = 20$ 由此得到所述结论。因此

$$\dim \mu(\mathcal{G}) = \dim \mathcal{X}_{2,3} = 2g-4 < \lambda(d,g,r) = 39,$$

而且这个不可约族的模数少于预期。

(4) 一般的 $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$有非空基点集 Δ，次数为 $\Delta = 1$，$|\mathcal{E} - \Delta|$ 诱导$C \longrightarrow F \subset \mathbb{P}^2$，次数为 $F = 2$，F是有理的，C 是 4-重合基。这是例 2.12 (iv) 中的情形；$g = r+8$，$(k,\ \delta) = (4,\ 1)$。我们有

$$\dim \mu(\mathcal{G}) = 2g+3 > \lambda(d,g,r) = 39,$$

因此，这个族的模数多于预期模数。

(5) 一般的 $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ 具有非空基点集 Δ，$\deg \Delta \geq 2$。根据引理 2.6，这是不可能的。

~为结束我们的讨论，我们将上文 (1)–(4) 中得到的不可约族分别记为 $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}_{d,g,r}$，（分别对应 $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_d^r$） $i = 1,2,3,4$。我们证明这些族在其所属的分支中稠密。

(1) 一般的 $C \in \mathcal{H}_1$ 是 7-重合基；$C^\vee \in \Sigma_{9,\ \zeta}$ 由通过一个节点的直线截出 g_7^1，根据 [9]，我们有

$$\text{gon}(C) = \text{gon}(C^\vee) = 7,\ \dim \mu(\mathcal{H}_1) = \lambda(d,\ g,\ r),\ \dim(\mathcal{H}_1) = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)。$$

(2) 一般的 $C \in \mathcal{H}_2$ 是 6-重合基；$[C] \in \mathcal{X}_{3,\ 1}$ 由 Castelnuvo-Severi不等式可知，带有 $g_6^1 = \eta^*(g_2^1)$ 的曲线是 6-重合基。

$$\text{gon}(C) = 6,\ \dim \mu(\mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{X}_{3,\ 1} = 40 > \lambda(d,\ g,\ r),\ \dim \mathcal{H}_2 > \mathcal{X}(d,\ g,\ r).$$

(3) 一般的 $C \in \mathcal{H}_3$ 具有 $g_6^1 = \eta^*(g_3^1)$，根据 Castelnuovo-Severi不等式是 6-重合基，

$$\text{冈性}(C) = 6,\ \text{维数}\ \mu(\mathcal{H}_3) = \text{维数}\ \mathcal{X}_{2,\ 3} = 38 < \lambda(d,\ g,\ r),\ \text{维数}\ \mathcal{H}_3 = \mathcal{X}(d,\ g,\ r)。$$

(4) 一般的 $C \in \mathcal{H}_4$ 是 4-重合基，

$$\dim \mu(\mathcal{H}_4) = \dim \mathcal{M}_{g,4}^1 = 45 > \lambda(d,g,r), \dim \mathcal{H}_4 > \mathcal{X}(d,g,r).$$

我们有

$$\text{gon}(C_1) > \text{gon}(C_2) = \text{gon}(C_3) > \text{gon}(C_4)$$

而

$$\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_3 < \dim \mathcal{H}_2 < \dim \mathcal{H}_4.$$

By 冈性的下半连续性以及显然的维数理由，

$\mathcal{H}_1$ 不在 $\mathcal{H}_2$，$\mathcal{H}_3$，$\mathcal{H}_4$的边界上，$\mathcal{H}_2$ 不在 $\mathcal{H}_3$，$\mathcal{H}_4$的边界上，$\mathcal{H}_3$ 不在 $\mathcal{H}_4$的边界上。

最后我们断言，$\mathcal{H}_3$ 不属于 $\mathcal{H}_2$的边界。为此，我们指出，k_1次覆盖亏格为 h_1 的曲线的任何光滑极限，都必须是某个亏格为 h_2 、次数为 k_2的曲线覆盖，其中 $k_2 \leq k_1$ 和 $h_2 \leq h_1$满足相应条件；根据容许覆盖理论，当分支覆盖退化时，可以保持分支点彼此分离，同时允许定义域曲线/目标曲线变为节点曲线。在此过程中，（算术）亏格保持不变，但定义域曲线/目标曲线可能变为可约的，而每个不可约分支的亏格可能更小，限制在某个分支上的覆盖次数也可能变小；参见 [15, 3G]和 [16]。至此，断言得证。

(iii)、(iv)：回顾，对于$(d,\ g,\ r) = (3r-1,\ 2r+2,\ r)$，$\lambda(d,\ g,\ r) = 5r+2$&

$$\dim \mu(\mathcal{H}_{k,\delta}) = \dim \mathcal{M}_{g,k}^1 = 2g + 5 - 2k = 4r - 1 + 2k;$$

参见（7）。因此

$$\dim \mu(\mathcal{H}_{k,\delta}) < \lambda(d,g,r)$$

当且仅当

$$4 \leq k \lneq \frac{r+3}{2} \quad \& \quad \begin{cases} r \geq 7, & r \equiv 1 \pmod 2 \\ r \geq 8, & r \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

□

注释 3.2. (i) 作者认为，还存在其他希尔伯特概形的例子，它们具有一个模数少于预期模数的分支。

（ii）本节给出的例子基于以下内容:
（a）我们首先将希尔伯特概形与一个分支对应起来$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r}$, $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}_g$ ，使得不可约族 $\mathcal{G}^{\vee} \subset \mathcal{G}^{g-d+r-1}_{2g-2-d}$ 由复合线性级数组成。（b）接着，我们考察成员 $\mathcal{E} \in \mathcal{G}^{\vee}$ 是否允许具有非空基点集 Δ, $|\mathcal{E}'| = |\mathcal{E} - \Delta|$, 然后将基点集 Δ 的次数尽可能增大，使得 $|K_C - \mathcal{E}| = |K_C - \mathcal{E}' - \Delta|$ 仍然非常丰。（c）这样一来， $\mathcal{G}^{\vee}$ （因而 $\mathcal{G}$）支配 $\mathcal{M}_g$中的一个不可约轨迹，该轨迹构成一个维数相对较小的不可约族，其中包含由$\mathcal{E} \in \mathcal{G}^{\vee}$的无基点部分 $\mathcal{E}'$ 所诱导的曲线类。（d）另一方面，由于存在次数为正的基点集， $\mathcal{G}^{\vee}$ 足以构成一个分支，但其模数较少，因此 $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}_g$也同样如此。

注记 3.3。(i) 存在若干不可约或可约的希尔伯特概形$\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 其中所有分支的模数都多于预期。这类例子并不少见，例如 Castelnuovo 曲线的希尔伯特概形 [8] 或 [6, 命题 5.1]。

(ii) 也存在可约的希尔伯特概形 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ 其所有分支的模数都达到预期，例如 $\mathcal{H}_{9,\ 10,\ 3}$ 以及许多其他例子。
(iii) 此外，还存在部分混合型的可约希尔伯特概形 $\mathcal{H}_{d,\ g,\ r}$ ，即有些分支的模数达到预期，而另一些分支的模数多于预期。例如，$\mathcal{H}_{d,\ g,\ r} = \mathcal{H}_{32,\ 21,\ 14}$至少有三个分支 $\mathcal{H}_i$， $i = 1$，2，3，满足:

(1) $\mathcal{H}_1$ 是次数为 8 的光滑平面曲线族，通过 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$(4) 嵌入 $\mathbb{P}^{14}$。 $\mathcal{H}_1$ 的模数达到预期。(2) 存在一个分支 $\mathcal{H}_2$ 支配 Hurwitz 概形的一个分支 $\mathcal{X}_{2,\ 3}$, 它通过 $|K_C - \pi^*(K_E)|$嵌入 $\mathbb{P}^{14}$ ，其中 $C \overset{\pi}{\longrightarrow} E$, $\deg \pi = 2$, genus$(E) = 3$。 $\mathcal{H}_2$ 的模数多于预期。(3) 存在一个分支 $\mathcal{H}_3$ 支配$\mathcal{M}^1_{g,\ 4}$。 $\mathcal{H}_3$ 的模数多于预期。(4) 这是我们在例 2.7 中遇到的那个$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{2r+4,\ r+7,\ r}$ （$r = 14$ 情形）。我们刚刚又添加了一个由次数为 8 的光滑平面曲线组成的分支，这些曲线嵌入在 $\mathbb{P}^{14}$ 中。

（iv）在例 3.1（ii）中，我们展示了一个典型的可约的希尔伯特概形 $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{d,\ g,\ r} = \mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{31,\ 21,\ 13}$ carrying

一个具有少于预期模数的分支，以及一个具有预期模数，再加上一个具有多于预期模数的分支。

问题 3.4。 (i) 据作者所知，所有存在分支的希尔伯特概形 $\mathcal{H}_{d,g,r}$ ，其该分支的模数少于预期模数，$\mathcal{H}_{d,g,r}$ 也存在一个模数不少于预期模数的分支

P预期模数个数】【e

(ii) 若存在一个希尔伯特概形 $\mathcal{H}_{d,g,r}$ （不可约或可约），使得所有 分支的模数都少于预期模数，那将很值得探究。

参考文献

[1] E. Arbarello 和 M. Cornalba, *A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus.* Ann. Sei. ´Ecole Norm. Sup. (4) **16** (1983), 467–483。[2] E. Arbarello、M. Cornalba、P. Griffiths 和 J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves Vol.I.* 1985 施普林格出版社，柏林/海德堡/纽约/东京，。[3] E. Arbarello、M. Cornalba、P. Griffiths 和 J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves Vol.II.* 2011 Springer，。[4] E. Ballico、C. Fontanari 和 C. Keem, *On the Hilbert scheme of linearly normal curves in $\mathbb{P}^r$ of relatively high degree.* **224** J. Pure Appl. Algebra (2020), no. 3, 1115–1123。[5] E. Ballico、C. Keem, *Hilbert scheme and Hilbert functions of smooth curves of degrees at most* 15 *in* $\mathbb{P}^5$. 预印本，见 http://arxiv.org/abs/2310.00682。[6] E. Ballico、C. Keem, *On the Hilbert scheme of smooth curves of degree* 15 *in* $\mathbb{P}^5$. Proc. R. Soc. Edinb. A: Math. 即将在 出版，见 http://arxiv.org/abs/2310.00682。[7] K. Cho、C. Keem 和 S. Park, *On the Hilbert scheme of trigonal curves and nearly extremal curves.* **55** 2001 1, 1 12 Kyushu J. Math. ( ), no. –。[8] C. Ciliberto, *On the Hilbert Scheme of Curves of Maximal Genus in a Projective Space.* **194** 1987 451 463 Mathematische Zeitschrift ( ), –。[9] M. Coppens, *The gonality of general smooth curves with a prescribed plane nodal model.* **289** 1991 89 93 Math. Ann. ( ), –。[10] M. Coppens、C. Keem 和 G. Martens, *The primitive length of a general k-gonal curve.* **5** 1994 2, 145 159 Indag. Math. (N.S.), ( ), no. –。[11] C. Ciliberto 和 E. Sernesi, *Families of varieties and the Hilbert scheme.* 《黎曼曲面讲义》（的里雅斯特，1987），428-499，World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989[12] J. Harris, *Brill-Noether theory.* Surveys in Differential Geometry **14**(2009), 131–144; https://dx.doi.org/10.4310/SDG.2009.v14.n1.a5[13] D. Eisenbud 和 J. Harris, *The Practice of Algebraic Curves A Second Course in Algebraic Geometry.*，美国数学会，250, 2024 GSM。

[14] J. Harris, *Curves in Projective space.* 载于“Sem.Math.Sup.”, Press Univ. Montr´eal, Montr´eal, 1982。[15] J. Harris 和 I. Morrison, *Moduli of curves.* 施普林格出版社，柏林/海德堡/纽约，1991。[16] J. Harris 和 D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves* **67** 1982 23 88 。Invent. Math., ( ), –[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* 施普林格出版社，柏林/海德堡/纽约，1977。[18] C. Keem, *Reductive Hilbert scheme of smooth curves with positive Brill-Noether number.* **122** 1994 2, 349 354 Proc. Amer. Math. Soc. ( ), no. – [19] C. Keem, *Existence and the reducibility of the Hilbert scheme of linearly normal curves in $\mathbb{P}^r$ of relatively high degrees.* **227** 2023 J. Pure Appl. Algebra ( ), 1115–1123, 见 https://arxiv.org/abs/2101.00559。[20] C. Keem 和 G. Martens *Curves without plane model of small degree.*Math. Nachr. **281** (2008), no. 12, 1791 – 1798。[21] C. Keem、Y.-H. Kim 和 A.F. Lopez, *Irreducibility and components rigid in moduli of the Hilbert Scheme of smooth curves.* **292** 2019 3 Math. Z., ( ), no. -4, 1207-1222。[22] A. Lopez, *On the existence of components of the Hilbert scheme with the expected number of moduli.* **289** 1991 517 528 Math. Ann., ( ), - 。[23] A. Lopez, *On the existence of components of the Hilbert scheme with the expected number of moduli II.* **27** 7 COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, ( ) (1999), 3485-3493。[24] E. Sernesi, *On the existence of certain families of curves.* Invent. Math., **75** (1984), no. 1, 25–57。[25] F. Severi, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann.* **241** 1915 877 888 Rend. R. Acc. Naz. Lincei, ( ), – 。[26] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie.* 托伊布纳出版社，莱比锡，1921。

Changho Keem 首尔国立大学数学系，韩国首尔
151-742 电子邮箱：ckeem@snu.ac.kr &
ckeem1@gmail.com