arXiv:2601.02247v1 [math.AT] 5 Jan 2026

带球面对的单连通复形的同伦

RUIZHI HUANG

Abstract. 我们为某些带有单个顶胞腔、且存在球面对的 CW复形建立了环空间分解，从而推广了若干已知的庞加莱对偶复形的分解；在这些分解中，某个球面乘积的环空间作为直和项出现。

我们进一步应用这一分解，推导出关于局部双曲性、惰性与非惰性、有理惰性与局部或整惰性之间差距，以及带有横截嵌入球面的光滑流形的同伦论的结果。

特别地，在每个大于三的维数中，都存在无穷多个有限的 CW复形，它们两两非同伦等价；这些复形的环空间在有理意义下可从其低维骨架的环空间中收缩出来，但在局部意义下不能，并且它们的顶胞腔附着产生无穷多个新的挠同伦群，其秩呈指数增长。

1. Introduction

通过上同调数据研究 CW-复形的同伦论，是代数拓扑中的一个经典问题。特别是，近年来人们在理解庞加莱对偶复形的同伦论方面取得了重大进展。例如，Beben-Theriault [BT14] 和 Sa. Basu-So. Basu [BB18], 研究了 $(n-1)$-连通 $2n$维流形的环空间分解，而 Beben-Wu[BW15], 、Basu [Bas19], 、Beben-Theriault [BT22], 和 Huang-Theriault [HT22]则研究了 $(n-1)$-连通 $(2n+1)$-流形的环空间分解。此外，Huang [Hua23], 分析了特定的 6维流形，Stanton-Theriault [ST25] 则在合理条件下，为庞加莱对偶复形建立了统一的环空间分解。

从同伦论的角度来看，许多已知的庞加莱对偶复形的环空间分解案例，都源于一对良好的上同调类，它们彼此庞加莱对偶。这一对上同调类通常可以实现为球面的扭曲积或非扭曲积；该积在取环路后可收缩到庞加莱对偶复形中。从几何拓扑的角度来看，段海豹基于 Huang [Hua24]的一个结果，提出通过两个嵌入球面的交来研究光滑流形的同伦论。

本文在更广泛的背景下发展这些思想，并为更一般的 CW-复形建立新的环空间分解。具体而言，我们证明了在存在球面对的情况下，所谓的封顶复形具有环空间分解，并将其应用于获得一种环空间

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 55Q52、55P35，次要分类号 55P62；57N65；*Key words and phrases.* 同伦群、环空间、双曲的、惰性映射。

分解，适用于具有两个横截嵌入球面的流形。此外，我们利用这些环空间分解推导出关于局部双曲性、惰性与非惰性的结果，并探讨有理惰性与局部惰性或整惰性之间的差距。

为介绍主要结果，我们先引入必要的概念和约定。若一个单连通的 n 维 CW-复形 Y 有一个 n-胞腔，且满足 $H_n(Y;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，或者等价地，存在一个同伦余纤维化 $S^{n-1} \xrightarrow{g} Y \longrightarrow Y$，其中 Y表示 Y 的 $(n-1)$-骨架，且粘接映射 g 在同调中诱导平凡同态，则称其为封顶复形。对于封顶复形 Y，$H_n(Y;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的一个生成元称为 Y 的基本类，记作 $[Y]$。注意，若一个单连通有限维 CW-复形的最高非平凡同调群同构于无限循环群，则它与某个封顶复形同伦等价。特别地，每个单连通 Poincar´e 对偶复形都与某个封顶复形同伦等价。

对于带基点空间 A 和 B，右半 *smash* 积定义为商空间 $A \rtimes B = (A \times B)/(\{*\} \times B)$。*Moore* 空间 $P^n(k)$定义为球面 S^{n-1}上的度为 k 的自映射的同伦余纤维。注意，当 $k = \pm 1$时，$P^n(k)$是可缩的；而当$k = 0$时，$P^n(k) \simeq S^{n-1} \vee S^n$。用 $[i_1, i_2]$ 表示典范包含映射 $S^m \xrightarrow{i_1} S^m \vee S^{n-m}$ 和$S^{n-m} \xrightarrow{i_2} S^m \vee S^{n-m}$的怀特海德积。已知怀特海德积 $[i_1, i_2]$ 能够检测出 $S^m \times S^{n-m}$ 的一对互为庞加莱对偶的上同调类。

定理 1.1. 设 X 是由一个同伦余纤维序列确定的 n维单连通封顶复形

$$S^{n-1} \xrightarrow{k\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X$$

对于空间 C、$k \in \mathbb{Z}$ 和 $2 \le m \le n-2$。假设映射 $\mathfrak{g}$ 在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量为怀特海德积 $[i_1, i_2]$。那么存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X \longrightarrow S^m \times S^{n-m},$$

取环路后该纤维化分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

这个环空间分解还满足自然性，详见注2.10。定理 1.1 可视为对若干已知分解结果的推广，这些结果涉及具有一对良好上同调类且可实现为球面的扭曲积或非扭曲积的庞加莱˙对偶复形 [BT14、BW15、BT22], ；此外，它还可通过嵌入球面的交用于流形同伦论的研究，见下文定理1.7 。

从同伦论视角来看，定理1.1 的一个显著特点是出现了直和项 $P^n(k)$，它对 X的同伦有所贡献，而这并非直接源自

低维骨架 X 的胞腔结构。这一额外部分带来了显著的应用，包括关于 X 的同伦群中挠元的结果，以及对下文将讨论的非惯性性质的研究。

关于同伦群中挠元的渐近行为，Huang-Wu [HW20] 在有理同伦论中引入了局部双曲性的概念，作为有理双曲性的局部类似结果[FHT09]。给定一个素数 p和一个正整数 r，若空间 Y 中 $\pi_*(Y)$ 的 $\mathbb{Z}/p^r$直和项数量呈指数增长，则称该空间为 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲的。此后，Huang-Wu [HW20], 、Zhu-Pan [ZP21], 、Boyde [Boy22, Boy24], 、Huang-Theriault [HT24],以及 Boyde-Huang [BH24]对这一概念进行了广泛研究。这里，定理 1.1 可用于证明以下关于局部双曲性的结果。

定理 1.2. 设 X 为定理*1.1*中的封顶复形。以下结论成立：

- 若 $k = 0$，则 X 是有理双曲的，并且对所有素数 p 及所有$r \geq 1$，都是 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲的；
- 若 $k \neq 0$，则对所有满足 $p^r \mid k$的奇素数 p， X 都是 $\mathbb{Z}/p^r$-和 $\mathbb{Z}/p^{r+1}$-双曲的；
- 若 $k \neq 0$ 且 $4 \mid k$，则对所有 $2^r \mid k$， X 都是 $\mathbb{Z}/2^r$-和 $\mathbb{Z}/2^{r+1}$-双曲的；
- 若 $k \neq 0$ 且 $2 \mid k$ 但 $4 \nmid k$，则 X 是 $\mathbb{Z}/2$-、 $\mathbb{Z}/4$-和 $\mathbb{Z}/8$-双曲的。

除了双曲性结果之外，还可以确立关于 X 的同伦群的更强结论。在引理4.8中，我们证明，当 $k \neq \pm 1$时，由 $\pi_*(S^m \vee S^{n-m} \vee C) \longrightarrow \pi_*(X)$ 所诱导的同态（该同态由$n-1$-骨架的包含映射诱导）中，分次余核里的挠子项数量呈指数增长。特别地， X 的顶胞腔附加会产生无穷多个新的挠同伦群，其秩呈指数增长，从而引出对后续非惯性性质的讨论。

定理 1.1 可用于研究所谓的惰性性质。设 $A \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\varphi} Y$ 是一个同伦余纤维化。映射 h 称为 惯性的，如果 $\Omega\varphi$ 具有一个右同伦逆。有理惰性由 F´elix-Halperin-Thomas [FHT82] 引入，并在有理同伦论的背景下得到了广泛研究。例如，Halperin 和 Lemaire 的一个重要结果[HL87] 表明，任意庞加莱´对偶性复形的顶胞腔的粘接映射都是有理惰性的，除非其有理上同调代数由单个元素生成。相比之下，局部惰性和整惰性直到后来才在不稳定同伦论的背景下得到研究[BT22、Hua24、The24a、The24b]。

然而，相较之下，关于非惰性，以及有理惰性与局部惰性或整惰性之间差距的研究相对较少。接下来的定理将从这些方向提供新的见解。

定理 1.3. 设 X 是定理 *1.1*中的封顶复形。那么， X 的顶胞腔粘接映射是惯性的，当且仅当 $k = \pm 1$。

定理 1.3中的惰性部分可用于计算 X的环空间代数。设R是一个含单位元的交换环。记 $T(-;R)$ 为 R上的自由张量代数函子。对于分次 R-模 V，记 $\Sigma^{-1}V$ 为将 R的每个元素的度V 下移一度后得到的分次

定理 1.4。 设 X 为定理 *1.1* 中满足 $k=\pm 1$ 且 C 为余H空间的封顶复形。~设 $S^{n-2}\xrightarrow{\mathfrak{g}}\Omega(S^m\vee S^{n-m}\vee C)$ 为 $\mathfrak{g}$的伴随映射。则对于任意带单位元的交换环 R，若 $H_*(C;R)$ 是自由的 R-模，则存在代数同构

$$H_*(\Omega X;R)\cong T(\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(S^m\vee S^{n-m}\vee C);R)/(Im\ (\widetilde{\mathfrak{g}}_*)),$$

其中，$(Im(\widetilde{\mathfrak{g}}_*))$ 是由 $Im\ (\widetilde{\mathfrak{g}}_*)$生成的双边理想。此外，若 C 是余H-空间的悬挂，则这是 *Hopf* 代数的同构。

定理 1.3 的非惰性部分可用于构造显式例子，以说明有理惰性与局部惰性或整惰性之间的差异。

定理 1.5。 在每个大于三的维数中，都存在无穷多个有限封顶复形；它们两两非同伦等价，其顶维胞腔附着映射是有理惰性的，但不是整惰性的。

此外，在每个大于三的维数下，对每个素数 p，都存在无穷多个有限封顶复形，它们两两非同伦等价，其顶胞腔附着映射是有理惰性的，但在 p 处并非局部惰性。

此外，根据注5.5，为定理1.5 构造的例子可以选为既有理双曲又局部双曲，并且其顶胞腔附着会产生无穷多个新的挠同伦群，这些群的秩呈指数增长。

我们指出，为定理 1.5 构造的所有例子都不是庞加莱 $^{\prime}$对偶复形。一个仍待解决且颇有趣的开放问题是：所有庞加莱 $^{\prime}$对偶复形的顶胞腔附着是否都是整惰性的；其上有理上同调代数由单个元素生成的情形除外。

我们还建立了定理 1.1的一个局部类似结果。受该定理中的假设以及交叉理论背景的共同启发，我们引入球面对的概念。对于一个空间 X，一对上同调类（a，b）$\in H^m$（X；$\mathbb{Z}$）$\times H^{n-m}$（X；$\mathbb{Z}$）称为球面对，若 $a^2=0$ 且 $b^2=0\in H^*$（X；$\mathbb{Z}$），并且存在映射

$$s_1:S^m\longrightarrow X\quad\text{and}\quad s_2:S^{n-m}\longrightarrow X$$

使得 $s_1^*(a)$ 和 $s_2^*(b)$ 分别是 $H^m(S^m;\mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m};\mathbb{Z})$ 的生成元。

定理 1.6. 设 X 是一个 n 维单连通封顶复形，其 $(n-1)$-骨架是一个余-H-空间。假设 $(a,b)\in H^m(X;\mathbb{Z})\times H^{n-m}(X;\mathbb{Z})$ 且 $2\le m\le n-2$ 是

一个由 X 构成的球面对，使得 $\langle a\cup b、[X]\rangle\neq 0$，并且 X 的顶胞腔的粘接映射可被 $k\in\mathbb{Z}$ 整除。则 $k\mid\langle a\cup b、[X]\rangle$，并且在远离任意满足 $2p<\max(m,n-m)+4$ 或 $p\mid {}^{\langle a\cup b}{}_{,k}{}^{[X]\rangle}$ 的素数 p 进行局部化后，以下结论成立：

- 存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1}\longrightarrow S^m\vee S^{n-m}\vee C\longrightarrow X$$

  对于维数小于 n 的单连通空间 C；

- 存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k)\vee C)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\longrightarrow X\longrightarrow S^m\times S^{n-m};$$

- 该同伦纤维化在取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X\simeq\Omega(S^m\times S^{n-m})\times\Omega\big((P^n(k)\vee C)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\big).$$

在交叉理论的背景下，定理 1.6 的一个几何类比可以表述如下。对于任意同调类 $x\in H_*(Y)$, 记 $x^*\in H^*(Y$为其克罗内克对偶。

定理 1.7. 设 M 是一个 n 维单连通闭光滑流形，其$(n-1)$骨架是一个余-H-空间。假设存在两个横截嵌入球面

$$s_1:S^m\longrightarrow M\quad\text{and}\quad s_2:S^{n-m}\longrightarrow M$$

满足 $2\leq m\leq n-2$。记为 $a=(s_{1*}([S^m]))^*$ 和 $b=(s_{2*}([S^{n-m}]))^*$。假设 $a^2=0$、$b^2=0$，且 $\langle a\cup b、[M]\rangle\neq 0$。那么，对任意满足 $2p<\max(m,n-m)+4$ 或 $p\mid\langle a\cup b、[M]\rangle$ 的素数 p 进行局部化后，以下结论成立：

- 存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1}\longrightarrow S^m\vee S^{n-m}\vee C\longrightarrow M$$

  对于维数小于 $n-1$ 的单连通空间 C；

- 存在一个同伦纤维化

$$C\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\longrightarrow M\longrightarrow S^m\times S^{n-m};$$

- 该同伦纤维化在取环路后分裂，从而给出一个同伦等价

$$\Omega M\simeq\Omega(S^m\times S^{n-m})\times\Omega\big(C\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\big).$$

更一般地，设 M 是一个 n 维的单连通庞加莱对偶复形，并有一个同伦余纤维化

$$S^{n-1}\xrightarrow{\mathfrak{g}}\overline{M}\longrightarrow M.$$

对于任意 $k\in\mathbb{Z}$，我们可以通过以下同伦余纤维化定义一个空间 $X_{M,\,k}$

$$S^{n-1}\xrightarrow{k\mathfrak{g}}\overline{M}\longrightarrow X_{M,k}.$$

定理 1.6 可用于证明以下关于高度连通 $X_{M,\ k}$ 的环空间分解定理。

定理 1.8. 设 M 是一个维数为 $n \leq 3l-2$且满足 $l \geq 3$的 $l-1$(M 连通 *Poincar´e* 对偶复形。记

$$H_i(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus d_i} \oplus T_i,$$

其中 $d_i \geq 0$且 T_i是有限阿贝尔群。假设存在 $(a,b) \in H^m(M;\mathbb{Z}) \times H^{n-m}(M;\mathbb{Z})$，使得 $l \leq m \leq n-l$, $a^2=0$, $b^2=0$且 $\langle a \cup b, [M]\rangle = \pm 1$。那么，在远离任何满足 $2p < \max(m, n-m) + 4$的素数 p进行局部化后，对任意 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，以下结论成立：

- 存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \longrightarrow S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X_{M,k},$$

其中

$$C \simeq \Big(\bigvee_{d_m-1} S^m\Big) \vee \Big(\bigvee_{d_{n-m}-1} S^{n-m}\Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{i\neq m,n-m \\ l\leq i\leq n-l}} \bigvee_{d_i} S^i\Big) \vee \Big(\bigvee_{l+1\leq i\leq n-l} P^i(T_i)\Big);$$

- 存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X_{M,k} \longrightarrow S^m \times S^{n-m};$$

- 取环路后，同伦纤维化分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X_{M,k} \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

定理 1.8 中关于存在一对 (a,b) 的假设相对宽松。例如，若 n 为偶数且 $H_{\mathrm{odd}}(M;\mathbb{Q})$ 非平凡，或者若 n 为奇数且 $H_{\mathrm{odd}<\mathrm{n}_2^{+1}}(M;\mathbb{Q})$ 非平凡，则 Poincar´e 对偶性保证这样一对的存在。此外，在 $k=1$的情形下，定理 1.8 可与 [ST25，定理 8.6]，相比较，两者的假设有所不同；值得注意的是，我们的定理不要求消去 M 同调中的任何特定挠元。此外，我们还建立了定理 5.8，即定理 1.8 的一个类比，它适用于$X_{M,k}$ 在消去 M 同调中的挠元之后。定理 1.8 和定理 5.8 合起来可视为 Stanton-Theriault [ST25，定理 1.4 和 8.6] 以及 Basu-Basu [BB19] 相应结果的推广。

本文结构如下。第 2 节包含定理 1.1 的证明。第 3 节中，我们证明定理 1.6 及其几何类比定理 1.7。第 4 节专门讨论应用：第 4.1 小节证明关于局部双曲性的定理 1.2；第 4.2 小节证明关于惰性与非惰性的定理 1.3，以及其关于环空间同调的推论定理 1.4；小节 4.3 则在 X 为球面与 Moore 空间的有限型楔和时给出一个加强结果。最后，第 5 节将我们的结果应用于 Poincar´e 对偶复形及其变体$X_{M,k}$：第 5.1 小节介绍由定理 1.1 和 1.6 得出的两个分解；

5.2 证明有理惰性与局部或整惰性之间差距的定理 1.5 ； 第5.3小节证明适用于高度连通$X_{M,\ k}$的定理 1.8 。

致谢。 作者部分得到国家自然科学基金（项目编号：12331003 和 12288201）、国家重点研发计划（项目编号：2021YFA1002300）以及中国科学院青年创新促进会的资助。

作者感谢匿名审稿人认真阅读稿件并提出许多有益的意见。

2. An integral case

设 X 是一个 n 维单连通封顶复形，且满足 $n \geq 4$。假设其 $(n-1)$-骨架 X 满足 X

$$\overline{X} \simeq S^m \vee S^{n-m} \vee C$$

对于满足 $2 \leq m \leq n-2$ 的空间 C，则 C 是单连通的，且维数小于 n，并且存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{g} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i} X \tag{1}$$

其中， g 是 X 的顶层 n-胞腔的粘接映射，而 i 是$(n-1)$-骨架的包含映射。由于 $S^m \vee S^{n-m}$ 是 $S^m \vee S^{n-m} \vee C$的收缩， $S^m \vee S^{n-m}$ 的同伦群可从 $S^m \vee S^{n-m} \vee C$的同伦群中分裂出来。因此，可以写成 $g \simeq g_s + g_r$，其中 g_s 是 g在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量，而 g_r 汇集了所有其余分量。

设粘接映射 g 具有如下形式

$$g \simeq k \cdot \mathfrak{g} \simeq k \cdot [i_1, i_2] + k \cdot \omega, \tag{2}$$

对于某个 $k \in \mathbb{Z}$ 以及某个映射 $\mathfrak{g}$，其在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量是典范包含 $S^m \xrightarrow{i_1} S^m \vee S^{n-m}$ 和 $S^{n-m} \xrightarrow{i_2} S^m \vee S^{n-m}$的怀特海德积 $[i_1, i_2]$，而其余分量则汇集到映射 ω中。

在本节中，我们展示封顶复形 X的环空间分解，从而证明定理 1.1。

2.1. 一个同伦余纤维化。

本小节的目标是证明引理2.4中的一个同伦余纤维化，该结果将用于建立 X 的环空间分解。

通过以下同伦余纤维化图定义空间 Q 以及映射 r' 和 ι

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & S^{n-1} & = & S^{n-1} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle k[i_1,i_2]} \\
C & \xrightarrow{i_3} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{q_{12}} & S^m \vee S^{n-m} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\
C & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{r'} & Q,
\end{array}
\tag{3}
$$

其中映射 i_3 是到第三个楔和项中的包含映射，并且 $c = i \circ i_3$，映射 q_{12} 是到前两个楔和项上的压缩映射。右上方的方块根据关于 g的假设同伦交换，中间一列是同伦余纤维化（1）。特别地，空间Q 具有 CW-结构 $Q \simeq (S^m \vee S^{n-m})$，并且映射 r' 在顶维同调中诱导恒等映射。

一般地，对于映射 $f\colon\ Y \to Z$ 在两个 n维封顶复形 Y和 Z之间，我们将映射度 f 定义为满足 $f_*([Y]) = k[Z]$的整数 k 。这一概念推广了定向流形之间映射度的经典概念，并且除符号外是良定义的。

引理 2.1。 映射 r' 的映射度为

$$\deg(r') = 1. \qquad \square$$

回顾一下，Moore 空间 $P^n(k)$由同伦余纤维化定义

$$S^{n-1} \xrightarrow{k} S^{n-1} \xrightarrow{\jmath} P^n(k),$$

其中 k 是度为 k 的映射，而 $\jmath$ 是底胞腔的包含映射。在下述同伦交换图中

$$
\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} & = & S^{n-1} & = & S^{n-1} \\
\downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle k[i_1,i_2]} \\
S^{n-1} & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{q_{12}} & S^m \vee S^{n-m} \\
\downarrow{\scriptstyle \jmath} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\
P^n(k) & \xrightarrow{\lambda} & X & \xrightarrow{r'} & Q,
\end{array}
$$

这些列是同伦余纤维化，由最后两列构成的子图是图（3）中的一个副本，而由前两列构成的子图则是从（2）经由诱导映射 λ得到的。将 γ 记为沿底行的复合映射

$$\gamma : P^n(k) \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{r'} Q.$$

那么，前述图的外围部分就是下面这个同伦余纤维化图的上半部分

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{k} & S^{n-1} & \xrightarrow{\jmath} & P^n(k) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle [i_1,i_2]} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{k[i_1,i_2]} & S^m \vee S^{n-m} & \xrightarrow{\iota} & Q \\ & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ & & S^m \times S^{n-m} & = & S^m \times S^{n-m}, \end{array}$$

其中， j 是 $S^m \times S^{n-m}$ 的（$n-1$）-骨架的包含映射，而 φ 是诱导映射。

引理 2.2。 存在一个同伦余纤维化

$$P^n(k) \xrightarrow{\gamma} Q \xrightarrow{\varphi} S^m \times S^{n-m}$$

使得映射 γ 和 φ 分别在（$n-1$）-骨架上限制为怀特海德积 $[i_1, i_2]$ 和恒等映射。此外，映射 φ 的映射度为

$$\deg(\varphi) = k.$$

证明。 第一条结论由前面的同伦余纤维化图表得出，而关于映射度的第二条结论则由相应同伦余纤维化所关联的同调长正合列得出。□

将 r 和 κ 记为复合映射

$$r : X \xrightarrow{r'} Q \xrightarrow{\varphi} S^m \times S^{n-m} \quad \text{and} \quad \kappa : P^n(k) \vee C \xrightarrow{\lambda \vee c} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X,$$

分别，其中 ∇ 是折叠映射。

引理 2.3。 映射 r 的映射度为

$$\deg(r) = k.$$

证明。 由引理 2.1 和 2.2，有 $\deg(r) = \deg(\varphi) \cdot \deg(r') = k \cdot 1 = k$。 □

引理 2.4。 序列

$$P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$$

是一个同伦余纤维化。

证明。 定义空间 K 和映射 r''，使其构成同伦余纤维化

$$P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r''} K.$$

考虑与该同伦余纤维化相关的同调长正合列

$$\cdots \to H_i(P^n(k) \vee C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa_*} H_i(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{r''_*} H_i(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(P^n(k) \vee C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa_*} H_{i-1}(X; \mathbb{Z}) \to \cdots.$$

当 $i \geq n+1$时，由于 C的维数小于 n，显然 $H_{\geq n+1}(K;\mathbb{Z}) \cong H_{\geq n+1}(X;\mathbb{Z}) =$0。当 $i \leq n-2$时，由图（3）和五引理可知，该长正合列分解为短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{i\leq n-2}(P^n(k)\vee C;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_{i\leq n-2}(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r''_*} & H_{i\leq n-2}(K;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\uparrow i_{2*} & & \cong\uparrow i_* & & \cong\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{i\leq n-2}(C;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_{3*}} & H_{i\leq n-2}(S^m\vee S^{n-m}\vee C;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_{12*}} & H_{i\leq n-2}(S^m\vee S^{n-m};\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

诱导一个同构 $H_{i\leq n-2}(K;\mathbb{Z}) \cong H_{i\leq n-2}(S^m \vee S^{n-m};\mathbb{Z})$。当 $i = n$时，由（1），正合列变为

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{r''_*} H_n(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}/k \oplus H_{n-1}(C;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\kappa_*} H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(C;\mathbb{Z}),$$

其中，κ_*在 $H_{n-1}(C;\mathbb{Z})$上的限制是恒等映射。由此可得 $H_n(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，$\deg(r'') = k$，进而 $H_{n-1}(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_{n-2}(P^n(k) \vee C;\mathbb{Z})$由正合性可知是单射。然而，连接同态 δ 由于 κ_* 在 H_{n-2} 上的单射性而为平凡映射，因此 $H_{n-1}(K;\mathbb{Z}) = 0$。总之，我们证明了 $H_*(K;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^m \times S^{n-m};\mathbb{Z})$，$\deg(r'') = k$，且 r''_* 在（$n-1$）-骨架上的限制为投影 q_{12*}。

接下来，我们证明复合映射 $r \circ \kappa$ 是零伦的。事实上，复合映射 $P^n(k) \xrightarrow{i_1} P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$ 同伦于复合映射 $r \circ \lambda \simeq \varphi \circ r' \circ \lambda \simeq \varphi \circ \gamma$，根据引理2.2，后者是零伦的。此外，复合映射 $C \xrightarrow{i_2} P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$ 同伦于 $r \circ c \simeq \varphi \circ r' \circ c$，后者是零伦的，因为 $C \xrightarrow{c} X \xrightarrow{r'} Q$ 根据（3）是一个同伦余纤维化。由此可知，$r \circ \kappa$ 在每个楔和项上的限制都是零伦的，因此 $r \circ \kappa$也是零伦的。

由于 $P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r''} K$ 是同伦余纤维化，且 $r \circ \kappa$ 是零伦，因此映射r 可以经由 r'' 延拓为映射 $t\colon K \longrightarrow S^m \times S^{n-m}$:

$$r : X \xrightarrow{r''} K \xrightarrow{t} S^m \times S^{n-m}.$$

根据前面的讨论，r''_*在（$n-1$）-骨架上限制为投影 q_{12*}。由于根据图 (3)和引理 2.2 $X \xrightarrow{r'} Q$，$Q \xrightarrow{\varphi} S^m \times S^{n-m}$ 在（$n-1$）-骨架上分别限制为压缩映射 q_{12}和恒等映射，因此它们的复合映射 $r = \varphi \circ r'$ 在（$n-1$）-骨架上限制为压缩映射 q_{12}。因此，诱导同态 $t_*\colon H_{\leq n-1}(K;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\leq n-1}(S^m \times S^{n-m};\mathbb{Z})$ 是恒等映射。此外，根据引理 2.3 和前面的讨论，我们有 $k = \deg(r) = \deg(t) \cdot \deg(r'') = k\deg(t)$，这意味着 $\deg(t) = 1$。因此，映射 t 在同调上诱导恒等映射，进而由怀特海德定理可知它是同伦等价。这意味着 $P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$ 是同伦余纤维化。□

2.2. **整系数环空间分解**。 为了证明引理 X 中的环空间分解 2.4，我们需要证明 Ωr 存在一个右同伦逆。

记

$$s_1 : S^m \xrightarrow{i_1} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i} X \quad \text{and} \quad s_2 : S^{n-m} \xrightarrow{i_2} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i} X.$$

球面到 X 的包含映射，其中 i_1 and i_2 表示球面楔和项的典范包含（此处沿用这一记法）。

引理 2.5. 复合映射 $S^m \xrightarrow{s_1} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$ *and* $S^{n-m} \xrightarrow{s_2} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$ 分别同伦于典范包含映射 $S^m \xrightarrow{j_1} S^m \times S^{n-m}$ 和 $S^{n-m} \xrightarrow{j_2} S^m \times S^{n-m}$。

*P*证明。 由图（3）和引理 2.2，可得如下同伦交换图

$$\begin{array}{ccccccc} S^m & \xrightarrow{i_1} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{q_{12}} & S^m \vee S^{n-m} & = & S^m \vee S^{n-m} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ S^m & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r'} & Q & \xrightarrow{\varphi} & S^m \times S^{n-m}. \end{array}$$

于是 $r \circ s_1 \simeq \varphi \circ r' \circ s_1 \simeq j \circ q_{12} \circ i_1 \simeq j_1$。类似地， $r \circ s_2 \simeq j_2$。 □

注意到包含映射 $S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{i_1 \vee i_2} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i} X$ 与复合映射同伦

$$s : S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{s_1 \vee s_2} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X,$$

其中 ∇ 表示折叠映射。

引理 2.6. 环路化映射 $\Omega r : \Omega X \longrightarrow \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 有一个右同伦逆。

证明. 根据博特-萨梅尔森定理，庞特里亚金代数

$$H_*(\Omega(S^m \vee S^{n-m}); \mathbb{Z}) \cong T(u, v) \quad \text{and} \quad H_*(\Omega(S^m \times S^{n-m}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u, v],$$

其中 $T(u, v)$ 是由生成元 u 和 v 构成的自由张量代数，它们的度分别为 $(m-1)$ 和 $(n-m-1)$。在这些同构下，环路化复合映射

$$\Omega(S^m \vee S^{n-m}) \xrightarrow{\Omega s} \Omega X \xrightarrow{\Omega r} \Omega(S^m \times S^{n-m})$$

诱导出一个代数同态

$$\Omega(r \circ s)_* : T(u, v) \longrightarrow \mathbb{Z}[u, v].$$

注意，复合映射

$$S^m \xrightarrow{i_1} S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{s} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}$$

同伦于 $r \circ s_1$，因此根据引理 j_1，同伦于2.5。由此可得 $\Omega(r \circ s)_*(u) = u$。类似地，$\Omega(r \circ s)_*(v) = v$。因此，代数同态 $\Omega(r \circ s)_*$ 是阿贝尔化态射。

此外，根据 Hilton-Milnor 定理，环化包含映射 $\Omega(S^m \vee S^{n-m}) \xrightarrow{\Omega j} \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 有一个右同伦逆

$$\phi : \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow \Omega(S^m \vee S^{n-m}).$$

因此，代数同态 $(\Omega j)_*$ 也是阿贝尔化态射，而同调上的诱导同态 $\phi_* : H_*(\Omega(S^m \times S^{n-m}); \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\Omega(S^m \vee S^{n-m}); \mathbb{Z})$ 是从 $\mathbb{Z}[u, v]$ 到 $T(u, v)$ 的群单态射。因此，复合映射

$$\Omega(S^m \times S^{n-m}) \xrightarrow{\phi} \Omega(S^m \vee S^{n-m}) \xrightarrow{\Omega s} \Omega X \xrightarrow{\Omega r} \Omega(S^m \times S^{n-m})$$

在同调上诱导恒等映射，因此根据怀特海德定理，它是一个同伦等价。

□

为了证明定理 1.1，我们需要一个来自 [BT22] 的一般分解定理。回顾一下，两个带基点空间 A 和 B 的右半 smash 积是商空间

$$A \rtimes B = (A \times B)/\sim$$

其中 $(*, b) \sim (*, *)$。众所周知，如果 A 是一个 co-H-空间，那么存在一个同伦等价 $A \rtimes B \simeq A \vee (A \wedge B)$。

定理 2.7. 设 $A \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ 是一个同伦余纤维化。假设 Ωh 有一个右同伦逆。则存在一个同伦纤维化

$$A \rtimes \Omega Z \longrightarrow Y \xrightarrow{h} Z,$$

对其取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega Y \simeq \Omega Z \times \Omega(A \rtimes \Omega Z).$$

□

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 由引理 2.4，存在一个同伦余纤维化

$$P^n(k) \vee C \xrightarrow{\kappa} X \xrightarrow{r} S^m \times S^{n-m}.$$

由引理 2.6，映射 r 取环路后有一个右同伦逆。因此可应用定理2.7 ，定理得证。 □

注 2.8. 在定理 1.1 中，当 $k = 0$ 时存在一个退化情形。在这种情形下， X 顶胞腔的粘接映射是零伦的，并且存在一个同伦等价

$$X \simeq S^m \vee S^{n-m} \vee S^n \vee C.$$

根据定理 1.1，存在一个同伦等价

$$\Omega X \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((S^{n-1} \vee S^n \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big),$$

因此

$$\Omega(S^m \vee S^{n-m} \vee S^n \vee C) \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((S^{n-1} \vee S^n \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

尽管 $\Omega(S^m \vee S^{n-m} \vee S^n \vee C)$ 的同伦类型是固定的，但环空间分解的具体表述不同于通过经典 Ganea 定理或定理2.7所得到的表述。

注 2.9。 在定理 1.1中，如果 $k = 1$ 那么

$$\Omega X \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big(C \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

该环空间分解与文献[BT14], 中针对 Beben-Theriault 复形所得到的分解一致，因而对其结果作出了部分推广。

注 2.10。 定理 1.1满足自然性。设 X 和 Y 是两个 n维的单连通封顶复形，并带有一个同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{k\mathfrak{g}} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{i_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle 1\vee 1\vee \mathfrak{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\ell\mathfrak{h}} & S^m \vee S^{n-m} \vee D & \xrightarrow{i_Y} & Y, \end{array} \tag{4}$$

对于某些空间 C和 D， k、 ℓ、 $t \in \mathbb{Z}$，其中 $k = t\ell$和 $2 \le m \le n-2$。假设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量是包含映射 $S^m \xrightarrow{i_1} S^m \vee S^{n-m}$ 和$S^{n-m} \xrightarrow{i_2} S^m \vee S^{n-m}$的怀特海德积。

我们可以同时对 X 和 Y给出定理1.1 的证明，并考虑图（4）。由于 $k = t\ell$，存在同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{k[i_1,i_2]} & S^m \vee S^{n-m} & \longrightarrow & Q_k \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k\ell}} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\ell[i_1,i_2]} & S^m \vee S^{n-m} & \longrightarrow & Q_\ell, \end{array}$$

其中诱导映射 $\varphi_{k\ell}$ 的度为 t。由图（3），存在同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{c_X} & X & \xrightarrow{r'_X} & Q_k \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k\ell}} \\ D & \xrightarrow{c_Y} & Y & \xrightarrow{r'_Y} & Q_\ell. \end{array}$$

此外，由图（4），映射 $i_X \circ \mathfrak{g}$ 和 $i_Y \circ \mathfrak{h}$ 可扩张为映射 λ_X 和 λ_Y，使得该图

$$\begin{array}{ccc} P^n(k) & \xrightarrow{\lambda_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \jmath_t} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ P^n(\ell) & \xrightarrow{\lambda_Y} & Y \end{array}$$

同伦交换，其中 $\jmath_t$ 是底胞腔上的恒等映射，在顶胞腔上的度为 t 。记 γ_X 和 γ_Y 为复合映射

$$\gamma_X : P^n(k) \xrightarrow{\lambda_X} X \xrightarrow{r'_X} Q_k \quad \text{and} \quad \gamma_Y : P^n(\ell) \xrightarrow{\lambda_Y} Y \xrightarrow{r'_Y} Q_\ell.$$

根据引理2.2，存在一个同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} P^n(k) & \xrightarrow{\gamma_X} & Q_k & \xrightarrow{\varphi_{k1}} & S^m \times S^{n-m} \\ \downarrow{\scriptstyle \jmath_t} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{k\ell}} & & \| \\ P^n(\ell) & \xrightarrow{\gamma_Y} & Q_\ell & \xrightarrow{\varphi_{\ell 1}} & S^m \times S^{n-m}. \end{array}$$

分别将 r_X、 κ_X、 r_Y 和 κ_Y 记为这些复合映射

$$r_X : X \xrightarrow{r'_X} Q_k \xrightarrow{\varphi_{k1}} S^m \times S^{n-m} \quad \text{and} \quad \kappa_X : P^n(k) \vee C \xrightarrow{\lambda_X \vee c_X} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X,$$

$$r_Y : Y \xrightarrow{r'_Y} Q_\ell \xrightarrow{\varphi_{\ell 1}} S^m \times S^{n-m} \quad \text{and} \quad \kappa_Y : P^n(\ell) \vee D \xrightarrow{\lambda_Y \vee c_Y} Y \vee Y \xrightarrow{\nabla} Y,$$

分别。根据引理2.4，存在一个同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} P^n(k) \vee C & \xrightarrow{\kappa_X} & X & \xrightarrow{r_X} & S^m \times S^{n-m} \\ \downarrow{\scriptstyle \jmath_t \vee \mathfrak{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\ P^n(\ell) \vee D & \xrightarrow{\kappa_Y} & Y & \xrightarrow{r_Y} & S^m \times S^{n-m}. \end{array} \tag{5}$$

我们断言，映射 Ωr_X 和 Ωr_Y 具有相容的右同伦逆。事实上，在引理 2.6的证明中，我们已经证明这些复合映射

$$\Omega(S^m \times S^{n-m}) \xrightarrow{\phi} \Omega(S^m \vee S^{n-m}) \xrightarrow{\Omega s_X} \Omega X \xrightarrow{\Omega r_X} \Omega(S^m \times S^{n-m}),$$

$$\Omega(S^m \times S^{n-m}) \xrightarrow{\phi} \Omega(S^m \vee S^{n-m}) \xrightarrow{\Omega s_Y} \Omega Y \xrightarrow{\Omega r_Y} \Omega(S^m \times S^{n-m})$$

在同调上诱导恒等映射。回忆一下，包含映射 s_X 和 s_Y 可分解为

$$s_X : \ S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{i_{12}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i_X} X \text{ 和 } \ s_Y : \ S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{i_{12}} S^m \vee S^{n-m} \vee D \xrightarrow{i_Y} Y.$$

那么，在同伦交换图中

$$\begin{array}{ccccccccc} \Omega(S^m \times S^{n-m}) & \xrightarrow{\phi} & \Omega(S^m \vee S^{n-m}) & \xrightarrow{\Omega i_{12}} & \Omega(S^m \vee S^{n-m} \vee C) & \xrightarrow{\Omega i_X} & \Omega X & \xrightarrow{\Omega r_X} & \Omega(S^m \times S^{n-m}) \\ \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \Omega(1\vee 1\vee \mathfrak{f})} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega f} & & \| \\ \Omega(S^m \times S^{n-m}) & \xrightarrow{\phi} & \Omega(S^m \vee S^{n-m}) & \xrightarrow{\Omega i_{12}} & \Omega(S^m \vee S^{n-m} \vee D) & \xrightarrow{\Omega i_Y} & \Omega Y & \xrightarrow{\Omega r_Y} & \Omega(S^m \times S^{n-m}), \end{array}$$

两行复合映射在同调上诱导恒等映射，因此根据怀特海德定理，它们是相容的同伦等价。由此可知，映射 Ωr_X 和 Ωr_Y 具有相容的右同伦逆。

因此，对于同伦余纤维化图（5），我们可以应用定理 2.7 及其自然性（见 [HT22，注 2。2], [The24a，注 2。7], 或 [Hua24，命题 3。3]）得到一个同伦纤维化图

$$\begin{array}{ccccc}
(P^n(k)\vee C)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m}) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{r_X} & S^m\times S^{n-m} \\
\downarrow{\scriptstyle (\jmath_t\vee \mathfrak{f})\rtimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\
(P^n(k)\vee D)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m}) & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{r_Y} & S^m\times S^{n-m},
\end{array}$$

其中各行在取环路后分裂，从而得到相容的同伦等价

$$\begin{array}{ccc}
\Omega(S^m\times S^{n-m})\times\Omega\big((P^n(k)\vee C)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega X \\
\downarrow{\scriptstyle 1\times\Omega((\jmath_t\vee\mathfrak{f})\rtimes 1)} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega f} \\
\Omega(S^m\times S^{n-m})\times\Omega\big((P^n(\ell)\vee D)\rtimes\Omega(S^m\times S^{n-m})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega Y.
\end{array}$$

在包 含映射中，定理 1.1对图（4）中所示的同伦余纤维化映射是自然的。

3. A local case

本节中，我们将证明定理 1.1的一个局部类似结果，即定理1.6，并将其应用于具有两个本质相交嵌入球面的光滑流形，从而证明定理1.7。

3.1. 两个提升引理。 我们先给出局部范畴中的两个提升引理。记 $S^l \xrightarrow{i} K(\mathbb{Z},\ l)$ 为 $K(\mathbb{Z},\ l)$ 的底胞腔的包含映射。

引理 3.1. 设 X 是一个道路连通的 CW 复形，其维数为 n。假设 $a\in H^{2l+1}(X;\ \mathbb{Z})$ 由映射 $f: X\longrightarrow K(\mathbb{Z},2l+1)$ 表示。那么，对任意满足 $2l+2p-2<n$ 的素数 p，在将其局部化后，存在一个提升

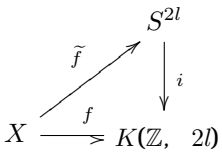
$$\begin{array}{ccc}
 & & S^{2l+1} \\
 & \overset{\widetilde{f}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle i} \\
X & \xrightarrow[f]{} & K(\mathbb{Z},\ 2l+1)
\end{array}$$

~对于某个映射 f。

此外，对任意满足 $2l+2p-3<n$ 的素数 p，在将其局部化后，f 的提升在同伦意义下唯一。特别地，若 $\widetilde{f}^*:\ H^{2l+1}(S^{2l+1};\ \mathbb{Z})\longrightarrow H^{2l+1}(X;\ \mathbb{Z})$ 是平凡的，则 $\widetilde{f}$ 是零伦的。

证明。 第一条结论由 [Hua25，引理 22] 得出，其中有限性条件显然并非必要；第二条结论则通过将第一条结论应用于 $X\times I$ 得出。 □

引理 3.2。 设 X 是一个维数为 n的道路连通 CW-复形。假设 $a \in H^{2l}(X;\ \mathbb{Z})$由一个映射 $f:\ X \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2l)$ 表示，且 $a^2 = 0$。那么对满足 $2l + 2p - 4 < n$的任意素数 p 进行局部化后，存在一个提升



~对某个映射 f。

此外，在对满足 $2l + 2p - 5 < n$ 的任意素数 p 之外进行局部化后， f 的提升在同伦意义下是唯一的。特别地，如果 $\widetilde{f}^*:\ H^{2l}(S^{2l};\ \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2l}(X;\ \mathbb{Z})$ 是平凡的，那么 $\widetilde{f}$ 是零伦的。

证明。 第一条陈述由 [The24b，引理 7 得出。4]。注意，这里的局部化是在任意满足 p的 $2l + 2p - 4 < n$素数之外进行的，这与其中使用的条件 $2l + 2p - 4 \leq n$ 相反。之所以能够作此改进，是因为在证明中，只需使用 $\Omega S^{2l+1} \longrightarrow K(\mathbb{Z},\ 2l)$的同伦纤维的连通性，而不要求该映射是同伦等价。第二条陈述通过将第一条陈述应用于 $X \times I$即可得到。 □

3.2. **局部环空间分解**。 设 X 是一个维数为 n、具有基本类 $[X]$的单连通封顶复形。假设 $(a,\ b) \in H^m(X;\ \mathbb{Z}) \times H^{n-m}(X;\ \mathbb{Z})$，其中 $2 \leq m \leq n-2$ 是 X的一个球面对，也就是说， $a^2 = 0$ 且 $b^2 = 0 \in H^*(X;\mathbb{Z})$，并且存在映射

$$s_1 : S^m \longrightarrow X \quad \text{and} \quad s_2 : S^{n-m} \longrightarrow X$$

使得 $s_1^*(a)$和 $s_2^*(b)$分别是 $H^m(S^m;\mathbb{Z})$和 $H^{n-m}(S^{n-m};\mathbb{Z})$的生成元。

引理 3.3。 在对任意满足 $2p < \max(m, n-m)+4$的素数 p取局部化后，映射s_1 和 s_2 分别有左同伦逆

$$r_1 : X \longrightarrow S^m \quad \text{and} \quad r_2 : X \longrightarrow S^{n-m},$$

。进一步假设 X 的$(n-1)$-骨架 X 是一个余-H-空间。则

$$\overline{X} \simeq S^m \vee S^{n-m} \vee C$$

对于维数小于 n 的单连通空间 C，上同调类 $a \in H^m(X;\ \mathbb{Z})$ 和 $b \in H^{n-m}(X;\ \mathbb{Z})$ 分别对应球面楔和项 S^m 和 S^{n-m}。

证明。 对满足 $2p < \max(m, n-m) + 4$ 的任意素数 p 进行局部化。

(1)。将分别表示球面元素 a和 b 的两个映射记为 $X \xrightarrow{a} K(m,\mathbb{Z})$ 和 $X \xrightarrow{b} K(n-m,\mathbb{Z})$。那么复合映射

$$S^m \xrightarrow{s_1} X \xrightarrow{a} K(m,\mathbb{Z}) \quad \text{and} \quad S^{n-m} \xrightarrow{s_2} X \xrightarrow{b} K(n-m,\mathbb{Z})$$

表示 $H^m(S^m;\ \mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m};\ \mathbb{Z})$，因此分别同伦于底胞腔包含。由引理 3.1 和3.2，映射 a 和 b可以提升为某些映射

$$r_1 : X \longrightarrow S^m \quad \text{and} \quad r_2 : X \longrightarrow S^{n-m},$$

分别地。于是，$r_1 \circ s_1$ 和 $r_2 \circ s_2$ 分别提升了映射 $a \circ s_1$ 和 $b \circ s_2$。由于后面的映射同伦于底胞腔包含，因此 $r_1 \circ s_1$ 和 $r_2 \circ s_2$ 是度为一的自映射，因而同伦于恒等映射。

（2）。注意到，由于度的原因，映射 s_1 和 s_2 经过（$n-1$）-骨架 X of$X$ 分解，从而定义映射 $s_1 : S^m \longrightarrow X$和 $s_2 : S^{n-m} \longrightarrow X$。由（1），它们具有左同伦逆

$$\overline{r}_1 : \overline{X} \longrightarrow X \xrightarrow{r_1} S^m \quad \text{and} \quad \overline{r}_2 : \overline{X} \longrightarrow X \xrightarrow{r_2} S^{n-m},$$

分别。通过同伦余纤维化定义空间 C 和映射 q^-

$$S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{\overline{s}} \overline{X} \xrightarrow{\overline{q}} C,$$

其中，^-s 表示复合映射 $S^m \vee S^{n-m} \xrightarrow{s_1 \vee s_2} \bar{X} \vee \bar{X} \xrightarrow{\bar{\nabla}} \overline{X}$。那么复合映射

$$\overline{X} \xrightarrow{\sigma} \overline{X} \vee \overline{X} \vee \overline{X} \xrightarrow{\overline{r}_1 \vee \overline{r}_2 \vee \overline{q}} S^m \vee S^{n-m} \vee C$$

在同调上诱导一个同构，其中 σ 是余H空间X的迭代余乘法。由怀特海德定理，该复合映射是一个同伦等价。在此同伦等价下，显然，上同调类 $a \in H^m(X;\mathbb{Z})$和 $b \in H^{n-m}(X;\mathbb{Z})$分别对应于球面楔和项 S^m 和 S^{n-m}。□

现在我们可以证明定理1.6。

定理*1.6*的证明。在任意满足 p 的素数 $2p < \max(m, n-m) + 4$之外进行局部化。由于（$n-1$）骨架X 的 X 是一个余H空间，根据引理3.3 $X \simeq S^m \vee S^{n-m} \vee C$，且存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{g} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X$$

对于某个粘接映射 g。

根据假设，粘接映射 $g \simeq k\mathfrak{g}$ 对于某个映射 $S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C$。由 Hilton-Milnor 定理，$\mathfrak{g}$ 在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量

$$S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{q_{12}} S^m \vee S^{n-m}$$

对于某些 $\ell \in \mathbb{Z}$ 和映射 $S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}_1} S^m$ 与 $S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}_2} S^{n-m}$，其形式为 $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ell[i_1, i_2]$。注意，$\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 在上同调上诱导平凡同态，并且这些映射已局部化

远离任意素数 p满足 $2p<\max(m,n-m)+4$。于是，利用引理3.1和 3.2 中的提升唯一性，可以证明 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_1$ 都是零伦。由此可得

$$g \simeq k\mathfrak{g} \simeq k\ell[i_1,i_2]+k\omega,$$

其中， ω 收集了 $\mathfrak{g}$的所有其他分量。

特别地，存在如下同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{g} & S^m\vee S^{n-m}\vee C & \longrightarrow & X \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle q_{12}} & & \downarrow \\
S^{n-1} & \xrightarrow{k\ell[i_1,i_2]} & S^m\vee S^{n-m} & \longrightarrow & Q' \\
\downarrow{\scriptstyle k\ell} & & \| & & \downarrow \\
S^{n-1} & \xrightarrow{[i_1,i_2]} & S^m\vee S^{n-m} & \xrightarrow{j} & S^m\times S^{n-m}
\end{array}$$

它定义了空间 Q'。这意味着

$$k\ell=\langle a\cup b,[Q']\rangle=\langle a\cup b,[X]\rangle,$$

其中，滥用记号，上同调类 a 和 b分别对应球面楔和项 S^m 和 S^{n-m}。由于根据假设， $\langle a\cup b,[X]\rangle\neq 0$ ，我们可知 k， $\ell\neq 0$。

进一步对满足 $p\mid\ell$的任意素数 p 之外的部分进行局部化。记

$$g'=k\mathfrak{g}'=k[i_1,i_2]+\frac{k}{l}\omega.$$

于是 $g'\circ\ell\simeq kl[i_1,i_2]+k\omega\simeq g$，并且存在如下同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{g} & S^m\vee S^{n-m}\vee C & \longrightarrow & X \\
\downarrow{\scriptstyle \ell} & & \| & & \downarrow \\
S^{n-1} & \xrightarrow{g'} & S^m\vee S^{n-m}\vee C & \longrightarrow & X',
\end{array}$$

它定义了空间 X'。由于 ℓ 是一个同伦等价，五引理推出 $X\longrightarrow X'$在同调上诱导一个同构。因此，根据怀特海德定理，它是一个同伦等价。特别地，存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1}\xrightarrow{k\mathfrak{g}'}S^m\vee S^{n-m}\vee C\longrightarrow X$$

使得 $\mathfrak{g}'$ 在 $S^m\vee S^{n-m}$ 上的分量是怀特海德积 $[i_1,i_2]$。于是可以应用定理 1.1，从而得证。

□

3.3. **几何情形。** 定理 1.6 可应用于两个嵌入球面在流形中有本质相交的几何情形。

定理 1.7 的证明。显然，单连通闭流形是一个封顶复形。对满足 $2p < \max(m, n-m) + 4$ or $p \mid \langle a \cup b, [M] \rangle$ 的任意素数 p 进行局部化。于是，上同调类 $a = (s_{1*}([S^m]))^*$ 和 $b = (s_{2*}([S^{n-m}]))^*$ 在嵌入球面 S^m 和 S^{n-m} 上的限制，分别是同调 $H^m(S^m)$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m})$ 的生成元。结合假设可得，(a, b) 是 M 的一个球面对，且 $\langle a \cup b, [M] \rangle \neq 0$。因此，可以应用带有 $k = 1$ 的定理 1.6 来证明该定理。□

4. Applications

本节将介绍在局部双曲性、惰性与非惰性方面的应用，以及在1.1 中如下情形的一个细化结果：X 是由球面和 Moore 空间组成的有限型楔和。特别地，我们将证明定理1.2、1.3和1.4。

4.1. **局部双曲性。** 为证明定理1.2 关于定理 1.1 中封顶复形的局部双曲性的结论X ，我们需要一个辅助引理。

引理 4.1. 设 A、 B 和 Y 是三个道路连通空间。则存在一个自然同胚

$$(A \vee B) \rtimes Y \cong (A \rtimes Y) \vee (B \rtimes Y).$$

证明。 注意到

$$(A \vee B) \rtimes Y \cong (A \times Y) \cup_{(* \times Y)} (B \times Y).$$

将 Y 收缩为一点，便得到

$$(A \vee B) \rtimes Y \cong (A \rtimes Y) \cup_{(* \rtimes *)} (B \rtimes Y) = (A \rtimes Y) \vee (B \rtimes Y).$$

这个同一显然是自然的。 □

以下重要结果由 Huang-Wu [HW20] 和 Boyde [Boy24]证明。

引理 4.2。 设 p 为素数， $n \geq 3$ 且 $r \geq 1$。对于 *Moore* 空间 $P^n(p^r)$，以下结论成立：

- 若 p 为奇数，则对任意 $s \leq r+1$， $P^n(p^r)$ 是 $\mathbb{Z}/p^s$-双曲的；
- 若 $p = 2$ 且 $r \geq 2$，则对任意 $s \leq r+1$， $P^n(2^r)$ 是 $\mathbb{Z}/2^s$-双曲的；
- 若 $p = 2$ 且 $r = 1$，则 $P^n(2)$ 是 $\mathbb{Z}/2$-、 $\mathbb{Z}/4$-和 $\mathbb{Z}/8$-双曲的。

证明。 该引理是以下内容的结合： [HW20，定理 1。6] 以及 [Boy24，定理 1。3]。 □

现在我们可以证明定理 1.2；关于同伦群的更强结论将在引理 4.8中建立。

定理 1.2的证明。 回顾一下，对于定理 X 1.1 中的封顶复形，存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{k\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X.$$

若 $k = 0$，则 X 的同伦余纤维化分裂，且存在一个同伦等价 e

$$X \simeq S^m \vee S^{n-m} \vee C \vee S^n.$$

根据 [Boy22，定理 1]， $S^m \vee S^{n-m}$ 是 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲的，对所有素数 p 以及所有 $r \geq 1$均成立。因此 X也是如此。此外，众所周知， $S^m \vee S^{n-m}$ 是有理双曲的， X也是如此。

若 $k \neq 0$， ± 1根据定理 1.1 存在一个同伦等价

$$\Omega X \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

根据引理 4.1， $P^n(k) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 从 $(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 中收缩出来，进而 $\Omega(P^n(k) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}))$ 从 ΩX中收缩出来。然而，根据 James 悬挂分裂定理，

$$\begin{aligned} P^n(k) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) &\simeq P^n(k) \vee \Big(P^n(k) \wedge \big(\Omega S^m \vee \Omega S^{n-m} \vee (\Omega S^m \wedge \Omega S^{n-m})\big)\Big) \\ &\simeq P^n(k) \vee \Big(P^n(k) \wedge \bigvee_{j=1}^{\infty} \big(S^{j(m-1)} \vee S^{j(n-m-1)}\big)\Big) \\ &\quad \vee \Big(P^n(k) \wedge \bigvee_{i,j=1}^{\infty} \big(S^{i(m-1)+j(n-m-1)}\big)\Big), \end{aligned}$$

因此同伦等价于由有限型 Moore 空间组成的楔和 $P^{n*}(k)$。由于 $P^{n*}(k) \simeq \bigvee_{j=1}^{\ell} P^{n*}(p_j^{t_j})$， 若 $k = \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{t_j}$， 则此情形下的定理由引理 4.2得证。 □

4.2. **惰性与非惰性 I**。 在本小节中，我们证明定理 1.4和 1.3。令$A \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{\varphi} Z$ 为一个同伦余纤维化。回顾一下，映射 h称为惰性的，如果 $\Omega\varphi$ 有一个右同伦逆。

我们从惰性情形开始。

引理 4.3。 令 X 为定理 1.1中的封顶复形。若 $k = \pm 1$，则 X 的顶胞腔的粘接映射是惰性的。

证明。 当 $k = \pm 1$时，图式 (3变为同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} & & S^{n-1} & = & S^{n-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{g}} & & \downarrow{\scriptstyle \pm[i_1,i_2]} \\ C & \xrightarrow{i_3} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{q_{12}} & S^m \vee S^{n-m} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ C & \xrightarrow{c} & X & \xrightarrow{r} & S^m \times S^{n-m}. \end{array}$$

由 Hilton-Milnor 定理，映射 j 取环路后有一个右同伦逆。此外，由于q_{12} 有一个右同伦逆，映射 i_3 是惯性的。于是由 [Hua24，定理 5.4], 映射 i 取环路后有一个右同伦逆，也就是说，粘接映射 $\mathfrak{g}$ 是惯性的。 □

引理4.3 中的惰性结果有助于计算环空间同调。为此， [The24a的命题 10 给出了一般性结果。1] 而 [ST25第 4] 节对其略作改进。

命题 4.4. 设

$$\Sigma A \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$$

~是一个同伦余纤维化，其中 f 是惯性的，且 Y 是一个余-H-空间。设 $A \xrightarrow{f} \Omega Y$ 是 f 的伴随映射。那么，对于任意带单位元的交换环 R，若 $H_*(Y;\ R)$ 是一个自由 R-模，则存在一个代数同构

$$H_*(\Omega Z; R) \cong T(\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(Y); R)/(Im\ (\widetilde{f}_*)),$$

~ ~其中$(Im\ (f_*))$ 是由 $Im\ (f_*)$生成的双边理想。此外，若 Y 是一个余-H-空间的悬挂，则这是一个 *Hopf* 代数同构。□

现在我们可以证明定理 1.4。

定理 *1.4*的证明。 由于 $k = \pm 1$，存在同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{\pm\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X$$

由引理 4.3，粘接映射 $\pm\mathfrak{g}$ 是惯性的。由于 C 是一个余H空间，且 $H_*(C;\ R)$ 按假设是自由 R-模，因此也是 $S^m \vee S^{n-m} \vee C$。此外，如果 C 是某个余H空间的悬挂，那么$S^m \vee S^{n-m} \vee C$也是如此。于是命题 4.4 可以应用，定理得证。 □

现在我们转向非惯性情形，先从摩尔空间的情形开始。事实上，定义摩尔空间的胞腔附着会产生无穷多个新的同伦群，其秩呈指数增长。

引理 4. **5.** 设 p 为一个素数， $n \geq 3$ 且 $r \geq 1$。考虑该同态的分次余核 m

$$\jmath_* : \pi_*(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_*(P^n(p^r))$$

由底胞腔包含映射 $\jmath$ 诱导的同伦群。于是，在以下任一情形下：

- p 为奇数且 $s \leq r+1$;
- $p = 2$、 $r \geq 2$ 和 $s \leq r+1$;
- $p = 2$、 $r = 1$ 和 $s = 2$、4 或 8，

分次余核中 $\mathbb{Z}/p^s$ 直和项的数量呈指数增长。

证明。 为了证明该引理，只需考虑诱导同态

$$\widetilde{\jmath}_* : \pi_*(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_*(\Omega P^n(p^r)),$$

其中底胞腔包含映射 $\widetilde{\jmath}$ 是 $\jmath$的伴随映射。

我们需要四个摩尔空间的环空间分解。当 p 是奇素数且 $n = 2n' + 2$为偶数时，根据 [CMN79, 定理 1。1]

$$\Omega P^{2n'+2}(p^r) \simeq S^{2n'+1}\{p^r\} \times \Omega\Big(\bigvee_{j=0}^{\infty} P^{4n'+2jn'+3}(p^r)\Big),$$

其中 $S^{2n'+1}\{p^r\}$ 是度为 p^r 的自映射的同伦纤维，作用于 $S^{2n'+1}$；当 p 是奇素数且 $n = 2n' + 1$ 为奇数时，根据 [CMN87]

$$\Omega P^{2n'+1}(p^r) \simeq T^{2n'+1}\{p^r\} \times \Omega\Big(\bigvee_{\alpha} P^{n'_\alpha+1}(p^r)\Big)$$

对于空间 $T^{2n'+1}\{p^r\}$，其中 $\bigvee P^{n'_\alpha+1}(p^r)$是由模$p^r$摩尔空间组成的无限楔和，并且每个$\alpha$ $n'_\alpha \geq 4n' - 1$；当 $p = 2$ 和 $r \geq 2$时，根据 [Coh89，引理 2。6]

$$\Omega P^n(2^r) \simeq T^n\{2^r\} \times \Omega\Big(\bigvee_{\beta} P^{n'_\beta}(2^r)\Big)$$

对于空间 $T^n\{2^r\}$，其中 $\bigvee P^{n'_\beta}(2^r)$是由模$2^r$摩尔空间组成的无限楔和，并且每个$\beta n'_\beta > n$；以及当 $p = 2$ 和 $r = 1$时，根据 [HW20，引理 3。2]

$$\Omega P^n(2) \simeq Z \times \prod_{\text{odd } p} \Omega\Sigma^{\frac{p^2-1}{2}(2n-3)}(P^n(2) \vee P^n(2))$$

~对于某个空间 Z。由这些分解可知，底胞腔包含映射 $S^{n-2} \xrightarrow{\jmath} \Omega P^n(p^r)$ 经由直和项 $S^{2n'+1}\{p^r\}$, $T^{2n'+1}\{p^r\}$, $T^n\{2^r\}$ 或 Z分解，分别对应上述四种情况。因此， $\widetilde{\jmath}_*$ 的余核包含 Moore 空间 $P^*(p^r$的同伦群（相差一个同构），于是由引理 4.2即可得到该引理。 □

注 4.6。 引理 4.5 也可以直接由 [Boy24，定理 1，3] 以及 Burklund-Senger 的一个结果 [Bur 22] 证明；该结果表明，球面同伦群中的挠子项数量至多呈次指数增长。

推论 4.7。 设 $n \geq 3, k \geq 1$。考虑同态

$$\jmath_* : \pi_*(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_*(P^n(k))$$

由底胞腔包含 $\jmath$所诱导的同伦群。以下结论成立：

- 若对于奇素数 p 有 $p^r \mid k$ 且 $r \geq 1$，则 $\mathbb{Z}/p^r$直和项和 $\mathbb{Z}/p^{r+1}$直和项在 $\jmath_*$ 的余核中的数量呈指数增长；
- 若 $2^r \mid k$ 对于 $r \geq 2$，则 $\jmath_*$ 的余核中 $\mathbb{Z}/2^r$ 和 $\mathbb{Z}/2^{r+1}$ 直和项的数量呈指数增长；

- 若 $2 \mid k$ 但 $4 \nmid k$，则 $\jmath_*$ 的余核中 $\mathbb{Z}/2$、$\mathbb{Z}/4$ 和 $\mathbb{Z}/8$ 直和项的数量呈指数增长。

证明。该推论由引理 4.5 以及以下事实得出：$P^n(k) \simeq \bigvee_{j=1}^{\ell} P^n(p_j^{t_j})$ 当且仅当 $k = \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{t_j}$。 □

我们将 Moore 空间的特殊情形应用于研究封顶复形。

引理 4.8。设 X 为定理 *1.1*中的封顶复形。若 $k \neq \pm 1$，则 X 的顶胞腔的粘接映射不是惯性的。更确切地说，X 的顶胞腔的粘接映射在任意整除 p 的素数处局部化后都不是局部惰性的，k。

此外，考虑由低阶骨架包含映射诱导的同伦群同态 i_*：$\pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(X)$。以下结论成立：

- 若 $k = 0$，则 i_* 的余核中的 $\mathbb{Q}$ 直和项数量呈指数增长；
- 若 $k = 0$，则对于所有素数 p 和所有 $r \geq 1$，i_* 的余核中 $\mathbb{Z}/p^r$-直和项的数量呈指数增长；
- 若 $k \neq 0$，则对于满足 $p^r \mid k$ 和 $r \geq 1$的所有奇素数 p，i_* 的余核中 $\mathbb{Z}/p^r$-和 $\mathbb{Z}/p^{r+1}$-直和项的数量呈指数增长；
- 若 $k \neq 0$ 且 $4 \mid k$，则对于所有满足 $r \geq 1$的 $2^r \mid k$，i_*的余核中 $\mathbb{Z}/2^r$-和 $\mathbb{Z}/2^{r+1}$-直和项的数量呈指数增长；
- 若 $k \neq 0$ 且 $2 \mid k$ 但 $4 \nmid k$，则 i_* 的余核中 $\mathbb{Z}/2$-、$\mathbb{Z}/4$-和 $\mathbb{Z}/8$-直和项的数量呈指数增长。

证明。当 $k = 0$时，X 的同伦余纤维化分裂，并且同伦等价于以下同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{0\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \xrightarrow{i_{123}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \vee S^n,$$

其中 i_{123} 是前三个楔和项的典范包含。因此，X 的顶胞腔粘接映射不是惯性的。此外，$i_* = i_{123*}$ 的余核在同构意义下包含同伦群 $\pi_{\geq n}(S^n \vee S^m)$。由于 $S^n \vee S^m$ 对所有素数 $\mathbb{Z}/p^r$及所有 p 都是 $r \geq 1$-双曲的，依据 [Boy22，定理 1]，表明，$\mathbb{Z}/p^r$在余核中的直和项数量 i_* 对所有素数 p 及所有 $r \geq 1$都呈指数增长。此外，由于 $S^n \vee S^m$ 是有理双曲的，$\mathbb{Q}$在余核中的直和项数量 i_* 呈指数增长。

当 $k \neq \pm 1$，0 时，考虑同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{*} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{i_{123}} & S^m \vee S^{n-m} \vee C \vee S^n \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i \circ q_{123}} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{k\mathfrak{g}} & S^m \vee S^{n-m} \vee C & \xrightarrow{\quad i \quad} & X, \end{array}$$

其中 q_{123} 是到前三个楔和项上的压缩映射。于是可以利用定理 1.1 以及注释 2.10 中的自然性，推导出相容的同伦等价

$$\begin{array}{ccc}
\Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((S^{n-1} \vee S^n \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega(S^m \vee S^{n-m} \vee C \vee S^n) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1\times\Omega((\jmath\circ q_1)\vee 1)\rtimes 1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Omega(i\circ q_{123})} \\
\Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big) & \xrightarrow{\simeq} & \Omega X,
\end{array}$$

其中，我们将映射 $P^n(0) \xrightarrow{\jmath_0} P^n(k)$ 与 $S^{n-1} \vee S^n \xrightarrow{q_1} S^{n-1} \xrightarrow{\jmath} P^n(k)$ 视为相同，其中 q_1 是压缩映射，$\jmath$ 是底胞腔包含映射。

根据相容的同伦等价和引理4.1，在同构意义下，$(i \circ q_{123})_*$ 的余核包含

$$((\jmath \circ q_1) \rtimes 1)_* : \pi_*((S^{n-1} \vee S^n) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})) \longrightarrow \pi_*(P^n(k)) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})),$$

再由 [Hua24，命题 4.6] 包含其余核

$$(\jmath \circ q_1)_* : \pi_*(S^{n-1} \vee S^n) \xrightarrow{q_{1*}} \pi_*(S^{n-1}) \xrightarrow{\jmath_*} \pi_*(P^n(k)).$$

注意到，由于 q_{1*} 是满射，后者与 $\jmath_*$ 的余核相同。由推论 4.7，对于所有满足 $p^r \mid k$ 的奇素数 p，余核中 $\mathbb{Z}/p^r$ 和 $\mathbb{Z}/p^{r+1}$ 直和项的数量呈指数增长；若 $4 \mid k$，则对于所有 $2^r \mid k$，余核中 $\mathbb{Z}/2^r$ 和 $\mathbb{Z}/2^{r+1}$ 直和项的数量呈指数增长；若 $2 \mid k$ 但 $4 \nmid k$，则余核中 $\mathbb{Z}/2$、$\mathbb{Z}/4$ 和 $\mathbb{Z}/8$ 直和项的数量呈指数增长。于是，$(i \circ q_{123})_*$ 的余核也满足相同结论，因此，由于 q_{123*} 是满射，i_* 的余核也满足相同结论。特别地，对于任何整除 k 的素数 p，局部化后，X 顶胞腔的粘接映射 $k\mathfrak{g}$ 并非局部惰性的。

□

定理 *1.3* 的证明。 该定理直接由引理4.3和 4.8得到。 □

4.3. 一个加强结果 I。 令 $\mathcal{M}$ 表示以下空间类。空间 Y 属于 $\mathcal{M}$，当且仅当 Y 与由单连通球面和 Moore 空间组成的有限型楔和同伦等价。

For a finite abelian group $T \cong \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{Z}/p_j^{t_j}$, denote by $P^n(T) = \bigvee_{j=1}^{\ell} P^n(p_j^{t_j})$.

命题 4.9。 令 X 为定理 *1.1*中的封顶复形。记

$$H_i(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus d_i} \oplus T_i,$$

其中 $d_i \geq 0$ 和 T_i 是有限阿贝尔群。假设 $X \in \mathcal{M}$。那么存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X \longrightarrow S^m \times S^{n-m},$$

其中

$$C \simeq \Big(\bigvee_{d_m - 1} S^m \Big) \vee \Big(\bigvee_{d_{n-m}-1} S^{n-m} \Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{i \neq m, n-m \\ 2 \leq i \leq n-1}} \bigvee_{d_i} S^i \Big) \vee \Big(\bigvee_{3 \leq i \leq n-1} P^i(T_i) \Big),$$

并且，这个同伦纤维化在取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

证明。根据假设， $X \simeq \overline{M} S^m \vee S^{n-m} \vee C \in \mathcal{M}$。由 [Sta25，定理 3。5]， $\mathcal{M}$ 在收缩下封闭。因此， $C \in \mathcal{M}$，于是 C 的同伦等价可由 X的同调推出。命题的其余部分由定理1.1 立即得到。

□

5. Poincaré Duality complexes and their variants

设 M 是一个 n维的单连通庞加莱对偶复形。则存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}} \overline{M} \longrightarrow M,$$

其中， $\overline{M}$是 M的（$n-1$）骨架，而 $\mathfrak{g}$是 M的顶胞腔的粘接映射。显然， M 是一个封顶复形。此外，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们可以通过同伦余纤维化定义一个空间$X_{M,\,k}$

$$S^{n-1} \xrightarrow{k\mathfrak{g}} \overline{M} \longrightarrow X_{M,k}.$$

显然，$X_{M,\,k}$ 也是一个封顶复形，且$X_{M,\,1} \simeq M$。

本节将我们的结果应用于封顶复形$X_{M,\,k}$ ，并将第4 节中发展的应用推广到这一情形。特别地，我们将证明关于有理惰性与局部或整惰性之间差异的定理1.5，以及关于高度连通$X_{M,\,k}$的定理1.8 。

5.1. 两个分解。

定理1.1和1.6 可直接应用于$X_{M,\,k}$ 。

命题 5.1。 设 M 是一个 n维单连通庞加莱对偶复形，并且有一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow M$$

对于空间 C和 $2 \leq m \leq n-2$。假设 $\mathfrak{g}$ 在 $S^m \vee S^{n-m}$ 上的分量是典范包含映射 $S^m \longrightarrow S^m \vee S^{n-m}$ 和 $S^{n-m} \longrightarrow S^m \vee S^{n-m}$的怀特海德积。那么对于任意$k \in \mathbb{Z}$，存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X_{M,k} \longrightarrow S^m \times S^{n-m},$$

它在取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X_{M,k} \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

证明。 根据假设，存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \xrightarrow{k\mathfrak{g}} S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X_{M,k}.$$

由同伦余纤维化应用定理1.1 即可得出该命题。 □

命题 5.2. 设 M 是一个 n维单连通 *Poincar´e* 对偶复形，其$(n-1)$骨架是一个 *co-H*-空间。假设$(a, b) \in H^m(M;\mathbb{Z}) \times H^{n-m}(M;\mathbb{Z})$ *with*$2 \le m \le n-2$ 是 M的一个球面对，且 $\langle a\cup b, [M]\rangle = \pm 1$。那么，对任意满足 $2p < \max(m, n-m) + 4$的素数 p，在远离该素数进行局部化后，对任意 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，以下结论成立：

- 存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \longrightarrow S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X_{M,k}$$

  对于维数小于 $n-1$的单连通空间 C；
- 存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X_{M,k} \longrightarrow S^m \times S^{n-m};$$

- 该同伦纤维化在取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X_{M,k} \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

证明。 根据构造，存在一个同伦余纤维化图

$$\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{k\mathfrak{g}} & \overline{M} & \longrightarrow & X_{M,k} \\
\downarrow{\scriptstyle k} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_k} \\
S^{n-1} & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \overline{M} & \longrightarrow & M \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
P^n(r) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & P^{n+1}(r),
\end{array}$$

其中诱导映射 φ_k 的度为 k。由此可知，$X_{M,\,k}$ 的 $(n-1)$-骨架是一个余 H 空间，

$$a^2 = 0, \quad b^2 = 0, \quad \text{and} \quad \langle a\cup b, [X_{M,k}]\rangle = k\langle a\cup b, [M]\rangle = \pm k,$$

其中，$a = \varphi_k^*(a) \in H^m(X_{M,\,k};\mathbb{Z})$，且 $b = \varphi_k^*(b) \in H^{n-m}(X_{M,\,k};\mathbb{Z})$，此处采用宽泛的记号。

对于同伦余纤维化

$$X_{M,k} \xrightarrow{\varphi_k} M \longrightarrow P^{n+1}(r),$$

布莱克斯-梅西定理表明，它在度 n 范围内是一个同伦纤维化。特别地，映射 $X_{M,\,k} \xrightarrow{\varphi_k} M$是 $(n-1)$-连通的。由于 $(a,\ b) \in H^m(M;\mathbb{Z}) \times H^{n-m}(M;\mathbb{Z})$ 是一个球面对，存在映射

$$s_1 : S^m \longrightarrow M \quad \text{and} \quad s_2 : S^{n-m} \longrightarrow M$$

使得 $s_1^*(a)$ 和 $s_2^*(b)$ 分别是 $H^m(S^m;\mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m};\mathbb{Z})$ 的生成元。根据假设 m, $n-m\le n-2$，可知映射 s_1 和 s_2 可以经由 $X_{M,\,k}\xrightarrow{\varphi_k} M$ 提升为映射

$$s_{1,k}:S^m\longrightarrow X_{M,k}\quad\text{and}\quad s_{2,k}:S^{n-m}\longrightarrow X_{M,k},$$

然后，$s_{1,\,k}^*(a)$ 和 $s_{2,\,k}^*(b)$ 分别是 $H^m(S^m;\mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m};\mathbb{Z})$ 的生成元。

总而言之，我们已经证明，$X_{M,k}$ 的 $(n-1)$-骨架是一个余 H 空间，$X_{M,k}$ 的顶胞腔的粘接映射可被 k 整除，并且 $(a,b)\in H^m(X_{M,k};\mathbb{Z})\times H^{n-m}(X_{M,k};\mathbb{Z})$ 是一个带有 $\langle a\cup b,[X_{M,k}]\rangle=\pm k$ 的球面对。因此，我们可以将定理 1.6 应用于 $X_{M,k}$，命题得证。□

5.2. **惰性与非惰性，II**。我们继续研究第 4.2 小节中关于 $X_{M,\,k}$ 的惰性与非惰性，并证明定理 1.5。

命题 5.3. 设 M 是一个 n 维单连通庞加莱对偶复形，且有一个同伦余纤维化

$$S^{n-1}\xrightarrow{\mathfrak{g}}S^m\vee S^{n-m}\vee C\longrightarrow M$$

其空间为 C，映射为 $2\le m\le n-2$。假设 $\mathfrak{g}$ 在 $S^m\vee S^{n-m}$ 上的分量是典范包含映射 $S^m\longrightarrow S^m\vee S^{n-m}$ 和 $S^{n-m}\longrightarrow S^m\vee S^{n-m}$的怀特海德积。那么，$X_M$的顶胞腔粘接映射，$k$ 是惯性的，当且仅当 $k=\pm1$。

特别地，当 $k\neq\pm1,0$ 时，$X_{M,\,k}$ 的顶胞腔粘接映射是有理惰性的，但不是整惰性的；并且在任何整除 k的素数 p 处局部化后，都不是局部惰性的。

证明。我们已经看到$X_{M,\,k}$ 满足定理 1.1的条件。因此，第一个结论由定理 1.3得出。

对于第二个结论，根据引理 4.8，我们只需证明当 $k\neq\pm1,\,0$ 时，$X_{M,\,k}$ 是有理惰性的。为此，注意到 $X_{M,\,k}$ 与 $X_{M,\,1}\simeq M$有理同伦等价，因此是一个有理庞加莱对偶复形。根据 Halperin-Lemaire 的经典结果 [HL87]，有理庞加莱对偶复形的顶胞腔粘接映射是有理惰性的，除非其有理上同调代数由单个元素生成。然而，由图示 (3) 可知，存在一个度为1的映射 $M\xrightarrow{r}S^m\times S^{n-m}$，其在 $(n-1)$-骨架上的限制是压缩映射。特别地，$r^*:H^*(M;\mathbb{Q})\longrightarrow H^*(S^m\times S^{n-m};\mathbb{Q})$ 是满射，因此上同调代数$H^*(X_{M,\,k};\mathbb{Q})\cong H^*(M;\mathbb{Q})$ 不是由单个元素生成的。因此，$X_{M,\,k}$ 的顶胞腔粘接映射是有理惰性的。□

定理 1.5 的证明。对于每个正整数 t，令 $M(n,m,t)=\sharp(S^m\times S^{n-m})$，且 $2\le m\le n-2$。则 $X_{M(n,m,t),k}\simeq X_{M(n',m',t')\,k'}$ 当且仅当 $(n,m,t,k)=(n',m',t',k')$。复形$X_{M(n,m,t),k}$ 是一个封顶复形，并且当且仅当 $k\neq0$时是一个有理 Poincaré 对偶复形。根据 Halperin-Lemaire [HL87], 的结果，任何这样的 $X_{M(n,m,t),k}$ 都是有理惰性的。

当 $k \neq \pm 1$，0 时，每个 $X_{M(n,m,t),\ k}$ 都满足命题 5.3 的条件，因此其顶胞腔附着映射是有理惰性的，但不是整惰性的。此外，当 $p \mid k$ 对于某个素数 p 时，命题 5.3 再次表明，每个 $X_{M(n,m,t),\ k}$ 的顶胞腔附着映射都是有理惰性的，但在 p处不是局部惰性的。□

注 5.4. 设 $M = M(n,m,t)\sharp N$是一个 N 维单连通庞加莱对偶复形。由与定理1.5相同的证明可知，$X_{M,k}$的顶胞腔附加在 $k \neq 0$时是有理惰性的，在 $k \neq \pm 1$,0 时不是整惰性的，并且在 $k \neq 0$ 且 $p \mid k$ 时不是 p 处的局部惰性。

注 5.5. 注意，注5.4 中的每个复形 $M = M(n,m,t)\sharp N$都满足定理1.1的条件。由引理4.8，若 $k \neq 0$，则当所有满足 $p^r \mid k$ 且 $r \geq 1$ 的奇素数 p 下，$\pi_*(X_{M,k}) \xrightarrow{i_*} \pi_*(X_{M,k})$ 的余核中的 $\mathbb{Z}/p^r$ 项和 $\mathbb{Z}/p^{r+1}$ 项的数量呈指数增长；若 $k \neq 0$ 且 $4 \mid k$，则对所有满足 $r \geq 1$ 的 $2^r \mid k$，i_* 的余核中的 $\mathbb{Z}/2^r$ 项和 $\mathbb{Z}/2^{r+1}$ 项的数量呈指数增长；若 $k \neq 0$ 且 $2 \mid k$ 但 $4 \nmid k$，则 i_* 的余核中的 $\mathbb{Z}/2$ 项、$\mathbb{Z}/4$ 项和 $\mathbb{Z}/8$ 项的数量呈指数增长。

此外，如果 $k \neq 0$ 并且 $t \geq 2$，那么每个 $X_{M,\ k}$ 也都是有理双曲的。事实上，根据定理1.1 存在一个有理同伦等价

$$\Omega X_{M,k} \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big(C \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big),$$

其中 $C \simeq \bigvee (S^m \vee S^{n-m}) \vee N$。根据引理 4.1，$(S^m \vee S^{n-m}) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 是 $_{t-1}C \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})$ 的一个收缩，因此 $\Omega(S^m \vee S^{n-m})$ 是 $\Omega X_{M,\ k}$ 的一个收缩。由于 $S^m \vee S^{n-m}$ 是有理双曲的，$X_{M,\ k}$ 也是如此。

5.3. **一个加强结果 II**。我们继续研究第 4.3小节中的 $X_{M,\ k}$，并证明定理 1.8及其类似结果——定理 5.8。回顾一下，$\mathcal{M}$ 是与有限型单连通球面和 Moore 空间的楔和同伦等价的空间类。注意，$X_{M,\ k} \simeq M$。

引理 5.6。设 M是一个维数为 $n \leq 3l-2$ 且满足$l \geq 3$的 $l-1$连通 *Poincar´e* 对偶复形。那么，在远离任意满足 $2p \leq n-2l+3$的素数 p 进行局部化后，$X_{M,\ k} \simeq M \in \mathcal{M}$。

证明。由庞加莱对偶性和假设可知，M 的 $(n-1)$-骨架 M 是 $(l-1)$ 连通的，且维数为 $n-l$。由于 $n-l \leq 2l-2$ 和 $l \geq 3$，根据 [ST25，引理 7.8]，$_{k} \simeq M \in \mathcal{M}$在远离任意满足 ~~$2p \leq (n-l)$~~ $-l+3$的素数 p 进行局部化后成立。□

定理 *1.8* 的证明。将任意满足 p 条件的素数 $2p < \max(m, n-m) + 4$之外的素数局部化。注意

$$(\max(m, n-m)+4) - (n-2l+4) = \max(m-n+2l, 2l-m) \geq \max(m-l+2, 3l-n) \geq 2.$$

于是可以应用引理 5.6 来证明 $X_{M,k} \simeq M \in \overline{\mathcal{M}}$。由于 $\langle a \cup b, [M] \rangle = \pm 1$，类 a和 b 是无限阶生成元，因此存在映射

$$s_1 : S^m \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow M \quad \text{and} \quad s_2 : S^{n-m} \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow M$$

使得 $s_1^*(a)$ 和 $s_2^*(b)$ 是 $H^m(S^m; \mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m}; \mathbb{Z})$ 的生成元。结合 $a^2 = 0$和 $b^2 = 0$这一假设，可知（a，b）是 M的球面对。然后，结合命题5.2以及证明命题4.9中用于确定 C的同伦等价的论证，即可得到该定理。□

在消除 1.8 中的同调挠元后，可以得到一个类似于定理 M的结果。令 $\mathcal{W}$ 表示以下空间类。空间 Y 属于 $\mathcal{W}$ 当且仅当 Y 与单连通球面的有限型楔和同伦等价。

引理 5.7。令 M为一个（$l-1$）-连通的 *Poincaré* 对偶复形，其维数为 $n \leq 3l-1$，且满足$l \geq 2$。在对任意素数 p局部化之后，其中 p作为 $H_*(M; \mathbb{Z})$-挠元出现；以及对满足 $2p \leq n-2l+3$、$X_{M,k} \simeq M \in \mathcal{W}$的任意素数 p局部化之后，均有上述结论。

证明。由庞加莱对偶性及假设，M的 $(n-1)$-骨架 M是 $(l-1)$-连通的，且维数为 $n-l$。由于 $n-l \leq 2l-1$和 $l \geq 2$，根据 [ST25，引理 7.7]，$X_{M,k} \simeq M \in \mathcal{W}$在对任意以 p-挠元形式出现在 $H_*(M; \mathbb{Z})$ 中的素数 p，以及满足$2p \leq (n-l)-l+3$的任意素数 p之外进行局部化后成立。□

定理 *5.8.* 设 M是一个维数为 $n \leq 3l-1$且满足 $l \geq 2$的 $(l-1)$-连通庞加莱对偶复形。设 d_i是 M的第 i个贝蒂数。假设存在 $(a,b) \in H^m(M; \mathbb{Z}) \times H^{n-m}(M; \mathbb{Z})$，使得 $l \leq m \leq n-l$，$a^2 = 0$，$b^2 = 0$和 $\langle a \cup b, [M] \rangle = \pm 1$成立。那么，在对任意以 p-挠元形式出现在 $H_*(M; \mathbb{Z})$ 中的素数 p，以及满足$2p < \max(m, n-m) + 4$的任意素数 p之外进行局部化后，对任意 $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$，以下结论成立：

- 存在一个同伦余纤维化

$$S^{n-1} \longrightarrow S^m \vee S^{n-m} \vee C \longrightarrow X_{M,k},$$

其中

$$C \simeq \Big(\bigvee_{d_m - 1} S^m \Big) \vee \Big(\bigvee_{d_{n-m}-1} S^{n-m} \Big) \vee \Big(\bigvee_{\substack{i \neq m, n-m \\ l \leq i \leq n-l}} \bigvee_{d_i} S^i \Big);$$

- 存在一个同伦纤维化

$$(P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m}) \longrightarrow X_{M,k} \longrightarrow S^m \times S^{n-m};$$

- 该同伦纤维化在取环路后分裂，从而得到一个同伦等价

$$\Omega X_{M,k} \simeq \Omega(S^m \times S^{n-m}) \times \Omega\big((P^n(k) \vee C) \rtimes \Omega(S^m \times S^{n-m})\big).$$

证明。 将任何作为 $H_*(M;\mathbb{Z})$ 的 p-挠元出现的素数 p，以及满足$2p < \max(m, n-m) + 4$ 的任何素数 p 局部化掉。注意

$$(\max(m, n-m)+4) - (n-2l+4) = \max(m-n+2l, 2l-m) \geq \max(m-l+1, 3l-n) \geq 1.$$

那么，引理5.7可用于证明$X_{M,\,k} \simeq M \in \mathcal{W}_\circ$由于 $\overline{\langle a \cup b,\ [M]\rangle} = \pm 1$，类 a和 b 是无限阶生成元，因此存在映射

$$s_1 : S^m \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow M \quad \text{and} \quad s_2 : S^{n-m} \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow M$$

使得 $s_1^*(a)$ 和 $s_2^*(b)$ 分别是 $H^m(S^m;\mathbb{Z})$ 和 $H^{n-m}(S^{n-m};\mathbb{Z})$ 的生成元。结合 $a^2 = 0$和 $b^2 = 0$这一假设可知，$(a,\ b)$ 是 M的一个球面对。于是，结合命题5.2以及命题4.9证明中用于确定 C的同伦等价的论证，即可得到该定理。□

当 $k = 1$时，Stanton-Theriault [ST25，定理1。4] 以及 Basu-Basu [BB19] 通过不同的方法证明了环空间分解。特别地，定理5.8 可视为对他们结果的推广。

注记 5.9. 将任意素数 p局部化掉，只要该素数是 p 的挠元 $H_*(M;\ \mathbb{Z})$ 的组成部分；还要将满足 p条件 $2p < \max(m, n-m) + 4$的任意素数局部化掉。对于复形 $X_{M,\,k}$其中 $k \neq 0$ 见定理 5.8，按照证明 [ST25定理 8 时所用的相同论证，4], 由定理 1.4可推出存在一个 Hopf 代数同构:

$$H_*(\Omega X_{M,k}) \cong TV/(kI) \cong T\Big(\bigoplus_{i=l}^{n-l} V_i\Big)/(kI),$$

其中自由局部模 V_i 的度为 i，秩为 d_i，并且 I 是 V的生成元的单项式之和。此外，若 $n \geq 3l-2$，I 根据 [ST25注记 8，5]是二次的。

注记 5.10. 在定理 1.8 和 5.8中，假设 M 满足以下条件之一:

- n 为偶数，且 $H_{\text{奇数}}(M;\mathbb{Q})$ 非平凡；或
- n 为奇数，且 $H_{\text{奇数}<\frac{n+1}{2}}(M;\mathbb{Q})$并非平凡的。

于是，由庞加莱对偶性，存在一对（$a,\ b$），满足定理 .

References

[Bas19] Sa. Basu，关于（$n-1$）连通的（$2n+1$）维流形上的环空间的同伦类型， *Algebraictopology and related topics* 第 1–25 页，Trends. Math.，Birkhauser/Springer，新加坡，2019。1[BB18] Sa. Basu 和 So. Basu，高度连通流形的同伦群， *Adv. Math.* **337**（2018），363–416。1[BB19] Sa. Basu 和 So. Basu，通过环空间同调研究某些高度连通流形的同伦群，

Osaka J. Math. **56**（2019），417–430。1，5.3

[BT14] P. Beben 和 S. Theriault，《单连通四维流形及其推广的环空间同伦型》， *Adv. Math.* **262** (2014), 213-238. 1, 1, 2.9

[BT22] P. Beben 和 S. Theriault, 《高度连通 Poincar´é 对偶复形的环空间同伦型》, *Doc. Math.* **27**(2022), 183-211. 1, 1, 1, 2.2[BW15] P. Beben 和 J. Wu, 《取环路后 Poincar´é 对偶复形的同伦型》, *Proc. Edinburgh Math.Soc.* **58** (2015), 581-616. 1, 1[Boy22] G. Boyde, 《通过 K-理论实现同伦群的 p-双曲性》, *Math. Z.* **301**(2022), 977-1009. 1, 4.1, 4.2[Boy24] G. Boyde, 《通过同调实现 $\mathbb{Z}/p^r$-双曲性》, *Israel J. Math.* **260** (2024), no. 1, 141-193. 1, 4.1, 4.1, 4.6[BH24] G. Boyde 和 R. Huang, 《同伦群中挠元的一些渐近公式》, *Canad. J. Math.* 第 76 卷 (4) 2024, 第 1339-1357 页。1[Bur22] R. Burklund, 《球面的稳定同伦群有多大》, 附录与 A. Senger 合作撰写, 预印本, 2022, arXiv:2203.00670。4.6[Coh89] F. R. Cohen, 《环空间在拓扑学若干问题中的应用》, 载于 *Advances in homotopy theory(Cortona, 1988)*, 11-20, 伦敦数学会讲义系列 139, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1989。4.2[CMN79] F. R. Cohen、J. C. Moore 和 J. A. Neisendorfer, 《同伦群中的挠元》, *Ann. of Math. (2)* **109**(1979), no. 1, 121-168. 4.2[CMN87] F. R. Cohen、J. C. Moore 和 J. A. Neisendorfer, 《同伦论中的指数》, 载于 *Algebraic topologyand algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983)*, 3-34, 数学年刊研究 113, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1987。4.2[FHT82] Y. F´elix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas, 《有限复形的同伦李代数》, *Inst. Hautes ÉtudesSci. Publ. Math.* **56** (1982), 179-202. 1[FHT09] Y. F´elix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas, 《有限 1-连通复形的同伦群秩的指数增长与渐近公式》, *Ann. of Math.* **170**(2009), 443-464. 1[HL87] S. Halperin 和 J.-M. Lemaire, 《分次李代数中的惰性序列》（“谋杀案剖检 II”）, *Math. Scand.* **61** (1987), 39-67. 1, 5.2[Hua23] R. Huang, 《4维流形上的 6维流形的环同伦》, *Alg. Geom. Topol.* **23**(2023), 2369-2388. 1[Hua24] R. Huang, 《惰性顶胞腔附加的比较技巧》, 预印本, 2024, arXiv:2408.10716。1, 1, 2.10, 4.2, 4.2[Hua25] R. Huang, 《局部双曲性、惰性映射与 Moore猜想》, 预印本, 2025, arXiv:2504.09787。3.1[HT22] R. Huang 和 S. Theriault, 《$(2n-2)$-连通 $(4n-1)$-维 Poincar´é 对偶复形的环空间分解》, *Res. Math. Sci.* **9** (2022), no. 3, Paper No. 53, 24 pp. 1, 2.10[HT24] R. Huang 和 S. Theriault, 《自由环空间有理同调及挠同伦群中的指数增长》, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **74** (2024), no. 4, 1365-1382. 1[HW20] R. Huang 和 J. Wu, 《悬挂有限复形的同伦群的指数增长》, *Math. Z.* **295**(2020), 1301-1321. 1, 4.1, 4.1, 4.2[Sta25] L. Stanton, 《与二维单纯复形相关的矩-角复形的环空间分解》, 即将发表于 *Proc. Edinb. Math. Soc.*, arXiv:2407.10781。4.3[ST25] L. Stanton 和 S. Theriault, 《其 $(n-1)$-骨架为余H-空间的 n-维 Poincar´é 对偶复形的环空间》, 即将发表于 *Trans. Amer. Math. Soc.*, arXiv:2502.15385。1, 1, 4.2, 5.3, 5.3, 5.3, 5.9[The24a] S. Theriault, 《取环路后具有截面的同伦纤维化》, *Mem. Amer. Math. Soc.* **299** (2024), no. 1499, v+101pp. 1, 2.10, 4.2[The24b] S. Theriault, 《Poincar´é 对偶复形中的顶胞腔附加》, 预印本, 2024, arXiv:2402.13775。1, 3.1[ZP21] Z.-J. Zhu 和 J.-Z. Pan, 《A_n^2-复形的局部双曲性》, *Homology Homotopy Appl.* **23** (2021), 367-386. 1

State Key Laboratory of Mathematical Sciences & Institute of Mathematics,
Academy of Mathematicsand Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Email address: huangrz@amss.ac.cn

URL: https://sites.google.com/site/hrzsea/