arXiv:2601.02258v1 [math.RT] 5 Jan 2026

局部相对朗兰兹对偶的范畴化

YUTA TAKAYA 和 MILTON LIN

摘要。我们在范畴化局部朗兰兹对应的框架下，表述了 Ben-Zvi、Sakel- laridis 和 Venkatesh 提出的归一化周期猜想，并研究其与区分问题的关系。受 Feng 和 Wang 在几何情形下工作的启发，在假设 GL_2 存在具有艾森斯坦相容性的范畴化局部朗兰兹对应的前提下，我们验证了岩泽–泰特周期和海克周期的该猜想。

目录

引言 2
0.1. 背景 0.2. 表述 0.3. 主要计算 1. 小型 v-叠上的 ℓ-进六函子形式体系 1.1. 六函子形式体系预备知识 1.2. 小型 v-叠上的动机六函子形式体系 1.3. 基变换到 ℓ-进系数 1.4. !-可映射的例子 1.5. Banach-Colmez 空间的上同调 2. $\mathcal{A}$侧的表述 2.1. Bun_G的回顾2.2. 相对叠 Bun_G^X2.3. Bun_G^X的基本轨迹 3. $\mathcal{A}$侧的计算 3.1. 岩泽-泰特周期 3.2. 海克周期 4. $\mathcal{B}$侧的表述 4.1. $\mathrm{Par}_{{}^L G^\wedge}$的回顾4.2. 相对谱叠 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 4.3. 向量情形下的描述 5. $\mathcal{B}$侧的计算 5.1. 岩泽-泰特 L 层 5.2. 海克 L 层 6. 归一化 6.1. 归一化 6.2. 函数方程 6.3. 归一化周期猜想 6.4. 例：伽罗瓦对称簇 6.5. 与艾森斯坦级数的相容性

7. 周期与 L-层的比较 587.1. 岩泽-泰特周期的比较 587.2. 海克周期的比较 60附录 A. 导出代数几何回顾 61附录 B. Weil-Deligne 群上同调的计算 66附录 C. 代数曲线上的经典次数归一化 70参考文献 71

引言

0.1. 背景。 在相对朗兹纲领中，人们在若干背景下研究周期与 L-函数之间的关系：整体域上自守周期积分与特殊 L-值之间的数值关系，以及局部域上的区分问题，即如何用 L-参数刻画区分表示。

在 [BZSV], Ben-Zvi、Sakellaridis 和 Venkatesh 提出了 相对朗兹对偶，旨在范畴框架中统一这一关系。对于一个连通约化群$_\sim G$ 及其对偶群 G，他们推测应当存在一种等价

$$\text{automorphic theory } \mathcal{A}_G \cong \text{spectral theory } \mathcal{B}_{\widehat{G}}$$

四维算术量子场论之间的等价，并且周期与L-函数之间的关系应当是边界理论之间等价的一个实例

$$\Theta_M \in \mathcal{A}_G \leftrightarrow \mathcal{L}_{\widehat{M}} \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$与对偶超球簇相关联（G， M）$\leftrightarrow$（G， M）。他们将这一理念应用于整体域，并提出了关于周期积分和 L-值的一般数值猜想。

本文在 [FS24]，这一几何框架下，对非阿基米德局部域进行类似的构造；该框架可视为附属于极化对偶超球簇的边界理论[1] $(G,\ T^*X) \leftrightarrow (\widehat{G},\ T^*\widehat{X})$。我们发现，由此得到的框架为研究区分问题提供了自然的几何情形。

0.2. 表述。 设 F 是一个剩余特征为 p 的非阿基米德局部域。设 G 是定义在 F 上的连通准分裂约化群。再取一个素数 $\ell \neq p$。在引言中，我们固定一个系数环 $\mathbb{Q}_\ell$ 并选取 $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}_\ell$。设${}^LG$ 是 L-群，定义在 $\mathbb{Q}_\ell$上。在 [FS24], 中，范畴化局部朗兰兹对应表述为一个范畴等价

$$\mathbb{L}_G \colon \mathcal{D}_{\text{lis}}(\text{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \text{IndCoh}(\text{Par}_{{}^LG}).$$

在此，Bun_G 是一个 v-叠，用于分类 GFargues-Fontaine曲线上的-主丛；而$\text{Par}_{{}^LG}$ 是 L-参数取值于 ${}^LG$ 的叠。此类等价的存在性仍是一个悬而未决的问题；文献中唯一得到全面确立的情形是环面（参见 [Zou 24]）。

[1]对偶超球簇并不 总是极化的。

0.2.1. 的 $\mathcal{A}$一侧。 首先，我们说明 $\mathcal{A}$一侧的情况。设 k 是 F剩余域的一个代数闭包。设 Perf 是 v上的完美空间位点，并令 k ，设$\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}} \subset \mathrm{Perf}$是由严格全不连通空间组成的子位点。对于每个 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，代数 Fargues-Fontaine曲线 X_S^{alg} 定义见 [FS24，第67]页。于是，我们可以将Bun_G 描述为一个映射叠

$$\mathrm{Bun}_G(S) = \mathrm{Map}(X_S^{\mathrm{alg}}, [*/G]), \quad S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}.$$

现在，设 X 是一个正规拟射影 G-簇。按照原始定义 [BZSV， （10.6）], 我们将预层 Bun_G^X 定义为 G-丛及其 X-截面的映射叠

$$\mathrm{Bun}_G^X(S) = \mathrm{Map}(X_S^{\mathrm{alg}}, [X/G]), \quad S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}.$$

这与 $\mathcal{M}_{[X/G]}$ 中记作 [Ham22], 的对象相同，但我们更改了记号，以与 [BZSV]保持一致。令 $\mathrm{Bun}_G^1 \subset \mathrm{Bun}_G$ 为平凡轨迹，它是一个与 $[*/G(F)]$同构的开子栈。于是，Bun_G^X具有以下基本性质。

命题 1. （命题 2.13和命题 2.20）预层 Bun_G^X 是一个 v-叠于 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$ ，并且可以扩展为一个 *Artin* v-叠于 Perf。存在一个开闭浸入

$$i_X^1 \colon \underline{[X(F)/G(F)]} \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G^X \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^1$$

在 $\mathrm{Bun}_G^1 \cong \underline{[*/G(F)]}$ 上；若 X 是拟仿射的，则它是一个同构。

第一部分在 [Ham22] 中 X 光滑时已得到证明，但我们给出一个基于 Sumihiro 定理的不同证明 [Sum75]。

令 $\pi_X \colon \mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_G$ 为自然映射。为引入周期层，我们需要一个函子 $\pi_{X!}$。为此，我们需要替换层论，因为光滑-étale 层不提供下叹号函子。专家们早已注意到这一缺陷。人们原本期待通过动机六函子形式体系 [Sch24], 解决这一问题，而基于 [Sch24] 构造ℓ-adic 六函子形式体系的方法见于 [HHS24，记号]。在第 1 节中，我们详细介绍这一 ℓ-adic 六函子形式体系。按照 [Sch25], ，小 v-叠 S上的层论记作 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(S, \mathbb{Q}_\ell)$。

在命题2.14中，我们证明 π_X 在！-形式体系中是 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}$-可的，并定义未归一化周期层 $\mathcal{P}_X = \pi_{X!}\mathbb{Q}_{\ell\circ}$ 根据命题1， $\mathcal{P}_X|_{\mathrm{Bun}_G^1}$包含 $C_c^\infty(X(F)\ \mathbb{Q}_\ell)$ 作为一个直和项，因此可以将其视为 X的 Schwartz 空间的几何化。

为了引入归一化周期层，我们先引入次数层

$$\underline{\deg} \in \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

如同几何情形 [BZSV中的注记 10.4。1] （参见定义 6.1）。这里，我们需要选取$\sqrt{q} \in \mathbb{Q}_\ell$, 它类似于几何情形中的典范层的平方根。现在，假设 X 是光滑的。的典范丛提供了 X

$$\Omega_X^{\mathrm{top}} \colon [X/G] \to [*/\mathbb{G}_m].$$

定义 2. (定义 6.3) 设 $\omega_X \colon \mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 为满足 Ω_X^{top} 的复合映射。我们将与 X 相关的归一化周期层定义为

$$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}} = \pi_{X!}\omega_X^* \underline{\deg}.$$

当 X 具有一个处处不消失的特征体积形式，其特征标为 $\eta_X\colon G\to\mathbb{G}_m$时，我们有 $\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}=\mathcal{P}_X\otimes\eta_X^*$度 (见命题 6.4)。即使 X是正规的，我们的归一化仍然适用。设 $P\subset G$ 为一个抛物子群，其 Levi 子群为 M。在命题 6.37中，我们证明了与几何艾森斯坦级数的相容性

$$\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{G\times^P X}=\mathrm{Eis}_{P!}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X)$$

对于每个光滑拟射影 M-簇 X。我们可以将 $\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$视为半密度空间的几何化。

0.2.2. 关于 $\mathcal{B}$侧。 接下来，我们解释 $\mathcal{B}$侧的情况。由于我们在特征 0 下工作，因此我们使用 Weil-Deligne L参数的叠，如 [Zhu21第 3 节所述。1]。令$Z^1(\mathrm{WD}_F,{}^LG)$ 为取值于 L 的 Weil-Deligne ${}^LG$参数模空间。商叠 $[Z^1(\mathrm{WD}_F,{}^LG)/\widehat{G}]$ 称为 L参数叠。

尽管这一模空间通常只在经典 $\mathbb{Q}_\ell$-代数上考虑，但[Zhu21，注 3.14] 以及 [FS24，命题 VIII.21] 中指出，该定义可以扩展到动画 $\mathbb{Q}_\ell$- 代数。这一扩张对我们的目的十分重要，因为相对谱叠通常具有非平凡的导出结构。

令 $\mathrm{WD}_F=\mathbb{G}_a\rtimes W_F$为定义在 $\mathbb{Q}_\ell$上的 Weil-Deligne 群概形。令 Q 为 W_F的一个有限商，使得 W_F在 $\widehat{G}$ 上的作用因子化为 Q。令 ${}^LG=\widehat{G}\rtimes Q$ 为 L-群 G。在第 4.1.1节中，我们验证导出映射栈

$$\mathrm{Par}_{{}^LG}=\underline{\mathrm{Map}}_{[*/Q]}([*/\mathrm{WD}_F],[*/{}^LG])$$

定义在导出 $\mathbb{Q}_\ell$-概形上的映射栈可还原为经典栈 $[Z^1(\mathrm{WD}_F,{}^LG)/\widehat{G}]$。这是 [Sch25，定义 4.3] 的一个导出增强。于是，自然地可以将相对谱叠定义为映射叠

$$\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG}=\underline{\mathrm{Map}}_{[*/Q]}([*/\mathrm{WD}_F],[\widehat{X}/{}^LG])$$

对一个导出 ${}^LG$-概形 $\widehat{X}$。我们可以证明，在对$\widehat{X}$施加适当条件时，它的表现良好。令$\mathrm{cl}\widehat{X}$ 表示 $\widehat{X}$的经典截断。

命题 3. (命题4.22) 设 $\widehat{X}$ 是一个在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上局部有限表示的导出 ${}^LG$-概形，且$\mathrm{cl}\ \widehat{X}$ 是 $\widehat{G}$-拟射影的。那么，$\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG}$ 是一个在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上局部有限表示的 1-*Artin* 叠，并且 $\pi_{\widehat{X}}\colon\mathrm{Par}^X_{{}^LG}\to\mathrm{Par}_{{}^LG}$ 是概形态的。

根据 Sumihiro 定理，当 X 是光滑拟射影${}^LG$簇时，关于 X 的条件成立。证明的关键依据是 Artin-Lurie 可表性定理。

令$\omega_{\widehat{X}}$ 为Par上的[Zhu17]-层。我们采用对偶化复形发展的归纳相干层理论，并定义未归一化的 L-层如下

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}}=\pi_{\widehat{X}*}\omega_{\widehat{X}}。$$

现在，我们将介绍[ZGSV]第10.2节中我们首先需要对Par进行$\mathbb{G}_{gr}$化 表示 $\mathbb{G}_m$ 的一个副本，并赋予 $\widehat{X}$ 一个分次，也就是说，赋予它一个与 ${}^LG$ 作用交换的左 $\mathbb{G}_{gr}$ 作用。根据 $\sqrt{q}$ 的选取，我们有一个非分歧的 L-参数 $\sqrt{\mathrm{cyc}}\colon W_F\to\mathbb{G}_{gr}$，它将 Fr 映到$q^{-1/2}$。于是，我们通过以下笛卡尔图定义归一化 $\mathrm{Par}^{X,\mathrm{norm}}_{{}^LG}$：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}_{{}^L G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}} & \longrightarrow & \mathrm{Par}_{{}^L G\times\mathbb{G}_{gr}}^{\widehat{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}} \\ \mathrm{Par}_{{}^L G} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sqrt{\mathrm{cyc}}} & \mathrm{Par}_{{}^L G\times\mathbb{G}_{gr}}. \end{array}$$

令 $\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$ 表示 $\mathrm{Par}^{X,\mathrm{norm}}_{{}^L G}$ 的对偶化复形。可以看到，$\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$ 自然地带有一个分次，因此我们有权分解和剪切

$$\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})_{\mathrm{std}^n}, \quad (\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})^{/\!/} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})_{\mathrm{std}^n}[n].$$

定义 4. (定义6.11）我们定义与 L-层相关联的归一化 X，其定义为

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} = (\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})^{/\!/}.$$

设 $Z = Z(\widehat{G})^Q$。那么，$\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G})$ 具有关于 Z 的权分解。当 $\widehat{X}$ 上的分次由中心余特征 ${}^z\chi\colon \mathbb{G}_{gr}\to {}^L G$ 给出时，$\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$可以根据 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 通过这些 Z-权重计算（见推论 6.13）。

由半圆分特征 $\sqrt{\mathrm{cyc}}$ 进行归一化令人联想到局部泰特对偶。在推论6.17中，我们验证了向量情形下的函数方程成立

$$\mathcal{L}_{V}^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{L}_{V^\vee}^{\mathrm{norm}}, \quad V\in \mathrm{Rep}({}^L G).$$

这基本上可由 [BZSV 第 11.10 节中建立的函数方程推出。2]。在命题6.40中，我们还证明了与谱艾森斯坦级数的相容性

$$\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{{}^L G\times {}^L P\,\widehat{X}} = \mathrm{Eis}_P^{\mathrm{spec}}(\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})$$

对每一对 $({}^L M,\ \widehat{X})$。

0.3. **主要计算。** 现在，我们可以将 归一化周期猜想 [BZSV，猜想 12.1。1] 转化到范畴化局部朗兰兹对应的框架中。

猜想 5. （猜想6.19）设 G 是定义在 F上的连通准分裂约化群，并固定一个 G的惠特克数据。假设存在一个范畴等价

$$\mathbb{L}_G\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G})$$

如 [FS24，猜想 X.1 中所表述的。4]。对于每一对（猜想所定义的）对偶对 $(G,\ X) \leftrightarrow ({}^L G,\ \widehat{X})$，有

$$\mathbb{L}_G(\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}) \cong \mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}.$$

尽管目前尚无对偶对 $(G,\ X) \leftrightarrow (G,\ X)$ 令人满意的一般定义，但 [BZSV表 1.5 列出了一份此类对偶对的不完全清单。1]。

受几何情形中的计算 [FW25] 启发，我们在关于 $\mathbb{L}_G$ 的某些猜想性质成立的条件下，验证了关于岩泽–泰特周期和海克周期的这一猜想。相关文献中的方法高度依赖赫克算子的 Ran 版本和手征代数理论，而这些目前尚未应用于我们的情形。我们转而基于权分解，进行更直接、更细致的计算。

0.3.1. 岩佐 *wa-Tate* 周期。 对偶对及归一化因子如下 .

G	X	${}^LG$	$\widehat{X}$	η_X	$z_{\widehat{X}}$
$\mathbb{G}_m$	std	$\mathbb{G}_m$	std	std	std

这里，std 是 $\mathbb{G}_m$ 的标准特征， η_X 是 X 的特征标，而 $\curvearrowright X$ 上的分次由中心余特征 $z_{\widehat{X}}$ 给出。展开定义后，我们可以看到

$$\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{A}^1} \to \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$$

是由 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 参数化的泛线丛的 Banach-Colmez 空间，而

$$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{A}^1} \to \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$$

是与 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$ 上泛 Weil-Deligne 表示的 Weil-Deligne 上同调相关联的导出向量丛。在 $\mathcal{A}$ 侧， $\mathcal{P}_X$ 是 Banach-Colmez 空间的紧支撑上同调，其计算广为人知（例如 [HI24，引理 2。6]）。另一方面，我们对 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 的计算基于对导出向量丛的详细研究。因此，我们得到如下相容性。

定理 6. (定理7.1 和命题 7.2) 对于岩泽–泰特周期，我们有

$$\mathbb{L}_G(\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}) \cong \mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}.$$

此外，我们有一个函数方程 $\mathcal{P}_{\mathrm{std}}^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}{}_{\mathrm{std}}$。

注意到， $\mathbb{L}_G$ 的存在性由 [Zou24] 在此情形下证明。函数方程$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{P}_{X'}^{\mathrm{norm}}$预期在相应的超球面 G-簇同构时成立： $T^*X \cong T^*X'$。对于岩泽–泰特周期，我们可以根据显式描述以及局部域上的傅里叶变换验证这一点 F。

0.3.2. 海克周期。 对偶对及归一化因子如下。

G	X	${}^LG$	$\widehat{X}$	η_X	$z_{\widehat{X}}$
GL_2	GL_2/A	GL_2	std	triv	scaling

这里，std 是 GL_2 的标准二维表示， $A = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{G}_m$, X是幺模的，并且 $\widehat{X}$ 上的分次由中心余特征 $z_{\widehat{X}}(t) = \left\{\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\right\}$ 给出。展开定义可知，

$$\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_2}^X \cong \mathrm{Bun}_A \to \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_2},$$

and

$$\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}^{\mathrm{std}} \to \mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}$$

是与 $\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}$ 上泛 Weil-Deligne 表示的 Weil-Deligne 上同调相关联的导出向量丛。令 $\mathrm{Bun}_A = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Bun}_{A,\ n}$ 为按线丛次数进行的分解。于是，我们有如下分解

$$\mathcal{P}_X = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_{X,n}, \quad \mathcal{P}_{X,n} = \pi_{X!}\underline{\Lambda}_{\mathrm{Bun}_{A,n}}.$$

在 $\mathcal{B}$ 侧，我们有一个权分解

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{\widehat{X},n}$$

相对于 GL_2 的中心。由于 Hecke 相容性，这些分解在 $\mathbb{L}_G$ 作用下应当相匹配。我们通过以下形式验证这种相容性：用几何和谱艾森斯坦级数来描述 $\mathcal{P}_{X,\,n}$ 以及 $\mathcal{L}_{\widehat{X},\,n}$ （参见命题 3.5 和命题 5.12）。

定理 7。 （定理7.3）假设 $\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}$ 存在且满足艾森斯坦相容性。对于 $n \neq 0$，我们有

$$\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X,n}) \cong \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X},n}.$$

对于 $n = 0$，纤维序列的第一项（分别是最后一项）

$$\mathcal{W}_\psi \hookrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X,0} \to \mathrm{Eis}_{B!}(i^1_! \mathrm{cInd}^{T(F)}_{A(F)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell{}^{-1/2}_{\mathrm{norm}})$$

在 $\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}$ 下映射到纤维序列的第一项（分别是最后一项）

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}} \to \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X},0} \to \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{cyc}^{-1/2}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{triv}}).$$

这里，$\mathrm{Eis}_{B!}$（分别是 $\mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_B$）表示相对于 B（分别是 B）的几何（分别是谱）艾森斯坦级数。在 $\mathcal{A}$ 一侧，$\mathcal{P}_{X,\,n}$ 针对 $n \neq 0$ 直接计算。对于 $n = 0$，通过展开技巧构造了一个表示 $\mathcal{P}_{X,\,0} = \mathrm{cInd}^{G(F)}_{A(F)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的纤维序列。

在 $\mathcal{B}$ 一侧，$\mathcal{L}_{\widehat{X},\,n}$ 的计算有些间接。与几何情形一样，我们有一个闭开分解

$$\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2} \hookrightarrow \mathrm{Par}^{\mathrm{std}}_{\mathrm{GL}_2} \hookleftarrow \mathrm{Par}_{\overline{\mathrm{Mir}}_2}.$$

这里，$\overline{\mathrm{Mir}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2$。沿用 [FW25] 的策略，我们从这个分解得到一个表示 $\mathcal{L}_{\widehat{X},n}$ 的纤维序列。当 $n \leq 0$ 时，这足以证明该结论。对于$n > 0$，纤维序列相当复杂，因此我们先使用函数方程

$$\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std},n} \cong \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std}^\vee,-n},$$

然后应用针对 $n < 0$ 的策略。

0.3.3. 与区分问题的关系。 在第 6.3 节中，我们从对赫克特征层形式的一种温和预期出发，导出归一化周期猜想的以下推论（见猜想 6.22）。

命题 8. (命题 6.23) 假设猜想 *5* 对偶对 $(G, X) \leftrightarrow ({}^L G, \widehat{X})$ 成立，且 X 是幺模的。若光滑不可约 $G(F)$-表示 π 是 X-区分的，且其 *Fargues-Scholze* 参数 $\varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$属于 *Langlands-Shahidi* 型并满足猜想 *6.22*, $\varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$则属于 $\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$的像。

在适当的条件下，我们预期 X 具有一个 L-群 ${}^L G_X \subset {}^L G$，并且如同[BZSV，第 4.1 节。1]，X 具有如下形式

$$\widehat{X} = {}^L G \times^{{}^L G_X} V$$

对于某个 $V \in$ 表示$({}^L G_X)$，其分次由 V诱导而来。于是，$\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$经过 $\mathrm{Par}^{{}^L G_X}$分解，因此在上述设定中，$\varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$应当经过 ${}^L G_X$ 的一个共轭分解。

在 [Pra15中，猜想 2]，当 X 是伽罗瓦对称簇时，提出了这一预期的一个特例，其中 $G = \mathrm{Res}_{E/F}(H_E)$，并且 $X = G/H$ 对于一个准分裂连通

约化群 H，定义在 F 上，以及可分二次扩张 E/F。在这种情形下，我们有一个 L-群 ${}^LG_X \subset {}^LG$ 和一个对偶对

$$(G, X = G/H) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X} = {}^LG/{}^LG_X).$$

结果表明，在某些条件下，归一化周期猜想也可以推出 Prasad 猜想的重数公式（参见 [BP25，猜想3。16]）。

命题9。 （命题 6.33） 设 $\varphi\colon W_E \to {}^LH(\mathbb{Q}_\ell)$ 是一个超尖点 L-参数，其中心化子为 $S_\varphi \subset H$，并设 $z_\varphi\colon [*/S_\varphi] \hookrightarrow \mathrm{Par}_{{}^LG}$。假设猜想 5 对以下对象成立：

$$(G, X = G/H) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X} = {}^LG/{}^LG_X)$$

和 $\rho_\pi \in \mathrm{Irr}(\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(Z))$ 满足 $\mathbb{L}_G(i_!^1\pi) \cong z_{\varphi *}\mathcal{O}_{\rho_\pi}$。当 H 的中心是各向异性的，

$$\dim \mathrm{Hom}(C_c^\infty(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = \sum_{\psi/\varphi} \dim \rho_\pi^{\pi_0(S_\psi)=\mathrm{id}}.$$

这里，$\psi\colon W_F \to {}^LG_X(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 遍历 φ 的所有提升（模共轭），而 $S_\psi \subset \widehat{H}$ 表示 ψ 的中心化子。此外，对于每个 $i > 0$，我们有

$$\mathrm{Ext}^i(C_c^\infty(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = 0.$$

我们预计，类似的分析将导出其他若干情形下的重数公式。对于一般的 X，探究其与局部 L^2- 猜想（Sakellaridis-Venkatesh） [SV17，猜想 16.2 的关系将会很有意义。2]。

作者贡献。 本项目起源于相对 Langlands 对偶性暑期学校，其契机是第二作者（M.L.）提出的建议。主要证明和技术性发展由第一作者（Y.T.）完成。M.L. 通过重要讨论和修改稿件作出了贡献；这项工作的一部分是在 M.L. 在台湾服兵役期间完成的。鉴于 Y.T. 在证明结果和起草稿件中发挥了主要作用，作者按此顺序列出。我们认识到，按字母顺序排列作者在数学的部分领域十分常见，因此提供这份透明的贡献声明以作说明。两位作者均批准了最终版本，并共同对研究结果负责。

论文结构。 在第1节中，我们详细介绍小型 ℓ-进六函子形式体系以及小型 v-层叠。在第2节中，我们研究叠 Bun_G^X 和未归一化周期层 $\mathcal{P}_X$的基本性质。在第 3节中，我们计算 $\mathcal{P}_X$ 岩泽–泰特周期和 Hecke 周期。在第 4节中，我们研究叠$\mathrm{Par}_{{}^LG}^X$和未归一化 L-层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$的基本性质。在第 5节中，我们计算 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 岩泽–泰特周期和 Hecke 周期。在第6节中，我们陈述归一化周期猜想，并研究其与区分问题的关系。在第 7节中，我们验证归一化周期猜想对于岩泽–泰特周期和 Hecke 周期成立。

致谢。 作者感谢 Rok Gregoric、Linus Hamann、David Hansen、Naoki Imai 和 Yiannis Sakellaridis，就本文早期版本进行的有益讨论并提出宝贵意见。第一作者谨向他的导师 Yoichi Mieda 致以谢意，感谢他始终如一的支撑与鼓励。他还要感谢 Peter Scholze，感谢他耐心解答有关动机六函子形式体系的问题 [Sch24]。

第一作者在本项研究期间获得东京大学数学科学研究院 WINGS-FMSP 项目以及日本学术振兴会科研费项目编号 JP24KJ0865 的资助。

记号。所有环均假设为交换环。固定一个素数 p 和另一个素数 $\ell \neq p$。设 F 为剩余特征为 p 的非阿基米德局部域，设 W_F 为 F 的韦伊群。设 O_F 为 F 的整数环，其一致化子为 π，并设 q 为 F 的剩余域中元素的个数。

设 S 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个完美空间。与 S 相关联的 F 上的 Fargues-Fontaine曲线记作 $\mathcal{X}_S$。它定义为解析阿迪克空间 $\mathcal{Y}_S$ 的弗罗贝尼乌斯商 $\mathcal{X}_S = \mathcal{Y}_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$。当 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 时，$\mathcal{X}_S$ 也记作 $\mathcal{X}_{(R,R^+)}$。

∞-范畴的（大） ∞-范畴记作 $\mathbf{Cat}_\infty$。以保余极限函子为态射的可呈现（分别为稳定） ∞-范畴的（大） ∞-范畴记作 $\mathbf{Pr}^L$（分别记作 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{st}}$）。$\infty$-群胚的（大） ∞-范畴记作 $\mathbf{Ani}$。∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的（富化）映射空间记作 $\mathbf{Map}_{\mathcal{C}}(-, -)$，而同伦范畴 $h\mathcal{C}$ 中（富化）的同态集合记作 $\mathbf{Hom}_{h\mathcal{C}}(-, -)$。特别地，$\pi_0\mathbf{Map}_{\mathcal{C}}(-, -) \cong \mathbf{Hom}_{h\mathcal{C}}(-, -)$。当 $\mathcal{C}$ 可由上下文确定时，它们简记为 $\mathbf{Map}(-, -)$ 和 $\mathbf{Hom}(-, -)$。在某些语境中，$\mathcal{C}$ 富化于导出范畴 $D(\mathbb{Q}_\ell)$。

代数群的有限维代数表示所构成的阿贝尔范畴G 记作$\mathrm{Rep}(G)$。关于导出代数几何的约定，参见附录 A 。对于动画环 R，R-模的导出范畴记作 $D(R)$。

1. An ℓ-adic six functor formalism on small v-stacks

本节将详细介绍小 ℓ-叠上的v-进六函子形式体系，遵循 [HHS24，记号]中的构造。它本质上是通过基变换从动机六函子形式体系 [Sch24]得到的。与 étale 六函子形式体系 [Sch17], 不同，系数环可以取为任意 $\mathbb{Z}_\ell$-代数。此外，与 lisse-étale 五函子 [FS24], 相比，切除在许多情形下成立，而且可用于应用的!-able 态射类足够大。

1.1. 六函子形式体系预备知识。

本节回顾 [HM24]中提出的六函子形式体系延拓过程。首先回顾其定义。

定义 1.1. 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设定。3-函子形式主义是一个松对称幺半函子

$$\mathcal{D}\colon \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{Cat}_\infty;$$
$$\left(X \xleftarrow{g} W \xrightarrow{f} Y\right) \mapsto f_! g^*\colon \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y).$$

若右伴随函子 $\mathbf{Hom}$ $f_*, f^!$ 存在，则称其为六函子形式体系。若 $\mathcal{D}$ 可经由 $\mathbf{Pr}^L$因子分解，则称其为可呈现的。当 $\mathcal{C}$ 是一个位点时，若 $\mathcal{D}$ 满足沿每个 Čech 神经的下降条件，则称 $\mathcal{D}$ 具有层性。

六函子形式体系的一种典型构造可归纳为以下形式。

命题 1.2. ([HM24，命题 1.2。5], [Man22，命题 A.5。10]) 设 $(\mathcal{C}, E)$ 是一个几何设定，且 $\mathcal{C}$ 存在拉回，并设 $I, P \subset E$ 是一个适当分解。设 $\mathcal{D}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}_\infty)$ 是一个满足以下条件的函子。

(1) 对所有 $j \in I$，j^* 都有一个左伴随 $j_!$，满足基变换和投影公式。*(2)* 对所有 $g \in P$，g^* 都有一个右伴随 g_*，满足基变换和投影公式。

(3) 对每个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，对于 $j \in I$ 和 $g \in P$，自然变换 $j_! g'_* \to g_* j'_!$ 是一个同构。于是， $\mathcal{D}$ 扩展为一个3-函子形式体系

$$\mathcal{D}\colon \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \to \mathrm{Cat}_\infty$$

使得对于所有满足 $f = gj$ 和 $g \in P$的 $f_! \cong g_* j_!$ ，都有 $j \in I$ 。此外，若满足以下附加条件，则 $\mathcal{D}$ 扩展为一个六函子形式体系。

(1) 对于所有 $X \in \mathcal{C}$， $\mathcal{D}(X)$ 都是闭对称幺半 ∞-范畴。*(2)* 对于所有 $f\colon Y \to X$， f^* 有一个右伴随 f_*。*(3)* 对于所有 $f\colon Y \to X$属于 P， f_*有一个右伴随 $f^!$。

这一构造还可以按以下方式进一步扩展。

命题 1.3。 ([HM24，定理 3.4。11]) 设 $\mathcal{D}$ 是几何设定 $(\mathcal{C}, E)$ 上的一个层状可呈现六函子形式体系，其中 $\mathcal{C}$ 是一个次典范 *site*。则存在一组边 E' 于 $\mathrm{Shv}(\mathcal{C})$ 使得

(1) $\mathcal{D}$ 唯一延拓为层化可呈六函子形式体系 $\mathcal{D}'$ 于 $(\mathrm{Shv}(\mathcal{C})\ E')$上。*(2)* E' 在目标上是 $*$-局部的，并且在源和目标上都是 !-局部的。*(3)* E' 是驯顺的： E' 中每个目标属于 $\mathcal{C}$ 的 *Map*，在源上 !-局部地属于 E。

1.2. **小型 v-层叠上的动机六函子形式体系**。 本节回顾 [Sch24]中发展起来的动机六函子形式体系，并证明之后将用到的基本性质。为便于使用，我们采用了与 [Sch24] 不同的一组生成对象。

令 k 为 $\mathbb{F}_p$的代数闭包。令 Perf 为完美空间在k上的范畴。它带有一个次典型的 Grothendieck 拓扑，称为 v-拓扑，该拓扑比 pro-étale 拓扑更精细。

定义 1.4。 Perf 中的一个态射族 $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ 称为 v-覆盖，如果对于任意拟紧开子集 $U \subset X$，都存在一个有限子集 $J \subset I$ 以及一个拟紧开子集族 $\{V_j \subset Y_j\}_{j\in J}$，使得 $U = \bigcup_{j\in J} f_j(V_j)$。

Perf 上赋予 v-拓扑的层（分别地，叠）称为 v-层（分别地， v-叠）。

定义 1.5。 ([Sch17，定义 12。4])

(1) 若一个 v-层 Y 存在一个来自完美空间 X的满射 $X \twoheadrightarrow Y$，则称其为小的 。(2) 若一个 v-叠 Y 存在一个来自完美空间 X 的满射 $X \twoheadrightarrow Y$，且 $X \times_Y X$ 是一个小的 v-层，则称其为小的 。

令 vStack 表示 Perf 上小的 v-叠所成的范畴。Perf 上还有一种更强的拓扑，称为*arc* 拓扑。

定义 1.6。 Perf 中一族态射 $\{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ 称为弧覆盖，若对于任意拟紧开子集 $U \subset X$，都存在有限子集 $J \subset I$ 以及一族拟紧开子集 $\{V_j \subset Y_j\}_{j\in J}$，使得 U 中的每个秩 1 点都能提升到某个 $j \in J$对应的 V_j。

换言之，弧覆盖只确保秩1赋值存在提升。与 v-拓扑中一样，我们有 Perf 上（小）弧叠的概念。对于 k 上的完美拟 Huber 对 (R, R^+)，$\mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是弧覆盖。这里，$R^\circ \subset R$ 表示拓扑有界元素的集合。于是，弧叠自然可视为完美 Tate k-代数的弧网站点 Perf' 上的层叠。按照 [Sch24 第 12], 节的记法，令 $\mathrm{arcStack}'$ 表示 Perf' 上小弧叠所成的范畴。

定义 1.7. 令 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$ 表示由完美拟塔特k-代数 R 表示的小弧层。它称为仿射弧层。

存在一个自然的拉回函子

$$a'^*\colon \mathrm{vStack} \to \mathrm{arcStack}'$$

由以下网站点态射诱导

$$\mathrm{Perf} \to \mathrm{Perf}', \quad (R, R^+) \mapsto R.$$

它将小 v-叠 X 送到函子 $R \mapsto X(R, R^\circ)$ 的弧层化 $a'^* X$，其中 $R \mapsto X(R, R^\circ)$ 对应于一个完美拟塔特 k-代数 R。特别地，$\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 被映到 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$。

arcStack 上的 étale 动机层理论$\mathrm{arcStack}'$ 是在 [Sch24] 中建立的。我们将六函子形式体系记作

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{arcStack}', E') \to \mathrm{Pr}^L, \quad X \mapsto \mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(X).$$

它首先由命题1.2 构造而得：将仿射弧层之间有限上同调维数的准紧拟分离映射视为真映射，然后通过命题弧叠′ 1.3将其延拓（并加以限制）到。

在 vStack 上获得六函子形式体系的一种方法，是沿着 a'^* 拉回上述六函子形式体系。为便于使用，我们将采用一个小的修改。我们先从回顾小弧叠的一些几何性质开始。

任意完美拟一致 Tate k-代数 R 都可以通过选择一个伪一致化子 $\varpi \in R$赋予半范数。随后，可以为其赋予 Berkovich 谱 $\mathcal{M}(R)$，该谱与 $\varpi \in R$ 的选择无关。为方便读者，我们回顾其定义。

定义 1.8。 赋半范数环 $(A, |\cdot|_A)$ 的 ***Berkovich*** 谱 $\mathcal{M}(A)$ 是 $\prod_{a \in A}[0, |a|_A]$ 的闭子空间，由有界乘法半范数组成。

命题 1.9. 设 X 是Perf' 上的一个小弧栈。取一个满射 s

$$Y = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R_i) \to X, \quad Z = \bigsqcup_{j \in J} \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(S_j) \to Y \times_X Y$$

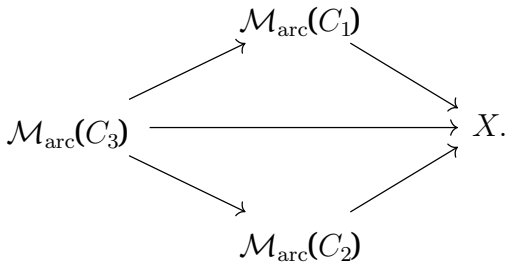
来自仿射弧层的不交并。那么，拓扑商空间

$$\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}(R_i) / \bigsqcup_{j \in J} \mathcal{M}(S_j)$$

是独立的 与满射的选择无关，并且与点的等价类一一对应

$$\{\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C) \to X\} / \sim$$

来自 C 上方的完美化域 k。这里，如果在每个点上方都存在一个点 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C_3) \to X$，使得存在交换图，那么两个映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C_i) \to X$ $(i = 1,2)$ 等价



证明。与 [Sch17，命题 11 中相同的论证13] 在我们的情形下同样成立。为方便读者，我们在此简要回顾一下。

(1) 首先，我们需要证明点集上的双射性。对于满射性，我们总可以将映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C) \to X$ 弧局部地提升到 Y。单射性源于这样一个事实：任意两个点 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C_i) \to \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ $(i = 1, 2)$ 根据 [Sch24, Proposition 3.2(i)] 都有公共细化$\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C') \to \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C_i)$ $(i = 1, 2)$。(2) 接下来，我们需要证明商拓扑的独立性。这是因为弧覆盖 $R \to S$ 诱导出商映射 $\mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(R)$，因为紧豪斯多夫空间之间的任意满射都是商映射。

□

定义 1.10. 对于小弧栈 X，取命题 1.9中的满射。令 $\mathcal{M}(X)$表示商空间 $\bigsqcup_{i\in I}\mathcal{M}(R_i)/\bigsqcup_{j\in J}\mathcal{M}(S_j)$，它与我们所作的选择无关。对于小 v-叠 X，我们不严谨地将 $\mathcal{M}(a'^*X)$ 记为 $\mathcal{M}(X)$。

定义 1.11. 设 $f\colon Y \to X$ 是小弧叠之间的一个映射。若存在一个开（分别地，闭）子集 $W \subset \mathcal{M}(X)$，使得对于每个完美 Tate k-代数 R，$f(R)$ 都将 $Y(R)$ 与 $X(R)$ 的全子群胚等同起来，其中该全子群胚由满足 $\mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(X)$ 经由 W 分解的映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R) \to X$ 组成，则称 f 是一个开（分别地，闭）浸入。

注 1.12. 此定义与 [Sch24，定义 4.21] 相容。若要从 loc. cit. 意义下的开浸入恢复 $W \subset \mathcal{M}(X)$，我们取命题 1.9中的覆盖，并将 $\mathcal{M}(Y)$ 上的一个开子集下降到 $\mathcal{M}(X)$。同理可证，开（分别地，闭）浸入可以在弧局部检验。

引理 1.13. 对于任意小的 v-叠 X，存在连续满射 $|X| \to \mathcal{M}(X)$。若X 是准紧准分离的，则 $\mathcal{M}(X)$ 可识别为 $|X|$ 的最大豪斯多夫商。

证明。对于第一个断言，取来自仿射完美空间的不交并 Y 和 Z 的 v-覆盖 $Y \to X$ 和 $Z \to Y \times_X Y$。于是，$|X|$ 是一个商空间 $|Y|/|Z|$。由于层化保有效满态射和有限极限，$\mathcal{M}(X)$ 可识别为商空间 $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(Z)$。对每个仿射完美空间 Y，都存在连续满射 $|Y| \to \mathcal{M}(Y)$（参见 Sch17，命题 13.9]），故断言成立。

现在转而考虑 X 为准紧准分离的情形。此时，Y 和 Z 可以取为仿射完美空间。于是，由 $\mathcal{M}(Z)$ 给出的 $\mathcal{M}(Y)$ 的等价关系是闭的，因此 $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(Z)$ 是紧致且豪斯多夫的。由此，$\mathcal{M}(X)$ 是紧致且豪斯多夫的，所以 $|X| \to \mathcal{M}(X)$ 经由最大豪斯多夫商 $|X|^B$ 分解。根据 [Sch17，命题 13.9]，$|Y| \to |X|^B$（分别地，$|Z| \to |X|^B$）唯一地经由 $\mathcal{M}(Y)$（分别地，$\mathcal{M}(Z)$）分解。由唯一性，

序列 $\mathcal{M}(Z) \rightrightarrows \mathcal{M}(Y) \to |X|^B$ 诱导出 $\mathcal{M}(X) \to |X|^B$，因此 $\mathcal{M}(X)$ 可与 $|X|^B$ 识别。□

引理 1.14。

(1) 若小 v-叠 X 是拟紧的（分别地，拟分离的），则 $a'^* X$ 是拟紧的（分别地，拟分离的）。*(2)* 若小 v-叠之间的映射 $f\colon Y \to X$ 是拟紧的（分别地，拟分离的），则 $a'^* f$ 是拟紧的（分别地，拟分离的）。

证明。若 X 是拟紧的，则存在一个仿紧完美空间 Y在 k上的 v-覆盖 $Y \to X$ 。于是，$a'^* X$ 是拟紧的，因为层化保持有效满态射，且$a'^* Y = \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$是拟紧的。现在，其余所有断言都形式上来自$a'^*$ 保持有效满态射和有限极这一事实。□

我们将把准紧准分离的 v-层作为六函子形式体系的生成对象。为了介绍它们之间的!-可容许态射，我们先回顾几类态射。

定义 1.15。小弧叠之间的 0-截断映射 $f\colon X \to Y$ 称为真 的，若它是准紧准分离的。

定义 1.16。([Sch24，定义 4.10，命题 4。12]) 设

$$\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(X_{\mathrm{arc}}, \mathbb{Z})$$

表示小弧栈 X 上有限型 arc-层的稳定 ∞-范畴，它等价于由 Perf′ 中严格全不连通对象（位于X 上）到 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 的函子构成的 ∞-范畴，这些函子与有限积及滤过余极限相容。它带有由 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 诱导的自然 t-结构。

约定 1.17。 X 上的有限型层指 $\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X, \mathbb{Z})$ 心中的对象。

定义 1.18。([Sch24，定义 4。17]) 对于小弧栈 X，令 $d(X)$ 表示整体截面函子的上同调维数

$$\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}(X, \mathbb{Z}) \to \mathcal{D}(\mathbb{Z}), \quad M \mapsto M(X).$$

定义 1.19。([Sch24，定义 4。19]) 设 $f\colon Y \to X$ 是一个小弧叠之间的 0-截断真映射。

(1) 如果对所有几何点 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C) \to X$， f 的 $Y \times_X \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ 的上同调维数都有一个统一上界，我们就称 f 具有有限上同调维数。这里， C 是 k 上的代数闭完美域。上述上同调维数的最大值记为 $d(f)$。(2) 如果将 f 基变换到 X 上的每个准紧准分离 arc- 层 Z 后都具有有限上同调维数，我们就称 f 具有局部有限上同调维数。

注意，(2) 与 [Sch24，定义 4 略有不同。19], 但我们认为，为了说明引理 1.20 中的稳定性，作出上述定义是自然的。

引理 1.20。设 $f\colon Y \to X$ 和 $g\colon Z \to Y$ 是小弧栈之间的映射。假设 f 是 0-截断的、真且具有局部有限上同调维数。

(1) 沿小弧叠的任意映射 $W \to X$ 对 f 作基变换后，所得映射是 0-截断的、真且具有局部有限上同调维数。*(2)* 若 f 具有有限上同调维数，则对所有严格全不连通空间 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R) \to X$， $Y \times_X \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$ 的上同调维数均由 $d(f)$ 控制。

(3) 若 g 是 0-截断的、真且 f 和 g 具有（分别）有限（局部有限）上同调维数，则 $f\circ g$ 是 0-截断的、真，且其上同调维数（分别）有限（局部有限），直至 $d(f)+d(g)$。*(4)* 若 $f\circ g$ 是 0-截断的、真且具有局部有限上同调维数，则 g 也满足同样性质。

证明。首先，(1) 由定义立即得出，而 (2) 已基本证明于[Sch24，定理 4。20]。为方便读者，我们进一步说明 (2)。

对于 (2)，我们可以假设 $X=\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R)$ 是严格全不连通的。我们证明，对于每个 Y 上的有限型层 $\mathcal{F}$，$\tau^{\geq d(f)+1}f_*\mathcal{F}=0$。只需证明，对于每个 $i>d(f)$，第 i 个上同调层 $\mathcal{H}^i(f_*\mathcal{F})$ 都消失。由 [Sch24，定理 4.20]，$f_*\mathcal{F}$ 是有限型的，并且与 X 中的基变换相容。因此，对于每个截面 $s\in\mathcal{H}^i(f_*\mathcal{F})(R)$，其在闭点 $x\in X$ 处的茎 s_x 消失，这意味着对于某个邻域 $U\subset\mathcal{M}(X)$ of x，有 $s_U=0$。因此，我们有 $s=0$。

对于 (3)，我们可以假设 f 和 g 具有有限上同调维数。设 $\mathcal{F}$ 是 Z上的一个有限型层。由 (1)，$g_*\mathcal{F}$ 的上同调次数至多为 $d(g)$。于是，$g_*\mathcal{F}$ 可写为 $\mathcal{H}^i(g_*\mathcal{F})[-i]$ 的扩张，其中 $0\leq i\leq d(f)$。由 (1)，每个 $f_*\mathcal{H}^i(g_*\mathcal{F})$ 的上同调次数至多为 $d(f)$，因此结论成立。

对于 (4)，设 $\Gamma_g\colon Z\to Y\times_X Z$ 是 g 在 X上的图。由 (1)，$\mathrm{pr}_1\colon Y\times_X Z\to Y$是 0-截断的、真的，且具有局部有限上同调维数，因此由 (3)，只需证明 Γ_g 也满足同样的性质。容易看出，Γ_g 是 0-截断且拟紧的。此外，Γ_g 是单射，因为 f 是 0-截断的。因此，Γ_g 是拟分离的，而且几何点的每个纤维要么为空，要么同构于该点本身。因此，Γ_g 具有局部有限上同调维数。□

为便于后文使用，我们给出一个有限上同调维数的判据。

引理 1.21. 对于任意一个$(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 在拟紧拟分离弧叠上的有限性层滤图（依照约定 *1.17*）X，有 (余极限$_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda)(X)\cong$ 余极限$_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(X)$。

证明。由于 X 是准紧准分离的，我们可以取一个超覆盖 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(A^\bullet)\to X$，其中 $A^\bullet$ 严格全不连通。由 [Sch24定理 4.1]，$\mathcal{F}$是超完备的，因此 $\mathcal{F}(X)\cong$极限 $\mathcal{F}(A^\bullet)$。由同上文所引处，每个 $\mathcal{F}(A^\bullet)$都与 $\mathcal{F}$中的小余极限交换。因此，我们有

$$(\text{余极限}_\lambda\mathcal{F}_\lambda)(X)\cong\lim_\Delta\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(A^\bullet)\cong\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}\lim_\Delta\mathcal{F}_\lambda(A^\bullet)\cong\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda(X)$$

这里，第二个同构成立，是因为每个 $\mathcal{F}_\lambda(A^\bullet)$ 都是静态的。□

命题 1.22. 设 X 是一个拟紧拟分离弧叠。设 $j\colon U\hookrightarrow X$ 是一个开浸入，且设 $i\colon Z\hookrightarrow X$ 是其闭补。如果 Z 以及 X 中包含于 U的每个闭子层叠的上同调维数都存在一个统一上界，则 X 具有有限上同调维数。

证明。由于 X 是准紧准分离的，根据引理 1.13，$\mathcal{M}(X)$是紧致豪斯多夫空间。令 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为由 $\mathcal{M}(Z)\subset\mathcal{M}(X)$的开邻域构成的滤过系统。令 V_λ 为V_λ的闭包。那么，它满足 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=\mathcal{M}(Z)$。令 $W_\lambda\subset X$ 为对应于 $\mathcal{M}(X)-V_\lambda$ 的闭子层叠，并令 $W_\lambda^\circ\subset X$ 为对应于 $\mathcal{M}(X)-V_\lambda$的开子栈。令$j_\lambda\colon W_\lambda\hookrightarrow X$为闭浸入，令 $j_\lambda^\circ\colon W_\lambda^\circ\hookrightarrow X$为开浸入。

由于 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{V_\lambda}=\mathcal{M}(Z)$，$\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}j_{\lambda!}^\circ j_\lambda^{\circ*}\to j_!j^*$ 是一个同构。对于 $\mathcal{F}$ 上的 X，由 [Sch24，命题 4，我们得到一个有限型层的短正合列。25]

$$\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}j_{\lambda!}^\circ j_\lambda^{\circ*}\mathcal{F}\to\mathcal{F}\to i_*i^*\mathcal{F}.$$

由引理 1.21，我们得到一个短正合列

$$\mathrm{colim}_{\lambda\in\Lambda}(j^{\circ}_{\lambda!}j^{\circ *}_{\lambda}\mathcal{F})(X)\to\mathcal{F}(X)\to(i^{*}\mathcal{F})(Z).$$

由于 Z 具有有限上同调维数，$(i^{*}\mathcal{F})(Z)$也具有有限上同调维数。另一方面，由于 $\mathcal{M}(W^{\circ}_{\lambda})\cap V_{\lambda}=\phi$，每个 $(j^{\circ}_{\lambda!}j^{\circ *}_{\lambda}\mathcal{F})(X)$ 都等于 $(j^{*}_{\lambda}j^{\circ}_{\lambda!}j^{\circ *}_{\lambda}\mathcal{F})(W_{\lambda})$。因此，其上同调维数有限，且不超过 W_{λ} 的上同调维数。□

构造 1.23。 令 $\mathrm{vShf}^{\mathrm{qcqs}}$ 表示准紧准分离 v-层的位点，并令 E^{qcqs} 为态射 f 的集合，其中这些态射属于 $\mathrm{vShf}^{\mathrm{qcqs}}$ ，且满足 $a'^{*}f$ 具有有限上同调维数。根据 [Sch24，推论 10，2], 我们可以将命题 1.2 应用于 $I=\{\mathrm{id}\}$ 和 $P=E^{\mathrm{qcqs}}$，从而得到层化可呈六函子形式体系

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{vShf}^{\mathrm{qcqs}},E^{\mathrm{qcqs}})\to\mathrm{Pr}^{L},\quad X\mapsto\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(X)=\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(a'^{*}X).$$

我们通过应用命题 1.3 对输出取全子范畴$\mathrm{vStack}\subset\mathrm{Shv}(\mathrm{vShf}^{\mathrm{qcqs}})$。然后，我们得到一个六函子形式体系

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{vStack},E)\to\mathrm{Pr}^{L},\quad X\mapsto\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(X).$$

如果 vStack 中的一个态射属于 E，我们就称它是 !-可的。

注记 1.24。 我们需要谨慎看待这样一个事实： !-可态射的类别与 [Sch17] 中研究的挠情形不同。在该文中，小 v-叠的一个映射是 !-可的，当且仅当它是可紧化的、在局部空间化菱形中可表的，且局部 dim.trg$f<\infty$。

1.3. **基变换至 ℓ-进系数**。 本节中，我们依照 1.23 构造的动机六函子形式体系，并按照 ℓ-进系数进行基变换，遵循 [HHS24 的记号]。

令 $*=\mathrm{Spd}(k)$ 为 vStack 的终对象。对于每个小 v-叠 X， $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(X)$ 自然带有一个 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)$-模结构（参见 [HM24，引理 3.2。5]）。取一个 $\mathbb{Z}_{\ell}$-代数 Λ 作为系数环，并考虑 ℓ-进实现

$$\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)\to\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{\ell})\to\mathcal{D}(\Lambda).$$

这是一个对称幺半函子。这里，第一个函子按如下方式构造。首先，取 étale 实现 [Sch24、命题 12 的极限。4]

$$\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)=\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*,\mathbb{Z})\to\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*,\mathbb{Z}/\ell^{n})\cong\mathcal{D}(\mathbb{Z}/\ell^{n})$$

取 $\mathbb{Z}/\ell^{n}$上的 $n\geq 1$系数后，我们得到函子 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)\to\mathcal{D}(\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_{\ell}))$。根据 [Sch24，定理 11.1]， $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)$ 是紧生成的，并且紧可对偶生成元通过 ℓ-进实现映射到 $\mathrm{Perf}(\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_{\ell}))$。$\mathcal{D}^{\omega}_{\mathrm{mot}}(*)\to\mathrm{Perf}(\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_{\ell}))\cong\mathrm{Perf}(\mathbb{Z}_{\ell})$ 的保余极限延拓给出 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)\to\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{\ell})$。

根据 [ABM24，引理 A.0。3], 沿着 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)\to\mathcal{D}(\Lambda)$ 的基变换给出一个 ℓ-进六函子形式体系

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{vStack},E)\to\mathrm{Pr}^{L}_{D_{\mathrm{mot}}(*)}\to\mathrm{Pr}^{L}_{\Lambda}.$$

这里，$\mathrm{Pr}^{L}_{\Lambda}$ （分别地，$\mathrm{Pr}^{L}_{D_{\mathrm{mot}}(*)}$）表示 Λ-线性（分别地， $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)$-线性）的可呈现稳定 ∞-范畴。

命题 1.25。 设 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(X,\Lambda)=\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(X)\otimes_{\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)}\mathcal{D}(\Lambda)$ 是一个小的 v-叠 X。那么，

$$\mathrm{Corr}(\mathrm{vStack},E)\to\mathrm{Pr}^{L}_{\Lambda},\quad X\mapsto\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(X,\Lambda)$$

是一个层性 Λ-线性、可呈现的六函子形式体系。

证明。只需验证层性。根据构造，函子 $X \mapsto \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(X)$具有层性。根据 [Sch24，定理 11.1]，$\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)$ 是刚性的。由于 $\mathcal{D}(\Lambda)$ 是紧生成的，它作为 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)$-模是可对偶的，这由 [GR17，命题9.4.4] 得出。因此，基变换 $\mathrm{Pr}^L_{\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)} \to \mathrm{Pr}^L_{\Lambda}$ 与小极限可交换，故结论成立。□

对于每个小的 v-叠 X，令 $\underline{\Lambda}_X \in \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(X, \Lambda)$ 表示 $\Lambda \in \mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(*, \Lambda)$ 沿 $X \to *$ 的拉回。当 X 的含义可由上下文明确时，为了方便记号，将 $\underline{\Lambda}_X$ 简写为 $\underline{\Lambda}$。

引理 1.26。设 S 是一个局部拟有限空间，且 $\pi_S\colon S \to *$ 是投影映射。那么，$\pi_{S!}\underline{\Lambda} = C_c^{\infty}(S, \Lambda)$ 属于 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(*, \Lambda) = \mathcal{D}(\Lambda)$。

这里，若一个拓扑空间是豪斯多夫、局部紧且全不连通的，则称其为局部拟有限空间。特别地，局部拟有限空间是拟有限空间的并。

证明。由于 $\pi_{S!}$ 与小余极限可交换，我们可以假设 S 是前有限的。将 S 写成有限集的余滤极限 $\lim_{i\in I} S_i$。由于 π_S 是真映射，我们有

$$\pi_{S!}\underline{\mathbb{Z}} \cong \pi_{S*}\underline{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{colim}_{i\in I}\underline{C(S_i, \mathbb{Z})}$$

由 [Sch24，引理 10。4]注意，第二个同构由有限性层与滤过余极限相交换得出。于是，取实现$\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*) \to \mathcal{D}(\Lambda)$，即可得出结论。□

1.4. **!** 可映射的例子。本节验证若干小v-叠上的映射具有 !-可映性质。首先，我们讨论闭浸入和部分开浸入。

定义 1.27。([Sch17，定义 18。4]) 分离态射 $f\colon X \to Y$ 属于 v-叠，若对每个完美拟 Huber 对 部分适当，当且仅当对每个完美拟 Huber 对 (R, R^+) 在 k 之上，以及每个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(R, R^\circ) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \mathrm{Spa}(R, R^+) & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

存在一条（必然唯一的）虚线箭头使图表交换。

引理 1.28。设 $f\colon X \to Y$ 是小型 v-叠之间的映射。

(1) 若 f 是闭浸入，则 $a'^* f$ 也是闭浸入。*(2)* 若 f 是部分适当开浸入，则 $a'^* f$ 是开浸入。

证明。由于断言在目标上是局部的，我们可以假设 Y 是准紧准分离的。

首先证明 (1)。此时，X 也是准紧准分离的，且 $|X| \subset |Y|$ 是闭且在广义化下稳定的子集。特别地，对于典范商映射 $\pi\colon |Y| \to \mathcal{M}(Y)$，有 $|X| = \pi^{-1}\pi(|X|)$。于是，对任意完美 Tate k-代数 R，$\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R) \to a'^* Y$ 经由 $a'^* X$ 因子化，当且仅当 $\mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(Y)$ 经由 $\pi(|X|)$ 因子化，因此 $a'^* f$ 是闭的。

接下来证明 (2)。由于 f 是部分适当的，我们有 $|X| = \pi^{-1}\pi(|X|)$。此外，$\pi(|X|) \subset \mathcal{M}(Y)$ 是一个开子集，因为 π 是商映射。于是容易看出，$a'^* f$ 是与 $\pi(|X|)$ 相关联的开浸入。□

命题 1.29。小型 v- 叠之间的闭浸入和部分适当开浸入是!可的。

证明。 首先，设 $i\colon Z \hookrightarrow X$ 是一个闭浸入。由命题 1.3 (2)，不妨设 X 是准紧准分离的。由引理 1.28，$a'^{*}i$ 是一个闭浸入，因此它是准紧准分离的，且上同调维数为 0，故可得 i 是 !可的。

设 $j\colon U \to X$ 是一个部分适当开浸入。同样，我们可以假设 X 是准紧准分离的。根据引理 1.28，$a'^{*}j$ 是与 $\mathcal{M}(U) \subset \mathcal{M}(X)$ 相关联的开浸入。令$Z = \mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(U)$。根据引理 1.13，$\mathcal{M}(X)$ 是紧致且豪斯多夫的，因此 Z 是紧致的。于是，由 Z 的开邻域构成的滤过系统 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = Z$。令 $W_\lambda \subset X$ 为与泛化闭子集$\pi_X^{-1}(\mathcal{M}(X) - V_\lambda)$ 相对应的闭子层。由于闭浸入是 !-可的，每个 $W_\lambda \to X$ 都是 !-可的。此外，$\{W_\lambda \to U\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个 !-覆盖，因为每个 $x \in \mathcal{M}(U)$ 都有一个邻域 U_x，使得对于某个 $\lambda \in \Lambda$，有 $U_x \cap V_\lambda = \phi$。因此，该断言由命题 1.3 (3) 得出。□

于是，切除对于部分适当开浸入及其补集是有意义的。

命题 1.30. 设 X 是一个小的 v-叠。设 $j\colon U \hookrightarrow X$ 是一个部分适当开浸入，且设 $i\colon Z \hookrightarrow X$ 是其闭补。对于每个 $M \in \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(X, \Lambda)$,

$$j_! j^* M \to M \to i_* i^* M$$

是 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(X, \Lambda)$中的一个纤维序列。

证明。 [Sch24，命题 4。25]中的断言根据 $\mathcal{D}_{\mathrm{fin}}$ 的定义 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}$ 自然地从 $\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(-)$ [Sch24，定义 9。1]延伸到

$$(-) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)} \mathcal{D}(\Lambda)\colon \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st},\mathcal{D}_{\mathrm{mot}}(*)} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st},\Lambda}$$

基变换函子保持局部化序列（参见 [Hai22，引理 2。24]）。 □

接下来，我们研究 Banach-Colmez 空间。

定义 1.31。 设 S 是一个完美空间，$\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{X}_S$ 上的一个向量丛。Banach-Colmez 空间 $\mathcal{BC}(\mathcal{E})$ 是小 v-层，它将完美空间 T （S 上）映射为

$$\mathcal{BC}(\mathcal{E})(T) = \Gamma(\mathcal{X}_T, \mathcal{E}|_{\mathcal{X}_T}).$$

命题 1.32。 设 C 是 k 上的代数闭完美域，且 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{X}_{(C,O_C)}$ 上的一个向量丛。则有如下结论。

(1) 每个拟紧闭子层 $Z \subset a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E})$ 都具有有限上同调维数。*(2)* 拟紧拟分离 *arc*-层 $a'^{*}(\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/F^{\times}$ 具有有限上同调维数。

此外，这个上同调维数仅取决于 $\mathcal{E}$ 的牛顿斜率，而与 C 的选择无关。

回顾一下，$\mathcal{E}$ 可写成 $\mathcal{O}(\lambda)$'s 的直和，其中 $\lambda \in \mathbb{Q}$ (参见 [FS24，定理 II.2。14])。的牛顿斜率指的是直和项中出现的 λ's 所组成的多重集。

证明。 首先，我们通过对 $\mathcal{E}$ 的秩作归纳法来证明 (1)。首先，假设 $\mathcal{E}$ 有一个分解 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$。由于 $\mathcal{M}(Z)$ 紧致且豪斯多夫，$Z \to a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1)$ 经由一个拟紧闭子层 $Z' \subset a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1)$ 分解。于是，$Z \to Z'$ 是 0-截断且真。现在，考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccc} Z & \hookrightarrow & a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E}_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \hookrightarrow & a'^{*}\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C) \end{array}$$

这里，右侧的方块是笛卡尔的，因此 $Z \to Z'$ 的每个纤维都是（基变换后的） $\mathcal{BC}(\mathcal{E}_2)$ 的拟紧闭子集。根据归纳假设， $Z \to Z'$ 和 Z' 都有有限上同调维数，因此 Z 也有有限上同调维数。

现在，我们只需考虑 $\mathcal{E}$ 不可分解的情形。设 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\begin{smallmatrix} r \\ d \end{smallmatrix})$，其中 r 与 d 互素。-设 F_d 是 F 的 d 次非分歧扩张，并设 $\pi_d \colon \mathcal{X}_{d,\ (C,O_C)} \to \mathcal{X}_{(C,O_C)}$ 是对应于 F_d 的有限伽罗瓦覆盖。于是，$\mathcal{E} = \pi_{d*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_d(C,\ O_C)}(r)$，因此我们有 $\mathcal{BC}(\mathcal{E}) = \mathcal{BC}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_d(C,\ O_C)}(r))$。通过从 F 过渡到 F_d，我们可以假设对某个 $n \geq 0$，有 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(n)$。

对于 $n = 0$， $\mathcal{BC}(\mathcal{O}) = F \times \mathrm{Spa}(C, O_C)$，因此它是 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ 的前有限覆盖的递增并。由于 Z 是拟紧的，它是 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ 的某个前有限覆盖的闭子空间。根据 [Sch24，推论 4.18], ， $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ 的每个前有限覆盖的上同调维数均为 0，因此 Z 的上同调维数为 0。

对于 $n \geq 1$，我们有一个正合列

$$\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1)) \to \mathcal{BC}(\mathcal{O}(n)) \to \mathbb{A}^{1,\diamond}_{C^\sharp}$$

对于特征 0 下 C 的一个倾斜 $C^\sharp$。于是， $Z \to a'^*\mathbb{A}^{1,\diamond}_{C^\sharp}$ 可经由一个拟紧闭子层 $Z' \subset a'^*\mathbb{A}^{1,\diamond}_{C^\sharp}$ 分解。由同上相同的论证，关于$\mathcal{O}(n-1)$的归纳假设蕴含 $Z \to Z'$ 是 0-截断的、真的，且具有有限上同调维数。只需证明 Z' 具有有限上同调维数。

根据构造， $a'^*\mathbb{A}^{1,\diamond}_{C^\sharp} \to \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C)$ 是 $\mathbb{A}^1_{C^\sharp} \to \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C^\sharp)$ 的倾斜（参见 [Sch24，命题 9。7] ，其中给出了倾斜等价）。于是，只需证明每个拟紧闭子层 都具有有限上同调维数。现在，我们有

$$\mathbb{A}^1_{C^\sharp} = \mathrm{colim}_{T \mapsto \pi T} \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C^\sharp\langle T\rangle_1).$$

这里，自然闭嵌入 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C^\sharp\langle T\rangle_1) \subset \mathbb{A}^1_{C^\sharp}$由条件 $|T| \leq 1$定义。由于 $Z'^\sharp$ 是拟紧的， $Z'^\sharp$ 经由某个 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C^\sharp\langle T\rangle_1)$闭浸入的上同调维数为 0，因此由 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(C^\sharp\langle T\rangle_1)$ 的上同调维数有限可得所述结论（参见 [Sch24，引理 5.3]）。

接下来，我们再次通过对 $\mathcal{E}$ 的秩进行归纳来证明 (2)。首先，假设 $\mathcal{E}$ 有一个分解 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$。那么，我们有如下图表。

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1)\backslash\{0\})/\underline{F^\times} & \hookrightarrow & (\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/\underline{F^\times} & \hookleftarrow & U \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\mathcal{BC}(\mathcal{E}_2)\backslash\{0\})/\underline{F^\times}. \end{array}$$

这里， U 是 $(\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1)\backslash\{0\})/F^\times$ 的补集，并且很容易看出，垂直箭头的每个纤维都同构于（基变换后的） $\mathcal{BC}(\mathcal{E}_1)$。于是，对每个拟紧闭子层 $Z \subset a'^*U$，由 (1) 可知， $Z \to (\mathcal{BC}(\mathcal{E}_2)\backslash\{0\})/F^\times$ 的上同调维数有限，因此根据归纳假设， Z 的上同调维数有限。由此，根据命题 1.22， $a'^*(\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/F^\times$ 的上同调维数有限。

现在，我们归结为 $\mathcal{E}$不可分解的情形。记 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\begin{smallmatrix} r \\ d \end{smallmatrix})$，其中$r$ 与 d 互素。那么， $\mathcal{BC}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{BC}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_d(C,O_C)}(r))$，并且

$$(\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/\underline{F^\times} \twoheadrightarrow (\mathcal{BC}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_d(C,O_C)}(r))\backslash\{0\})/\underline{F_d^\times}$$

是拟 pro-étale 的，因此具有有限上同调维数。通过取 F_d，我们可以假设对于某个 $n \geq 0$， $\mathcal{E} = \mathcal{O}(n)$。

我们对 n 使用归纳法进行证明。 $n = 0$ 的情形显然。对于 $n \geq 1$，我们有以下图表。

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1))\backslash\{0\})/\underline{F^\times} & \hookrightarrow & (\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n))\backslash\{0\})/\underline{F^\times} & \hookleftarrow & U \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\mathbb{A}^{1,\diamond}_{C^\sharp}\backslash\{0\})/\underline{F^\times}. \end{array}$$

这里， U 是$(\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1))\backslash\{0\})/F^\times$的补集，并且很容易看出，垂直箭头的每个纤维都同构于 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1))$（的基变换）。重复前面的论证（以及倾斜等价），只需证明$(\mathbb{A}^1_{C^\sharp}\backslash\{0\})/F^\times$具有有限上同调维数。由于 $F^\times \cong O_F^\times \times \pi^{\mathbb{Z}}$ 和 $B\mathbb{Z}$ 具有有限上同调维数，只需证明$(\mathbb{A}^1_{C^\sharp}\backslash\{0\})/O_F^\times$ 具有有限上同调维数。

首先， $\mathbb{A}^1_{C^\sharp}\backslash\{0\}$ 是 $O_F^\times$-稳定闭子空间 $W_r = \{|\pi|^r \leq |T| \trianglelefteq |\pi|^{-r}\}$ （$r \geq 1$）的递增并。只需证明 $W_r/O_F^\times$ 具有有限上同调维数。由于$W_r/O_F^\times$ 是准紧准分离的， $\mathcal{M}(W_r/O_F^\times)$是紧致且豪斯多夫的。此外， $O_F^\times$ 在 W_r上自由作用，因此$\mathcal{M}(W_r/O_F^\times) \cong \mathcal{M}(W_r)/O_F^\times$。由此得到以下笛卡尔图。

$$\begin{array}{ccc} W_r & \longrightarrow & W_r/\underline{O_F^\times} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathcal{M}(W_r)} & \longrightarrow & \underline{\mathcal{M}(W_r)/O_F^\times} \end{array}$$

于是， $W_r/O_F^\times \to \mathcal{M}(W_r)/O_F^\times$ 的每个纤维都由 W_r的一个剩余域表示，因此，根据 [Sch24 引理 5.3]的证明，该映射具有有限上同调维数。此外，根据 [Sch24 第 2.4]节中的描述， $\mathcal{M}(W_r)/O_F^\times$ 是有限树的余滤极限。由于根据 [Sch24 引理 5.3]的证明，它具有有限上同调维数，故 $\mathcal{M}(W_r)/O_F^\times$ 具有有限上同调维数。因此，如 [Sch24 推论 4.18]所述，结论成立。□

推论 1.33. 设 S 是 k 上的完美空间，且 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{X}_S$上的向量丛。于是，以下两个态射

$$\mathcal{BC}(\mathcal{E}) \to S, \quad (\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/\underline{F^\times} \to S$$

是 !-可的。

证明。根据命题 1.3 (2)，不妨设 S 是仿紧的。也不妨设$\mathcal{E}$ 的秩为常秩 n。于是， $S \to \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ 的像是拟紧的，因此 S每个几何点处 $\mathcal{E}$的牛顿斜率都有界。于是，根据命题 1.32 (2)， $a'^*(\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/F^\times \to a'^*S$具有有限上同调维数，因此$(\mathcal{BC}(\mathcal{E})\backslash\{0\})/F^\times \to S$是!-可的。于是，由于存在一个开浸入， $\mathcal{BC}(\mathcal{E}) \to S$ 的!-可性随即得证。

$$\mathcal{BC}(\mathcal{E}) \hookrightarrow (\mathcal{BC}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O})\backslash\{0\})/\underline{F^\times}.$$

□

1.5. **Banach-Colmez 空间的上同调。** 正如 [Sch25 第 2], 节所解释的，计算 Banach-Colmez 空间的紧支撑上同调的一种众所周知的步骤（例如参见 [HI24，引理 2。6]）在动机六函子形式体系中仍然适用。本节给出这一计算的论证，以求完整。

引理 1.34。 设 S 是一个完美空间，且 S 在 $\mathbb{Z}_p$ 上的一个倾斜为 $S^\sharp$。设 $\pi\colon \mathbb{A}^{1,\diamond}_{S^\sharp} \to S$ 是小型 v-层上的一个 *Map*。那么， π 是上同调光滑的， $\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}(1)[2]$ 和 $\pi_!\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}$-形式体系中成立。这里， $\mathbb{Z}(1)$ 表示 *Tate* 扭曲。

证明。我们可以假设 S 是仿射的。令 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$。那么， $a'^*\mathbb{A}^{1,\diamond}_{S^\sharp} = \mathbb{A}^1_{R^\sharp}$ 和 $a'^*\pi$ 是 $\pi_{R^\sharp}$ 的倾斜化： $\mathbb{A}^1_{R^\sharp} \to \mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R^\sharp)$。由于 $\mathbb{A}^1_{R^\sharp}$ 是沿着截面 $\mathcal{M}_{\mathrm{arc}}(R^\sharp) \to \mathbb{P}^1_{R^\sharp}$ 在 ∞ 处的 $\mathbb{P}^1_{R^\sharp}$ 的补集，根据 Sch24 的命题9， $\pi^!_{R^\sharp} \cong \pi^*_{R^\sharp} \otimes \mathbb{Z}(1)[2]$。此外，loc. cit. 中关于 $\mathbb{P}^1_{R^\sharp}$ 上 $\pi^*_{R^\sharp} \otimes \mathbb{Z}(1)[2]$ 的约化上同调的计算蕴含 $\pi_{R^\sharp!}\pi^!_{R^\sharp}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ □

命题 1.35. 设 S 是一个小的 v-叠。设 $\pi\colon \mathcal{P} \to S$ 是某个 $n \geq 1$ 在 v-拓扑下的 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n))$ 主丛。那么， π 是上同调光滑的， $\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}(n)[2n]$ ，并且 $\pi_!\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ 属于 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}$-形式体系。特别地， $\pi^*\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(S) \to \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}(\mathcal{P})$ 是全忠实的。

证明。我们证明 通过对 n 归纳。我们希望证明存在一对伴随 r

$$\pi_! \dashv \pi^* \otimes \mathbb{Z}(n)[2n]$$

且单位 $\pi_!\mathbb{Z}(n)[2n] \to \mathbb{Z}$ 是一个同构。由于这两个函子与拉回可交换，且 π 是满射，因此只需沿着 π 的 Čech 神经进行拉回后证明这一点。特别地，我们可以假设 $\mathcal{P} \cong \mathcal{BC}(\mathcal{O}(n)) \times S$。

只需考虑绝对情形 $S = *$。对于 $n = 1$， $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(1)) \cong \mathrm{Spd}(k[\![t]\!])$，因此它与开单位圆盘 $U = \{|T| < 1\} \subset \mathbb{A}^1_k$相识。其补集 $\mathbb{P}^1_k - U$ 是一个闭单位圆盘，因此根据球不变性， $\pi_!\pi^!\mathbb{Z}$ 计算了 $\mathbb{Z}(1)[2]$ 在 $\mathbb{P}^1_k$上的约化上同调。由 [Sch24命题9的证明可知，3] $\pi_!\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ 和 $\pi^! \cong \pi^* \otimes \mathbb{Z}(1)[2]$。

对于 $n > 1$，我们可以转到上同调光滑覆盖的 Čech 神经

$$\mathrm{Spd}(k((t)), k[\![t]\!]) \to *.$$

我们可以假设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是特征 p 下的仿射完美空间。取一个倾斜 $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+})$，其特征为 0 。我们有一个正合列

$$0 \to \mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1))|_S \to \mathcal{BC}(\mathcal{O}(n))|_S \xrightarrow{q} \mathbb{A}^{1,\diamond}_{R^\sharp} \to 0.$$

这里， q 是 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n-1))$的主丛。因此，可以对 q应用归纳假设，于是 $\pi_!\pi^!\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ 和 $\pi^! \cong \pi^* \otimes \mathbb{Z}(n)[2n]$ 由引理1.34成立。因此，我们得到所要证明的结论。□

2. Formulation of the $\mathcal{A}$-side

本节中，我们引入叠Bun^X_G 上的 G-主丛，其带有一个 X-截面，定义在 Fargues-Fontaine 曲线上，以及与之相关的未归一化周期层 $\mathcal{P}_X$。本节中，我们将使用第1节所阐述的层论。

2.1. 关于 Bun_G。

设 G 是定义在 F 上的连通约化群。本节回顾文献 v-叠 Bun_G 的基本性质，该叠由 [FS24] 引入。

定义 2.1。 ([FS24，第三章]) 将 $S \in \mathrm{Perf}$ 映到 G-torsors on $\mathcal{X}_S$ 的函子是一个小 v-叠，记作 Bun_G。

当 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是一个在 $\mathbb{F}_q$上的仿射完美空间时，存在一个X^{alg}_S Fargues-Fontaine曲线的代数版本（参见 [FS24，第67页]）。存在一个局部环化空间的态射 $\mathcal{X}_S \to X^{\mathrm{alg}}_S$ ，其拉回诱导出向量丛范畴的等价（参见 [FS24，命题 II.2。7]对于 G-主丛的群胚，通过

坦纳卡范畴解释。令 $\mathbf{Perf}^{\mathrm{aff}}$ 为 k上的仿紧完美空间的 v-位点。作为 $\mathbf{Perf}^{\mathrm{aff}}$上的一个叠，我们有如下描述

$$\mathrm{Bun}_G(S) = \mathrm{Map}(X_S^{\mathrm{alg}}, [*/G]). \tag{2.1}$$

这里，映射 anima 取自 F上的叠范畴。令 F 为 F的最大非分歧扩张的完备化。

定义 2.2。令 $B(G)$为 $G(\breve{F})$的 σ-共轭类集合。这里，如果存在某个 $h \in G(\breve{F})$使得 $g' = hg\sigma(h)^{-1}$，则称两个元素g，$g' \in G(\breve{F})$是 σ-共轭的。

令 F为 F的一个代数闭包，并令 $\Gamma = \mathrm{Gal}(F/F)$。固定一个 Borel 对 $T \subset B \subset G_{\bar{F}}$，令 $X_*(T)^+_{\mathbb{Q}} \subset X_*(T)_{\mathbb{Q}}$ 为主导有理余特征的集合。于是，牛顿点和 Kottwitz 值由以下映射描述

$$\nu\colon B(G) \to X_*(T)^{+,\Gamma}_{\mathbb{Q}}, \quad \kappa\colon B(G) \to \pi_1(G)_\Gamma$$

且乘积 $\nu \times \kappa$: $B(G) \to X_*(T)^{+\Gamma}_{\mathbb{Q}} \times \pi_1(G)_\Gamma$ 是单射。对于每个 $b \in B(G)$，$\nu(b)$记为 ν_b；当 ν_b 为中心的时，称 b 为基本的。基本的 σ-共轭类集合记为 $B(G)_{\mathrm{bas}}$，且 κ 诱导一个双射 $B(G)_{\mathrm{bas}} \cong \pi_1(G)_\Gamma$。

命题 2.3。([Vie24]) 存在一个同胚 $|\mathrm{Bun}_G| \simeq B(G)$。此处，$B(G)$ 赋予关于牛顿点和 *Kottwitz* 值的序拓扑。

对每个 $b \in B(G)$，令 $\mathrm{Bun}_G^b = \mathrm{Bun}_G \times_{|\mathrm{Bun}_G|} \{b\} \subset \mathrm{Bun}_G$ 为与 b 关联的局部闭子叠。令 $i^b\colon \mathrm{Bun}_G^b \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G$ 表示该局部闭浸入。κ 的纤维恰好是 $|\mathrm{Bun}_G|$ 的连通分支。对于每个 $b \in B(G)_{\mathrm{bas}}$，相应的连通分支记为 $\mathrm{Bun}_G^{(b)}$ 。

例2.4。([FS24，第 IX.6 节。4]当 $G = \mathbb{G}_m$ 时，$\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 是 $\mathcal{X}_S$ 上线丛的分类叠。根据 [FS24，定理 III.4。5], 我们得到一个具体描述

$$\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n} \cong \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} [*/\underline{F^\times}].$$

此处，$\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,\,n}$ 分类次数为 n 的线丛（关于次数的概念，见 [FS24，第 II.2 节4] ）。换言之，$\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,\,n}$ 分类那些原étale 局部地同构于 $\mathcal{O}(n)$ 的线丛，其底层点对应于 σ-共轭类 $[\pi^{-n}] \in B(\mathbb{G}_m)$。如 [Sch25，定理 3.1 (ii)] 所述，$\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,\,n}, \Lambda) \cong \mathcal{D}(F^\times, \Lambda)$，其中 $\mathbb{Z}_\ell$ 是一个代数。

2.2. **相对叠** Bun_G^X。本节中，我们引入 Fargues-Fontaine 曲线上的叠 Bun_G^X，其对象为带有 X-截面的 G-主丛，以及未归一化周期层 $\mathcal{P}_X$。我们将证明 Bun_G^X 是一个 Artin v-叠，且投影 $\pi_X\colon \mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_G$ 是 !-可的。

在本节中，X 是定义在 F 上的正规拟射影 G-簇。我们对 G-簇的约定如下。

约定 2.5。定义在 F 上的 G-簇 X 是一个配备左 G-作用的 F-簇。考虑商叠 $[X/G]$ 时，我们在 X 上取右 G- 作用，其定义为：对 $x \in X$ 和 $g \in G$，$x \cdot g = g^{-1}x$。对于一个 F- 概形 S，$[X/G](S)$ 是由二元组 (P, s) 构成的群胚，其中P是 S 上的一个 G-丛，且 s 是 $P \times^G X \to S$ 的一个截面。

备注 2.6。正如我们稍后将回顾的，X 在我们的假设下，存在一个 G-等变充足线丛，这是由 [Sum75定理 25]得出的。因此，$P \times^G X$ 对于每个 G-丛P，通过下降 F，其上的 [BLR90定理 7]表明它是一个概形。

按照（2.1），我们定义Bun_G^X如下。为方便起见，我们使用由严格全不连通空间组成的子范畴$\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}} \subset \mathrm{Perf}^{\mathrm{aff}}$。它构成了 v-拓扑的一个基。

定义 2.7. 对于 F 上的正规拟射影 G-簇 X，令 Bun_G^X 为 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$ 上的预层，它将 S 映至 $\mathrm{Map}(X_S^{\mathrm{alg}}, [X/G])$。具体而言，$\mathrm{Bun}_G^X(S)$ 是由配对 (P, s) 构成的群胚，其中 P 是 X_S^{alg} 上的一个 G-向量丛，s 是 $P \times^G X \to X_S^{\mathrm{alg}}$ 的一个截面。

注 2.8. 如 [FS24，命题 II.2。16]，X_S^{alg} 与 $R^+ \subset R$ 的选取无关，因此 $\mathrm{Bun}_G^X \to *$ 是部分适当的（回忆定义 1.27）。

例 2.9. 以下是 Bun_G^X 的一些具体例子。

(1) 当 X 是齐性 G-簇，即对某个闭子群$H \subset G$有 $X = G/H$ 时，我们有 $[X/G] \cong [*/H]$，且 $\mathrm{Bun}_G^X \cong \mathrm{Bun}_H$。 (2) 当 $G =$ 为 GL_n 且 $X = \mathbb{A}^n$ 是 GL_n 的标准表示时，$[\mathbb{A}^n/\mathrm{GL}_n]$ 分类带有全局截面的向量丛。令 $\mathcal{BC}(\mathcal{E}^{\mathrm{univ}})$ 为“$\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ 的 Fargues-Fontaine曲线”上通用秩 n 向量丛的 Banach-Colmez 空间：

$$\mathcal{BC}(\mathcal{E}^{\mathrm{univ}})(S) = \mathcal{BC}(\mathcal{E}_S)$$

对于完美空间 $S \to \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$，其中 $\mathcal{E}_S$ 是 $\mathcal{X}_S$ 上相应的向量丛。于是，我们有一个同构

$$\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}^{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{BC}(\mathcal{E}^{\mathrm{univ}})$$

在 $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ 上。

每个 $V \in \mathrm{Rep}(G)$ 都是一个 G-簇。由于 X 的拟射影性和正规性，我们对 X有如下结构性结果。

引理 2.10。 ([Sum75，定理 2。5]) 存在一个 G-等变嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 其中 $V \in \mathrm{Rep}(G)$。

固定这样一个 $V \in \mathrm{Rep}(G)$，并令 $X \subset \mathbb{P}(V)$ 为 X 的概形像。由于 X 是诺特的，$X \hookrightarrow \bar{X}$ 是一个开浸入，且 $\bar{X}$ 是一个射影 G-簇。先验而言，Bun_G^X 只是 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$ 上的一个预层，但我们可以通过要求每个到 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$ 中某个对象的拉回都由一个闭或开子空间表示，来定义预层之间的闭开浸入。

引理 2.11. 设 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，并令 $\pi_S\colon |\mathcal{X}_S| \to |X_S^{\mathrm{alg}}|$ 表示自然映射。对于闭子集 $Z \subset |X_S^{\mathrm{alg}}|$，$\pi_S^{-1}(Z)$ 为空当且仅当 Z 为空，并且 $\pi_S^{-1}(Z) = |\mathcal{X}_S|$ 当且仅当 $Z = |X_S^{\mathrm{alg}}|$。

证明。对于这两个断言，逆向显然。首先，假设 $\pi_S^{-1}(Z) = |\mathcal{X}_S|$。若 $Z \neq |X_S^{\mathrm{alg}}|$，则存在非零元素 $t \in \Gamma(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(n))$，其中 $n \geq 0$ 满足 $t = 0$ 于 Z 上。与证明 [SW20, Proposition 11.2.1] 中一样，$\mathcal{X}_S$ 是亚完美拟完美。特别地，$\mathcal{X}_S$ 是约化的，因此 $t = 0$ 于 $\mathcal{X}_S$ 上。然而，$\Gamma(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(n)) \to \Gamma(\mathcal{X}_S, \mathcal{O}(n))$ 是一个同构（见[FS24, Proposition II.2.7]），这与 $t \neq 0$ 矛盾。

接下来，假设 $\pi_S^{-1}(Z)$ 为空。由于 $\pi_0(S)$ 是前有限的，我们有如下连续映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{X}_S| & \xrightarrow{\pi_S} & |X_S^{\mathrm{alg}}| \\ {\scriptstyle p_S}\downarrow & & \downarrow \\ |S| & \longrightarrow & \pi_0(S). \end{array}$$

由于 Banach-Colmez 空间是 $\mathbb{G}_a$ 和 F 的扩张，$\Gamma(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(n))$ 与 S 中的滤过余极限可交换，因此 $|X_S^{\mathrm{alg}}| \to \pi_0(S)$ 在点 $s \in \pi_0(S)$ 处的纤维等于 $|X_s^{\mathrm{alg}}| \to |\overline{X}_S^{\mathrm{alg}}|$ 的像。假设 Z 非空。那么，对于某个$s \in \pi_0(S)$，$Z \cap |X_s^{\mathrm{alg}}|$ 非空。由于 S 是严格全不连通的，我们将问题归结为如下情形：对某个完美拟域 C（在 k 上），$S =$ 为 Spa(C, O_C)。于是，X_S^{alg} 是一条曲线，且 Z 包含某个 $\xi \in \Gamma(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}(1))$ 的 $V_+(\xi)$。然而，$\pi_S^{-1}(V_+(\xi))$ 显然非空，因此得到矛盾。□

引理 2.12。自然映射 $\mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_G^{\bar{X}}$ 是一个开浸入，而 $\mathrm{Bun}_G^{\bar{X}} \to \mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)}$ 是一个闭浸入。

证明。对于第一个断言，取一个映射 $S \to$ P s $X_S^{\mathrm{alg}} \to$Bun$_G^{\bar{X}}$，它对应于一对 $P \times^G \bar{X}$ s^{-1} $P \times^G X$ $U \subset |X_S^{\mathrm{alg}}|$ $T \in$ $_{/S}^{\mathrm{std}}$ $T \to S \to$ $_G^{\bar{X}}$ (, :)。于是，( ) 是一个开子集 。对于 Perf，Bun 分解为 Bun$_G^X$ 当且仅当 $x_{T/S}^{-1}(U) = |X_T^{\mathrm{alg}}|$，其中 $x_{T/S}$: $|X_T^{\mathrm{alg}}| \to |X_S^{\mathrm{alg}}|$。根据引理 2.11，这等价于 $x_{T/S}'^{-1}(\pi_S^{-1}(U)) = |\mathcal{X}_T|$，其中 $x'_{T/S}$: $|\mathcal{X}_T| \to |\mathcal{X}_S|$。现在，$p_S$: $|\mathcal{X}_S| \to |S|$ 是闭的，因为 Div$^1 \to *$ 是真且 $\mathcal{X}_S \cong$ Div$^1 \times S$，所以 $|S| - p_S(|\mathcal{X}_S| - \pi_S^{-1}(U))$ 是 $|S|$ 的开子集。它表示纤维积 $S \times_{\mathrm{Bun}_G^{\bar{X}}} \mathrm{Bun}_G^X$。

第二个断言可由相同的论证推出。这里，我们还需要以下事实：P 是约化的，且 p_S 是开集。第一个断言源于 $\mathcal{Y}_S$ 的约化性，因为这意味着X_S^{alg} 是约化的。第二个断言源于 Div$^1 \to *$ 的上同调光滑性（见 [Sch17，命题 23。11] 以及 [FS24，命题 II.3。7]）。□

这样，我们归结为情形 $X = \mathbb{P}(V)$。于是，我们有一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}(V)}^{\mathbb{P}(V)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_G & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}(V)}. \end{array}$$

命题 2.13. 预层 Bun_G^X 是$\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$上的一个 v-叠。此外，它可扩张为Perf上的 ***Artin*** v-叠。

证明。由引理 2.12，我们可以假设 $X = \mathbb{P}(V)$。根据上述图表，我们归结为 $G =$ GL(V) 和 $X = \mathbb{P}(V)$ 的情形，此结论由 [FS24, 命题 IV.1.8 (i)] 得出。然而，$[\mathbb{P}(V)/\mathrm{GL}(V)] \cong [*/P]$ 对于一个极大抛物子群 $P \subset$ GL(V) 成立，因此 Bun$^{\mathbb{P}(V)}_{\mathrm{GL}(V)} \cong$Bun$_P$，根据坦纳卡范畴解释，这是一个 v-叠。由 [AB21, 引理 4.1] 和 [FS24, 命题 IV.1.8 (iii)], , Bun$_P$ 是一个 Artin v-叠，故结论成立。□

为了在 Bun$_G$ 上定义未归一化周期层 $\mathcal{P}_X$，我们需要以下性质。

命题 2.14。自然映射 π_XBun$_G^X \to \mathrm{Bun}_G$ 是 !-可的。

证明。根据定义，$\mathrm{Bun}_G^X \to *$ 是部分适当的，因此 $\mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)}$ 是 !-可的，这由命题 1.29 和引理 2.12得出。由上述笛卡尔图，我们只需考虑以下情形

$G=\mathrm{GL}(V)$ 以及 $X=\mathbb{P}(V)$。特别地，只需证明对于适当的抛物子群 $P\subset G$，!-可性 $\mathrm{Bun}_P\to\mathrm{Bun}_G$。这基本上可由 [HHS24]中 Drinfeld紧化的存在性推出。相反，我们将在本情形中直接论证，以确保某个紧化具有有限上同调维数，从而可在第 1 节应用六函子形式体系。

设 $d=\dim V$。那么，Bun_G 分类 Fargues-Fontaine曲线上的秩为 d 的向量丛 $\mathcal{E}$，而 $\mathrm{Bun}_P\to\mathrm{Bun}_G$ 分类线子丛 $\mathcal{L}\subset\mathcal{E}$。我们得到 $\mathrm{Bun}_P=\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Bun}_P^n$ 的分解，该分解按 $\mathcal{L}$ 的次数划分。只需证明 $\mathrm{Bun}_P^n\to\mathrm{Bun}_G$ 是 !- 可的。

设 $Z\to\mathrm{Bun}_G$ 为分类 $(H^0(X_S,\mathcal{E}_S(-n))\backslash\{0\})/F^\times$ 的 v-叠，其定义在 $\mathcal{E}_S\in\mathrm{Bun}_G(S)$ 上。将 $\mathcal{L}\subset\mathcal{E}$ 发送到 $\mathcal{O}\hookrightarrow\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}^\vee$ 的自然包含 $\mathrm{Bun}_P^n\hookrightarrow Z$，根据 [HHS24，引理 4.1.4]，是一个部分适当开浸入。此外，根据 [FS24，命题 II.2.16]，$Z\to\mathrm{Bun}_G$ 在空间菱形中是真且可表示的。因此，只需证明 $Z\to\mathrm{Bun}_G$ 具有局部有限上同调维数。

取一个准紧准分离的 v-层 $Y\to\mathrm{Bun}_G$，并令 $\mathrm{Spa}(C,O_C)\to Y$为任意几何点。令 $\mathcal{E}_C$ 为与 $\mathrm{Spa}(C,O_C)\to\mathrm{Bun}_G$对应的向量丛。由于 Y是拟紧的，其牛顿多边形 $\mathcal{E}_C$ 有界，因此 $\mathcal{E}_C$ 的可能同构类数目有限。由此，命题 1.32 推出所述结论。□

注 2.15。由此可知，$\mathrm{Bun}_P\to\mathrm{Bun}_G$ 对抛物子群而言是 !-可的，$P\subset G$ 因为$\mathrm{Bun}_P=\mathrm{Bun}_G^{G/P}$。这验证了几何艾森斯坦级数在我们的六函子形式体系中定义良好，正如 [HHS24]. 所述。

定义 2.16。令 Λ 为一个 $\mathbb{Z}_\ell$-代数。我们将未归一化周期层定义为

$$\mathcal{P}_{X,\Lambda}=\pi_{X!}\underline{\Lambda}_X$$

其中 $\underline{\Lambda}_X$ 表示 Bun_G^X 上的常值层，其值取于 Λ。

当 Λ 可由上下文明确时，我们滥用记号，将 $\mathcal{P}_{X,\Lambda}$ 记为 $\mathcal{P}_X$。

2.3. **Bun 的基本轨迹**Bun_G^X。我们取与上一节相同的 X。本节首先研究 $\mathrm{Bun}_G^X\to\mathrm{Bun}_G$ 在 $\mathrm{Bun}_G^{\frac{1}{}}\subset\mathrm{Bun}_G$ 上的纤维。

Lemma 2.17. 对于每个 $S\in\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，*Spec*$(C(|S|,F))$ 的每个开覆盖都分裂。

证明。首先，$|S|\to\pi_0(S)$ 是一个最大豪斯多夫商，因此 $C(|S|,F)=C(\pi_0(S),F)$。我们将自由地使用这个同一性。于是，我们有一个映射

$$i\colon\pi_0(S)\to\mathrm{Spec}(C(|S|,F))$$

将 $s\in\pi_0(S)$ 映到与极大理想 $\{f(s)=0|f\in C(|S|,F)\}$ 对应的闭点。对于每个 $f\in C(|S|,F)$，$D(f)$ 的原像等于开轨迹 $\{f(s)\neq0\}$，因此该映射是连续的。

由于 $\pi_0(S)$ 是前有限的，因此存在一个自然的连续映射

$$q\colon\mathrm{Spec}(C(|S|,F))\to\pi_0(S).$$

它在每个 $s\in\pi_0(S)$ 处的纤维都是局部环 $\mathrm{colim}_{s\in U\subset\pi_0(S)}C(U,F)$ 的谱。特别地，i 的像等于闭点集。于是，对于每个开子集 $U\subset\mathrm{Spec}(C(|S|,F))$，我们有 $q^{-1}(i^{-1}(U))\subset U$。

取 $\mathrm{Spec}(C(|S|,F))$ 的一个开覆盖 $\{U_j\}_{j\in J}$。那么，$\{q^{-1}(i^{-1}(U_j))\}_{j\in J}$ 成为其细化。由于 $\pi_0(S)$ 是前有限的，$\pi_0(S)$ 的开覆盖 $\{i^{-1}(U_j)\}_{j\in J}$ 可分裂。因此，开覆盖 $\{q^{-1}(i^{-1}(U_j))\}_{j\in J}$ 可分裂。□

引理 2.18。对于每个 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，自然映射

$$p_S \colon X_S^{\mathrm{alg}} \to \mathrm{Spec}(C(|S|, F))$$

不通过 $\mathrm{Spec}(C(|S|, F))$ 的任何真局部闭子概形因子分解。

证明。由引理 2.17，p_S 的像包含所有闭点。因此，p_S 不通过任何真开子概形因子分解。此外，p_S 不通过任何真闭子概形因子分解，因为 $\Gamma(X_S^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}) \cong C(|S|, F)$。□

引理 2.19。对每个 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，$\underline{X(F)}(S) \cong X(C(|S|, F))$。

证明。由引理 2.17，只需证明 $\underline{U(F)}(S) \cong U(C(|S|, F))$ 对每个有限型仿射概形 U（在 F 上）。固定一个闭浸入 $U \hookrightarrow \mathbb{A}^n$。首先，我们有

$$\underline{\mathbb{A}^n(F)}(S) \cong \underline{F}(S)^n = (C(|S|, F))^n \cong \mathbb{A}^n(C(|S|, F)).$$

然后，我们需要证明闭子集 $\underline{U(F)}(S) \subset \underline{\mathbb{A}^n(F)}(S)$ 映到 $U(C(|S|, F))$。

令 $x \in \mathbb{A}^n(C(|S|, F))$，并令 $x_s \in \mathbb{A}^n(F)$ 为限制到点 $s \in \pi_0(S)$ 的结果。对于定义在 $\mathbb{A}^n$ 上的函数 f，当且仅当对每个 $s \in \pi_0(S)$，$f(x) = 0$ $f(x_s)$。因此，$x \in U(C(|S|, F))$ 当且仅当对每个 $s \in \pi_0(S)$，$x_s \in U(F)$。因此，$U(F)(S)$ 恰好映到 $U(C(|S|, F))$。□

命题 2.20. 令 $\mathrm{Bun}_G^{1,X} = \mathrm{Bun}_G^X \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^1$。存在一个闭开浸入

$$i_X^1 \colon [\underline{X(F)}/\underline{G(F)}] \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G^{1,X}$$

在 $\mathrm{Bun}_G^1 \cong [*/\underline{G(F)}]$ 上，并且当 X 是拟仿射时，它是一个同构。

证明。首先，我们构造 i_X^1。对于每个 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，沿着 p_S 的拉回给出 $\mathrm{Bun}_G^1 \cong [*/G(F)]$，将 $\underline{\mathrm{Bun}_G^1}(S)$ 与 $\mathrm{Spec}(C(|S|, F))$ 上平凡 G-主丛的群胚等同起来。

由引理 2.19，$[\underline{X(F)}/\underline{G(F)}](S)$ 是由平凡 G-主丛 P 构成的群胚，定义在 $\mathrm{Spec}(C(|S|, F))$ 上，并配备一个截面 $s \in (P \times^G X)(C(|S|, F))$。于是，我们得到所需的映射

$$i_X^1 \colon [\underline{X(F)}/\underline{G(F)}] \to \mathrm{Bun}_G^{1,X}, \quad (P, s) \mapsto (p_S^* P, p_S^*(s)).$$

现在，我们证明当 X 是拟仿射时，i_X^1 是一个同构。令 $U = \mathrm{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}))$。那么，$X \hookrightarrow U$ 是一个 G-等变开浸入。令 $S \in \mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，并令 P 为 $\mathrm{Spec}(C(|S|, F))$ 上的平凡 G-主丛。$\mathrm{Bun}_G^{1,U}(S) \to [*/G(F)](S)$ 在 $p_S^* P$ 上的纤维是 $p_S^* P \times^G U \to X_S^{\mathrm{alg}}$ 的截面集。它与 $X_S^{\mathrm{alg}} \to P \times^G U$ over $C(|S|, F)$ 的映射集之间存在双射。由于 $P \times^G U$ 是仿射的，这样的映射唯一地经由 p_S 分解。因此，i_U^1 是一个同构。

现在，对于每个从 $X_S^{\mathrm{alg}} \to P \times^G X$ over $C(|S|, F)$ 出发的映射 f，都存在唯一的虚线箭头使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} X_S^{\mathrm{alg}} & \xrightarrow{f} & P \times^G X \\ \downarrow{\scriptstyle p_S} & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(C(|S|, F)) & \dashrightarrow & P \times^G U. \end{array}$$

根据引理 2.18，虚线箭头可分解经过 $P \times^G X$。因此，i_X^1 是一个同构。

我们转向一般情形。取一个 G-等变嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$，由引理2.10可知。由于 $[\mathbb{P}(V)/G] \cong [(V - \{0\})/G \times \mathbb{G}_m]$，$\mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)} \cong \mathrm{Bun}_{G \times \mathbb{G}_m}^{V - \{0\}}$。考虑下面的图表。

$$\begin{array}{ccc}
[\underline{V-\{0\}}/\underline{G(F)\times F^\times}] & \xrightarrow{\cong} & [\underline{\mathbb{P}(V)}/\underline{G(F)}] \\
\downarrow{\scriptstyle i^1_{V-\{0\}}} & & \downarrow{\scriptstyle i^1_{\mathbb{P}(V)}} \\
\mathrm{Bun}_{G\times\mathbb{G}_m}^{V-\{0\}} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Bun}_{G\times\mathbb{G}_m} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_G.
\end{array}$$

由于 $\mathbf{Bun}^1_{G\times\mathbb{G}_m}\hookrightarrow\mathbf{Bun}^1_G\times\mathbf{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 是一个连通分支，$\mathbf{Bun}_{G\times\mathbb{G}_m}^{1\,V-\{0\}}\hookrightarrow$、$\mathbf{Bun}_G^{1\,\mathbb{P}(V)}$ 的是闭开浸入。由于 $V-\{0\}$ 是拟仿射的，$i^1_{V-\{0\}}$ 是同构。因此，$i^1_{\mathbb{P}(V)}$ 是闭开浸入。接下来需要证明

$$\begin{array}{ccc}
[\underline{X(F)}/\underline{G(F)}] & \hookrightarrow & [\underline{\mathbb{P}(V)(F)}/\underline{G(F)}] \\
\downarrow{\scriptstyle i^1_X} & & \downarrow{\scriptstyle i^1_{\mathbb{P}(V)}} \\
\mathrm{Bun}_G^X & \hookrightarrow & \mathrm{Bun}_G^{\mathbb{P}(V)}.
\end{array}$$

是一个纤维平方。只需证明，对于每个交换图

$$\begin{array}{ccc}
X_S^{\mathrm{alg}} & \xrightarrow{f} & P\times^G X \\
\downarrow{\scriptstyle p_S} & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(C(|S|,F)) & \xrightarrow{s} & P\times^G\mathbb{P}(V),
\end{array}$$

s 经由 $P\times^G X$分解。这由引理 2.18 得出。 □

推论 2.21。设 X是定义在 F 上的正规拟射影 G-簇。那么，$C_c^\infty(X(F)\ \Lambda)$是 $i^{1*}\mathcal{P}_X$ 的一个直和项。此外，若 X是拟仿射的，则 $i^{1*}\mathcal{P}_X\cong C_c^\infty(X(F)\ \Lambda)$。这里，$G(F)$通过左平移作用于 $C_c^\infty(X(F)\ \Lambda)$。

证明。由命题 2.20 可知，因为沿着 Λ 的下星函子 $[X(F)/G(F)]\to[*/\underline{G(F)}]$ 是 $\underline{C_c^\infty(X(F)\ \Lambda)}$，这是由引理 1.26 得出的。 □

推论 2.22。设 $H\subset G$ 是一个连通约化子群，并设 $X=G/H$。那么，π_X 可识别为

$$\pi_X:\mathrm{Bun}_G^X\cong\mathrm{Bun}_H\to\mathrm{Bun}_G,$$

并且我们有 $\pi_X^{-1}\ (B(G)_{\mathrm{bas}})\ \subset B(H)_{\mathrm{bas}}$，其中底层空间上的诱导映射也记作 π_X。此外，我们有一个 $G(F)$-等变同构

$$X(F)\cong\coprod_{b\in\pi_X^{-1}(1)}G(F)/H_b(F).$$

证明。由于 $[X/G]\cong[*/H]$，我们有 $\mathbf{Bun}_G^X\cong\mathbf{Bun}_H$。对于每个 $b\in B(H)$，若 $\pi_X(b)$ 的牛顿点是中心的，则其牛顿点也是中心的。因此，我们得到 $\pi_X^{-1}\ (B(G)_{\mathrm{bas}})\ \subset B(H)_{\mathrm{bas}}$，并且我们有

$$\mathrm{Bun}_G^{1,X}\cong\coprod_{b\in\pi_X^{-1}(1)}[*/H_b(F)].$$

由于 H 是约化的，X 是仿射的，因此最后一个断言由命题 2.20得出。 □

接下来，我们研究 $\mathrm{Bun}_G^X \to \mathrm{Bun}_G$ 在 $\mathrm{Bun}_G^b \subset \mathrm{Bun}_G$ 上关于 $[b] \in H^1(F,\ G)$ 的纤维。注意，$H^1(F,\ G) \subset B(G)_{\mathrm{bas}}$，并且它通过 Kottwitz 值 κ 与 $\pi_1(G)_\Gamma$ 的挠部分相对应。特别地，$H^1(F,\ G)$ 是有限的。

固定一个下降代表元 $b \in [b]$。这意味着 b 定义在一个次数为 r 的有限非分歧扩张 F_r/F 上，并满足

$$b\sigma(b)\cdots\sigma^{r-1}(b) = 1.$$

Frobenius 作用 $b\sigma$ 在 $X \otimes F_r$ 上的作用为 $X \otimes F_r$ 提供了关于 F的下降数据。由于 X承认一个 G-等变的充足线丛，该下降数据是有效的。

定义 2.23。对于每个 $[b] \in H^1(F,\ G)$，令 X_b 为一个正规拟射影 G_b-簇，它由通过 Frobenius 作用 $b\sigma$对 $X \otimes F_r$ 进行下降得到。我们称 X_b 为与 b相关联的 X 的内形式。

回顾一下，我们有一个同构

$$\iota^b\colon \mathrm{Bun}_G \cong \mathrm{Bun}_{G_b},\quad \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^b$$

对于每个 $b \in B(G)_{\mathrm{bas}}$。对于每个 $\mathcal{P} \in \mathrm{Bun}_G(S)$，令 $\varphi_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathcal{P}|_{\mathcal{Y}_S}$的 Frobenius 作用。那么，$\mathcal{P}^b \in \mathrm{Bun}_{G_b}(S)$由以下条件给出

$$\mathcal{P}_b|_{\mathcal{Y}_S} = \mathcal{P}|_{\mathcal{Y}_S},\quad \varphi_{\mathcal{P}_b}(p) = \varphi_{\mathcal{P}}(p)b^{-1}.$$

命题 2.24。对于每个 $[b] \in H^1(F,G)$，存在一个同构 $\iota_X^b\colon \mathrm{Bun}_G^X \cong \mathrm{Bun}_{G_b}^{X_b}$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_G^X & \xrightarrow{\iota_X^b} & \mathrm{Bun}_{G_b}^{X_b} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{X_b}} \\ \mathrm{Bun}_G & \xrightarrow{\iota^b} & \mathrm{Bun}_{G_b}. \end{array}$$

证明。取 $r \geq 1$ 如前，并令 $G_r = G\otimes F_r$ 和 $X_r = X\otimes F_r$。对于每个 $\mathcal{P} \in \mathrm{Bun}_G(S)$ 和 $\mathcal{P}^b \in \mathrm{Bun}_{G_b}(S)$，存在一个自然识别

$$\mathcal{P}|_{\mathcal{Y}_S} \times^G X = \mathcal{P}|_{\mathcal{Y}_S} \times^{G_r} X_r = \mathcal{P}^b|_{\mathcal{Y}_S} \times^{G_b} X_b.$$

根据对 $\varphi_{\mathcal{P}_b}$ 的描述，两边的 Frobenius 作用相同，因此它给出了 π_X 和 π_{X_b} 在 S 上的纤维的识别。于是结论得证。□

推论 2.25。对于每个 $[b] \in H^1(F,G)$，令 $\mathrm{Bun}_G^{b,X} =, \mathrm{Bun}_G^X \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^b$。存在一个闭开浸入

$$i_X^b\colon [\underline{X_b(F)}/\underline{G_b(F)}] \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G^{b,X}$$

在 $\mathrm{Bun}_G^b \cong [*/\underline{G_b(F)}]$ 上；当 X 为拟仿射时，它是一个同构。

证明。这由命题 2.20 和命题 2.24推出。注意，若 X 是拟仿射的，则 X_b也是拟仿射的。□

注记 2.26。对于$H^1(F,G)$之外的基本的 σ-共轭类，我们不能期待类似的描述。从岩泽–泰特周期和海克周期的显式描述中可以看出这一点。

$\mathcal{A}$侧的计算

本节将对与岩泽–泰特周期和海克周期相关的对偶对的未归一化周期层 $\mathcal{P}_X$进行显式计算。对于岩泽–泰特周期，我们直接计算相关 Banach-Colmez 空间的紧支撑上同调。对于海克周期，我们采用几何艾森斯坦级数和展开技巧来描述周期层。

3.1. 岩泽-泰特周期。 在本节中，我们计算未归一化的岩泽-泰特周期层 $\mathcal{P}_X$，其中 $G=\mathbb{G}_m$ 和 $X=\mathbb{A}^1$ 带有标准的 $\mathbb{G}_m$ 作用。在这种情况下，我们可以对 $\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m}$ 给出一个简单描述。

引理 3.1。 我们有 $\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m}\cong\mathcal{BC}(\mathcal{L}^{\mathrm{univ}})$ （相关术语见例 2.9 （2））。

证明。叠 $[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ 将一个概形 S 发送到由 S 上的线丛 $\mathcal{L}$ 及其截面 $s\in\Gamma(S,\mathcal{L})$组成的群胚（见约定 2.5）。因此，按定义，对于 $S\in\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}$，$\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m}(S)=\mathcal{BC}(\mathcal{L}^{\mathrm{univ}})(S)$。该断言成立，因为 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{std}}\subset\mathrm{Perf}$ 是 v-拓扑的一个基。□

回顾例2.4 ，我们有一个分解 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}=\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}$。令$\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,n}\in\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n},\Lambda)\cong\mathcal{D}(F^\times,\Lambda)$ 表示$\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1}$的限制。那么，我们有如下描述。

命题 3.2. 对于每个整数 n，我们有

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,n}=\Lambda_{\mathrm{triv}}(n<0),\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,0}=C_c^\infty(F,\Lambda),\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,n}=\Lambda_{\mathrm{norm}}[-2n](n>0).$$

这里，Λ_{triv} 表示 $F^\times$ 的平凡特征，而 Λ_{norm} 表示将$x\in F^\times$ 映至 $|x|=q^{-\mathrm{ord}(x)}$的范数特征。此外，$F^\times$ 通过左平移作用于 $C_c^\infty(F,\Lambda)$。

证明。令 $\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,n}=\pi_{\mathbb{A}^1}^{-1}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n})$。对于 $n<0$，$\mathcal{L}^{\mathrm{univ}}$ 在 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}$上具有负次数，因此根据 [FS24, Proposition II.3.4 (i)]，$\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,n}\to\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}$ 是一个同构。因此，$\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,n}=\Lambda_{\mathrm{triv}}$。对于 $n=0$，结论由推论 2.21 得出。

对于 $n>0$，$\mathrm{Bun}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,n}\times_{\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}}*=\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n))$。令 $\pi_n\colon\mathcal{BC}(\mathcal{O}(n))\to*$。由于 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}$-形式体系是 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}_{\mathrm{mot}}$-形式体系的基变换，根据命题 1.35，$\pi_{n!}\Lambda\cong\Lambda[-2n]$ 属于 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(*,\Lambda)\cong\mathcal{D}(\Lambda)$。特别地，$\mathcal{P}_{\mathbb{A}^1,n}$ 是 $F^\times$ 的一个特征的平移。为了确定这个特征，我们可以根据投影公式假设 $\Lambda=\mathbb{Z}_\ell$。于是，我们可以将问题归结为 $m\geq 0$ 的 $\Lambda=\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$ 情形。在此情形下，该断言是 HI24 引理2.4 (i) 的特例]。□

3.2. 海克周期。本节中，我们计算未归一化的海克周期层$\mathcal{P}_X$，其中 $G=\mathrm{GL}_2$ 且 $X=\mathrm{GL}_2/A$。这里，$A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&*\end{pmatrix}\right\}\cong\mathbb{G}_m$。

由于 $[X/G]\cong[*/A]$，$\mathrm{Bun}^X_G\cong\mathrm{Bun}_A$。由于 $A\cong\mathbb{G}_m$，我们有分解 $\mathrm{Bun}_A=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Bun}_{A,n}$ 并令 $\pi_n\colon\mathrm{Bun}_{A,n}\to\mathrm{Bun}_G$ 为上述 Map 的限制。然后，$\mathrm{Bun}_{A,n}$映射到对应于 σ-共轭类 $b_n=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&\pi^{-n}\end{pmatrix}\right]\in B(G)$ 的点。现在，我们有 $\mathcal{P}_X=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\pi_{n!}\Lambda$。我们将计算每个因子 $\mathcal{P}_{X,n}=\pi_{n!}\Lambda$。

令 $T\subset\mathrm{GL}_2$ 为对角环面。令 $B\subset\mathrm{GL}_2$ 为标准 Borel 子群，并令 $B\subset\mathrm{GL}_2$ 为其对偶 Borel 子群。根据 [Sch25，定理 3.1 (ii)]，，我们有

$$\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G^{b_0},\Lambda)\cong\mathcal{D}(\mathrm{GL}_2(F),\Lambda),\quad\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G^{b_n},\Lambda)\cong\mathcal{D}(T(F),\Lambda)(n\neq 0).$$

因此，$\mathcal{P}_{X,\,0}$ 是一个光滑 $\mathrm{GL}_2(F)$-表示复形，而 $\mathcal{P}_{X,\,n}$ 对于 $n\neq 0$ 是一个光滑$T(F)$-表示复形。

命题 3.3. 对于每个整数 n，我们有

$$\mathcal{P}_{X,n}=i_!^{b_n}\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\Lambda_{\mathrm{norm}}^{-1}[2n](n<0),\mathcal{P}_{X,n}=i_!^{b_n}\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\Lambda_{\mathrm{norm}}[-2n](n>0),$$

$$\mathcal{P}_{X,0}=i_!^1C_c^\infty(\mathrm{GL}_2(F)/A(F),\Lambda).$$

证明。对于 $n=0$，π_0由 $[*/A(F)]\to[*/\mathrm{GL}_2(F)]\hookrightarrow\mathrm{Bun}_G$给出，因此由引理 1.26可得结论。对于 $n<0$，我们有如下图表

$$\mathrm{Bun}_{A,n}\xrightarrow{f}\mathrm{Bun}_T^{b_n}\underset{\mathfrak{q}}{\overset{\mathfrak{i}}{\rightleftarrows}}\mathrm{Bun}_B^{b_n}=\mathrm{Bun}_G^{b_n}\xhookrightarrow{\mathfrak{p}}\mathrm{Bun}_G.$$

这里，$\pi_n=\mathfrak{p}\circ\mathfrak{i}\circ f$和 $\mathfrak{i}^*$诱导出一个等价 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G^{b_n},\ \Lambda)\cong\mathcal{D}(T(F)\ \Lambda)$。这在通常的层论中众所周知；一旦有了命题 1.35，同样的证明在 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}$-形式体系中也成立：$\mathfrak{i}$ 是 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(-n))$的某个扭曲形式下的主丛，因此由命题 1.35 可知 $\mathfrak{i}^*$ 是全忠实的，并由 $\mathfrak{i}^*\circ\mathfrak{q}^*\cong\mathrm{id}$可知本质满的。要计算$\mathcal{P}_{X,\,n}$，只需证明 $\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!f_!\Lambda\cong\mathrm{cInd}^{T}{}_{(F)\,A(F)}\Lambda_{\mathrm{norm}}^{-1}[2n]$。

由于 $\mathfrak{i}^*$ 是一个等价，我们可以将 $f_!\Lambda\cong\mathfrak{i}^*K$ 写成某个 $K\in\mathcal{D}(\mathrm{Bun}_G^{b_n},\ \Lambda)$。由投影公式可得

$$\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!f_!\Lambda\cong\mathfrak{i}^*(K\otimes\mathfrak{i}_!\Lambda)\cong f_!\Lambda\otimes\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!\Lambda.$$

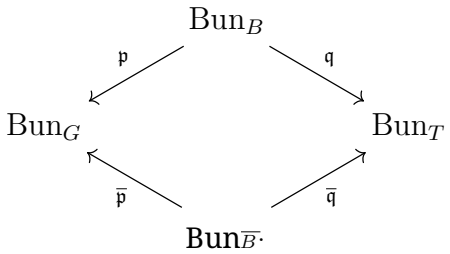
因此，只需证明 $f^*\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!\Lambda\cong\Lambda_{\mathrm{norm}}^{-1}[2n]$。令 $\pi\colon *\to\mathrm{Bun}_T^{b_n}$。由于 $\mathrm{Bun}_T^{b_n}\times_{\mathrm{Bun}_B^{b_n},\mathfrak{i}\circ\pi}*\cong\mathcal{BC}(\mathcal{O}(-n))$，根据命题 1.35 有 $\pi^*\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!\Lambda\cong\Lambda[2n]$。于是，$f^*\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_!\Lambda$ 是 $A(F)$ 的一个光滑特征的平移。为确定这个特征，我们可以将问题化归到 $\Lambda=\mathbb{Z}_\ell$ 的情形，再化归到 $m\geq 0$ 的 $\Lambda=\mathbb{Z}/\ell^m$。于是，由 HI24，引理 2.6 (1)] 可得结论，因为 $A(F)$ 在 $\mathrm{Bun}_T^{b_n}\times_{\mathrm{Bun}_B^{b_n},\mathfrak{i}\circ\pi}*\cong\mathcal{BC}(\mathcal{O}(-n))$ 上的作用是通常的乘以 $F^\times$ 的逆运算。

因此，我们得到了关于 $n<0$ 的断言。对于 $n>0$，使用同样的论证即可得到

$$\mathrm{Bun}_{A,n}\xrightarrow{f}\mathrm{Bun}_T^{b_n}\underset{\bar{\mathfrak{q}}}{\overset{\bar{\mathfrak{i}}}{\rightleftarrows}}\mathrm{Bun}_{\overline{B}}^{b_n}=\mathrm{Bun}_G^{b_n}\xhookrightarrow{\bar{\mathfrak{p}}}\mathrm{Bun}_G.$$

□

为了与谱侧进行比较，我们使用（归一化的）几何艾森斯坦级数来描述 $\mathcal{P}_X$。考虑图表



令 $K_B\in\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_T,\ \Lambda)$（分别为$-K_B\in\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_T,\ \Lambda)$）为满足以下条件的复形：$\mathfrak{q}^*K_B$ $\bar{}$(分别为$\mathfrak{q}^*K_B$）是 Bun_B（分别为 Bun_B）的对偶化复形。关于挠系数情形的具体描述，参见 [HI24，定理 1。6] 和之前一样，在 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}$-形式体系中，同样的计算仍然成立：我们可以证明 K_B 是某个特征的平移，而该特征的计算可归约为 $\Lambda=\mathbb{Z}_\ell$，进而归约为 $\Lambda=\mathbb{Z}/\ell^m$ 对于 $m\geq 0$。

现在，令 $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 并固定一个平方根 $\sqrt{q} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$。这一选择确定了 $F^\times$ 的半范数特征 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{1/2}$ 范数以及典范平方根 $K_B^{1/2}$ 和 $K_{\overline{B}}^{1/2}$。

定义 3.4. ([HHS24，定义 2.1.7]) 与 B 及 $\overline{B}$ 相关联的归一化几何艾森斯坦级数函子定义如下：

$$\mathrm{Eis}_{B!} = \mathfrak{p}_!\mathfrak{q}^*((-)\otimes K_B^{1/2})\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_T, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$\mathrm{Eis}_{\overline{B}!} = \overline{\mathfrak{p}}_!\overline{\mathfrak{q}}^*((-)\otimes K_{\overline{B}}^{1/2})\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_T, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

设 U 为 B 的幺正根基。固定一个非平凡的加法特征 $\psi\colon F \to \mathbb{Q}_\ell$，并令 $\mathcal{W}_\psi = i_!^1 \mathrm{cInd}_{U(F)}^{G(F)}\psi$ 为相应的 Whittaker 层。

命题 3.5. 对于每个非零整数 n，我们有

$$\mathcal{P}_{X,n} = \mathrm{Eis}_{B!}(i_!^{b_n}\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}[n])(n<0), \mathcal{P}_{X,n} = \mathrm{Eis}_{\overline{B}!}(i_!^{b_n}\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{1/2}[-n])(n>0),$$

对于 $n=0$，我们有一个短正合列

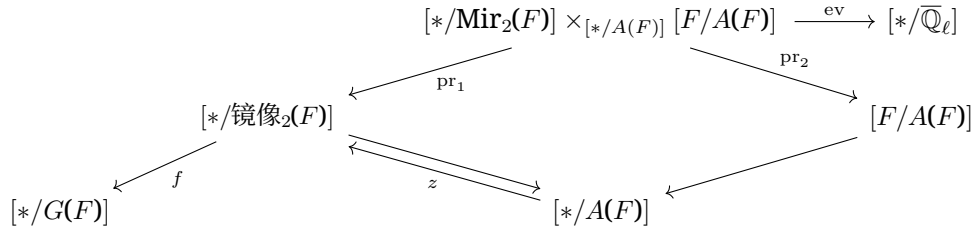
$$\mathcal{W}_\psi \hookrightarrow \mathcal{P}_{X,0} \to \mathrm{Eis}_{B!}(i_!^1\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}).$$

证明. 对于 $n<0$，ν_{b_n} 相对于 B (参见 [Tak24，引理 2.9 (1)])，它是严格余支配的，因此 $\mathrm{Eis}_{B!}|_{\mathrm{Bun}_T^{b_n}} = i^{b_n}_!(-\otimes(\mathbb{Q}_{\ell\mathrm{norm}}\boxtimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{-1}$ 归一化$)^{1/2}[n])$ 由 K_B 中 [HI24，定理 16]的计算可得。于是，结论由命题 3.3推出。相同的论证也适用于 $n>0$。

我们将证明关于 $n=0$ 的断言。在这种情况下，$\mathrm{Eis}_{B!}|_{\mathrm{Bun}_T^1}$ 是归一化的抛物诱导 $\mathrm{cInd}_{B(F)}^{G(F)}(-\otimes(\mathbb{Q}_{\ell\mathrm{norm}}\boxtimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{-1}$ 范数$)^{1/2})$。因此，我们需要证明存在一个短正合列

$$\mathrm{cInd}_{U(F)}^{G(F)}\psi \hookrightarrow \mathrm{cInd}_{A(F)}^{G(F)}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \twoheadrightarrow \mathrm{cInd}_{B(F)}^{G(F)}(\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1}).$$

这可以通过展开法证明（见 [FW25，第 7.3 节。1]）。考虑通过以下图表进行傅里叶变换。



这里，在定义 ev 时，$\mathrm{Mir}_2 = A \ltimes U \subset B$and F被视为 $U(F)$ 的线性对偶。关于 ψ 的 $C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的通常傅里叶变换可以重新解释为

$$z_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}} \cong \mathrm{pr}_{1!}\mathrm{ev}^*\psi \otimes \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1}.$$

这里，$z_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}} \cong C_c^\infty(U(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 $\mathrm{pr}_{1!}\mathrm{ev}^*\psi \cong C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。$(a,u) \in A(F) \ltimes U(F)$ 在每个空间上的作用由下式给出

$$((a,u)\cdot f)(x) = f(ax+u), \quad ((a,u)\cdot \widehat{f})(y) = \psi(\langle u, a^{-1}y\rangle)\widehat{f}(a^{-1}y)$$

$\widehat{\ }$对于 $f \in C_c^\infty(U(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 $f \in C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。因此，傅里叶变换

$$C_c^\infty(U(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \ni f(x) \mapsto \widehat{f}(y) = \int_F f(x)\psi(-\langle x, y\rangle)dx \in C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

给出 $z_!\mathbb{Q}_{\ell\overline{\mathrm{triv}}} \cong \mathrm{pr}_{1!}\mathrm{ev}^*\psi \otimes \mathbb{Q}_\ell^{\overline{-1}}{}_{\mathrm{norm}}$。现在，所需的短正合列可由沿闭开分解进行的切除得到

$$[*/\mathrm{Mir}_2(F)] \hookrightarrow [*/\mathrm{Mir}_2(F)] \times_{[*/A(F)]} [F/A(F)] \hookleftarrow [*/U(F)]$$

由 $F = \{0\} \cup F^\times$ 得到。 □

4. $\mathcal{B}$侧的表述

本节介绍相对谱叠 $\mathrm{Par}^X_{{}^LG}$ 以及未归一化的 L 层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$。本节始终使用有理系数，以避免一般系数下本质性的技术困难。

令 Λ 为 G上的经典 $\mathbb{Q}$环。关于导出代数几何中的记号和约定，请参阅附录 A 。

4.1. **$\mathrm{Par}_{{}^LG}$的回顾。** 本节回顾 L参数叠，该叠由 [DHKM20], [、Zhu21] 和 [FS24]引入。由于我们工作在特征 0下，我们按照 LZhu21 [第 3 节中的方式，将其定义为 Weil–Deligne 1]参数叠。

Let $\widehat{G}$ 是 Λ上的 G 对偶群。取 W_F 的一个有限商 Q ，使得 W_F 在 $\widehat{G}$ 上的作用经由 Q分解。令 G的 L-群为 ${}^LG = \widehat{G} \rtimes Q$ 。当 G 是分裂的时，我们取 Q 为平凡群，使得 ${}^LG \cong \widehat{G}$。

令 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}\,\widehat{G}$，并令 $|\cdot|: W_F \to \mathbb{R}_{>0}$ 为满足 $|\sigma| = q^{-\mathrm{ord}(\sigma)}$的同态。特别地，对于几何 Frobenius 元 $\mathrm{Fr} \in W_F$， $|\mathrm{Fr}| = q^{-1}$ 。

定义 4.1。 对于一个 Λ-代数 R，取值于 ${}^LG$ 、定义在 R 上的 Weil-Deligne L-参数是一个对$(\varphi^{\mathrm{sm}}, N)$，其中 $\varphi^{\mathrm{sm}}: W_F \to {}^LG(R)$是定义在 Q 上的光滑同态，而 $N \in \widehat{\mathfrak{g}} \otimes R$是一个满足对所有 $\sigma \in W_F$都有 $\mathrm{Ad}(\varphi^{\mathrm{sm}}(\sigma))N = |\sigma|N$ 的元素。

这里， N 自动是幂零的，因为 Λ 处于特征 0。当对某个 n有 ${}^LG = \mathrm{GL}_n$ 时，魏尔–德利涅 L-参数也称为魏尔–德利涅表示。

命题 4.2. （[*Zhu21*，命题 *3.1.*6]） 设 $Z^1(WD_F, {}^LG)$为如下函子：它将一个 Λ-代数 R 映到取值于 ${}^LG$、定义在 R 上的魏尔–德利涅 L-参数集合。那么，$Z^1(WD_F, {}^LG)$由仿射概形的不交并表示，该不交并是等维的，维数为 $\dim G$ ，并且在 Λ上是局部完全交。此外， $[Z^1(WD_F, {}^LG)/\widehat{G}]$ 上的对偶化复形是平凡的。

商叠 $[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^LG)/\widehat{G}]$ 称为 L-参数叠。它与 Q的选择无关。当 Λ 是一个 $\mathbb{Q}_\ell$-代数时， $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^LG)$ 同构于模空间 $Z^1(W_F, {}^LG)$，它参数化了连续的 L-参数（见 [Zhu21，引理3.1.8]）。

例 4.3。 ([FS24，第 IX.6 节。4]) 假设 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ 和 ${}^LG = \overline{\mathbb{G}_m}$。根据局部类域论， $Z^1(\mathrm{WD}_F, \mathbb{G}_m)$ 将一个 Λ-代数 R映到光滑同态的集合$F^\times \to R^\times$。由于 $F^\times \cong O_F^\times \times \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}_\ell[O_F^\times/K]$ 对于每个开子群都分解为特征的直和 $K \subset O_F^\times$ ，我们有

$$Z^1(\mathrm{WD}_F, \mathbb{G}_m) = \bigsqcup_{\chi: O_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times} \mathbb{G}_m.$$

这里， χ 遍历所有光滑特征标 $O_F^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ 。对于每个 χ，分量 $\mathbb{G}_m \hookrightarrow Z^1(\mathrm{WD}_F, \mathbb{G}_m)$ 将 $T \in R^\times$ 映射到特征 χ_T： $F^\times \to R^\times$，满足 $\chi_T(\pi) = T$ 和 $\chi_T|_{O_F^\times} = \chi$。

因此，我们得到

$$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m} = \coprod_{\chi\colon O_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times} \mathbb{G}_m \times [*/\mathbb{G}_m].$$

每个 χ 对应的分支记为 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\,\chi} \subset \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$。

4.1.1. **导出增强。** 在文献中，L-参数的叠被定义为经典 Λ-代数上的模。如 [Zhu21，注 3.14]和 [FS24，命题 VIII.21], 所指出的，这一定义可以扩展到动画 Λ-代数。由于即将引入的相对谱叠具有非平凡的导出结构，这种扩展对我们的目的至关重要。本节将给出一个将L-参数的叠定义为导出栈的方式，并将其与经典定义进行比较。

定义 4.4。设

$$\mathrm{ID}_F = \mathbb{G}_a \times \underline{I_F}, \quad \mathrm{WD}_F = \mathbb{G}_a \rtimes \underline{W_F}$$

分别为 $\mathbb{Q}$ 上的惯性群概形和 Weil-Deligne 群概形。这里，I_F（分别地，W_F）是与 I_F（分别地，W_F）相关联的（分别地，局部）紧致群概形，而 $\sigma \in W_F$ 对 $\mathbb{G}_a$ 的共轭作用是由 $|\sigma|$ 的乘法给出的。

选定几何 Frobenius $\mathrm{Fr} \in W_F$ 给出 $\mathrm{WD}_F \cong \mathrm{ID}_F \rtimes \mathbb{Z}$。对于每个动画$\mathbb{Q}$-代数 R，令 $\mathrm{WD}_{F,\,R} = \mathrm{WD}_F \times \mathrm{Spec}(R)$ 以及 $\mathrm{ID}_{F,\,R} = \mathrm{ID}_F \times \mathrm{Spec}(R)$。我们将沿用附录B中的记号。

定义 4.5。令 $\mathrm{Par}_{^L G} = \mathrm{Map}_{\mathrm{Sh}(*/\mathbb{Q})}([*/\mathrm{WD}_F],\ [*/{}^L G])$ 表示 CAlg_Λ上的映射叠。这里，$* = \mathrm{Spec}(\Lambda)$。对于每个动画 Λ-代数 R，$\mathrm{Par}_{^L G}(R)$ 是映射 anima $\mathrm{Map}_{\mathrm{Sh}(*/\mathbb{Q})}([\mathrm{Spec}(R)/\mathrm{WD}_F],\ [*/{}^L G])$。

备注 4.6。étale 分类叠 $[*/\mathrm{WD}_F]$ 不等于 fpqc 分类叠。这一区别在此处并不重要，因为 étale 分类叠 $[*/{}^L G]$ 由于 ${}^L G$的光滑性而满足 fpqc 下降。

该定义是 [Sch25，定义 4 的导出增强。3]我们将验证，我们的定义与经典 Artin 叠 $[Z^1(\mathrm{WD}_F,\ {}^L G)/\widehat{G}]$一致。

首先，我们计算 $\mathrm{Par}_{^L G}$ 的余切复形。令 S 为其上的一个导出概形 Λ，并令 $x \in \mathrm{Par}_{^L G}(S)$。如 [AG15第 10.3 节所述，2], 处的余切空间视为一个函子 x

$$\mathrm{QCoh}(S)^{\leq 0} \to \mathrm{Ani}$$

由群上同调的截断给出

$$\mathcal{M} \mapsto \tau^{\leq 0} R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M} \otimes (\mathcal{P}_x \times^{{}^L G} \widehat{\mathfrak{g}}))[1].$$

这里，$R\Gamma(\mathrm{WD}_F,\ -)$ 表示沿 $[S/\mathrm{WD}_F] \to S$ 的推前，${}^L G$ 作用于 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上，并通过伴随作用，$\mathcal{P}_x$ 是 ${}^L G$-主丛，位于 $[S/\mathrm{WD}_F]$ 上，由 $x\colon [S/\mathrm{WD}_F] \to [*/{}^L G]$ 得到。

下面说明 $R\Gamma(\mathrm{WD}_F, -)$ 的计算。对于每个 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathrm{WD}_F])$，令$\mathcal{M}_S \in \mathrm{QCoh}(S)$ 表示底空间 S 上的拟凝聚层。那么，$\mathcal{M}_S$ 带有一个光滑 W_F- 作用，以及一个 $\mathbb{G}_a$- 作用，该作用由一个局部幂零自同态给出（见命题 B.3）

$$N \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_S).$$

Prop题 4.7。 (命题 B.6) 对于每个 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathrm{WD}_F])$，有

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M}) \cong \left[\mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{(\mathrm{Fr}-1,N)} \mathcal{M}_S^{I_F} \oplus \mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{(N,-q\mathrm{Fr}+1)} \mathcal{M}_S^{I_F}\right].$$

特别地，$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, -)$ 的上同调维数为2，与小余极限交换，并满足投影公式以及沿 S 的基变换。

定义 4.8。 令 $\mathcal{O}(1)$ 为 $[*/\mathrm{WD}_F]$ 上对应于范数特征$|\cdot|$ 的线丛，并令 $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$。对于每个 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathrm{WD}_F])$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，令 $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(n)$ 表示第 n 次 Tate 扭曲。

推论 4.9。 对于 $[S/\mathrm{WD}_F]$ 上的每个完美复形 $\mathcal{M}$，我们有一个同构

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M})^\vee \cong R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M}^\vee(1))[2].$$

证明。 这由命题 B.6 的显式描述得出。 □

命题 4.10。 对于一个导出 Λ-概形 S 和 $x \in \mathrm{Par}_{{}^L G}(S)$，令 $\widehat{\mathfrak{g}}_x = \mathcal{P}_x \times^{{}^L G} \widehat{\mathfrak{g}}$ 为 $[S/\mathrm{WD}_F]$ 上的一个向量丛。对于每个 (S, x)，$\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 在 (S, x) 处的余切空间由完美复形核心表示

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \widehat{\mathfrak{g}}_x^\vee(1))[1]$$

具有 $[-1, 1]$ 中的 *Tor* 振幅。特别地，$\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 具有余切复形。

证明。 在 (S, x) 处的余切空间将 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}(S)^{\leq 0}$ 映至以下对象的截断

$$\begin{aligned} R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M} \otimes \widehat{\mathfrak{g}}_x)[1] &\cong \mathcal{M} \otimes R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \widehat{\mathfrak{g}}_x)[1] \\ &\cong R\mathrm{Hom}(R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \widehat{\mathfrak{g}}_x)^\vee[-1], \mathcal{M}). \end{aligned}$$

因此，由推论 4.9 可得所述结论。第二个结论由 [DAG XIV，注记 1.3。14] 得出，因为 Weil-Deligne 上同调满足沿 S 的基变换（由命题B.6）。□

接下来，我们验证 $\mathrm{Par}_{{}^L G}$的经典截断与 $[Z^1(\mathrm{WD}_F, \Lambda)/{}^L G]$一致。下文中，群导出概形是指 [Lur09定义 7.2.2 意义下的群对象。1]在 Q 上的群导出概形范畴记为grp。

命题 4.11。 我们有 $\mathrm{Par}_{{}^L G} \cong \mathrm{Map}^{\mathrm{grp}/Q}(\mathrm{WD}_F, {}^L G)/\widehat{G}$。此外，我们还 *ve*

$${}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Map}_{\mathrm{grp}/Q}(\mathrm{WD}_F, {}^L G) \cong Z^1(\mathrm{WD}_F, \Lambda), \quad {}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^L G} \cong [Z^1(\mathrm{WD}_F, \Lambda)/\widehat{G}].$$

证明。设 S 是一个在 Λ 上的导出概形，并令 $x \in \mathrm{Par}_{{}^L G}(S)$。由图表

$$\begin{array}{ccccc} S & \dashrightarrow & [*/\widehat{G}] & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [S/\mathrm{WD}_{F,S}] & \xrightarrow{x} & [*/{}^L G] & \longrightarrow & [*/Q], \end{array}$$

我们得到一个典范的 $\widehat{G}$-主丛 $\widehat{\mathcal{P}}_x$ over S。令 $\widehat{\mathcal{P}}^{\mathrm{univ}} \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 为普适的 $\widehat{G}$-主丛。那么，$\widehat{\mathcal{P}}^{\mathrm{univ}}(S)$ 同构于带基点映射 anima $\mathrm{Map}^{S/(-)/[*/Q]}([S/\mathrm{WD}_F, S], [*/{}^L G])$。取 Čech 神经后，我们得到

$$\mathrm{Map}^{S/(-)/[*/Q]}([S/\mathrm{WD}_F], [*/{}^L G]) = \mathrm{Map}_{Q^\bullet}(\mathrm{WD}_F^\bullet, ({}^L G)^\bullet) = \mathrm{Map}_{\mathrm{grp}/Q}(\mathrm{WD}_{F,S}, {}^L G)$$

这里，第二项指的是单纯集合的映射 anima。因此，我们得到第一个结论。当 S 是经典的时，$\mathbf{Map}^{\mathrm{grp}/Q}(\mathbf{WD}_{F,S}, {}^{L}G)$ 是静态的，因为 $\mathbf{WD}_{F,S}$ 和 ${}^{L}G$ 都是经典的。由于同态 $\mathbb{G}_{a,S} \to {}^{L}G$唯一对应于一个元素$N \in \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{O}_S$，且该元素在 S上扎里斯基局部幂零，因此由定义 4.1 不难看出 $\mathbf{Map}^{\mathrm{grp}/Q}(\mathbf{WD}_F, {}^{L}G)(S) = Z^1(\mathbf{WD}_F, {}^{L}G)(S)$。因此，我们得到第二个结论。□

命题 4.12。导出叠 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 是一个局部有限表示的导出1-叠。

关于导出1-叠和 Artin-Lurie 可表性，请参见附录 A。

证明。我们将应用 Artin-Lurie 可表性判据 [DAG，定理 7.1。6] 将其应用于$\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$。注意，这只能说明 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 几乎有限表示。由于 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 的余切复形是完美的，这便蕴含了所述结论（参见 [DAG，命题 3.2。18]）。

首先，关于 ${}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$的条件，即相关文献中的 (3) 和 (7)，由命题4.11可得。此外，$\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 满足 étale 下降，并且由命题 4.10具有余切复形。还需证明 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 在截断对象上与滤过余极限相容，并且是无穷小凝聚的和收敛的。

由于 $[*/\mathbf{WD}_F] = \mathbf{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}}\mathbf{WD}_F^n$，我们有

$$\mathrm{Par}_{{}^{L}G}(S) = \lim_{n\in\Delta} \mathrm{Map}_{[*/Q]}(\mathrm{WD}^n_{F,S}, [*/{}^{L}G]).$$

这里，每一项都同构于 $\widehat{\mathrm{Map}}(\mathrm{WD}^n_{F,S}, [*/G])$，因此它与截断对象上的滤过余极限相交换，并且无穷小凝聚且收敛。由于后两个条件在极限下保持不变，它们对 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$也成立。此外，如果 S 是 n-截断的，$\widehat{\mathrm{Map}}(\mathrm{WD}^n_{F,S}, [*/G])$ 由 $(n+1)$-截断，依据 [DAG，推论 5.3。8]由于截断空间的全化与滤过余极限相交换，$\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 在截断对象上与滤过余极限相交换。□

如 [GR17第 1.3 节6], 中所述，存在一个自然映射

$$[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/\widehat{G}] = {}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^{L}G} \to \mathrm{Par}_{{}^{L}G}.$$

It 通过比较余切复形，可以看出这是一个同构 .

命题 4.13。自然映射 $[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/\widehat{G}] \to \mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 是一个同构。

证明。由命题 4.2，$[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/\widehat{G}]$ 是准光滑的。从 [Zhu21 的证明（引理 3.3）中的显式描述1] 以及 [FS24 的推论 VIII.23] 可知，其余切复形等于 $\mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 的余切复形的拉回（见命题 4.10）。特别地，$[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/\widehat{G}] \to \mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 的相对余切复形是平凡的。

由于 $\mathbf{Par}_{{}^{L}G}$ 是 Λ 上的导出 1-叠，我们可以取一个光滑覆盖 $x\colon S \to \mathbf{Par}_{{}^{L}G}$，其来源是不交并的仿射 Λ- 概形。令

$$S' = [Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/\widehat{G}] \times_{\mathrm{Par}_{{}^{L}G}, x} S.$$

只需证明 $S' \to S$ 是一个同构。首先，S' 是一个在 Λ-叠上局部有限表示的 Artin Λ，且其相对余切复形 $L_{S'/S}$ 为零。由于 S 的余切复形是连通的，S' 的余切复形也是连通的。此外，${}^{\mathrm{cl}}S' \cong {}^{\mathrm{cl}}S$，因此根据[AG15，定理 B.2，14] S' 是一个导出概形。于是，$S' \to S$ 根据 [DAG，推论 3.4，10], 是平坦的，因此我们由 ${}^{\mathrm{cl}}S' \cong {}^{\mathrm{cl}}S$得到 $S' \cong S$。□

4.1.2. 关于$\mathrm{Par}_{{}^L G}$上的归纳相干层。 由命题4.2 可知，$\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 是不交并，即若干个 G仿射 G-概形的 G-商的 G并。取分解

$$\mathrm{Par}_{{}^L G} = \coprod_{x \in \pi_0(\mathrm{Par}_{{}^L G})} \mathrm{Par}_{{}^L G, x}$$

进入连通分支。根据 [BZFN10，命题 3.21], $\mathrm{Par}_{{}^L G,\, x}$ 是完美的，s o

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G}) = \prod_{x \in \pi_0(\mathrm{Par}_{{}^L G})} \mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G, x}) = \mathrm{Ind}\big(\bigoplus_x \mathrm{Perf}(\mathrm{Par}_{{}^L G, x})\big).$$

同理，由于 $\mathrm{Par}_{{}^L G,\, x}$ 是一个 QCA 叠，我们有

$$\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G}) = \prod_{x \in \pi_0(\mathrm{Par}_{{}^L G})} \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G, x}) = \mathrm{Ind}\big(\bigoplus_x \mathrm{Coh}(\mathrm{Par}_{{}^L G, x})\big).$$

4.2. **相对谱叠** $\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$。 本节将介绍相对谱叠 $\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 以及相应的非归一化 L-层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$，它定义在适当的导出 ${}^L G$-概形$\widehat{X}$ 之上 Λ。这里，我们对 ${}^L G$-概形的约定与约定 2.5相同。

定义 4.14。 设 $\widehat{X}$ 是一个导出 ${}^L G$-概形，且局部有限表示（参见 [DAG，第 p.32] 页）在 Λ 之上，并且 $\mathrm{cl}\, \widehat{X}$ 在 $\widehat{G}$ 之上是拟射影的。令 $\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^L G}$ 为映射叠 $\mathrm{Map}_{[*/Q]}([*/\mathrm{WD}_F], [\widehat{X}/{}^L G])$，其定义在 CAlg_Λ之上。

注 4.15. 这里， G-概形在 Λ 上是 G-拟射影的，当且仅当它具有一个 G-等变充足线丛。根据 [Sum75，定理 2。5], 当 Λ 正规时，如果 G-概形在 Λ上正规且拟射影，则满足此条件。

例 4.16. 设 $H \subset G$ 是一个在 Q的作用下稳定的平坦闭子群概形。滥用记号，令 ${}^L H = \widehat{H} \rtimes Q$ 并假设 $\widehat{X} = \widehat{G}/\widehat{H}$。则， $[\widehat{X}/{}^L G] \cong [*/{}^L H]$且 $\mathrm{Par}^X_{{}^L G} \cong \mathrm{Par}_{{}^L H}$。

与$\mathrm{Par}_{{}^L G}$不同，重要的是要追踪$\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 的导出结构（见例如命题4.25）。我们将证明$\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 是一个 Artin Λ-叠，且$\mathrm{Par}^X_{{}^L G} \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 是概形态的。

首先，我们研究 $\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^L G}$ 的余切复形。由于 $\widehat{X}$ 局部有限表示， $L_{[\widehat{X}/\widehat{G}]}$ 是具有 Tor 振幅 $(-\infty,\ 1]$ 根据 [DAG，命题 3.2。14]。

命题 4.17。 对于一个导出 Λ-概形 S 以及 $x \in \mathrm{Par}^X_{{}^L G}(S)$，$\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 在 Λ 上点 (S, x) 处的余切空间由完美复形核心表示

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^* L_{[\widehat{X}/\widehat{G}]}(1))[2]$$

，其 *Tor* 振幅位于$(-\infty, 1]$。特别地，$\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 具有余切复形。

证明。如 [AG15第 10.3 节所述，2], 在 x 视为一个函子时的余切空间

$$\mathrm{QCoh}(S)^{\leq 0} \to \mathrm{Ani}$$

由群上同调的截断给出

$$\mathcal{M} \mapsto \tau^{\leq 0} R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M} \otimes x^* L^\vee_{[\widehat{X}/\widehat{G}]}).$$

由命题 B.6 和推论 4.9可知，它同构于以下对象的截断

$$\mathcal{M} \otimes R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^* L^\vee_{[\widehat{X}/\widehat{G}]}) \cong R\mathrm{Hom}(R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^* L_{\widehat{X}}(1))[2], \mathcal{M}).$$

□

注 4.18. 令 $L_{\widehat{X}}$ 为 $[\widehat{X}/{}^L G] \to [*/{}^L G]$的相对余切复形，它是完美且连通的。由与上述相同的证明可知，$\mathrm{Par}^X_{{}^L G} \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 在 (S, x) 处的相对余切空间由连通完美复形核心表示

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^* L_{\widehat{X}}(1))[2].$$

接下来，我们研究 $\mathrm{Par}^X_{{}^L G}$ 的经典截断。

命题 4.19. 设 R 为一个 Λ-代数，且令 $x \in \mathrm{Par}_{{}^L G}(R)$。令 $\mathcal{P}_x$ 为R 上对应于 x的 G-主丛。

(1) 设 ${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_x = \widehat{\mathcal{P}}_x \times^{\widehat{G}} {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$。则，${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_x$ 由一个概形表示。*(2)* 设 $\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R = \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^L G} \times_{\mathrm{Par}_{{}^L G}, x} \mathrm{Spec}(R)$。则，${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R$是${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_x$的闭子概形。

证明。 由于 ${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 具有一个 $\widehat{G}$-等变充足线丛，(1) 由 $\widehat{\ }$中证明的下降 [BLR90 定理 7] 得出。对于 (2)，我们可以取一个光滑覆盖 $\mathcal{P}_x$，并假设 $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$经由 $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G)$ 分解。令 φ_R: $\mathrm{WD}_{F,R} \to {}^L G$ 为相应的L-参数，它定义在 R 上。于是，$\mathrm{WD}_{F,R}$ 通过 φ_R 作用于 X。对于每个 R-代数 S,

$$\begin{aligned}\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R(S) &= \mathrm{Sec}([\widehat{X}_S/\mathrm{WD}_F] \to [S/\mathrm{WD}_F]) \\ &\cong \lim_{[n]\in\Delta} \mathrm{Sec}(\widehat{X}_S \times_S \mathrm{WD}^n_{F,S} \to \mathrm{WD}^n_{F,S}).\end{aligned}$$

这里，$\mathrm{Sec}(X \to Y)$ 表示映射 anima $\mathrm{Map}_Y(Y, X)$。第二个同构$\widehat{\ }$由沿着 $\mathrm{Spec}(S) \to [\mathrm{Spec}(S)/\mathrm{WD}_F]$ 的下降得出。现在，$\mathrm{Sec}(X_S \times_S \mathrm{WD}^n_{F,S} \to \mathrm{WD}^n_{F,S})$ 是静态的，因为 $\mathrm{WD}^n_{F,S}$ 是经典的，所以 $\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R(S)$ 是静态的。于是，我们有

$$\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R(S) \cong \mathrm{Eq}(\widehat{X}(S) \rightrightarrows \widehat{X}(\mathrm{WD}_{F,S})). \tag{4.1}$$

我们证明${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R \to {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是闭浸入。令 $x \in \widehat{X}(S)$。考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WD}_{F,S} & \xrightarrow{\varphi_R \times x} & {}^L G \times {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \mathrm{Spec}(S) & \xrightarrow{x} & {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}. \end{array}$$

这里，ρ 表示 ${}^L G$ 在${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$上的作用。当且仅当 $x \in \widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R(S)$ 时，此图表交换。由于${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是分离的，我们可以取使上述图表交换的最大闭子概形 $Z \subset \mathrm{WD}_{F,S}$。

对于每个整数 n，令 $Z_n = Z \cap (\mathrm{ID}_{F,\ S} \rtimes \{\mathrm{Fr}^n\})$。存在一个紧开子群$K \subset I_F$，使得 $\varphi_R|_K$ 是平凡的。令 $K_n = \mathrm{Ad}(\mathrm{Fr}^n)(K)$。于是，我们有一个闭浸入$Z_n/K \subset (\mathbb{G}_{a,\ S} \times (I_F/K_n)) \rtimes \{\mathrm{Fr}^n\}$。于是，$S$-代数的范畴 A 满足

$$(Z_n/K)_A = (\mathbb{G}_{a,A} \times (I_F/K_n)) \rtimes \{\mathrm{Fr}^n\}$$

具有初始对象，它是 S 的一个商。遍历所有 n，可得 $^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_R^{\mathrm{WD}_F} \to {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是一个闭浸入。沿着 $\widehat{\mathcal{P}}_x \to \mathrm{Spec}(R)$ 作下降，得到一个闭浸入 $^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_R^{\mathrm{WD}_F} \hookrightarrow {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}_x$。□

推论 4.20。 经典截断 $^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 是一个在 Λ上局部有限表示的经典 *Artin* 叠。

证明。 由命题 4.19，$^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^L G}^X \times_{\mathrm{Par}_{{}^L G}} Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G)$ 是一个在 $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G)$ 上局部有限表示的概形。由于 $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G) \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 是一个光滑覆盖，$^{\mathrm{cl}}\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 是一个在 Λ 上局部有限表示的 Artin 叠。□

如命题 4.12 的证明中所示，上述性质足以证明以下结论。关于导出A-叠和 Artin-Lurie 可表性，请参见附录 1。

命题 4.2 **1.** 导出栈 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 是一个局部有限表示的导出1-叠.

证明。 我们将应用 Artin-Lurie 可表性判据 [DAG，定理 7.1。6]。注意它只能说明 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 几乎有限表示。由于Par的余切复形$_{{}^L G}^X$ 是完美的，因此可得所述结论。

经典截断的条件由推论 4.20 得出。根据定义，$\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 满足 étale 下降，并且根据命题 4.10，它 还需证明 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 在截断对象上与滤过余极限可交换，且 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$无穷小凝聚且收敛。

由于 $[*/\mathrm{WD}_F] = \mathrm{colim}_{n\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{WD}_F^n$，我们有

$$\mathrm{Par}_{{}^L G}^{\widehat{X}}(S) = \lim_{n\in\Delta} \mathrm{Map}_{[*/Q]}(\mathrm{WD}_{F,S}^n, [\widehat{X}/{}^L G]).$$

这里，每一项都同构于 $\mathrm{Map}(\mathrm{WD}_{F,S}^n, [X/G])$，因此它在截断对象上与滤过余极限可交换，并且无穷小凝聚且收敛。由于后两项性质在极限下保持，因此它们对 $\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$成立。此外，若 S 是 n-截断的，则 $\mathrm{Map}(\mathrm{WD}_{F,S}^n, [X/G])$ 是 $(n+1)$-截断的，见 [DAG，推论 5.3.8]。由于截断空间的全化与滤过余极限可交换，$\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$ 在截断对象上与滤过余极限可交换。□

命题 4.22。 自然映射 $\pi_{\widehat{X}} : \mathrm{Par}_{{}^L G}^X \to \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 是概形态的。特别地，$\mathrm{Par}_{{}^L G}^X$具有仿射对角线，且是一个局部有限表示的 1-*Artin* 叠。

证明。设 S 是一个导出 Λ-概形，并令 $x \in \mathrm{Par}_{{}^L G}(S)$。令 $S' = \mathrm{Par}_{{}^L G}^X \times_{\mathrm{Par}_{{}^L G}, x} S$。我们将应用 [AG15，定理 B.2.14]（参见 [DAG，定理 5.1.12]）来证明 S' 是一个导出概形。由命题 4.21，S' 是一个导出 1-叠。此外，clS' 由命题 4.19 可知是一个概形。根据命题 4.17 的同一证明（见注 4.18），$S' \to S$ 的相对余切复形是连通的，因此 S' 的余切复形是连通的。于是，我们可以对 S' 应用上述判据，得出 S' 是一个导出概形。由此得到第一个断言。

于是，$\widehat{X}_{Z^1}^{\mathrm{WD}_F} = \mathrm{Par}_{{}^L G}^{\widehat{X}} \times_{\mathrm{Par}_{{}^L G}} Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G)$ 是一个导出概形。由于 $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^L G)$是不交并的仿射概形，$\widehat{X}_{Z^1}^{\mathrm{WD}_F}$ 根据命题 4.19 (2) 是分离的。由于

$\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1} \to \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG}$ 是一个光滑仿射覆盖，因此 $\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG}$ 具有仿射对角线。结合命题4.21，可知 $\mathrm{Par}^{X}_{{}^LG}$ 是 1-Artin。□

定义 4.23。令 $\omega_{\widehat{X}}$ 为 $\mathrm{Par}^{X}_{{}^LG}$的对偶化复形。我们定义与 L-层相关联的非归一化对象 X，其定义方式与定义 4.14 中相同：

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}} = \pi_{\widehat{X}*}\omega_{\widehat{X}}.$$

注意，$\pi_{\widehat{X}}$必须是概形态的，才能在 [GR17] 中发展的归纳相干层形式体系中定义 $\pi_{\widehat{X}*}$（参见 [GR17，1.4 (i)]）。

现在，我们考虑底层空间 |Par 的轨道分解 $\widehat{X}_{{}^LG}|$。

引理 4.24。令 $Z \subset \widehat{X}$ 为一个 ${}^LG$-稳定闭子集，并令 $U = \widehat{X} - Z$。那么，我们有如下结论。

(1) $\mathrm{Par}^{U}_{{}^LG} \to \mathrm{Par}^{X}_{{}^LG}$ 是一个开浸入。*(2)* $|\mathrm{Par}^{Z}_{{}^LG}| \to |\mathrm{Par}^{X}_{{}^LG}|$ 是单射，其像是 $|\mathrm{Par}^{U}_{{}^LG}|$ 的补集。

证明。对于每个 $R \in \mathrm{CAlg}^{\wedge}$，$\mathrm{Spec}(R) \to [\mathrm{Spec}(R)/\mathrm{WD}_{F,R}]$ 同胚，因此 (1) 很容易得到。对于 (2)，只需证明 $|\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R| = |Z^{\mathrm{WD}_F}_R| \coprod |U^{\mathrm{WD}_F}_R|$ 对每个 $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Par}_{{}^LG}$。首先，由命题 4.19 (2) 可知 $|Z^{\mathrm{WD}_F}_R| \to |\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R|$ 是单射。然后，根据 (4.1) 中的描述可知，$|\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_R|$ 中位于 $|U^{\mathrm{WD}_F}_R|$ 之外的每个点都属于 $|Z^{\mathrm{WD}_F}_R|$。□

4.3. 向量情形的描述。本节将描述当 X 来自代数表示$V \in \mathrm{Rep}({}^LG)$时，$\mathrm{Par}^{X}_{{}^LG}$作为 $\mathrm{Par}_{{}^LG}$ 上的导出向量丛的结构。

命题 4.25。对于每个 $V \in \mathrm{Rep}({}^LG)$，$\mathrm{Par}^{V}_{{}^LG}$ 都是 $\mathrm{Par}_{{}^LG}$上的导出向量丛。对于每个 $R \in \mathrm{CAlg}^{\wedge}$ 以及 $x \in \mathrm{Par}_{{}^LG}(R)$，$\mathrm{Par}^{V}_{{}^LG} \times_{\mathrm{Par}_{{}^LG},\, x} \mathrm{Spec}(R)$ 是表示 $R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^*\mathcal{O}_V)$的导出向量丛。

证明。只需证明后一个断言。由于 $[V/{}^LG] \to [*/{}^LG]$ 是与 $\mathcal{O}_V$相关联的向量丛，我们有

$$(\mathrm{Par}^{V}_{{}^LG} \times_{\mathrm{Par}_{{}^LG},x} \mathrm{Spec}(R))(S) = \tau^{\leq 0}R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^*\mathcal{O}_V) = \tau^{\leq 0}(R\Gamma(\mathrm{WD}_F, x^*\mathcal{O}_V) \otimes S)$$

对于每个动画 R-代数 S，由命题 B.6可知。这里，x 是一个映射

$$x\colon [\mathrm{Spec}(R)/\mathrm{WD}_F] \to [*/{}^LG],$$

因此，$x^*\mathcal{O}_V$ 是 $[\mathrm{Spec}(R)/\mathrm{WD}_F]$上的完美复形。□

请注意，向量情形并未涵盖相对朗兰兹对偶的许多例子（参见 [BZSV，表 1.5。1]）。不过，我们可以从上述文献中的表格看出，齐性空间的向量扩张确实涵盖了许多例子。

例 4.26. </style>设 $H \subset G$ 是一个在 Q的作用下稳定的平坦闭子群概形，并设 ${}^LH = \widehat{H} \rtimes Q$。当 $\widehat{X} = {}^LG \times^{{}^LH} V$对 $V \in \mathrm{Rep}({}^LH)$ 成立时，$\pi_{\widehat{X}}$ 被识别为

$$\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG} = \mathrm{Par}^{V}_{{}^LH} \xrightarrow{\pi_V} \mathrm{Par}_{{}^LH} \to \mathrm{Par}_{{}^LG}.$$

5. B 侧上的计算

本节将对与岩泽–泰特周期和 Hecke 周期相关的对偶对，显式计算未归一化的 L-层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$。对于岩泽–泰特周期，我们利用 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{A}^1}$ 作为导出向量丛的显式描述。对于 Hecke 周期，我们利用谱艾森斯坦级数以及 $\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2})$ 的权分解。

5.1. 岩泽–泰特 L-层。 本节中，我们计算当 ${}^LG = \mathbb{G}_m$ 和 $\widehat{X} = \mathbb{A}^1$ 时，$\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ 上的未归一化 L-层$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1}$。这里，$\widehat{X}$ =std 是一个 $\mathbb{G}_m$-簇，其中 std 表示 $\mathbb{G}_m$ 的标准表示。由于 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$ 光滑，自然嵌入

$$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}) \hookrightarrow \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})$$

是一个等价。我们将在范畴 $\mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})$ 中进行计算。

回顾分解 $\mathrm{Par}^{\mathbb{G}_m} \cong \coprod_{\chi\colon\ O_F^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times} \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\,\chi}$ 见例 4.3。每个 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\,\chi}$ 都同构于 $\mathbb{G}_m \times [*/\mathbb{G}_m]$。令 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\,\chi}$（分别为 $\mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\,\chi}$）表示 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1}$（分别为 $\mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m}$）在分量 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\,\chi}$ 上的限制。

引理 5.1. 若光滑特征 $\chi\colon O_F^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ 非平凡，则$\mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\chi} \to \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\chi}$ 是一个同构，并且有 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\chi} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\chi}}$。

证明。 定义在$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\chi}$上的泛魏尔–德利涅表示的魏尔–德利涅上同调在 χ 非平凡时为零。因此，第一个断言由命题4.25得出。第二个断言由命题4.2得出。 □

从现在起，我们将重点关注与 $O_F^\times$ 的平凡特征相关联的分支 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\text{平凡}}$。由于 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\text{平凡}} \cong \mathbb{G}_m \times [*/\mathbb{G}_m]$，拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\text{平凡}}) \cong \prod_{\chi\in X^*(\mathbb{G}_m)}$ 拟凝聚层$(\mathbb{G}_m)$。令 T 表示 $\mathbb{G}_m$的标准坐标。

引理 5.2。 与导出向量丛$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 相关联的$\mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}} \to \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 上的完美复形由 $\mathbb{G}_m$ 上的完美复形给出

$$\left[\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \xrightarrow{T-1} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}]\right] \oplus \left[\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \xrightarrow{qT-1} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}]\right][-1]$$

它属于拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}})_{\mathrm{std}}$。

证明。 作用在 $\mathbb{G}_m \to \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 上的 Weil-Deligne 参数由非分歧特征$W_F \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_\ell[T^{\pm}]$ 给出，它将 Fr 映至 T。由于 $\widehat{X}$ =std，由命题 B.6 和命题 4.25 可知，所需的 $\mathbb{G}_m \times [*/\mathbb{G}_m]$ 上的完美复形为

$$\left[\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{std}} \xrightarrow{(T-1,0)} (\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{std}})^{\oplus 2} \xrightarrow{(0,qT-1)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{std}}\right].$$

□

Let

$$\mathcal{E}_{\mathrm{triv}} = \left[\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \xrightarrow{T-1} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}]\right], \quad \mathcal{E}_{\mathrm{cyc}} = \left[\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}] \xrightarrow{qT-1} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^{\pm}]\right]$$

是 $\mathbb{G}_m$ 上的完美复形，视为拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}})_{\mathrm{std}}$ 中的对象。这里，$\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}$ 集中在平凡特征 $\{T=1\} \times [*/\mathbb{G}_m] \subset \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}$ 上，而 $\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}$ 集中在分圆特征 $\{T = q^{-1}\} \times [*/\mathbb{G}_m] \subset \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}$上。因此，我们得到如下结果。

引理 *5.3*。设 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})$（分别为 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])$）是 $\mathit{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathit{triv}}$ 上与 $\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}$（分别为 $\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1]$）对应的导出向量丛。则 $\mathit{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\mathit{triv}}$ 在 $\mathit{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathit{triv}}$ 中的开子集 $\{T \neq q^{-1}\}$（分别为 $\{T \neq 1\}$）上同构于 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})$（分别为 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])$）。

Let

$$U_1 = \{T \neq 1\}, \quad U_q = \{T \neq q^{-1}\} \subset \mathbb{G}_m$$

是上述开子集。我们计算 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\ \mathrm{triv}}$ 的策略，是分别在 $U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]$ 和 $U_q \times [*/\mathbb{G}_m]$ 上计算，再将结果粘合起来。

5.1.1. 在 $U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]$ 上的计算。本节中，我们计算 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\ \mathrm{triv}}$ 在 $U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]$上的值。为此，我们依赖 [FW25] 中的以下引理（参见 [AG15，命题 G.1。5]）。

引理 5.4。（[FW25，引理 6.2。2]）设 S 是一个最终余连通、局部有限型的 *Artin* 叠，定义在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上。设 $\mathcal{E}$ 是 S 上的一个完美复形，其 *Tor* 振幅位于 $[0,\infty)$： $E = \mathrm{Tot}_S(\mathcal{E}) \to S$ 是投影。令

$$\widehat{\pi}_* \colon \mathrm{IndCoh}(E) \to \mathrm{IndCoh}(S)$$

表示从零截面的无穷小邻域 $S \hookrightarrow E$ 沿着 π 的推前（见 [FW25，第 4 节。4]）。令 $\omega_{E/S} = \pi^! \mathcal{O}_S$ 表示 E在 S上的相对对偶化复形。那么，

$$\widehat{\pi}_*(\omega_{E/S}) \cong \mathrm{Sym}^\bullet(\mathcal{E}) \in \mathrm{QCoh}(S) \xrightarrow{\Xi_S} \mathrm{IndCoh}(S).$$

令 $E_1 = \mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]}$。由引理 5.3，我们有 $E_1 = \mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]}$。投影 π_1： $E_1 \to U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]$ 在底层空间上是双射，因为 $\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1]$ 的 Tor 振幅位于 $[1,\infty)$，因此我们有 $\pi_{1*} = \widehat{\pi}_{1*}$。由于 Par_{L_G} 的对偶化复形由命题 4.2可知是平凡的，我们有

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{triv}}|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]} \cong \mathrm{Sym}^\bullet(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]}$$

由引理 5.4 可知。我们有 $\mathrm{QCoh}(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]) = \prod_{\chi \in X^*(\mathbb{G}_m)} \mathrm{QCoh}(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m])_\chi$。于是，对于每个 $n \geq 0$，都有 $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]} \in \mathrm{QCoh}(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{std}^n}$。因此，我们得到如下结果。

命题 5.5. 我们有一个分解

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{triv}}|_{U_1 \times [*/\mathbb{G}_m]} \cong \mathcal{O}_{U_1} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \left[\mathcal{O}_{U_1} \xrightarrow{qT-1} \mathcal{O}_{U_1}\right][-2n+1]$$

在 拟凝聚层$(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m])$ 中。这里，右侧由 $n \geq 1$ 索引的项（分别地，第一个项）是 拟凝聚层$(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{std}^n}$（分别是 拟凝聚层$(U_1 \times [*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{triv}}$）中的一个对象。

证明. 该断言由上述讨论以及引理 对称幂$^n(\mathcal{E}_{\mathrm{cyc}}[-1])$的计算（见A.7）得出。□

5.1.2. 在 $U_q \times [*/\mathbb{G}_m]$ 上的计算。本节将计算 $\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{triv}}$ 在$U_q \times [*/\mathbb{G}_m]$上的情形。为此，我们将明确描述 $E_q = \mathrm{Par}^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}|_{U_q \times [*/\mathbb{G}_m]}$。由引理 5.3，我们有 $E_q = \mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})|_{U_q \times [*/\mathbb{G}_m]}$

引理 5.6. $\mathcal{E}_{\mathrm{triv}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{std}}$ 在$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}$ 上的自然映射诱导出闭浸入$\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}) \hookrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathrm{std}})$。它到 $\mathbb{G}_m$ 的基变换是正则闭浸入

$$\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}) \times_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}} \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m$$

由 $(T-1)x = 0$ 给出，其中 x 表示 $\mathbb{A}^1$上的坐标。

证明。 只需证明第二个断言。根据定义， $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})\times_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}}\mathbb{G}_m$ 是相对谱 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}^\vee)$。这里， $\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}$ 被视为 $\mathbb{G}_m$上的完美复形。由引理 A.7，自然映射 $\mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}^\vee\to\mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}^\vee$ 是满射，其核由 $(T-1)x$生成。因此，断言得证。 □

引理 5.7. 令 ω_{triv} 表示 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$的相对对偶化复形。于是，我们有 $\omega_{\mathrm{triv}}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})}$。

证明。 设 $f\colon\mathrm{Spec}(R)\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 是一个光滑态射，并设 $q\colon\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})_R\to\mathrm{Spec}(R)$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 沿 f 的基变换。只需构造一个函子性同构 $q^!\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})_R}$。

设 $p\colon\mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathrm{std}})_R\to\mathrm{Spec}(R)$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathrm{std}})\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{triv}}$ 的基变换。于是， $P=\mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{O}_{\mathrm{std},R}^\vee$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathrm{std}})_R$ 上的整体截面环。设 $i\colon\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})_R\hookrightarrow\mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathrm{std}})_R$ 是一个正则闭浸入。设 $I=(T-1)\cdot\mathrm{Sym}^{\geq1}\mathcal{O}_{\mathrm{std},R}^\vee\subset P$ 是一个可逆理想。于是， $S=P/I$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})_R$ 上的整体截面环。由于 $R\to P$ 光滑且维数为 1， $q^!\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ 可由一个 S-模表示

$$R\mathrm{Hom}_P(S,\Omega_{P/R}[1])$$

并且这与 $\Omega_{P/R}\otimes_P I^{-1}/P$ 典范同构。由于 $\Omega_{P/R}\cong\mathcal{O}_{\mathrm{std},\ R}^\vee\otimes P$和 $I^{-1}/P\cong(T-1)^{-1}\cdot\mathcal{O}_{\mathrm{std},\ R}\otimes S$， $q^!\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ 典范同构于 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S)}$。 □

注 5.8。 设 $\iota\colon\omega_{\mathrm{triv}}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})}$ 为上述同构。由于 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡}}$是 $U_1\times[*/\mathbb{G}_m]$ 上的同构，因此存在另一个同构 $\iota'\colon\omega_{\mathrm{triv}}|_{U_1\times[*/\mathbb{G}_m]}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})|_{U_1\times[*/\mathbb{G}_m]}}$。于是， $\iota|_{\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})|_{U_1\times[*/\mathbb{G}_m]}}\circ\iota'^{-1}$ 是乘以 $T-1$ 的映射。沿 $\mathbb{G}_m\to\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡}}$ 拉回后即可验证这一点；它源于 $\mathbb{V}(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}})\times_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}}\mathbb{G}_m\hookrightarrow\mathbb{A}^1\times\mathbb{G}_m$ 的定义方程选择不同所导致的差异。

令 $\pi_q\colon\ E_q\to U_q\times[*/\mathbb{G}_m]$ 为投影。由引理 5.7，我们有

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{triv}}|_{U_q\times[*/\mathbb{G}_m]}\cong\pi_{q*}\mathcal{O}_{E_q}\cong\mathrm{Sym}^\bullet(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}^\vee)|_{U_q\times[*/\mathbb{G}_m]}.$$

我们有拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])\cong\prod_{\chi\in X^*(\mathbb{G}_m)}\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])_\chi$ 的权分解。于是，对每个 $n\geq0$， $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}^\vee)|_{U_q\times[*/\mathbb{G}_m]}\in\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{std}^{-n}}$。因此，我们得到如下结果。

命题 5.9。 我们有一个分解

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{triv}}|_{U_q\times[*/\mathbb{G}_m]}\cong\mathcal{O}_{U_q}\oplus\bigoplus_{n\geq1}\left[\mathcal{O}_{U_q}\xrightarrow{T-1}\mathcal{O}_{U_q}\right][1]$$

在 拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])$ 中。这里，右侧由 $n\geq1$ 索引的项（分别地，第一项）是 拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{std}^{-n}}$ (分别地，拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(U_q\times[*/\mathbb{G}_m])_{\mathrm{triv}}$) 中的一个对象。

证明。 由上述讨论以及 对称幂$^n(\mathcal{E}_{\mathrm{triv}}^\vee)$ 在引理A.7中的计算可得该结论。 □

5.1.3. 粘合。 结合命题 5.5 和命题 5.9，得到如下结论。

命题 5.10。 我们有一个分解

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1}\cong\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}\oplus\bigoplus_{n\geq1}\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-1)\oplus\bigoplus_{n\geq1}\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(qT-1)[-2n]$$

这里，第一项属于 拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})_{\mathrm{triv}}$，第二个因子的第 n 项（第三个因子的第 n 项）属于拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡特征}})_{\mathrm{std}^{-n}}$ （分别属于拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡特征}})_{\mathrm{std}^n}$）。

证明。 平凡分量之外的贡献由引理 5.1 得出。对于非平凡特征 $\chi \in X^*(\mathbb{G}_m)$，$\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\ \text{平凡特征}}$ 的 χ 分量在命题 5.5和命题 5.9的描述中至多出现一次。因此，第二和第三个因子的结论由前引文得出，只需确定拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡特征}})_{\mathrm{triv}} \cong$拟凝聚层$(\mathbb{G}_m)$中的因子。由备注 5.8，它是沿着 $\mathcal{O}_{U_1}|_{U_1\cap U_q} \xrightarrow{T-1} \mathcal{O}_{U_q}|_{U_1\cap U_q}$ 将 $\mathcal{O}_{U_1}$ 和 $\mathcal{O}_{U_q}$ 粘合而成。因此，由同构 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}|_{U_1} \xrightarrow{(T-1)^{-1}} \mathcal{O}_{U_1}$)和 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}|_{U_q} \cong \mathcal{O}_{U_q}$，它同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$。 □

我们可以在下表中总结 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}$ 上的计算 :

中心权重	支撑	在 U_1 上局部	在 U_q 上局部
triv	$\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \text{平凡}}$ 表示	$\mathcal{O}_{U_1}$	$\mathcal{O}_{U_q}$
标准表示$^{-n}$, $n \geq$ 1	$\{T=1\}$	0	$\left[\mathcal{O}_{U_q} \xrightarrow{T-1} \mathcal{O}_{U_q}\right][1]$ $\cong j_{1*}\mathcal{O}$
$\mathrm{std}^n, n \geq 1$	$\{T=q^{-1}\}$	$\left[\mathcal{O}_{U_1} \xrightarrow{qT-1} \mathcal{O}_{U_1}\right][-2n+1]$ $\cong j_{q^{-1}*}\mathcal{O}[-2n]$	0

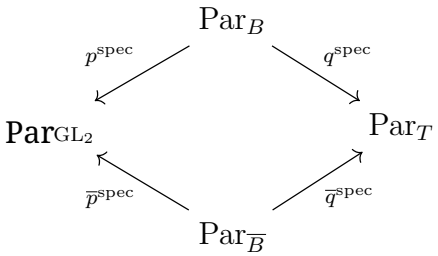
这里，j_x:$\{T=x\} \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ 表示 $x \in \{1, q^{-1}\}$ 的闭点的包含映射。

5.2. **Hecke** L**-层。** 在本节中，当 ${}^LG = \mathrm{GL}_2$ 且 $\widehat{X} = \mathbb{A}^2$ 时，我们计算未经归一化的 L-层 $\mathcal{L}_{\mathrm{std}}$ 在 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ 上。这里，$\widehat{X} = \mathrm{std}$ 是一个 GL_2-簇，其中 std 表示 GL_2 的标准表示。

Let $Z \subset \mathrm{GL}_2$ 是对角中心环面。我们有权分解

$$\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}) = \prod_{\chi \in X^*(Z)} \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2})_\chi.$$

关于 Z-gerbe $\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2} \to [Z^1(\mathrm{WD}_F, \mathrm{GL}_2)/(\mathrm{GL}_2/Z)]$。固定一个标准同构 $Z \cong \mathbb{G}_m$。我们将用谱艾森斯坦级数给出 $\mathcal{L}_{\mathrm{std}}$ 的各个分量的描述。令 $T \subset B \subset \mathrm{GL}_2$ 为标准 Borel 对，并令 B 表示 B 的对偶 Borel 子群。考虑以下图表。



定义 5.11。 ([Zhu21, 命题 3.3。2]) 与 B 和 B 相关联的谱 Eisenstein 级数函子定义为

$$\mathrm{Eis}_B^{\mathrm{spec}} = p_*^{\mathrm{spec}} q^{\mathrm{spec}!} : \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_T) \to \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}),$$

$$\mathrm{Eis}_{\overline{B}}^{\mathrm{spec}} = \overline{p}_*^{\mathrm{spec}} \overline{q}^{\mathrm{spec}!} : \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_T) \to \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}).$$

设 $i_{\mathrm{triv}}\colon \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$ 是与平凡的 L-参数相关联的映射。由于它是概形态的，我们可以考虑 $i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$。记其权分解为

$$i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\chi \in X^*(\mathbb{G}_m)} (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\chi.$$

这里，$(i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\chi \in \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})_\chi \cong$ 拟凝聚层$(Z^1(W_F, \mathbb{G}_m))$ 在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上是一维的。记权分解

$$\mathcal{L}_{\mathrm{std}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_{\mathrm{std},n}$$

为 $\mathcal{L}_{\mathrm{std},\ n} \in \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2})_{\mathrm{std}^n}$。利用 $\mathrm{Par}_T \cong \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m} \times \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}$，我们得到 $\mathcal{L}_{\mathrm{std},\ n}$ 的如下描述。

命题 5.12。对于 $n < 0$，有

$$\mathcal{L}_{\mathrm{std},n} = \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}),$$

对于 $n = 0$，我们有一个纤维序列

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{std},0} \to \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{triv}}),$$

对于 $n > 0$，我们有一个纤维序列

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F^n \rtimes \Sigma_n, \mathcal{O}_{\mathrm{std}}^{\boxtimes n}) \to \mathcal{L}_{\mathrm{std},n} \to \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}).$$

这里，$\mathcal{O}_{\mathrm{std}}$ 表示沿着 $\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2} \to [*/\mathrm{GL}_2]$，对 $\mathcal{O}_{\mathrm{std}}|_{[*/\mathrm{GL}_2]}$ 的拉回，其通过普适的 L 参数配备了自然的 WD_F 作用。

证明。与 [FW25第 7 节中相同的论证2] 在这里同样适用，并给出一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{std}}$ 的纤维序列。接下来，我们将说明该纤维序列可如陈述中所述得到简化。

首先，我们回顾纤维序列的构造。我们有一个闭开分解

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2} & \xrightarrow{0} & \mathrm{Par}^{\mathrm{std}}_{\mathrm{GL}_2} & \xleftarrow{j} & U \\ & \searrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathrm{std}}} & \swarrow & \\ & & \mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}. & & \end{array}$$

这里，0 表示导出向量丛的零截面。令 $\mathcal{Z}$ 表示零截面的无穷小邻域，并令 $\widehat{\pi}_{\mathrm{std}}\colon \mathcal{Z} \to \mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}$ 为投影。于是，我们有一个纤维序列

$$\widehat{\pi}_{\mathrm{std}*}\omega_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{std}} \to \pi_{\mathrm{std}*}j_*\omega_U.$$

根据引理4.24，U 可识别为映射叠

$$\underline{\mathrm{Map}}([*/\mathrm{WD}_F], [(\mathbb{A}^2 - \{0\})/\mathrm{GL}_2]) \cong \underline{\mathrm{Map}}([*/\mathrm{WD}_F], [*/\overline{\mathrm{Mir}}_2])$$

这里，$\underline{\mathrm{Mir}}_2$ 是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的稳定子，写作

$$\overline{\mathrm{Mir}}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2.$$

然后，$\pi_{\mathrm{std}} \circ j$ 经由 Par_B 分解，如下图表所示。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2} & \xleftarrow[\overline{p}^{\mathrm{spec}}]{} & \mathrm{Par}_{\overline{B}} & \longleftarrow & U \\ & & \downarrow{\scriptstyle \overline{q}^{\mathrm{spec}}} & & \downarrow \\ & & \mathrm{Par}_T & \xleftarrow[\mathrm{id}\times i_{\mathrm{triv}}]{} & \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m} \end{array}$$

由于上述方形是笛卡尔的，基变换公式给出

$$j_*\pi_{\mathrm{std}*}\omega_U \cong \overline{p}^{\mathrm{spec}}_*\overline{q}^{\mathrm{spec}!}(\mathrm{id}\times i_{\mathrm{triv}})_*\omega_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \cong \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

容易验证，其权分解为

$$j_*\pi_{\mathrm{std}*}\omega_U = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n})$$

其中 $\mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}) \in \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2})_{\mathrm{std}^n}$。

接下来，我们研究 $\widehat{\pi}_{\mathrm{std}*}\omega_{\mathcal{Z}}$。考虑 $\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 上秩为 2 的泛 Weil-Deligne 表示，并令

$$\mathcal{E} = \left[\mathcal{O}^{I_F}_{\mathrm{std}} \xrightarrow{(\mathrm{Fr}-1,N)} \mathcal{O}^{I_F}_{\mathrm{std}} \oplus \mathcal{O}^{I_F}_{\mathrm{std}} \xrightarrow{(N,-q\mathrm{Fr}+1)} \mathcal{O}^{I_F}_{\mathrm{std}}\right]$$

将其 Weil-Deligne 上同调视为定义在 $\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 上的完美复形（参见命题 B.6）。

由于 $\mathrm{Par}_{{}^L G}$ 的对偶化复形是平凡的（参见命题 4.2），我们有

$$\widehat{\pi}_{\mathcal{Z}*}\omega_{\mathcal{Z}} \cong \mathrm{Sym}^\bullet\mathcal{E} \in \mathrm{QCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G}) \xhookrightarrow{\Xi} \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^L G})$$

由引理 5.4。这里，对称幂 $^n\mathcal{E} \in$ 拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{{}^L G})_{\mathrm{std}^n}$ 对每个 $n \geq 0$。由于我们工作在特征 0 且对称幂 $^n\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{\otimes n})^{\Sigma_n}$，它可识别为 $R\Gamma(\mathrm{WD}^n_F \rtimes \Sigma_n, \mathcal{O}^{\boxtimes n}_{\mathrm{std}})$。因此可得纤维序列

$$\widehat{\pi}_{\mathrm{std}*}\omega_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{std}} \to \pi_{\mathrm{std}*}j_*\omega_U.$$

特化为陈述中的结论。 □

注 5.13。对于 $n > 0$，上述纤维序列不足以完整描述 $\mathcal{L}_{\mathrm{std},\,n}$。在与相应周期层的比较中，我们将改用函数方程，该方程由 [BZSV第 11.10 节提出。2]。更多细节请见第6.2节。

6. Normalization

本节中，我们引入周期层和 L-层的归一化，并将归一化周期猜想转化到范畴化局部朗兰兹对应的框架中。

6.1. **归一化**。本节中，我们引入周期层和L-层的归一化。从现在起，我们假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}_\ell[\sqrt{q}]$-代数。这里，对 $\sqrt{q} \in \Lambda$的选取类似于几何情形 [BZSV]中的典范层的平方根。

6.1.1. $\mathcal{A}$**-侧**。首先，我们引入 $\mathcal{P}_X$ 的归一化。根据 $\sqrt{q}$ 的选取，我们可以取 $F^\times$ 的范数特征的平方根 $\Lambda^{1/2}_{\mathrm{norm}}$，使得对于 $x \in F^\times$，$\Lambda^{1/2}_{\mathrm{norm}}(x) = q^{-\mathrm{ord}(x)/2}$。然后，我们定义如下的次数层。

定义 6.1。设 $\underline{\deg} \in \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}, \Lambda)$ 为可逆的 Λ-复形，使得

$$\underline{\deg}|_{\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}} = \Lambda^{-1/2}_{\mathrm{norm}}[n].$$

注 6.2。我们可以将次数层解释为半体积因子的剪切，这与几何情形类似（见附录 C，[BZSV，注 10.4。1]）。

现在，我们假设 X 是一个光滑拟射影 G-簇。X 的典范丛是一个 G-等变线丛，因此它给出一个映射

$$\Omega_X^{\mathrm{top}}\colon [X/G]\to[*/\mathbb{G}_m].$$

定义 6.3。令 $\omega_X\colon \mathrm{Bun}_G^X\to \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 为与 Ω_X^{top} 复合映射。我们定义与 X 关联的归一化周期层为

$$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}=\pi_{X!}\omega_X^*\underline{\deg}.$$

命题 6.4。假设 X 具有一个处处不消失的特征体积形式 ω。令 $\eta_X\colon G\to\mathbb{G}_m$ 为 ω 的特征标，使得 $g^*\omega=\eta_X(g)\omega$。那么，我们有

$$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}\cong\mathcal{P}_X\otimes\eta_X^*\underline{\deg}.$$

特别地，如果 X 是幺模的，即 X 具有一个 G-等变体积形式，$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}\cong\mathcal{P}_X$.

证明。X 的典范丛由 ω 平凡化，且 Ω_X^{top} 分解为 s

$$[X/G]\to[*/G]\xrightarrow{\eta_X}[*/\mathbb{G}_m].$$

于是，$\omega_X^*\underline{\deg}=\pi_X^*\eta_X^*\underline{\deg}$，因此结论由投影公式得出。□

注 6.5。这种描述类似于几何情形中的归一化（见[BZSV，注 10.4。1]）。

一般而言，X 不具有这样的特征体积形式 ω，且 $\omega_X^*\deg$无法在Bun_G上定义；尤其当 X 是真时，这种情况很常见。

例 6.6。设 $P=MN\subset G$ 是一个抛物子群，其中 M 是一个 Levi 子群，N是幺正根基。设 ξ_P: $M\to\mathbb{G}_m$为 N中的根之和。当 $X=G/P$时，X 的典范丛是一个反丰线丛 $\mathcal{O}(-\xi_P)$，因此 Ω_X^{top} 分解为

$$[X/G]=[*/P]\to[*/M]\xrightarrow{\xi_P^{-1}}[*/\mathbb{G}_m].$$

由 [HI24 中命题 3 的显式描述可知。9] 因此 $\omega_X^*\deg$ 等于 Bun_P的对偶化复形的平方根，由 $\sqrt{q}\in\Lambda$的选择确定。

在表示论中，一个光滑的 $G(F)$-表示 π 在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上是 X-区分的，如果 $\overline{\mathrm{Hom}^{G(F)}(C_c^\infty(X(F)}$ $\mathbb{Q}_\ell)$ $\pi)\neq 0$。这里通常假设 X是拟仿射且幺模的。于是，推论2.21给出了这一概念的几何化。

定义 6. **7.** 我们称 $A\in\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G,\ \Lambda)$ 是 X-区分的，若 $\mathrm{Map}(\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}},\ A)\neq 0$.

注记 6.8。由推论 2.21 和命题 6.4，π 是 X-区分的，当且仅当 $i_*^1\pi$在 X为 X 拟仿射且幺模时是 -区分的。

6.1.2. B 侧。$\mathcal{B}$-侧。接下来，我们引入 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 的归一化。令 $\mathbb{G}_{gr}$表示一个 $\mathbb{G}_m$ 的副本，并赋予 $\widehat{X}$ 一个分次，以及一个与 ${}^LG$-作用交换的左 $\mathbb{G}_{gr}$-作用。这里，我们对 $\mathrm{Par}_{{}^LG}^X$ 本身进行归一化，类似于 $\mathcal{A}$-侧的归一化，见 [BZSV第 10 节。2]。

由 $\sqrt{q}$ 的选择，我们得到一个非分歧的 L-参数 $\sqrt{\mathrm{cyc}}\colon W_F\to\overline{\mathbb{G}_{gr}}$ 将 Fr 送到 $q^{-1/2}$。它定义了一个点 $\sqrt{\mathrm{cyc}}\in\mathrm{Par}^{\mathbb{G}_{gr}}(\overline{\Lambda})$。

定义 6.9。我们通过以下笛卡尔图定义归一化相对栈 $\mathrm{Par}^{X,\ \mathrm{norm}}_{{}^LG}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}} & \longrightarrow & \mathrm{Par}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}}^{\widehat{X}} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}} \\
\mathrm{Par}_{{}^{L}G} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sqrt{\mathrm{cyc}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}}.
\end{array}$$

命题 6.10。 映射 $\pi_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$是概形态的。特别地，$\mathrm{Par}^{X}{}_{,\,{}^{L}G}^{\mathrm{norm}}$ 具有仿射对角线，并且是局部有限表示的 *1-Artin* 叠。

证明。 根据命题 4.22，态射

$$\pi_{\widehat{X}} : \mathrm{Par}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}}^{\widehat{X}} \longrightarrow \mathrm{Par}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}}$$

是概形态的（特别地，具有仿射对角线且局部有限表示）。因此，由于这些性质在基变换下保持不变，结论成立。□

令 $\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$ 为 $\mathrm{Par}^{X}{}_{,\,{}^{L}G}^{\mathrm{norm}}$ 对偶化复形。由于点 $\sqrt{\mathrm{cyc}}$ 分解为

$$\sqrt{\mathrm{cyc}}\colon * \to [*/\mathbb{G}_{gr}] \hookrightarrow \mathrm{Par}_{\mathbb{G}_{gr}},$$

上面的图表分解为

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}} & \longrightarrow & [\mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}}/\mathbb{G}_{gr}] & & \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\widehat{X}}} & & \\
\mathrm{Par}_{{}^{L}G} & \xrightarrow{q_{\widehat{X}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}\times[*/\mathbb{G}_{gr}] & \hookrightarrow & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}\times\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_{gr}}.
\end{array}$$

由于 $\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$同构于 $\pi_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$的相对对偶化复形，我们有

$$\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} \cong q_{\widehat{X}}^{*}p_{\widehat{X}*}\omega_{p_{\widehat{X}}}$$

根据沿 $q_{\widehat{X}}$的光滑基变换。这里，$\omega_{p_{\widehat{X}}}$是 $p_{\widehat{X}}$的相对对偶化复形。特别地，$\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$自然带有分次，因此我们可以取其权分解和剪切

$$\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})_{\mathrm{std}^n}, \quad (\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})^{/\!/} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})_{\mathrm{std}^n}[n].$$

定义 6.11. 我们将与 X 相关联的规范化 L-层定义为

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} = (\pi_{\widehat{X}*}^{\mathrm{norm}}\omega_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}})^{/\!/}.$$

现在，我们将说明当 X上的分次来自一个中心余特征时，它与未规范化的 L-层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 之间的关系。

命题 6.12. 假设 X 上的分次由一个中心余特征诱导

$$z_{\widehat{X}}\colon \mathbb{G}_{gr} \to {}^{L}G$$

使得 $a\cdot x = z_{\widehat{X}}(a)\,x$ 对于 $a\in\mathbb{G}_{gr}$和 $x\in X$成立。令

$$\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}}\colon \mathrm{Par}_{{}^{L}G} \longrightarrow \mathrm{Par}_{{}^{L}G}, \qquad \varphi \longmapsto (z_{\widehat{X}}\circ\sqrt{\mathrm{cyc}})\cdot\varphi$$

是由非分歧 L-参数 $\sqrt{\mathrm{cyc}} \in \mathrm{Par}^{\mathbb{G}_{gr}}(\Lambda)$给出的平移。因此，存在一个同构

$$\iota\colon \mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X}}$$

使得

$$\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}} \circ \iota^{-1} \;=\; \tau^{-1}_{\sqrt{\mathrm{cyc}}} \circ \pi_{\widehat{X}}.$$

证明。 我们有一个同构

$$[\widehat{X}/{}^{L}G \times \mathbb{G}_{gr}] \cong [\widehat{X}/{}^{L}G] \times [*/\mathbb{G}_{gr}]$$

由一个同构给出，它将 (g, a) 发送到 $({}^{z_{\widehat{X}}}(a)g, a)$。应用函子 $\mathbf{Map}_{[*/Q]}([*/\mathbf{WD}_F], -)$，我们得到一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}} & \longrightarrow & \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X},{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X},{}^{L}G}} \\ \mathrm{Par}_{{}^{L}G\times\mathbb{G}_{gr}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times z_{\widehat{X}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}. \end{array}$$

沿着.....拉回 沿着 $\mathrm{id} \times \sqrt{\mathrm{cyc}}$ 拉回该笛卡尔方形，我们得到另一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}^{\widehat{X},\mathrm{norm}}_{{}^{L}G} & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\widehat{X}}} \\ \mathrm{Par}_{{}^{L}G} & \xrightarrow{\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}. \end{array}$$

由于 $\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}}$ 是一个同构， ι 是所需的同构。 □

令 $Z(G)$ 为 的中心，令 $\widehat{G}$ 且 $Z = Z(\widehat{G})^{Q}$。那么，我们有一个权分解

$$\mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}G}) = \prod_{\chi \in X^*(Z)} \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}G})_{\chi}$$

相对于 Z-gerbe $\mathrm{Par}_{{}^{L}G} \to [Z^1(\mathbf{WD}_F, {}^{L}G)/(\widehat{G}/Z)]$。当分次由中心余特征给出时， $\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$ 可以用此分解来描述。

推论 6.13. 在命题 *6.12* 的设定下， $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 具有分次，且我们有 $\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}} \cong \tau^{*}_{\sqrt{\text{循环}}}\mathcal{L}^{/\!/}_{\widehat{X}}$。此外，剪切可以用 Z-权重描述如下

$$\mathcal{L}^{/\!/}_{\widehat{X}} = \bigoplus_{\chi \in X^*(Z)} \mathcal{L}_{\widehat{X},\chi}[\langle \chi, z_{\widehat{X}} \rangle].$$

证明。 第一个断言由命题 6.12 立即得到。对于第二个断言，我们将比较 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 关于 Z 和 $\mathbb{G}_{gr}$ 的权分解。由于光滑拉回是保守的，我们可以沿 $[Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G)/Z] \to \mathrm{Par}_{{}^{L}G}$ 拉回。

首先， $\mathbb{G}_{gr}$ 对 Par 的作用 $\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G}$ 由 ι 诱导，是以下映射的复合

$$\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G} \times \mathbb{G}_{gr} \to \underline{\mathrm{Map}}_{[*/Q]}([*/\mathrm{WD}_F], [\widehat{X}/{}^{L}G] \times \mathbb{G}_{gr}) \to \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G}.$$

令 $\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1} = \mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^{L}G} \times_{\mathrm{Par}_{{}^{L}G}} Z^1(\mathbf{WD}_F, {}^{L}G)$。考察映射

$$[\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1}/(Z \times \mathbb{G}_{gr})] \to Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^{L}G) \times [*/Z] \times [*/\mathbb{G}_{gr}].$$

只需说明 现在， $Z \times \mathbb{G}_{gr}$ 在 $\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1}$ 上的作用通过 $Z \times \mathbb{G}_{gr} \xrightarrow{\mathrm{id}\times z_{\widehat{X}}} Z$.

对于每个导出概形 S和 $\varphi \in Z^1(\mathbf{WD}_F, {}^LG)(S)$，我们有

$$\widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1}(S) = \mathrm{Sec}([\widehat{X}/\mathrm{WD}_{F,S}] \to [S/\mathrm{WD}_{F,S}]).$$

对于每个 $x \in \widehat{X}^{\mathrm{WD}_F}_{Z^1}(S)$、$g \in {}^LG(S)$ 和 $a \in \mathbb{G}_{gr}(S)$，(g,a) 的右作用由下式给出

$$(\varphi, x) \cdot (g,a) = (\mathrm{Ad}(g^{-1})(\varphi), z_{\widehat{X}}(a)^{-1} g^{-1} x).$$

于是，将作用限制到 $Z \times \mathbb{G}_{gr}$ 后，即可得出该断言。 □

注 6.14. 将 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}$ 的归一化与 deg 的描述进行比较。它们与局部类域论相容：用一个特征扭曲表示，对应于将 L-参数平移一个中心参数。

6.2. **函数方程**。在 [BZSV], 的范式中，边界理论依附于超球 G-簇 T^*X，而不只是依附于球簇 X。这一思想与函数方程颇为相似。本节中，为简便起见，令 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$。

定义 6.15. 设 X 和 X' 为光滑拟射影 G-簇，且设 X 和 X' 为局部有限表示的导出 ${}^LG$-概形，并满足 $\mathrm{cl}\,\widehat{X}$ 和 $\mathrm{cl}\widehat{X}'$ 是 $\widehat{G}$-拟射影的。

(1) 当 $T^*X \cong T^*X'$ 是辛 G-簇时，若 $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X \cong \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X'}$，我们称 X 和 X' 满足函数方程。(2) 当 $T^*\widehat{X} \cong T^*\widehat{X}'$ 是辛 ${}^LG$-概形时，若 $\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}} \cong \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}'}$，我们称 X 和 X' 满足函数方程。

这里，我们验证向量情形下 L-层的函数方程。这基本上可由以下函数方程推出，该方程由 [BZSV] 和局部 Tate 对偶证明。

引理 6.16。([BZSV，第 11.10.2 节，引理 11.10。3]) 设 R 是一个局部完备交截 $\mathbb{Q}_\ell$-代数。考虑其上的完美复形 R

$$\mathcal{E} = [Q \xrightarrow{d_0} Y \xrightarrow{d_1} P], \quad \mathcal{E}' = [P^\vee \xrightarrow{d_1^\vee} Y^\vee \xrightarrow{d_0^\vee} Q^\vee]$$

具有 $[0,2]$ 中的 *tor* 振幅。令 $E = \mathrm{Tot}_R(\mathcal{E})$ 以及 $E' = \mathrm{Tot}_R(\mathcal{E}')$。令 $\pi_E\colon\ E \to \mathrm{Spec}(R)$ 以及 $\pi_{E'}\colon\ E' \to \mathrm{Spec}(R)$ 为自然投影。于是，我们有一个自然同构

$$(\pi_{E*}\omega_{E/R})^{/\!/} \otimes \det(\mathcal{E}) \cong (\pi_{E'*}\omega_{E'/R})^{/\!/}.$$

这里，剪切是相对于两侧的缩放作用进行的。此同构将相对于 $\mathbb{G}_{gr}$ 的权重改变了 -1。

证明。除最后一个关于权重的断言外，所有断言均已在相关文献中证明。关于权重的断言由 [BZSV，（11.51）、（11.52）] 中的显式描述推出。□

推论 6.17。假设 $\widehat{X} = V$ 和 $\widehat{X}' = V^\vee$ 对某个 $V \in \mathrm{Rep}({}^LG)$ 成立，且它们上的分次是标量的。那么，我们有

$$\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_V \cong \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{V^\vee}.$$

该同构使相对于 $\mathbb{G}_{gr}$ 的权重改变 -1。

证明。 回想一下，$Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^LG)$ 的每个连通分支都是仿射的，并且是 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的局部完全交。设 $\mathrm{Spec}(R) \subset Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^LG)$ 是一个连通分支，且 (φ_R, N_R) 是相应的 R 上的 Weil-Deligne L-参数。设 $W = (V \otimes R)^{\varphi_R(I_F}$<style>) 并设

$$\mathcal{E} = [W \xrightarrow{(q^{-1/2}\varphi_R(\mathrm{Fr})-1, N_R)} W \oplus W \xrightarrow{(N_R, q^{1/2}\varphi_R(\mathrm{Fr})-1)} W]$$

是 R 上的完美复形，且其 Tor 振幅位于 $[0,2]$中。设 $E = \mathrm{Tot}_R(\mathcal{E})$ 和 $E' = \mathrm{Tot}_R(\mathcal{E}^\vee[2])$。根据命题 4.25 和局部泰特对偶（见推论 4.9），我们有

$$E = \mathrm{Par}_{{}^LG}^{V,\mathrm{norm}} \times_{\mathrm{Par}_{{}^LG}} \mathrm{Spec}(R), \quad E' = \mathrm{Par}_{{}^LG}^{V^\vee,\mathrm{norm}} \times_{\mathrm{Par}_{{}^LG}} \mathrm{Spec}(R).$$

由于 $\det(\mathcal{E})$ 是平凡的，由引理 6.16 可得

$$(\pi_{E*}\omega_{E/R})^{/\!/} \cong (\pi_{E'*}\omega_{E'/R})^{/\!/}.$$

于是，我们得到 $\mathcal{L}_V^{\mathrm{norm}}$与 $\mathcal{L}_{V^\vee}^{\mathrm{norm}}$在 $Z^1(\mathrm{WD}_F, {}^LG)$上的一个同构。由引理6.16的自然性，该同构是 G-等变的，因此同构下降到 $\mathrm{Par}_{{}^LG}$。 □

我们预期，周期的函数方程在向量情形下也成立。

猜想 6.18。 对于每个 $V \in$ 表示(G)，我们有 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{P}_{V^\vee}^{\mathrm{norm}}$。

为此，需要改进[ALB25]中发展的 Banach-Colmez 空间上的傅里叶变换。注意，由 $G = \mathrm{GL}(V)$ 的投影公式，只需考虑普遍情形。在命题 7.2中，我们手工验证了一维情形。

6.3. **归一化周期猜想**。 本节陈述范畴化局部朗兰兹对应中的归一化周期猜想（参见 [BZSV，第 12 节。1] 在几何情形中），并讨论其对区分问题的含义。注意，这些猜想的陈述以对偶对的定义 $(G, X) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X})$为前提。

为简便起见，假设 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$，并采用 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}$-形式主义来表述，而不使用光滑-étale 层。

猜想 6.19。 设 G 是 F 上的连通准分裂约化群，并固定 G 的一个 *Whittaker* 数据。假设存在一个范畴等价

$$\mathbb{L}_G \colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^LG})$$

正如 [*FS24*中的猜想 ***X.1*** 所表述的那样。*4*]对于每一对（猜想中定义的）对偶对$(G, X) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X})$，我们有

$$\mathbb{L}_G(\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}) \cong \mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}.$$

我们解释归一化周期猜想的一个表示论推论。首先，我们简要回顾公式所需的 L-参数的几何性质，遵循 [Han24] 和 [HL25]的工作。令 $\mathrm{Par}_{{}^LG}^{\mathrm{ss}}$ 为 L-参数的粗模空间，它参数化了 G-参数的半单 L-共轭类。自然态射

$$\mathrm{Par}_{{}^LG} \to \mathrm{Par}_{{}^LG}^{\mathrm{ss}}, \quad \varphi \mapsto \varphi^{\mathrm{ss}}$$

将一个 L-参数映射到其半单化。

定义 6.20. ([Han24，定义 2.1。2]) 一个半单 L-参数 $\varphi \in \mathrm{Par}_{{}^LG}(\mathbb{Q}_\ell)$ 若存在如下等价，则称其为*Langlands-Shahidi* 型 （或宽厚）：

$$[*/S_\varphi] \cong \mathrm{Par}_{{}^LG} \times_{\mathrm{Par}_{{}^LG}^{\mathrm{ss}}} \{\varphi\}.$$

这里， $S_\varphi \subset G$ 是 φ 的中心化子。

注 6.21。 如 [HL25第 6 节注释5], 所述，存在一个用于判定是否属于 Langlands-Shahidi 型的上同调判据（参见 [HL25，定义 6。2]）。该术语也沿用了同一文献中的用法。

设 $\varphi\colon W_F \to {}^L\overline{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ 是一个 Langlands-Shahidi 型的半单 L-参数。根据[Han24命题 2.1。7], 映射 $[*/S_\varphi] \hookrightarrow \mathrm{Par}_{{}^L G}$ 是一个正则闭浸入，因此

$$i_\varphi\colon \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to [*/S_\varphi] \hookrightarrow \mathrm{Par}_{{}^L G}$$

是概形态且最终余连通的。现在， $i_{\varphi *}\mathbb{Q}_\ell$ 应当对应于一个Hecke 特征层 $\mathcal{F}_\varphi$在 $\mathbb{L}_G$ 之下，并且预期其具有如下形式。对每个 $b \in B(G)$，令 $i^{b,\mathrm{ren}}_!$（分别为$i^{b,\mathrm{ren}}_*$）是 $i^b_!$（分别为 i^b_*）的归一化，如 [Han24定义 1.1 中所述。1]。

猜想 6.22。 ([Han24，猜想 2.1.8，2.1。9]) 我们有如下分解

$$\mathcal{F}_\varphi = \bigoplus_{b\in B(G),\pi\in\Pi_\varphi(G_b)} i^{b,\mathrm{ren}}_! \pi^{\oplus m(\pi)}$$

具有有限 每个 π的非零重数，且每一项都满足 $i^{b,\mathrm{ren}}_! \pi \cong i^{b,*}\pi$.

这里， $\Pi_\varphi(G_b)$ 表示 L-簇，对应于 $B(G)$-参数化的局部 Langlands 对应（参见 [MO25，定理 3。8]）。在这一预期下，归一化周期猜想对区分问题有如下推论。

命题 6.23。 假设猜想 *6.19* 对对偶对 $(G,\ X) \leftrightarrow ({}^L G,\ \widehat{X})$成立，且 X 是幺模的。若一个光滑不可约的 $G(F)$-表示 π 是 X-区分的，且其 ***Fargues-Scholze*** 参数 $\varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$属于 ***Langlands-Shahidi*** 型并满足猜想 *6.22*， $\varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$则属于 $\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$的像。

证明。 令 $\varphi = \varphi^{\mathrm{FS}}_\pi$。那么，猜想 6.19 推出

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, \mathcal{F}_\varphi) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}, i_{\varphi *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell). \tag{6.1}$$

由于 $i^{1,\mathrm{ren}}_* = i^1_*$，由猜想 6.22 可得

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X|_{\mathrm{Bun}^1_G}, \pi) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, i^1_*\pi) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, i^{1,\mathrm{ren}}_!\pi)$$

是 $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, \mathcal{F}_\varphi)$的一个直和项。由于 X 是幺模的，因此有 $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X = \mathcal{P}_X$，故由推论 2.21可得

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(C^\infty_c(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, \mathcal{F}_\varphi)$$

对每个 $\pi \in \Pi_\varphi(G)$而言都是一个直和项。特别地，若存在一个 X-特殊元素$\pi \in \Pi_\varphi(G)$，则 $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X, \mathcal{F}_\varphi)$ 非零。

另一方面，令 X_φ 为 $\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$在 φ处的纤维。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}_\varphi & \xrightarrow{q_\varphi} & \mathrm{Par}^{\widehat{X},\mathrm{norm}}_{{}^L G} \\ \downarrow{\scriptstyle p_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}} \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{i_\varphi} & \mathrm{Par}_{{}^L G}. \end{array}$$

由于 i_φ 是最终余连通的，我们有

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}, i_{\varphi*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Hom}((i_\varphi^*\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}*}\omega^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}})^{\not\partial}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Hom}((p_{\varphi*}q_\varphi^*\omega^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}})^{\not\partial}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

$\widehat{\ }$由 [GR17中的基变换，命题 3.2。2]。因此， X_φ 非空，当且仅当$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}, i_{\varphi*}\overline{\mathbb{Q}_\ell})\widehat{\ }$非零。由（6.1）， X_φ 非空，当且仅当存在一个 X-区分元 $\pi \in \Pi_\varphi(G)$。□

注 6.24。 正如 Linus Hamann 所指出的，朗兹－沙希迪条件或可省去；即使对于 A-参数，只需将 $\mathcal{F}_\varphi$ 替换为 Bertoloni-Meli 和 Koshikawa 未发表的工作中构造的剪切特征层，类似的分析或许也能成立（参见 [Kos24]）。这将有助于阐明其与 Sakellaridis-Venkatesh 的局部猜想之间的关系[SV17，猜想 16.2。2]。然而，由于猜想 6.22不成立，即使对于离散的 L-参数，我们也需要额外的论证。

设 X 是一个球面 G-簇。我们预期，在适当条件下， X 应当带有一个 L-群 ${}^LG_X \subset {}^LG$，而 $\widehat{X}$ 应当具有如下形式

$$\widehat{X} = {}^LG \times^{{}^LG_X} V$$

对于某个 $V \in \mathrm{Rep}({}^LG_X)$，其分次由 V诱导而来，正如 [BZSV第 4.1 节中所述。1]那么，$\pi_{\widehat{X}}$ 可分解为

$$\mathrm{Par}^{\widehat{X}}_{{}^LG\times\mathbb{G}_{gr}} = \mathrm{Par}^{V}_{{}^LG_X\times\mathbb{G}_{gr}} \to \mathrm{Par}_{{}^LG_X\times\mathbb{G}_{gr}} \to \mathrm{Par}_{{}^LG\times\mathbb{G}_{gr}}.$$

因此，我们预期，若 π 是 X-distinguished 且 $\varphi_\pi^{\mathrm{FS}}$ 属于 Langlands-Shahidi 型，则 $\varphi_\pi^{\mathrm{FS}}$ 应当通过 ${}^LG_X$ 的某个共轭群因子分解。

6.4. **例：伽罗瓦对称簇**。设 E 是 F 的一个可分二次扩张。设 H 是定义在 F 上的连通准分裂约化群，并令 $G = \mathrm{Res}_{E/F}(H_E)$ 表示韦伊限制。一个 $\sigma \in W_F\backslash W_E$ 的选择给出一个同构

$${}^LG \cong (\widehat{H}\times\widehat{H}) \rtimes Q, \quad \tau\cdot(h_1,h_2) = \begin{cases} (\tau h_1, \sigma^{-1}\tau\sigma\cdot h_2) & (\tau\in W_E) \\ (\sigma^2 h_2, h_1) & (\tau=\sigma). \end{cases}$$

我们将考虑 $X = G/H$ 的情形。首先，我们简要回顾其 L-群，该群见于 [BP25，$\widehat{\ }$2.2。设 $c \in \mathrm{Aut}(H)$ 为对偶 ***involution***，即将一个钉扎映射到其对偶 Borel 子群的切瓦莱 involution 的一个内扭。

例 6.25. 当 $H = \mathrm{GL}_n$, $G(F) = \mathrm{GL}_n(E)$ 且 $X(F) = \mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$ 时。$\widehat{\ }$对偶 involution c 在 $H = \mathrm{GL}_n$ 上的定义为

$$g \mapsto w^t g^{-1} w^{-1}$$

其中 w 是最长韦伊元（反对角置换矩阵）。

对合 c 与 Q 的作用可交换，并且

$${}^L\iota_X : {}^LG_X = \widehat{H}\rtimes Q \xrightarrow{(1,c\sigma^{-1})\times\mathrm{id}_Q} (\widehat{H}\times\widehat{H})\rtimes Q = {}^LG$$

是 L-群 X。与 [BZSV 的群情形一样，表 1.5。1]，

$$(G, X = G/H) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X} = {}^LG/{}^LG_X)$$

预计是一个对偶对。

Re标记 6.26。 这里， ${}^L\iota_X$ 是该态射的伽罗瓦等变扩张

$$\iota_X\colon \widehat{G}_X \to \widehat{G}$$

附属于一个球簇 X （见 [SV17]和 [KS17]）。目前，似乎尚无 ${}^L\iota_X$ 的一般构造（见 [BP25, 2.2。10]）。

设 π 是一个光滑不可约的 $H(E)$-表示，带有一个 Fargues-Scholze 参数 $\varphi\colon W_E \to {}^LH(\mathbb{Q}_\ell)$，即 $\mathrm{Par}^{{}^LH_E}(\mathbb{Q}_\ell)$中的点。$\mathrm{Par}_{{}^LG}(\mathbb{Q}_\ell)$中的对应点为

$$\mathrm{Ind}(\varphi)\colon W_F \to {}^LG(\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\quad \mathrm{Ind}(\varphi)(\tau) = \begin{cases} (\varphi(\tau), \varphi(\sigma^{-1}\tau\sigma)) & (\tau \in W_E) \\ (\varphi(\tau\sigma), \varphi(\sigma^{-1}\tau)) & (\tau \in W_E \backslash W_F). \end{cases}$$

于是，命题 6.23 预言，如果 π 是 $H(F)$-区分的，且 φ 是 Langlands-Shahidi 型的，$\mathrm{Ind}(\varphi)$ 经过 ${}^L\iota_X$，并且有共轭关系

$$\sigma \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}(\sigma^{-1}) \sim c \circ \varphi.$$

事实上，这是 Prasad 猜想关于 L-参数的一部分； [Pra15，猜想 2]。为研究其数值部分，我们作如下假设。

假设 6.27。 设 φ 为一个超尖点 L-参数，且 H 的中心是各向异性的。

注意，超尖点 L参数在 [FS24定义 X.2 中被称为椭圆参数。1]在$\mathrm{Par}_{{}^LG} \cong \mathrm{Par}^{{}^LH_E}$ 中的这一条件在 [FS24命题 IX.6 中的对应关系下保持不变。3]

例 6.28。 当 $H = \mathrm{SL}_n$、Sp_{2n}、$\mathrm{U}(n)$ 对于 $n \geq 1$ 时，第二个条件成立。在此，$\mathrm{U}(n)$ 是一个与 E/F 相关、具有 n 个变量的酉群。

根据推论2.22，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{G(F)}(C_c^\infty(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) &\cong \bigoplus_{b \in \pi_X^{-1}(1)} \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi^\vee, \mathrm{Ind}_{H_b(F)}^{G(F)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\cong \bigoplus_{b \in \pi_X^{-1}(1)} \mathrm{Hom}_{H_b(F)}(\pi^\vee|_{H_b(F)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{aligned}$$

注意，$\pi_X^{-1}(1) \subset H^1(F, H)$，因此它是一个有限集。令 $\Pi_\varphi(G) = \Pi_{\mathrm{Ind}(\varphi)}(G)$。对于每个$b \in \pi_X^{-1}(1)$，令

$$m_b(\Pi_\varphi) = \sum_{\pi \in \Pi_\varphi(G)} m(\pi) \dim \mathrm{Hom}_{H_b(F)}(\pi^\vee|_{H_b(F)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

现在，猜想6.22 意味着

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Ind}(\varphi)}|_{\mathrm{Bun}_G^{(1)}} = \bigoplus_{\pi \in \Pi_\varphi(G)} i_*^1 \pi^{\oplus m(\pi)}$$

因为 φ是超尖点的，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{Ind}(\varphi)}$ 仅支撑于 $B(G)_{\mathrm{bas}}$。因此，我们有

$$\sum_{b \in \pi_X^{-1}(1)} m_b(\Pi_\varphi) = \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}, \mathcal{F}_\varphi|_{\mathrm{Bun}_G^{(1)}}). \tag{6.2}$$

由于 $X = G/H$ 是仿射且幺模的。现在，我们将转到 $\mathcal{B}$侧来计算右侧。设 $Q_E \subset Q$ 为 W_E的像。

引理 6.29。设 $\mathfrak{h}=$李(H)，并设 $\mathfrak{h}_\varphi$ 表示作用在 $\mathfrak{h}$ 上的伴随表示与 φ复合。设 $\mathfrak{z}_E$ 为 $Z(\widehat{H})^{Q_E}$的李代数。当 φ 为超尖点时，我们有

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi)=\mathfrak{z}_E\oplus\mathfrak{z}_E[-1].$$

证明。这对专家而言是众所周知的（参见 [FS24第 X 节的脚注2]）。为完整起见，我们在此给出证明。由于 $\widehat{H}\to\widehat{H}/\widehat{H}^{\mathrm{der}}\times\widehat{H}^{\mathrm{ad}}$ 在李代数上诱导了一个同构，我们可以假设 H 是交换的，或者 H 是半单的。当H 是交换的时，结论显然成立。我们将证明

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi)=0$$

当 $\widehat{H}$ 是半单的时。在下文中，${}^LH$、Fr 和 q 表示 E 的对应对象。

由于 φ 是超尖点的，$S_\varphi^\circ=\{1\}$ 作为 φ 是离散的，而 H 是半单的（因此具有有限中心），所以

$$H^0(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi)=\widehat{\mathfrak{h}}^{\varphi(W_E)=\mathrm{id}}=\mathrm{Lie}(S_\varphi)=0.$$

另一方面，根据局部泰特对偶（参见推论4.9），我们有

$$H^2(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi)=H^0(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi^*(1)). \tag{6.3}$$

令 $C_{\varphi(I_E)}\subset{}^LH$ 为 $\varphi(I_E)$ 的中心化子。Killing 形式诱导出一个 ${}^LH$-等变的同构 $\mathfrak{h}\cong\mathfrak{h}^*$。于是，(6.3) 中的元素 ξ 可视为 $\xi\in\mathrm{Lie}(C_{\varphi(I_F)})$，并满足 $\mathrm{Ad}(\varphi(\mathrm{Fr}))(\xi)=q\xi$。令 $C_\varphi\subset{}^LH$ 为由 $C_{\varphi(I_F)}$ 和 $\varphi(\mathrm{Fr})$ 生成的子群。根据[PY02，定理 2.1]，$C^\circ_{\varphi(I_F)}=C^\circ_\varphi$ 是约化的，因此我们可以通过令 $s=\varphi(\mathrm{Fr})$ 并取 $u_1=\xi$，将 [Tak24，引理 3.5] 应用于 C_φ，从而得到一个余特征 $\mu\colon\mathbb{G}_m\to C^\circ_{\varphi(I_F)}$。于是，$\mu$ 与 $\varphi(W_E)$ 交换，因此它经由 S_φ 分解。由于 $S_\varphi^\circ=\{1\}$，μ 是平凡的，因此得到 $\xi=0$。

还需证明 $H^1(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi)=0$。这是由欧拉示性数的 $R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\mathfrak{h}_\varphi)$ 为零这一事实得出的（见推论 4.9）。□

命题 6.30。在假设 *6.27*下，X_φ 是有限 *étale* 的。

证明。由于$_{\mathrm{cl}}\widehat{X}_\varphi$ 是有限型的（由命题 4.19得出），只需证明 $\widehat{X}_\varphi$ 在 Spec$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$上是 étale 的。令 $L_{\widehat{X}_\varphi}$ 为余切复形。对于每个 $\psi\in X_\varphi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，我们将证明$L_{\widehat{X}_\varphi}$ 在ψ处消失。这里，ψ 对应于 φ的一个提升 $\mathrm{WD}_{F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\to{}^LG_X$。

由于 $\mathrm{Par}^X_{L_G}=\mathrm{Par}^{L_{G_X}}$，$\mathrm{Par}^{L_{G_X}}$ 在 ψ 处的余切复形等于

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F,\widehat{\mathfrak{h}}^*_\psi(1))[1]$$

如命题4.10的证明中一样。由于$L_{\widehat{X}_\varphi}|_\psi$ 是 ψ 关于$\mathrm{Ind}(\varphi)$的相对余切复形，$L_{\widehat{X}_\varphi}|_\psi[-2]$ 等于……的纤维

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}^*_\varphi(1))=R\Gamma(\mathrm{WD}_F,(\widehat{\mathfrak{h}}^*\oplus\widehat{\mathfrak{h}}^*)_{\mathrm{Ind}(\varphi)}(1))\to R\Gamma(\mathrm{WD}_F,\widehat{\mathfrak{h}}^*_\psi(1)).$$

根据局部泰特对偶（见推论4.9），$L^\vee_{\widehat{X}_\varphi}|_\psi$ 等于……的纤维

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F,\widehat{\mathfrak{h}}_\psi)\to R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi).$$

根据引理 6.29，目标等于 $\mathfrak{z}_E\oplus\mathfrak{z}_E[-1]$，定义域等于

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F,\widehat{\mathfrak{h}}_\psi)=R\Gamma(\mathbb{Z}/2,R\Gamma(\mathrm{WD}_E,\widehat{\mathfrak{h}}_\varphi))=R\Gamma(\mathbb{Z}/2,\mathfrak{z}_E\oplus\mathfrak{z}_E[-1]).$$

令 $X^*(H_E)$ 表示 H_E 的特征群。那么， σ 在 $X^*(H_E)$ 上的作用是乘以 -1，因为 $X^*(H) = 0$。由于 c 在 $\mathfrak{z}_E$ 上的作用也是乘以 $\widehat{\ } -1$，因此 σ 在 $\mathfrak{z}_E \subset \mathfrak{h}_\psi$ 上的作用是平凡的。于是，我们得到 $L^\vee_{\widehat{X}_\varphi}|_\psi = 0$。□

对于每个提升 $\psi\colon W_F \to {}^L G_X$ of φ，令 $S_\psi \subset \widehat{H}$ 为 ψ的中心化子。于是， $S_\psi \subset S_\varphi$ and let

$$j_\psi\colon [*/S_\psi] \to [*/S_\varphi].$$

于是，我们有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Par}_{{}^L G_X} & \longrightarrow & \mathrm{Par}_{{}^L G} & \longrightarrow & \mathrm{Par}^{\mathrm{ss}}_{{}^L G} \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle z_\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} \\ \coprod_{\psi/\varphi} [*/S_\psi] & \xrightarrow{(j_\psi)_{\psi/\varphi}} & [*/S_\varphi] & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{array}$$

这里，各个方块都是笛卡尔的。根据命题 6.30，每个 j_ψ 都是有限 étale 的，且提升 ψ 的数量有限。由于 φ 是超尖点的，

$$j_\varphi\colon [*/Z(\widehat{H})^{Q_E}] \to [*/S_\varphi]$$

也是有限 étale 的。令 $Z = Z(\widehat{H})^{Q_E}$。 $i_{\varphi*}\mathbb{Q}_\ell$ 的平凡 Z-权重部分等于 $z_{\varphi*}j_{\varphi*}\overline{\mathcal{O}}$。这里， $\mathcal{O}$ 表示 $[*/Z]$的结构层。

由于 Hecke 相容性， $z_{\varphi*}j_{\varphi*}\mathcal{O}$ 应在 $\mathbb{L}_G$下与 $\mathcal{F}_\varphi|_{\mathrm{Bun}_G^{(1)}}$ 相匹配。于是，由于$\widehat{\ }$上的分次 X 是平凡的，式（6.2）的右侧可由向量空间计算得到

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}, z_{\varphi*}j_{\varphi*}\mathcal{O}) \cong \mathrm{Hom}(z^*_\varphi \mathcal{L}_{\widehat{X}}, j_{\varphi*}\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{\psi/\varphi} \mathrm{Hom}(j_{\psi*}\mathcal{O}, j_{\varphi*}\mathcal{O}).$$

第二个同构由基变换以及 $j^!_\psi \mathcal{O} \cong \mathcal{O}$ 得出，因为 j_ψ 是 étale 的。令$Z^\circ = S^\circ_\varphi$。回顾权分解（见附录 A.4）

$$\mathrm{QCoh}([*/S_\varphi]) \cong \prod_{\chi \in X^*(Z^\circ)} \mathrm{QCoh}([*/S_\varphi])_\chi, \quad \mathrm{QCoh}([*/S_\varphi])_{\mathrm{triv}} \cong \mathrm{QCoh}([*/\pi_0(S_\varphi)])$$

其中 $\pi_0(S_\varphi) = S_\varphi/S^\circ_\varphi$。由于 j_ψ 是有限 étale 的， $S^\circ_\psi = Z^\circ$，因此我们有

$$j_{\psi*}\mathcal{O} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(S_\psi)], \quad j_{\varphi*}\mathcal{O} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(Z)]$$

通过拟凝聚层$([*/S_\varphi])_{\mathrm{triv}}$ $\cong$ 拟凝聚层$([*/\pi_0(S_\varphi)])$的识别。因此，我们得到以下数值方程。

命题 6.31。 假设对偶对*6.19*满足猜想

$$(G, X = G/H) \leftrightarrow ({}^L G, \widehat{X} = {}^L G/{}^L G_X)$$

并且猜想 *6.22* 对 φ成立。当假设 *6.27* 成立时，我们有

$$\sum_{b \in \pi_X^{-1}(1)} m_b(\Pi_\varphi) = \sum_{\psi/\varphi} \#(\pi_0(Z)\backslash \pi_0(S_\varphi)/\pi_0(S_\psi)).$$

这里， ψ： $W_F \to {}^L G_X$ 遍历 φ 的所有提升。

证明。 根据上述描述，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(j_{\psi*}\mathcal{O}, j_{\varphi*}\mathcal{O}) &\cong \mathrm{Hom}_{\pi_0(S_\varphi)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(S_\psi)], \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(Z)]) \\ &\cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(S_\psi)\backslash\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(Z)].\end{aligned}$$

因此，结合上述论证即可得出该结论。 □

注6.32。 请与以下描述进行比较： [BP18，猜想 1] 当特征χ 在上述文献中为平凡时。于是， $\pi_X^{-1}(1)$ 等于 $H^1(F, H) \to H^1(F, G)$。该文似乎暗示 $m_b(\Pi_\varphi)$ 与 b无关。

我们还可以预测每个 $\pi \in \Pi_\varphi(G)$ 的重数。

命题6.33。 假设对偶对的猜想 *6.19*成立 r

$$(G, X = G/H) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{X} = {}^LG/{}^LG_X)$$

以及 $\rho_\pi \in \mathrm{Irr}(\pi_0(S_\varphi)/\pi_0(Z))$ 满足 $\mathbb{L}_G(i_!^1\pi) \cong z_{\varphi*}\mathcal{O}_{\rho_\pi}$。当假设 *6.27*成立时，

$$\dim \mathrm{Hom}_{G(F)}(C_c^\infty(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = \sum_{\psi/\varphi} \dim \rho_\pi^{\pi_0(S_\psi)=\mathrm{id}}.$$

此外，对于每个 $i > 0$，我们有

$$\mathrm{Ext}^i_{G(F)}(C_c^\infty(X(F), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = 0.$$

证明。 两个结论都可由与命题 6.31相同的计算得出。注意，第二个结论源于以下对象的高阶上同调群消失:

$$\mathrm{Map}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}, z_{\varphi*}\mathcal{O}_{\rho_\pi}) \cong \bigoplus_{\psi/\varphi} \mathrm{Map}(j_{\psi*}\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\rho_\pi})$$

因为 $j_{\psi*}\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}_{\rho_\pi}$ 属于心 $\mathrm{Rep}(\pi_0(S_\varphi)) \subset$拟凝聚层$([*/\pi_0(S_\varphi)])$，而该范畴是半单的，因为 Λ 的特征为 0。 □

当 H 的中心不是各向异性时，高阶扩张群不再消失。

例 6.34。 假设 $H = \mathbb{G}_m$ 和 E/F 是一个非分歧二次扩张。那么，$\mathbb{Q}_{\ell\mathrm{triv}}$是 $C_c^\infty(E^\times/F^\times, \mathbb{Q}_\ell)$ 的一个直和项，并且我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{E^\times}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^\pm]}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^\pm]/(T-1), \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T^\pm]/(T-1)) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

特别地，$\mathrm{Ext}^1_{E^\times}(C_c^\infty(E^\times/F^\times, \mathbb{Q}_\ell) \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}}) \neq 0$。

6.5. 与艾森斯坦级数的相容性。 本节中，我们引入对偶对的抛物诱导，并证明归一化周期层和L-层的抛物诱导在艾森斯坦相容性下相容。

6.5.1. $\mathcal{A}$-侧。 设 $P \subset G$ 为一个抛物子群，其 Levi 子群为 M。

定义 6.35。 对于一个光滑拟射影的 M-簇 X，令

$$\mathrm{Ind}_P^G(X) = G \times^P X$$

为 X的抛物诱导。

引理 6.36。 抛物诱导 $\mathrm{Ind}_P^G(X)$ 是一个光滑拟射影的 G-簇。

证明。 根据 Sumihiro 定理， X 存在一个 M-等变充足线丛。因此，自然映射 $\mathrm{Ind}_P^G(X) \to G/P$ 是光滑且拟射影的。由此得证。□

考虑一个序列

$$\mathrm{Bun}_G \xleftarrow{\mathfrak{p}} \mathrm{Bun}_P \xrightarrow{\mathfrak{q}} \mathrm{Bun}_M.$$

根据例 6.6， $\omega^*_{G/P}\underline{\deg}$ 是 Bun_P 的对偶化复形的平方根，因此，归一化的几何艾森斯坦级数（参见 [HHS24，定义 2.1。7]）由下式给出

$$\mathrm{Eis}_{P!} = \mathfrak{p}_!(\mathfrak{q}^*(-)\otimes\omega^*_{G/P}\underline{\deg})\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_M,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Pr命题 6.37。 对于每个光滑拟射影的 M-簇 X，我们有 e

$$\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{Ind}_P^G(X)} \cong \mathrm{Eis}_{P!}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X).$$

证明。 由于 $[\mathrm{Ind}_P^G(X)/G]\cong[X/P]$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{Ind}_P^G(X)} & \xrightarrow{\mathfrak{q}_X} & \mathrm{Bun}_M^X \\
 & \swarrow^{\pi_{\mathrm{Ind}_P^G(X)}} & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{p}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\
\mathrm{Bun}_G & \xleftarrow{\mathfrak{p}} & \mathrm{Bun}_P & \xrightarrow{\mathfrak{q}} & \mathrm{Bun}_M.
\end{array}$$

这里，这个方形是笛卡尔的。于是，我们有

$$\mathrm{Eis}_{P!}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X) = \mathfrak{p}_!(\mathfrak{q}^*\pi_{X!}\omega_X^*\underline{\deg}\otimes\omega^*_{G/P}\underline{\deg}) \cong \pi_{\mathrm{Ind}_P^G(X)!}(\mathfrak{q}_X^*\omega_X^*\underline{\deg}\otimes\mathfrak{p}_X^*\omega^*_{G/P}\underline{\deg}).$$

只需证明 $\mathfrak{q}_X^*\omega_X^*\underline{\deg}\otimes\mathfrak{p}_X^*\omega^*_{G/P}\underline{\deg}\cong\omega^{*}{}_{\mathrm{Ind}_P^G(X)}\underline{\deg}$。令 $m\colon \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}\times\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}\to\mathrm{Bun}^{\mathbb{G}_m}$ 为将一对 $(\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2)$ 映射到 $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$ 的映射。根据 $\deg$ 的描述，我们有

$$\underline{\deg}\boxtimes\underline{\deg}\cong m^*\underline{\deg}.$$

因此，只需证明

$$[\mathrm{Ind}_P^G(X)/G]=[X/P]\to[X/M]\times[*/P]\xrightarrow{(\Omega_X^{\mathrm{top}},\Omega^{\mathrm{top}}_{G/P})}[*/\mathbb{G}_m]\times[*/\mathbb{G}_m]\to[*/\mathbb{G}_m]$$

等于 $\Omega^{\mathrm{top}}{}_{\mathrm{Ind}_P^G(X)}$。现在，按照记号滥用，我们也用 $\Omega^{\mathrm{top}}{}_{(-)}$ 表示典范丛。于是，$\Omega^{\mathrm{top}}{}_{\mathrm{Ind}_P^G(X)}\otimes p_X^*\Omega^{\mathrm{top}\,\vee}_{G/P}$，是 $\mathrm{Ind}_P^G(X)\to G/P$的相对典范丛。此外，

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ind}_P^G(X) & \xrightarrow{q_X} & [X/M] \\
\downarrow & & \downarrow \\
G/P & \longrightarrow & [*/M]
\end{array}$$

是笛卡尔的，因此我们得到 $\Omega^{\mathrm{top}}{}_{\mathrm{Ind}_P^G(X)}\cong p_X^*\Omega^{\mathrm{top}}_{G/P}\otimes q_X^*\Omega^{\mathrm{top}}_X$。这就证明了该断言。 □

6.5.2. *B* 侧 $\mathcal{B}$-侧。 设 ${}^LP\subset{}^LG$ 为一个抛物子群，其 Levi 子群为 ${}^LM$.

定义 6.38。 对于一个局部有限表示的导出 ${}^LM$-概形 $\widehat{X}$，若 ${}_{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是$\wr M$-拟射影且带有分次，则令

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X}) = {}^LG\times^{{}^LP}\widehat{X}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是 X 的抛物诱导，配备由 X 诱导的分次，使得对于 $a\in\mathbb{G}_{gr}$、 $g\in{}^LG$ 和 $x\in\widehat{X}$， $a\cdot(g,\ x)=(g,\ ax)$。

引理 6.39。 抛物诱导 $\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})$ 是一个局部有限表示的导出 ${}^{L}G$-概形，且 ${}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})$ 是 $\widehat{G}$-拟射影的。

证明。 由于${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是 $\widehat{M}$-拟射影的，

$$ {}^{\mathrm{cl}}\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X}) = {}^{L}G \times^{{}^{L}P} {}^{\mathrm{cl}}\widehat{X} $$

是一个概形且是 $\widehat{G}$-拟射影的。因此，$\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X}) \to \widehat{G}/\widehat{P}$是概形态的，因为它在目标上局部光滑。由于 $\widehat{X}$和 $\widehat{G}/\widehat{P}$局部有限表示，$\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})$是一个局部有限表示的导出概形。□

考虑一个序列

$$ \mathrm{Par}_{{}^{L}G} \xleftarrow{p^{\mathrm{spec}}} \mathrm{Par}_{{}^{L}P} \xrightarrow{q^{\mathrm{spec}}} \mathrm{Par}_{{}^{L}M}. $$

谱艾森斯坦级数（见 [Zhu21，命题 3.3。2]）定义为

$$ \mathrm{Eis}_{P}^{\mathrm{spec}} = p_{*}^{\mathrm{spec}} q^{\mathrm{spec}!} \colon \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}M}) \to \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}G}). $$

命题 6.40。 对于每个局部有限表示的导出 ${}^{L}M$-概形 $\widehat{X}$，若${}^{\mathrm{cl}}\widehat{X}$ 是 $\widehat{M}$-拟射影的，则有

$$ \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})} \cong \mathrm{Eis}_{P}^{\mathrm{spec}}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}). $$

证明。 令 $\widehat{Y} = \mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})$。由于 $[\widehat{Y}/{}^{L}G \times \mathbb{G}_{gr}] \cong [\widehat{X}/{}^{L}P \times \mathbb{G}_{gr}]$，我们有一个 $\mathbb{G}_{gr}$-等变交换图

$$ \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{Y},\mathrm{norm}} & \xrightarrow{q_{\widehat{X}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}G}^{\widehat{X},\mathrm{norm}} \\ & \swarrow^{\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{Y}}} & \downarrow{\scriptstyle p_{\widehat{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}} \\ \mathrm{Par}_{{}^{L}G} & \xleftarrow{p^{\mathrm{spec}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}P} & \xrightarrow{q^{\mathrm{spec}}} & \mathrm{Par}_{{}^{L}M}. \end{array} $$

这里，该方块是笛卡尔的。因此，我们有

$$ \mathrm{Eis}_{P}^{\mathrm{spec}}(\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}) \cong p_{*}^{\mathrm{spec}}(q^{\mathrm{spec}!}\pi^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}*}\omega^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}})^{/\!/} \cong p_{*}^{\mathrm{spec}}(p_{\widehat{X}*}\omega^{\mathrm{norm}}_{\widehat{Y}})^{/\!/} = \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{Y}}. $$

□

6.5.3. 艾森斯坦相容性。 令 $P \subset G$ 为一个 Levi 子群为M的抛物子群。令 P为 P的对偶 Borel 子群。在 [Han24，猜想 1.4。7], 预期范畴化局部朗兰兹对应满足艾森斯坦相容性，也就是说，以下图表交换：

$$ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{M}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) & \xrightarrow{\mathrm{Eis}_{P!}} & \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{G}, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_{M}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_{G}} \\ \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}M}) & \xrightarrow{\mathrm{Eis}_{P}^{\mathrm{spec}}} & \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{{}^{L}G}). \end{array} $$

定义 6.41。 我们定义对偶对 $(M,\ X) \leftrightarrow ({}^{L}M,\ \widehat{X})$沿$P$ 的抛物诱导为

$$ (G, \mathrm{Ind}_{P}^{G}(X)) \leftrightarrow ({}^{L}G, \mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{G}}(\widehat{X})). $$

根据命题 6.37 和命题 6.40，艾森斯坦相容性预示归一化周期猜想在抛物诱导下保持不变。

例 6.42。设 $T \subset B \subset G$ 为一个 Borel 对。由于 $(T,\ T) \leftrightarrow ({}^LT,\ *)$ 和 $(T,\ *) \leftrightarrow ({}^LT, \widehat{T})$ 是对偶对，预计有

$$(G, G/U) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{G}/\widehat{B}), \quad (G, G/B) \leftrightarrow ({}^LG, \widehat{G}/\widehat{U})$$

是对偶对。其中，U（分别地，U）是 B（分别地，B）的幺正根基。

7. 周期与 L-层的比较

本节假设范畴化局部朗兰兹对应对 GL_2 成立并具有艾森斯坦相容性，验证岩泽-泰特周期和海克周期的归一化周期猜想。

7.1. **岩泽-泰特周期的比较**。本节比较岩泽-泰特周期中周期层的归一化与 L-层。在此情形下，对偶对和归一化因子如下（见 [FW25，第 6.1.3、6.5 节。1]）。

G	X	${}^LG$	$\widehat{X}$	η_X	$z_{\widehat{X}}$
$\mathbb{G}_m$	std	$\mathbb{G}_m$	std	std	std

这里，η_X 是 X 的特征标，而 X 上的分次由中心余特征 $z_{\widehat{X}}$ 给出。特别地，$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$ 和 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$ 可以按照命题 6.4 和推论 6.13 计算。

设 $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$。对于 $\mathbb{G}_m$，范畴化局部朗兰兹对应

$$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m} : \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})$$

由 [Zou24] 证明。我们来回顾 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}$ 的基本性质。

(1) 函子 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}$ 限制为等价

$$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m,n} : \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,n}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m})_{\mathrm{std}^n} \cong \mathrm{QCoh}(Z^1(W_F, \mathbb{G}_m)).$$

对于 $n = 0$，由 $C_c^\infty(F^\times,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 表示的 Whittaker 层映到 $\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}$。

(2) 范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m,\ n},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 等价于

$$\mathrm{colim}_{K \subset F^\times} \mathcal{D}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[F^\times/K]).$$

对于每个紧开子群 $K \subset F^\times$，我们都有一个紧开子群 $K_F \subset W_F$，使得 $W_F/K_F \cong F^\times/K$ 通过局部类域论成立。于是，

$$Z^1(W_F/K_F, \mathbb{G}_m) \subset Z^1(W_F, \mathbb{G}_m)$$

是闭开集，并由 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[F^\times/K]$ 表示。于是，我们有

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_{m,n}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{QCoh}(Z^1(W_F, \mathbb{G}_m)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[F^\times/K]) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{QCoh}(Z^1(W_F/K_F, \mathbb{G}_m)). \end{array}$$

通过组合 根据命题3.2 和命题5.10，我们得到以下描述 n.

定理 7.1。 对于岩泽–泰特周期，归一化周期层 $\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$由下式给出

$$\mathcal{P}_{X,n}^{\mathrm{norm}} = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}[n](n<0), \mathcal{P}_{X,0}^{\mathrm{norm}} = C_c^\infty(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}, \mathcal{P}_{X,n}^{\mathrm{norm}} = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{1/2}[-n](n>0),$$

并且，归一化的 L-层 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$由下式给出

$$\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \oplus \bigoplus_{n\geq 1}\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{1/2})[-n] \oplus \bigoplus_{n\geq 1}\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{-1/2})[-n].$$

这里，

- 第二个因子（分别地，第三个因子）的第 n 项属于 拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}})_{\mathrm{std}^{-n}}$（分别地，拟凝聚层$(\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}})_{\mathrm{std}^{n}}$），并且
- T 是 $\mathbb{G}_m$ 在分量 $\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}} \cong \mathbb{G}_m\times[*/\mathbb{G}_m]$ 中的坐标。

特别地， $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}$ 将 $\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$映到 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$。

证明。由于 $\eta_X = \mathrm{std}$，$\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$的描述由命题3.2得出。此外，由于$z_{\widehat{X}} = \mathrm{std}$， $\mathbb{G}_{gr}$ 和 $\mathbb{G}_m$ 在 $\mathcal{L}_V$ 上的分次相同，因此$\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$的描述由命题5.10得出：$\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}|\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m,\ \mathrm{triv}}}$ 将 T 映到 $q^{-1/2}T$，所以

$$\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{1/2}),$$

$$\tau_{\sqrt{\mathrm{cyc}}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(qT-1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{-1/2}).$$

现在，我们将证明 $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}$ 将 $\mathcal{P}_X^{\mathrm{norm}}$映到 $\mathcal{L}_{\widehat{X}}^{\mathrm{norm}}$。

对于 $n<0$，容易看出$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m,n}$ 将 $\mathbb{Q}_\ell^{-1/2}\mathrm{norm}[n]$ 映到 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{1/2})[n]$。对于 $n>0$，容易看出$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m,n}$ 将 $\mathbb{Q}_\ell^{1/2}\mathrm{norm}[-n]$ 映到 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}/(T-q^{-1/2})[-n]$。对于 $n=0$，只需证明$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m,0}$将 $C_c^\infty(F,\mathbb{Q}_\ell)$映到 $\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}$。由于 $\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}$在$\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m,0}$下对应于 $C_c^\infty(F^\times,\mathbb{Q}_\ell)$，只需证明 $C_c^\infty(F^\times,\mathbb{Q}_\ell) \cong C_c^\infty(F,\mathbb{Q}_\ell)$。

回忆一下，我们有一个伯恩斯坦分解

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(F^\times) = \prod_{\chi:\, O_F^\times\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(F^\times)_\chi.$$

这里，每个光滑的 $F^\times$-表示 V 都有一个分解

$$V = \bigoplus_\chi V_\chi, \quad O_F^\times|_{V_\chi} = \chi\cdot\mathrm{id}_{V_\chi}$$

上述分解将 V 映到 $\bigoplus_\chi V_\chi$。我们将证明

$$C_c^\infty(F^\times,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\chi \cong C_c^\infty(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\chi$$

对每个 χ 都成立。

首先，我们有一个短正合列

$$C_c^\infty(F^\times,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow C_c^\infty(F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{triv}},$$

因此，对于非平凡特征 χ， $C_c^\infty(F^\times,\ \mathbb{Q}_\ell)_\chi \hookrightarrow C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell)_\chi$是一个同构。此外，$C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell)_{\mathrm{triv}}$通过将函数 f映到函数 $x\mapsto f(\pi x)-f(x)$，与 $C_c^\infty(F^\times,\ \mathbb{Q}_\ell)_{\mathrm{triv}}$同构。因此，我们得到了所述结论。□

We 可以手动验证岩泽-泰特周期的函数方程。

命题 7.2。 存在一个同构 $\mathcal{P}_{\mathrm{std}}^{\mathrm{norm}} \cong \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}{}^\vee{}_{\mathrm{std}}$。

证明。 我们有以下笛卡尔图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}^{\mathrm{std}^\vee} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}^{\mathrm{std}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m} & \xrightarrow{\mathrm{std}^{-1}} & \mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}. \end{array}$$

显然 可见 $\eta_{\mathrm{std}^\vee} = \mathrm{std}^{-1}$，因此 $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\vee\ \mathrm{std}}$ 是沿 std^{-1} 对 $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std}}$ 的拉回 .

现在，沿std^{-1} 的拉回将 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 上的n 一个特征发送为 $\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}$ 上$-n$的逆。因此，$\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std},\ n} \cong \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\vee\ \mathrm{std},\ n}$ 根据定理 7.1. 对于 $n = 0$, $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\vee\ \mathrm{std},\ 0}$ 等于$C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell{}^{1/2}$ 范数，其中 $F^\times$ 通过右平移作用。固定一个非平凡的加法特征 $\psi\colon F \to \mathbb{Q}_\ell$。傅里叶变换

$$C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \ni f(x) \mapsto \widehat{f}(y) = \int_F f(x)\psi(-xy)dx \in C_c^\infty(F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

给出一个同构 $C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell) \cong C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}_{\ell\mathrm{norm}}}$，其中 $F^\times$ 通过左平移（分别为右平移）作用于第一个（分别为第二个） $C_c^\infty(F,\ \mathbb{Q}_\ell)$。因此，这给出了一个同构$\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std},\ 0} \cong \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{\vee\ 0\ \mathrm{std},}$。 □

7.2. **海克周期的比较**。 本节比较周期层的归一化与海克周期的 L-层。在此情形下，对偶对和归一化因子如下（参见 [FW25，第 7.1.3 节，7.1.6]）。

G	X	${}^LG$	$\widehat{X}$	η_X	$z_{\widehat{X}}$
GL_2	GL_2/A	GL_2	std	triv	scaling

这里， η_X 是 X 的特征标，而 X 上的分次由一个中心余特征 $z_{\widehat{X}}$给出，它将 x 映到 $\begin{pmatrix} x & \\ & x \end{pmatrix}$。特别地， $\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_X$和 $\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X}}$可按命题6.4和推论6.13中的方法计算。

设 $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$。对于 GL_2,，文献中尚未出现范畴化局部朗兰兹对应的证明。尽管如此，它预言存在一个范畴等价

$$\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{oc}}(\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_2}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{IndCoh}(\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2})$$

满足 Whittaker 相容性和艾森斯坦相容性。根据命题 3.5 和命题 5.12中的描述，我们得到以下相容性。

定理 7.3。 假设存在一个具有 *Whittaker* 相容性和艾森斯坦相容性的范畴等价 $\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}$。对于 $n \neq 0$，我们有

$$\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X,n}) \cong \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X},n}.$$

对于 $n = 0$，纤维序列的第一项（分别为最后一项）

$$\mathcal{W}_\psi \hookrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X,0} \to \mathrm{Eis}_{B!}(i_!^1 \mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2})$$

在 $\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}$ 下映射到纤维序列的第一项（分别为最后一项）

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathrm{GL}_2}} \to \mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X},0} \to \mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}} \boxtimes (i_{\mathrm{cyc}^{-1/2}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{triv}}).$$

证明。 对于 $n<0$，我们有

$$\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\widehat{X},n}=\mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_{\overline{B}}(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}\boxtimes(i_{\mathrm{cyc}^{-1/2}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}[n]).$$

于是，该断言成立，因为 $\mathbb{L}_T=\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}\boxtimes\mathbb{L}_{\mathbb{G}_m}$ 发送

$$i_!^{b_n}\mathrm{cInd}_{A(F)}^{T(F)}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}[n]=i_!^1C_c^\infty(F^\times,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\boxtimes i_!^{\pi^{-n}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell\mathrm{norm}}^{-1/2}[n]$$

to

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}\boxtimes(i_{\mathrm{cyc}^{-1/2}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}[n].$$

对于 $n=0$，该断 言由 Whittaker 相容性和前面的论证得出。

对于 $n>0$，我们有 $\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std},\,n}\cong\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std}^\vee,\,-n}$ 由推论 6.17。计算它时，采用命题5.12 中的相同论证，并使用以下闭开分解。

$$[\{0\}/\mathrm{GL}_2]\hookrightarrow[\mathrm{std}^\vee/\mathrm{GL}_2]\hookleftarrow[(\mathbb{A}^2-\{0\})/\mathrm{GL}_2]\cong[*/\mathrm{Mir}_2].$$

这里，Mir_2 是 $\binom{0}{1}$ 在$\mathrm{std}^\vee$ 下的稳定子，记作

$$\mathrm{Mir}_2=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathrm{GL}_2.$$

命题 5.12 中的相同论证表明

$$\mathcal{L}_{\mathrm{std}^\vee,-n}\cong\mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_B(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}\boxtimes(i_{\mathrm{triv}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}).$$

由于 $\mathbb{G}_{gr}$ 在 $\mathrm{std}^\vee$ 上的作用是缩放，我们有 $z_{\mathrm{std}^\vee}=z^{-1}{}_{\mathrm{std}}$，从而得到

$$\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std},n}\cong\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std}^\vee,-n}\cong\mathrm{Eis}^{\mathrm{spec}}_B(\mathcal{O}_{\mathrm{Par}_{\mathbb{G}_m}}\boxtimes(i_{\sqrt{\mathrm{cyc}}*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{std}^n}[-n]),$$

艾森斯坦相容性确保 $\mathbb{L}_{\mathrm{GL}_2}(\mathcal{P}^{\mathrm{norm}}_{X\,n,})\cong\mathcal{L}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{std}},{}_{,n}$ 根据命题 3.5。 □

附录 A。导出代数几何回顾

本节回顾 [GR17]所发展的导出叠与归纳相干层理论。令 Λ 为一个经典 $\mathbb{Q}$-代数。为使用 Artin-Lurie 可表性，我们假设 Λ 是一个 G-环。令 CAlg_Λ 为动画 ∞-代数的 Λ-范畴，并令$\mathrm{CAlg}^\heartsuit_\Lambda\subset\mathrm{CAlg}_\Lambda$ 为经典 Λ-代数的子范畴。

A.1. **基本定义与性质**。

A.1.1. 拓扑。动画代数的态射 $A\to B$ 是平坦的（分别是 étale 的），当且仅当 $\pi_0(A)\to\pi_0(B)$ 是平坦的（分别是 étale 的），且 $\pi_i(A)\otimes_{\pi_0(A)}\pi_0(B)\cong\pi_i(B)$。基于 [GR17 第 4 节1], 所述的原因，除非另有说明，$^{\mathrm{op}}_{\Lambda}\mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}_\Lambda$ 配备 étale 拓扑。$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}_\Lambda$ 上的 étale 叠称为导出栈。导出栈范畴记为 DStk_Λ。其终对象 $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ 记为 $*$。

A.1.2. 经典层叠。 导出栈 S 的经典截断为

$$^{\mathrm{cl}}S = S|_{\mathrm{CAlg}_{\Lambda}^{\heartsuit}},$$

对 $\mathrm{CAlg}_{\Lambda}^{\heartsuit}$ 的限制。令 ${}_{\mathrm{cl}}\mathrm{DStk}_{\Lambda}$ 表示 $\mathrm{CAlg}_{\Lambda}^{\heartsuit}$ 上的 étale 层叠范畴。存在一个全忠实嵌入

$$^{L}\mathrm{LKE}\colon {}^{\mathrm{cl}}\mathrm{DStk} \hookrightarrow \mathrm{DStk}$$

由沿 $(\mathrm{CAlg}_{\Lambda}^{\heartsuit})^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{CAlg}_{\Lambda}^{\mathrm{op}}$ 的左 Kan 延拓再作层化给出。若一个导出栈属于 ${}^{L}\mathrm{LKE}$ 的本质像，则称其为经典的。换言之，导出栈 S 是经典的，当且仅当自然映射 ${}_{\mathrm{cl}}S \to S$ 是同构。

A.1.3. *Artin* 层叠。 对每个 $n \geq 0$， n-Artin 层叠的概念按照[GR17第 4 节中的方式归纳定义。1]这里我们只回顾 1-Artin 层叠，因为应用中只会遇到这类层叠。

按照 [DAG，定义 5.1，3], 我们称导出栈 S 为导出 1-栈，如果 S存在来自某个导出概形的光滑覆盖。此外，如果 S 具有可表对角线，则称 S 为 1-Artin 叠。

我们称一个导出1-叠局部（分别地，几乎）有限表示，若它有一个来自局部（分别地，几乎）有限表示的导出概形的光滑覆盖。关于后一概念，参见 [DAG，命题 3.2.14，定义 5.3。1]。

A.1.4. 拟凝聚层与归纳相干层。 记 $\mathrm{QCoh}(S)$（分别地，$\mathrm{IndCoh}(S)$）为导出栈 S 上拟凝聚层（分别地，归纳相干层）的范畴。 S 的对偶化复形为

$$\omega_S = \pi^{!}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\Lambda)} \in \mathrm{IndCoh}(S)$$

其中 $\pi\colon S \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ 是结构态射。

若一个 Artin 叠 S 存在一个来自 n-连通导出概形的光滑覆盖，其中某个 n， S 则称其为最终余连通（参见 [GL:Stacks，命题 4.6。4]）。在此情形下，我们有一个全忠实嵌入 [Gai13，11.7。3]

$$\Xi_S\colon \mathrm{QCoh}(S) \hookrightarrow \mathrm{IndCoh}(S).$$

当 S 是最终余连通导出概形时， Ξ_S 由 $\mathrm{Perf}(S) \hookrightarrow \mathrm{Coh}(S)$ 的 ind-扩张得到。当 Λ 是一个域且 S 是光滑的， Ξ_S 是一个等价。

当 S 是 QCA [DG13，定义 1.1。8], $\mathrm{IndCoh}(S)$ 是紧生成的，并且我们有$\mathrm{IndCoh}(S)$ $=\mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(S))$ （参见 [DG13，定理 3.3。5]）。QCA 叠的一个典型例子是有限表示的分离导出概形对光滑仿射群概形取商。

若导出栈 S 满足 S 具有仿射对角线且 $\mathrm{QCoh}(S)$ $\cong\mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}(S))$，则称其为完美的。完美叠的例子见 [BZFN10]。例如，参见[BZFN10，命题 3。21]。

A.2. **变形理论**。 对于 $A \in\mathrm{CAlg}_{\Lambda}$ 和一个连通的 A-模 $M \in\mathrm{QCoh}(A)^{\leq 0}$，令

$$A \oplus M$$

表示 A 由 M 得到的平凡平方零扩张（参见 [Lur18，第 25.3 章。1]）。当 A和 M 是静态的，乘法律写作

$$(a, m) \cdot (a', m') = (aa', am' + a'm) \quad (a \in A, \quad m \in M).$$

定义 A.1. 设 $f\colon X \to Y$ 是 DStk_Λ 中的一个态射，且 $A \in \mathrm{CAlg}_\Lambda$。对于 $x \in X(A)$ 和 $M \in \mathrm{QCoh}(A)^{\leq 0}$，相对导子空间 f 在 x 处取值于 M 是同伦纤维

$$\mathrm{Der}(X/Y, x, M) = \mathrm{fib}\big(X(A \oplus M) \longrightarrow Y(A \oplus M) \times_{Y(A)} X(A)\big)_{(y,x)},$$

其中，$y \in Y(A \oplus M)$ 是沿零截面 $A \to A \oplus M$ 拉回 $f(x) \in Y(A)$ 所得的对象。$A \to A \oplus M$相对余切复形 of f is a complex $L_{X/Y} \in$ 拟凝聚层(X)，使得对于上述任意 (A, x)，都有一个自然等价

$$\mathrm{Der}(X/Y, x, M) \cong \mathrm{Map}(x^* L_{X/Y}, M) \quad (M \in \mathrm{QCoh}(A)^{\leq 0}).$$

如果它存在，$L_{X/Y}$ 在可缩选择意义下是唯一的。

例 A.2. 设 G 是定义在 Λ 上的光滑代数群，其李代数为 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$。分类叠 $BG = [*/G]$ 是一个经典阿廷 1-叠，并且有

$$L_{BG/\Lambda} \cong \mathfrak{g}^\vee[-1] \in \mathrm{QCoh}(BG).$$

这里，G 对 $\mathfrak{g}^\vee$ 的作用是余伴随作用。对于一个 Map $x\colon S \to BG$，它对应于 G 在 S 上的主丛 $\mathcal{P}$，令

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times^G \mathfrak{g}.$$

那么，对于任意 $M \in$拟凝聚层$(S)^{\leq 0}$，我们有

$$\mathrm{Der}(BG, x, M) \cong \mathrm{Map}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}^\vee[-1], M).$$

定理 A.3. (Artin-Lurie，[DAG，定理 7.1。6]) 设 F 是一个满足以下条件的导出栈。

(1)（几乎有限表示）对于每个 $n \geq 0$，F 到 n-截断连通 Λ-代数的限制保留滤过余极限。（2）（经典部分）经典截断 $\mathrm{cl}F$ 是一个在 Λ上局部有限表示的经典 *Artin* 叠。特别地，$\mathrm{cl}F$ 取值于群胚。（3）（余切复形）函子 F 存在余切复形。（4）（幂零完备性）函子 F 是幂零完备的（或收敛的），即对于每个 $R \in \mathrm{CAlg}_\Lambda$，典范映射

$$F(R) \to \varprojlim_n F(\tau_{\leq n} R)$$

是一个等价。
（5）（无穷小相合性）函子 F 按照[*DAG*，定义 *3.4*。*1*]。

于是，F 是一个在 Λ上局部几乎有限表示的导出 *Artin* 1 叠。

在 Lurie 的原始表述中，对 $\mathrm{cl}F$ 的条件是用变形理论的术语提出的；利用群胚中的叠的经典阿廷可表性定理（见 [DAG，定理 7.1。1]），可以用上述条件 (2) 替代该条件。

A.3. **导出向量丛**。 关于导出向量丛的定义，我们采用 [FYZ23 第 6.1 节中的约定。1]。设 S 为一个导出栈。我们将全化函子定义为

$$\mathrm{Tot}_S(-)\colon \mathrm{QCoh}(S) \to \mathrm{DStk}_S, \quad \mathcal{E} \mapsto (T/S \mapsto \mathrm{Map}\left(\mathcal{O}_T, \mathcal{E}|_T\right)).$$

当 $\mathcal{E} \in \mathrm{Perf}(S)$ 时，$\mathrm{Tot}_S(\mathcal{E})$ 称为与 $\mathcal{E}$ 关联的导出向量丛 。有时我们将其简记为 $\mathbb{V}(\mathcal{E})$。

例 A.4. 假设 $T = \mathrm{Spec}(A)$ 是仿射的。那么，

$$\mathrm{Tot}_S(\mathcal{E})(A) = \mathrm{Map}_A\left(A, \mathcal{E}_A\right) \simeq \Omega^\infty(\tau^{\leq 0}(\mathcal{E}_A))$$

在本文正文中，我们将滥用记号，省略 $\Omega^\infty(-)$。

引理 A.5. 若 $\mathcal{E}$ 是余连通的，则 $\mathrm{Tot}_S(\mathcal{E})$ 由相对谱表示

$$\underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathrm{Sym}^\bullet \mathcal{E}^\vee).$$

证明。 该断言成立，因为对每个 $T = \mathrm{Spec}(A)$，我们都有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}_A}(\mathrm{Sym}^\bullet \mathcal{E}_A^\vee, A) \cong \mathrm{Map}_A(\mathcal{E}_A^\vee, A) \cong \mathrm{Tot}_S(\mathcal{E})(A).$$

□

定义 A.6。 设 G 是 Λ上的群概形。对于每个 $V \in \mathrm{Rep}(G)$，令

$$\mathcal{O}_V \in \mathrm{Perf}([*/G])$$

为满足 $\mathrm{Tot}_{[*/G]}(\mathcal{O}_V) \cong [V/G]$ 在 $[*/G]$上的向量丛。

A.4. **权分解**。 设 Δ 是 $\mathbb{Z}$ 上的可对角化群概形，其特征群为 $X^*(\Delta)$。设 S 是一个导出栈，且设 $X \to S$ 是一个 Δ-丛。已知我们有一个权分解

$$\mathrm{QCoh}(X) \cong \prod_{\chi \in X^*(\Delta)} \mathrm{QCoh}(X)_\chi.$$

这在 [BS21，定理 A] 中当 S 是经典的情形下得到证明，而在 [BP23，定理 5。25]中当S 是导出的且 $\Delta = \mathbb{G}_m$时得到证明。沿 $X \to S$ 的拉回给出 拟凝聚层$(X)_{\mathrm{triv}} \cong$ 拟凝聚层(S)。

我们对权分解取指标，使得对于每个 $\chi \in X^*(\Delta)$，$\mathcal{O}_\chi \in$ 拟凝聚层$([*/\Delta])_\chi$ 。当 $X = S \times [*/\Delta]$ 时，与 $\mathcal{O}_\chi^{-1}$的张量积给出

$$\mathrm{QCoh}(X)_\chi \cong \mathrm{QCoh}(X)_{\mathrm{triv}} \cong \mathrm{QCoh}(S).$$

假设 X 是一个 QCA 叠，并且拟凝聚层存在权分解。那么，权分解限制为一个等价

$$\mathrm{Coh}(X) \cong \bigoplus_{\chi \in X^*(\Delta)} \mathrm{Coh}(X)_\chi.$$

ind-扩张为 IndCoh 提供了相应的函子：

$$\mathrm{IndCoh}(X) \cong \prod_{\chi \in X^*(\Delta)} \mathrm{IndCoh}(X)_\chi.$$

A.5. 对称幂的计算。 设 S 为一个 Artin 叠。对称幂乘积 $\mathrm{Sym}^\bullet_{\mathcal{O}_S}(-)$ 是遗忘函子的左伴随

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(S)) \to \mathrm{QCoh}(S).$$

当上下文明确时，我们省略下标。具体而言，对于 $\mathcal{E} \in$拟凝聚层(S)，有

$$\mathrm{Sym}^\bullet(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}), \quad \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}) = (\mathcal{E}^{\otimes n})_{\Sigma_n}.$$

此处， Σ_n 表示次数为 n 的对称群。本节中，我们回顾特征 0 下对称幂的显式描述。

假设 $\mathcal{E}$ 由 S 上振幅位于 $[a,b]$ 的向量丛有界复形 $E = (E^\bullet, d^\bullet)$ 表示。对于每个 $n \geq 0$， $E^{\otimes n}$ 由如下给出的向量丛复形表示：第 d 项由直和给出

$$\bigoplus_{i_1+i_2+\cdots+i_n=d} E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n}$$

其中，指标遍历满足对每个 $1 \leq k \leq n$ 均有 $a \leq i_k \leq b$ 的 n 元组 $(i_1, \ldots\ldots, i_n)$，且微分

$$E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n} \to E^{j_1} \otimes E^{j_2} \otimes \cdots \otimes E^{j_n}$$

仅当对于某个指标 k，恰有一个 $i_k \neq j_k$ 且该 k 满足 $j_k = i_k + 1$ 时才非零；此时微分由 $(-1)^{i_1+\cdots+i_{k-1}} d^{i_k}$ 给出。 Σ_n 在第 d 项上的作用

$$\bigoplus_{i_1+i_2+\cdots+i_n=d} E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n}$$

定义如下： $\sigma \in \Sigma_n$ 将 $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n}$ 送到

$$\prod_{\substack{k<\ell \\ \sigma^{-1}(k)>\sigma^{-1}(\ell)}} (-1)^{i_k i_\ell} \cdot a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots a_{\sigma^{-1}(n)}$$

$E^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes E^{i_{\sigma^{-1}(2)}} \otimes \cdots \otimes E^{i_{\sigma^{-1}(n)}}$中。此处需要使用称为科苏尔符号规则的符号，以确保作用与微分相容。在本文正文中，我们需要进行以下计算。

引理 A.7. 假设 E集中在两个次数 $[a, a+1]$上，且 E^a和 E^{a+1}的秩均为 1。对于每个 $n \geq 1$, 对称幂$^n(E)$ 定义如下。

(1) When a is even, $\mathrm{Sym}^n(E) = [(E^a)^{\otimes n} \xrightarrow{d^a\otimes \mathrm{id}} E^{a+1} \otimes (E^a)^{\otimes(n-1)}][-na]$.

(2) When a is odd, $\mathrm{Sym}^n(E) = [E^a \otimes (E^{a+1})^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{d^a\otimes \mathrm{id}} (E^{a+1})^{\otimes n}][-n(a+1)+1]$.

证明。由于 Λ 处于特征 0 下， Σ_n-余不变量与Σ_n-不变量典范同构。我们将计算 d次项的 Σ_n-不变量

$$\bigoplus_{i_1+i_2+\cdots+i_n=d} E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n}$$

对每个 d， $E^{\otimes n}$ 。设 $a = (a_{i_\bullet})$ 是第 d 项中的一个 Σ_n-不变量。根据假设， $E^{i_1} \otimes E^{i_2} \otimes \cdots \otimes E^{i_n}$ 对每个 $i_\bullet$都是秩一的。若存在两个不同的指标 $1 \leq k < \ell \leq n$，使得 i_k 和 i_ℓ 都是奇数，则由于 Λ 的特征为 0 且 $i_k = i_\ell$，利用 k 与 ℓ 之间的换位 $\sigma_{(k,l)}$的 $\sigma_{(k,l)}a = a$ ，可得 $a_{i_\bullet} = 0$ 。

当 a 为偶数（分别为奇数）时，上述论证表明，对称幂$^n(E)$ 集中在两个次数 $[na, na+1]$（分别为 $[n(a+1)-1,\ n(a+1)]$）。每个次数对应的项都可以像陈述中那样显式计算。□

附录 B. Weil-Deligne 群上同调的计算

本节中，我们说明 Weil-Deligne 群上同调的一种计算方法。回顾

$$\mathrm{WD}_F = \mathbb{G}_a \rtimes \underline{W_F}, \quad \mathrm{ID}_F = \mathbb{G}_a \times \underline{I_F} \subset \mathrm{WD}_F.$$

这里，$\sigma \in W_F$ 在 $\mathbb{G}_a$ 上的共轭作用是乘以 $|\sigma|$。对于一个导出Λ-概形 S，我们记

$$\mathrm{WD}_{F,S} = \mathrm{WD}_F \times S, \qquad \mathrm{ID}_{F,S} = \mathrm{ID}_F \times S, \qquad I_{F,S} = \underline{I_F} \times S$$

对于$\mathbb{G}_{a,\ S}$ 和 $\mathbb{Z}_S$，也类似地定义。这些群概形在底概形上都是平坦的，但需要注意，WD_F 既非仿射、有限型，也非拟紧。

对于底概形 Λ 上的平坦群概形 G 以及导出 Λ-概形 S，我们定义

$$[S/G] = [*/G] \times S,$$

对于 $\mathcal{M}$ ∈拟凝聚层$([S/G])$，令

$$R\Gamma(G, \mathcal{M}) = R\Gamma([S/G], \mathcal{M}) \in \mathrm{QCoh}(S)$$

为 $\mathcal{M}$ 沿 $[S/G] \to S$的导出推前。

由于 G 是平坦的，$S \to [S/G]$ 是一个平坦覆盖。于是，拟凝聚层$([S/G])$自然带有一个 t-结构，使得沿 $S \to [S/G]$ 的拉回是 t-正合的。令

$$\mathrm{QCoh}([S/G])^+ \subset \mathrm{QCoh}([S/G])$$

为由有界下方对象构成的子范畴。

我们从群概形扩张的一般形式体系开始。

引理 B.1。 考虑在 Λ上的平坦群概形的半直积

$$G = N \rtimes Q$$

with N 拟紧且拟分离。设 S 是一个导出 Λ-概形，并且 ***le*** t

$$\pi_S \colon [S/G] \longrightarrow [S/Q].$$

对于每个 $\mathcal{M}$ ∈拟凝聚层$([S/G])^+$，都有一个同构

$$R\pi_{S*}\mathcal{M}|_S \cong R\Gamma(N, \mathcal{M})$$

因此我们有一个同构

$$R\Gamma(G, \mathcal{M}) \cong R\Gamma(Q, R\Gamma(N, \mathcal{M})).$$

证明。 由于我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} [S/N] & \longrightarrow & [S/G] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & [S/Q], \end{array}$$

只需证明沿此图表对有下界拟凝聚层成立的基变换。这里的关键性质是，水平箭头是平坦的，并且 $[S/G]$ 存在一个拟紧且拟分离的平坦覆盖

$$[S/Q] \to [S/G]$$

即 $[S/G] \to [S/Q]$的一个截面。然后， [GR17，命题 2.3.2]中的相同证明适用于所需的基变换。□

现在我们专门讨论 $\mathbf{ID}_F = \mathbb{G}_a \times I_F$和 $\mathbf{WD}_F = \mathbf{ID}_F \rtimes \mathbb{Z}$的情形。于是，我们得到

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M}) \cong R\Gamma(\mathbb{Z}, R\Gamma(\mathbb{G}_a, R\Gamma(I_F, \mathcal{M}))) \quad (\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/G_S])^+). \tag{B.1}$$

我们先处理惯性群的上同调。

命题 B.2。 设 S 是一个导出 Λ-概形，并设 $\mathcal{M} \in$ 拟凝聚层$([S/I_F])$。

(1) 函子 $\mathcal{M} \mapsto R\Gamma(I_F, \mathcal{M})$ 是 t-正合的，并且我们有

$$\mathbb{H}^i R\Gamma(I_F, \mathcal{M}) \cong \mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)^{I_F}$$

对每个 i，在拟凝聚层$(S)^\heartsuit$ 中。

(2) 对每个开子群 $K \subset I_F$，令

$$\mathcal{M}_S^K = R\Gamma(K, \mathcal{M}) \in \mathrm{QCoh}(S).$$

于是， $\mathcal{M}_S \cong \mathrm{colim}_K \mathcal{M}_S^K$，且每个 $\mathcal{M}_S^K$都是 $\mathcal{M}_S$的直和项。

证明。 由于 QCoh(S) 和 QCoh$([S/I_F])$ 是左 t-完备的，且 $R\Gamma(K, -)$ 与极限可交换，因此所有断言都可以在取 Postnikov 极限后验证。特别地，我们可以假设 $\mathcal{M} \in$ QCoh$([S/I_F])^+$。

由于沿 $[S/I_F] \to S$的拉回是 t-正合的，函子 $\mathcal{M} \mapsto R\Gamma(I_F, \mathcal{M})$ 是左t-正合的。因此，对于 (1)，只需证明

$$R\Gamma(I_F, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}_S^{I_F} \quad (\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/I_F])^\heartsuit).$$

我们可以假设 $S =$Spec(R) 是仿射的，并且 $M = \mathcal{M}_S$ 是一个静态 $\pi_0(R)$-模。由于$\Gamma(I_F, \mathcal{O}) = C^\infty(I_F, \Lambda)$， M上的 I_F-作用由余乘法 $M \to M \otimes C^\infty(I_F, \Lambda)$ 给出；沿 $S \to [S/I_F]$取 Čech 神经后，我们得到

$$R\Gamma(I_F, \mathcal{M}) = [M \to M \otimes C^\infty(I_F, \Lambda) \to M \otimes C^\infty(I_F, \Lambda) \otimes C^\infty(I_F, \Lambda) \to \cdots].$$

特别地， I_F在 M 上的作用是光滑的，并且我们有

$$R\Gamma(I_F, M) \cong \mathrm{colim}_{K \subset I_F} R\Gamma(I_F/K, M^K)$$

因为 $C^\infty(I_F, \Lambda) =$colim$_K C^\infty(I_F/K, \Lambda)$，其中 K遍历I_F的正规开子群。由于 Λ的特征为 0， $R\Gamma(I_F/K, M^K) \cong M^{I_F}$。因此，我们得到 (1)。

对于 (2)，我们已经看到， I_F在 $\mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)$上的作用是光滑的，并且 $\mathbb{H}^i R\Gamma(K, \mathcal{M}) \cong \mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)^K$。对于每个开子群 $K \subset I_F$，令

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}|_{[S/K]},$$

对于正规开子群 $K' \subset K$，令

$$q_{K' \subset K} \colon [S/K'] \to [S/K]$$

是一个有限 étale 覆盖。单位 $\mathcal{M}_K \to q_{K' \subset K *} \mathcal{M}_{K'}$ 诱导

$$\mathcal{M}_S^K = R\Gamma(K, \mathcal{M}_K) \to R\Gamma(K, q_{K' \subset K *} \mathcal{M}_{K'}) \cong \mathcal{M}_S^{K'}.$$

它在第 i 阶上同调上诱导 $\mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)^K \subset \mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)^{K'}$。因此，

$$\mathrm{colim}_K \mathcal{M}_S^K \to \mathcal{M}_S$$

由 I_F 在 $\mathbb{H}^i(\mathcal{M}_S)$ 上作用的光滑性可知，这是一个拟同构。对于 (2) 的第二个断言，只需证明 $\mathcal{M}_S^K \to \mathcal{M}_S^{K'}$ 有典范的分裂。由于 Λ 的特征为 0，且 $q_{K'\subset K}$ 是有限 étale 的，平均迹给出了单位的一个截面 $q_{K'\subset K *}\mathcal{M}_{K'} \to \mathcal{M}_K$。取 $R\Gamma(K, -)$，即可得到所述结论。□

接下来，我们讨论特征 0 时众所周知的 $\mathbb{G}_a$-上同调描述。

命题 B.3。设 S 是一个导出 Λ-概形，并设 $\mathcal{M} \in$拟凝聚层$([S/\mathbb{G}_a])$。令

$$\nabla\colon \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_S \otimes \Lambda[T]$$

为余 $\mathcal{M}$ 的乘法，并令 $N \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_S)$ 为满足下式的自同态

$$\nabla \equiv 1 + NT \pmod{T^2}.$$

于是存在一个自然拟同构

$$R\Gamma(\mathbb{G}_a, \mathcal{M}) \cong \big[\mathcal{M}_S \xrightarrow{N} \mathcal{M}_S\big].$$

特别地，函子 $\mathcal{M} \mapsto R\Gamma(\mathbb{G}_a, \mathcal{M})$ 的上同调维数为1。

证明。由于 $\mathrm{QCoh}(S)$ 和 $\mathrm{QCoh}([S/\mathbb{G}_a])$ 是左 t-完备的，且 $R\Gamma(\mathbb{G}_a, -)$ 与极限交换，所有断言都可以在取 Postnikov 极限后验证。特别地，我们可以假设 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathbb{G}_a])^+$。

沿 $S \to [S/\mathbb{G}_a]$ 取 Čech 神经，可得

$$R\Gamma(\mathbb{G}_a, \mathcal{M}) \cong \mathrm{Tot}\big(\mathcal{M}_S \rightrightarrows \mathcal{M}_S \otimes \Lambda[T] \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}\; \cdots\big) \tag{B.2}$$

朴素截断以及到 T 坐标的投影给出了一个映射

$$R\Gamma(\mathbb{G}_a, \mathcal{M}) \to \big[\mathcal{M}_S \xrightarrow{N} \mathcal{M}_S\big].$$

我们希望证明它是一个拟同构。由于沿 t 的拉回是 $[S/\mathbb{G}_a] \to S$-正合的，因此这两个函子都是左 t-正合的。因此，我们可以假设 $S = \mathrm{Spec}(R)$ 是仿射的，且 $M = \mathcal{M}_S$ 是一个静态 $\pi_0(R)$-模。由于我们在特征 0 下工作，$N \in \mathrm{End}(M)$是局部幂零的，且具有 $\nabla = \exp(NT)$；而 (B.2) 的计算是众所周知的（例如 [Hoc61，定理 5.1]）。□

推论 B.4. 设 S 是一个导出 Λ-概形，并设 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathrm{ID}_F])$。那么，我们有

$$R\Gamma(\mathrm{ID}_F, \mathcal{M}) \cong \big[\mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{N} \mathcal{M}_S^{I_F}\big],$$

其中，N 是由 $\mathbb{G}_a$-作用诱导的局部幂零自同态。

最后，我们讨论 $\mathbb{Z}$ 的群上同调。下文中，为统一记号，将 $\mathbb{Z} \subset W_F$ 的一个生成元记为 Fr。

命题 B.5. 设 S 是一个导出 Λ-概形，并设 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathbb{Z}])$。令$\mathrm{Fr} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_S)$ 表示$\mathrm{Fr} \in \mathbb{Z}$ 的作用。那么，存在一个自然拟同构

$$R\Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \cong \big[\mathcal{M}_S \xrightarrow{\mathrm{Fr}-1} \mathcal{M}_S\big].$$

特别地，函子 $\mathcal{M} \mapsto R\Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{M})$ 的上同调维数为1 .

证明。 由于 QCoh(S) 和 QCoh($[S/\mathbb{Z}]$) 都是左 t-完备的，且 $R\Gamma(\mathbb{Z}, -)$ 与极限交换，因此所有断言都可以在取 Postnikov 极限后验证。特别地，我们可以假设 $\mathcal{M} \in$QCoh($[S/\mathbb{Z}]$)$^+$。

沿着 $S \to [S/\mathbb{Z}]$ 取 Čech 神经后，我们得到

$$R\Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \cong \mathrm{Tot}\big(\mathcal{M}_S \rightrightarrows \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathcal{M}_S) \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}\; \cdots\big) \tag{B.3}$$

现在，$\mathrm{Fr} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_S)$ 赋予 $\mathcal{M}_S$ 以 $\Lambda[\mathbb{Z}]$-模结构。于是，(B.3) 蕴含

$$R\Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \cong R\mathrm{Hom}_{\Lambda[\mathbb{Z}]}\big(\mathrm{Tot}(\cdots \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}\; \Lambda[\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}] \rightrightarrows \Lambda[\mathbb{Z}]), \mathcal{M}_S\big) \cong R\mathrm{Hom}_{\Lambda[\mathbb{Z}]}(\Lambda, \mathcal{M}_S).$$

由分解 $\Lambda \cong [\Lambda[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\mathrm{Fr}^{-1}} \Lambda[\mathbb{Z}]][1]$ 作为 $\Lambda[\mathbb{Z}]$-模，我们得到

$$R\Gamma(\mathbb{Z}, \mathcal{M}) \cong R\mathrm{Hom}_{\Lambda[\mathbb{Z}]}(\Lambda, \mathcal{M}_S) \cong [\mathcal{M}_S \xrightarrow{\mathrm{Fr}-1} \mathcal{M}_S].$$

□

现在，我们可以汇总前面的引理来计算 WD_F 的上同调。令$\mathcal{M} \in$ 拟凝聚层($[S/\mathrm{WD}_F]$) 并令 $\mathcal{M}_S$ 表示 S 上的底层拟凝聚层。那么，$\mathcal{M}_S$ 带有一个光滑的 W_F-作用，以及一个 $\mathbb{G}_a$-作用，后者由一个局部幂零自同态给出（见命题 B.3）

$$N \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_S).$$

命题 B.6. 令 S 为一个导出 Λ-概形，并令 $\mathcal{M} \in$ 拟凝聚层($[S/\mathrm{WD}_F]$)。那么，存在一个自然拟同构

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M}) \cong \Big[\mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{(\mathrm{Fr}-1,\, N)} \mathcal{M}_S^{I_F} \oplus \mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{(N,\, 1-q\mathrm{Fr})} \mathcal{M}_S^{I_F}\Big],$$

其中

- Fr 是 W_F 中的一个 *Frobenius* 元，通过 $\mathcal{M}_S$ 上的 W_F-作用作用于 $\mathcal{M}_S^{I_F}$，并且
- q 是 F 的剩余域的基数。

特别地，$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, -)$ 的上同调维数为 2，与小余极限可交换，并且沿着 S满足基变换和投影公式。

证明。 由于 $\mathrm{QCoh}(S)$ 和 $\mathrm{QCoh}([S/\mathrm{WD}_F])$ 是左 t-完备的，且 $R\Gamma(\mathrm{WD}_F, -)$ 与极限可交换，因此第一个断言可在取 Postnikov 极限后验证。特别地，我们可以假设 $\mathcal{M} \in \mathrm{QCoh}([S/\mathrm{WD}_F])^+$。由 (B.1) 和推论 B.4，

$$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, \mathcal{M}) \cong R\Gamma(\mathbb{Z}, [\mathcal{M}_S^{I_F} \xrightarrow{N} \mathcal{M}_S^{I_F}]).$$

Fr 的作用由下式给出

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_S^{I_F} & \xrightarrow{N} & \mathcal{M}_S^{I_F} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Fr}} & & \downarrow{\scriptstyle q\mathrm{Fr}} \\ \mathcal{M}_S^{I_F} & \xrightarrow{N} & \mathcal{M}_S^{I_F}. \end{array}$$

因此，所需的描述由命题 B.5得出。随后，上同调维数界也由此描述得到。

根据命题 $\mathbb{H}^i R\Gamma(I_F, -)$ B.2 (1) 中的描述，函子 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_S^{I_F}$是正合的，并且与滤过余极限可交换，因此它与小余极限可交换。因此，$R\Gamma(\mathrm{WD}_F, -)$也与小余极限可交换。

对于每个 $\mathcal{E}\in$拟凝聚层(S)，我们都有一个自然映射

$$\mathcal{M}_S^{I_F}\otimes\mathcal{E}\to(\mathcal{M}_S\otimes\mathcal{E})^{I_F}.$$

为了证明它是同构，我们可以假设 S 是仿射的，因此拟凝聚层(S) $=$Ind(Perf(S))。两边关于 $\mathcal{E}$ 都与小余极限相容，因此我们可以假设 $\mathcal{E}\in$Perf(S)。于是， $\mathcal{E}$ 是可对偶的，所以我们有 $(\mathcal{M}_S\otimes\mathcal{E})^{I_F}\cong\mathcal{M}_S^{I_F}\otimes\mathcal{E}$。这就推出函子 $\mathcal{M}\mapsto\mathcal{M}_S^{I_F}$ 的基变换和投影公式，因此对于$R\Gamma$(WD$_F$, $-$)也同样成立。□

附录 C. 代数曲线上的经典次数归一化

设 Σ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一条亏格为 g 的光滑射影曲线，并固定一个同构 $\mathbb{Q}_\ell\cong\mathbb{C}$。本节回顾岩泽-泰特周期及其在 [BZSV]的几何情形中的归一化。

首先，让我们在当前语境下重新表述泰特论著。取整体域 $F=K(\Sigma)$ 上的 $G=\mathbb{G}_m$，并令 χ: $\mathbb{A}_F^\times/F^\times\to\mathbb{C}^\times$ 为一个 idele 类特征。考虑岩泽–泰特对偶对

$$\big(X=\mathbb{A}^1\circlearrowleft\mathbb{G}_m=G,\ \ \widehat{X}=\mathbb{A}^1\circlearrowleft\mathbb{G}_m=\widehat{G}\big)$$

配备标准的缩放作用。在 $\mathcal{A}$ 一侧， χ 的未归一化 X-周期是经典的岩泽–泰特 ζ 积分

$$P_X(\chi):=\langle P_X,\chi\rangle_{[\mathbb{G}_m]}\ =\ \int_{\mathbb{A}_F^\times}\Phi(x)\,\chi(x)\,d^\times x, \tag{C.1}$$

对于适当的施瓦茨–布吕阿函数 Φ 在 $\mathbb{A}_F$ 上（例如，积分 adel $\mathbb{O}_{\mathbb{A}_F}$的特征函数），如泰特论著 [Tat67]中所述。

归一化周期层 P_X^{norm}对应于 [BZSV] （以及本文）在解析上对应于在积分中插入半范数特征。更确切地说，选定一个平方根 $\sqrt{q}$ 以及由此得到的半范数特征 $|\cdot|^{1/2}$后，归一化的 X-周期为

$$P_X^{\mathrm{norm}}(\chi)\ =\ c_0\int_{\mathbb{A}_F^\times}|x|^{1/2}\,\Phi(x)\,\chi(x)\,d^\times x,$$

其中 c_0 是一个非零常数，仅取决于整体归一化（即 β_X-扭 twist in[BZSV，式 (10.9)]）。这个额外因子 $|x|^{1/2}$ 恰好反映了半体积因子。

周期层配备了 Frobenius 作用，并通过函数—层对应，P_X 被视为 Bun$_G(\mathbb{F}_q)$ 上的周期函数：

$$P_X\colon\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)\to\mathbb{C},\quad L\mapsto q^{h^0(\Sigma,L\otimes K^{1/2})},$$

其中， h^i 是 i阶上同调的维数，而 $K^{1/2}$ 是 Σ的典范丛的平方根。于是，归一化周期函数为

$$P_X^{\mathrm{norm}}\colon\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)\to\mathbb{C},\quad L\mapsto q^{h^0(\Sigma,L\otimes K^{1/2})-\frac{1}{2}\deg(L\otimes K^{1/2})}$$

（参见 [BZSV，10.6。2]）。黎曼–罗赫定理推出

$$h^0(\Sigma,L\otimes K^{1/2})-h^0(\Sigma,L^{-1}\otimes K^{1/2})=\deg L.$$

因此，这表明 $P_X^{\mathrm{norm}}(L)=P_X^{\mathrm{norm}}(L^{-1})$；在将各项与特殊的 L-值对应起来后，便得到经典函数方程。

例 C.1。 当 $\Sigma = \mathbb{P}^1$ 时，一切都可以写得极为明确。任意线丛L 都可以写成 $L \cong \mathcal{O}(d)$，其中某个 $d \in \mathbb{Z}$。由于 $K^{1/2} \cong \mathcal{O}(-1)$，我们有

$$P_X : \mathcal{O}(d) \mapsto q^{\max(0,d)}, \quad P_X^{\mathrm{norm}} : \mathcal{O}(d) \mapsto q^{\frac{|d|+1}{2}}.$$

使用 $\Sigma = \mathbb{P}^1$ 并不会造成太大损失，因为它能捕捉这些周期函数的一般行为。一般而言，黎曼–罗赫定理和塞尔对偶给出

$$h^0(\Sigma, L) - h^1(\Sigma, L) = \deg L - g + 1,$$
$$h^0(\Sigma, L) = 0 \quad (\deg L < 0), \quad h^1(\Sigma, L) = 0 \quad (\deg L \geq 2g - 1).$$

因此，一般而言（在区域 $1 - g \leq \deg L \leq g - 1$之外），我们有

$$P_X^{\mathrm{norm}} \sim q^{\frac{|\deg L|+1-g}{2}},$$

这就是 [BZSV，例 14.8 中讨论的渐近行为。3]。

参考文献

[AB21] Johannes Anschütz 和 Arthur-César Le Bras。《Fargues 纲领》中用于GL_n的平均函子。2021年。arXiv：2104.04701 [math.NT]。[ABM24] Johannes Anschütz、Arthur-César Le Bras 和 Lucas Mann。Fargues-Fontaine曲线上固拟凝聚层的六函子形式体系。2024年。arXiv：2412.20968 [math.AG]。[AG15] Dima Arinkin 和 Dennis Gaitsgory。“相干层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想”。载于：《Selecta Math.》（新系列）21.1（2015），第1–199页。ISSN：1022-1824,1420-9020。[ALB25] Johannes Anschütz 和 Arthur-César Le Bras。“Banach-Colmez 空间的傅里叶变换”。载于：欧洲数学会杂志（JEMS）27.9（2025），第3651–3712页。ISSN：1435-9855,1435-9863。[BLR90] Siegfried Bosch、Werner Lütkebohmert 和 Michel Raynaud。Néron 模型。第21卷。《数学及其交叉领域成果》（第3辑） [《数学及相关领域成果》（第3辑）]。施普林格出版社，柏林，1990年，第x+325页。ISBN：3-540-50587-3。[BP18] Raphaël Beuzart-Plessis。“关于伽罗瓦对的 distinguished 平方可积表示及 Prasad 猜想”。载于：《数学发明》214.1（2018），第437–521页。ISSN：0020-9910,1432-1297。[BP23] Federico Binda 和 Mauro Porta。通过导出几何研究 Brauer 群的 GAGA 问题。2023年。arXiv：2107.03914 [math.AG]。[BP25] Raphaël Beuzart-Plessis。《相对朗兰兹纲领导论》。2025年。arXiv：2509.18062 [math.NT]。[BS21] Daniel Bergh 和 Olaf M. Schnürer。“gerbe 的导出范畴与 Brauer-Severi 簇族的分解”。载于：Documenta Mathematica 26（2021），第1465–1500页。ISSN：1431-0635,1431-0643。[BZFN10] David Ben-Zvi、John Francis 和 David Nadler。“导出代数几何中的积分变换与 Drinfeld 中心”。载于：美国数学会杂志 23.4（2010），第909–966页。ISSN：0894-0347,1088-6834。[BZSV] David Ben-Zvi、Yiannis Sakellaridis 和 Akshay Venkatesh。《相对朗兰兹对偶》。2024年。arXiv：2409.04677 [math.RT]。[DAG] Jacob Lurie。《导出代数几何》。网址：https : / / people . math . harvard . edu/~lurie/papers/DAG.pdf。[DAG XIV] Jacob Lurie。《导出代数几何 XIV：可表示性定理》。网址：https:// www.math.ias.edu/~lurie/papers/DAG-XIV.pdf。[DG13] Vladimir Drinfeld 和 Dennis Gaitsgory。“代数栈的若干有限性问题”。载于：几何与泛函分析 23.1（2013），第149–294页。ISSN：1016-443X,1420-8970。[DHKM20] Jean-François Dat、David Helm、Robert Kurinczuk 和 Gilbert Moss。《朗兰兹参数模空间》。2020年。arXiv：2009.06708 [math.NT]。

[FS24] Laurent Fargues 和 Peter Scholze。局部 Langlands 对应的几何化。2024年。arXiv：2102.13459 [math.RT]。[FW25] Tony Feng 和 Jonathan Wang。“周期的几何朗兰兹对偶”。载于：几何与泛函分析 35.2（2025），第463–541页。ISSN：1016-443X,1420-8970。[FYZ23] Tony Feng、Zhiwei Yun 和 Wei Zhang。高阶 theta 级数的模性 I：一般纤维的上同调。2023年。arXiv：2308.10979 [math.NT]。[Gai13] Dennis Gaitsgory。“归纳相干层”。载于：莫斯科数学杂志 13.3（2013），第399–528、553页。ISSN：1609-3321,1609-4514。[GL:Stacks] Dennis Gaitsgory。《几何朗兰兹笔记：层叠》。网址：https : / / people .mpim - bonn.mpg.de/gaitsgde/GL/Stackstext.pdf。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究》。第I卷：对应与对偶。第221卷。《数学调查与专著》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年，第xl+533页。ISBN：978-1-4704-3569-1。[Hai22] Peter J. Haine。从非阿贝尔基变换到带系数的基变换。2022年。arXiv：2108.03545 [math.CT]。[Ham22] Linus Hamann。Artin v-叠的雅可比判别准则。2022年。arXiv：2209.07495 [math.AG]。[Han24] David Hansen。关于范畴局部朗兰兹猜想的北京讲义。2024年。网址：http: // www.davidrenshawhansen.net/Beijing.pdf。[HHS24] Linus Hamann、David Hansen 和 Peter Scholze。几何艾森斯坦级数 I：有限性定理。2024年。arXiv：2409.07363 [math.NT]。[HI24] Linus Hamann 和 Naoki Imai。抛物丛模空间上的对偶化复形。2024年。arXiv：2401.06342 [math.NT]。[HL25] Linus Hamann 和 Si Ying Lee。若干志村簇上的挠消失。2025年。arXiv：2309.08705v4 [math.NT]。[HM24] Claudius Heyer 和 Lucas Mann。六函子形式体系与光滑表示。2024年。arXiv：2410.13038 [math.CT]。[Hoc61] Gerhard Hochschild。“代数线性群的上同调”。载于：《伊利诺伊数学杂志》5（1961），第492–519页。ISSN：0019-2082。[Kos24] Teruhisa Koshikawa。“A-参数与特征层”。载于：《算术几何》。Oberwolfach 报告 21（2024），第1885–1887页。[KS17] Friedrich Knop 和 Barbara Schalke。“球簇的对偶群”。载于：《莫斯科数学会会刊》78（2017），第187–216页。ISSN：0077-1554,1547-738X。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》。第170卷。《数学年刊研究丛书》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年，第xviii+925页。ISBN：978-0-691-14049-0；0-691-14049-9。[Lur18] Jacob Lurie。《谱代数几何》。未发表手稿，编写中。可见：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。2018年。[Man22] Lucas Mann。刚性解析几何中的 p-进六函子形式体系。2022年。arXiv：2206.02022 [math.AG]。[MO25] Alexander Bertoloni Meli 和 Masao Oi。局部朗兰兹对应的 B(G) 参数化。2025年。arXiv：2211.13864 [math.NT]。[Pra15] Dipendra Prasad。一种“相对”局部朗兰兹对应。2015年。arXiv：1512 . 04347[math.NT]。[PY02] Gopal Prasad 和 Jiu-Kang Yu。“约化群及其建筑上的有限群作用”。载于：《数学发明》147.3（2002），第545–560页。ISSN：0020-9910,1432-1297。[Sch17] Peter Scholze。《菱形空间的étale 上同调》。2017年。arXiv：1709.07343。[Sch24] Peter Scholze。《Berkovich 动机》。2024年。arXiv：2412.03382 [math.AG]。[Sch25] Peter Scholze。动机意义下的局部 Langlands 对应的几何化。2025年。arXiv：2501.07944 [math.AG]。[Sum75] Hideyasu Sumihiro。“等变紧化 II”。载于：《京都大学数学杂志》15.3（1975），第573–605页。ISSN：0023-608X。[SV17] Yiannis Sakellaridis 和 Akshay Venkatesh。“球簇上的周期与调和分析”。载于：《Astérisque》396（2017），第viii+360页。ISSN：0303-1179,2492-5926。[SW20] Peter Scholze 和 Jared Weinstein。《关于 p-进几何的伯克利讲义》。第207卷。《数学年刊研究丛书》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2020年，第x+250页。

[Tak24] Yuta Takaya. 第二伴随性与范畴层面的尖点支撑。2024年。arXiv: 2408.04582 [math.RT].[Tat 67] John T. Tate. “数域中的傅里叶分析与海克的 ζ 函数”。载于：代数数论。J. W. S. Cassels 和 A. Fröhlich 编。华盛顿哥伦比亚特区：ThompsonBook Co.，1967年，第305–347页。[Vie24] Eva Viehmann. “关于 B^+ dR-格拉斯曼尼亚中的牛顿分层”。载于：Duke Math. J. 173.1（2024年），第177–225页。ISSN：0012-7094,1547-7398。[Zhu21] Xinwen Zhu. 朗兹参数栈上的相干层。2021年。arXiv: 2008.02998 [math.AG].[Zou24] Konrad Zou. 环面的 Fargues 猜想的范畴形式。2024年。arXiv: 2202.13238[math.RT]。

东京大学数学科学研究生院，日本东京目黑区驹场3-8-1，邮编153-8914电子邮箱：takaya@ms.u-tokyo.ac.jp

美国马里兰州巴尔的摩，约翰斯·霍普金斯大学数学系电子邮箱：clin130@jh.edu