arXiv:2601.02266v1 [math.CV] 5 Jan 2026

关于瓦达湖

PEKKA PANKKA 和 JANG-MEI WU

Abstract. 存在位于 $\mathbb{S}^n$、$n \geq 3$ 中的瓦达湖，它们与一个欧几里得球拟共形等价，并且是约翰域。

Contents

1. 引言 1 2. 黎曼流形上的立方结构 5 3. 邻接图 11 4. 分离复形 17 5. 凹陷 23 6. 通过蓄水池和运河进行导流 31 7. 分离复形的演化 45 8. 瓦达湖 64 参考文献 67

1. Introduction

经典地说，瓦达湖是 $\mathbb{S}^2$ 中三个或更多个具有公共边界的开集。该公共边界必然是一个连续统，称为瓦达连续统。这一定义立即推广到高维球面，并进一步推广到连通流形（可能带边界）：连通流形 X 上的连续统 M 称为瓦达连续统，如果 $M \setminus X$ 至少有三个连通分支，并且 X 中的每一点都是 $M \setminus X$中所有连通分支的公共边界点。在这种情况下，$M \setminus X$ 的连通分支称为 瓦达湖。

在 $\mathbb{S}^2$中，瓦达湖由 Yoneyama 于 [24] 1917年构造，他将这一想法归功于 Takeo Wada。此前 Brouwer 也曾在 [3] 1910年提到过它们。1951年，Luba´nski [12]证明了瓦达湖在 $\mathbb{S}^n$ 中对 $n \geq 3$的存在性。

根据黎曼映射定理，$\mathbb{S}^2$ 中的瓦达湖与单位圆盘共形等价，但其内部几何并不与单位圆盘相同。例如，瓦达湖绝不是约翰域（命题 8.3）。当我们从二维转向更高维时，情况便有所不同。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 30C65；次要分类 30L10。部分研究经费由芬兰研究委员会（RCF）的项目 #256228、#297258 和 #332671、RCF 卓越中心 FiRST，以及西蒙斯基金会的资助 #353435 提供。

本文针对 $n \geq 3$，在 $\mathbb{S}^n$ 中构造了瓦达连通体，其补区域既与单位球拟共形等价，又是约翰域。

定理 1.1 (瓦达湖)。对于 $n \geq 3$ 和 $m \geq 3$，存在一个 $\mathbb{S}^n$ 中的瓦达连续统，它恰有 m 个互补分支，且每个分支都与欧几里得球 $B^n(0,1)$ 拟共形等价，并且是一个约翰域。

关于球面上瓦达连通体的这一结果，是紧致黎曼流形（带边界）上瓦达连通体存在性结果的直接推论。

下文中，对于带边界的 n-流形 M，我们用 $\operatorname{int} M$ 表示 M 的流形点集合，即那些具有同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的邻域的点的集合；用 ∂M 表示 M 的流形边界，即 M 中的非流形点；请注意，∂M 在其相对拓扑下是一个 $(n-1)$-流形。集合 $\operatorname{int} M$ 和 ∂M 分别称为 M 的流形内部和流形边界。为作区分，我们用 $\partial_{\mathrm{top}} E$ 表示拓扑空间中子集 E 的拓扑边界。

定理 1.2。设 $n \geq 3$、$m \geq 3$ 和 M 是一个紧致连通的黎曼 n-流形，具有 m 个边界分支。那么存在一个常数 $\mathsf{K} = \mathsf{K}(n, M) > 1$ 以及一个和田连续统 $X \subset$ 内部M，使其具有以下性质：

(1) $M \setminus X$ 有 m 个连通分支，每个连通分支都包含 ∂M 的一个连通分支；并且 *(2)* $M \setminus X$ 的每个分支Ω 都是 M 中的一个约翰域，且与乘积$(\Omega \cap \partial M) \times [0,1)$是$\mathsf{K}$-拟共形的。

注 1.3。在有两个边界分支的情形下，定理 *1.2* 的证明给出一个连续统，它是两个补区域的公共边界，并满足性质(1)和(2)；其陈述见定理 *8.1*。我们沿袭惯例，不把具有少于三个互补分支的连续统称为和田连续统。

在紧流形 M （无边界或仅有一个边界分支）上，也存在没有内部点且满足性质(1) 和(2)的连续统 $X \subset \operatorname{int} M$ 。特别地，对于闭且连通的黎曼 n-流形 M，存在一个没有内部点的连续统 X，使得 $M \setminus X$ 是一个与欧氏开单位 n-球拟共形的约翰域。回顾一下，不带边界的紧流形称为闭流形。关于这些连续统的构造，请参见推论 *4.7*。

为了证明定理 1.1，只需在 $\mathbb{S}^n$ 中固定 m 个两两不相交的闭分片线性球 $B_1, \ldots, B_m$，并将定理 1.2 应用于流形 $M = \mathbb{S}^n \setminus \operatorname{int}(B_1 \cup \cdots \cup B_m)$即可。

现在我们回顾这些陈述中的定义。若两个无边界的定向黎曼 n流形（$n \geq 2$）之间的同胚$f\colon\ M \to N$ 满足 f 属于索伯列夫空间$W^{1,\,n}_{\text{局部}}(M; N)$，并且满足以下畸变不等式，则称其为 K-拟共形映射，其中 $\mathsf{K} \geq 1$:

$$\|Df\|^n \leq \mathsf{K} J_f \quad \text{a.e. } M, \tag{1}$$

其中， $\|Df\|$ 是 f 的弱微分 Df 的范数， J_f 是 f的雅可比行列式。若存在包含流形 M和N 的开黎曼流形 M'和 N'，且它们分别是带边界光滑子流形，并且 f 可延拓为拟共形同胚 f'： $M' \to N'$，则称黎曼流形之间的同胚 f： $M \to N$是拟共形的。

注。 黎曼流形之间带边界的拟共形同胚的这一定义源自微分同胚的相应定义。请注意，带边界的紧黎曼流形之间的微分同胚是拟共形同胚。还请注意，若两个带边界的紧黎曼流形之间的同胚相对于某些黎曼度量是拟共形的，那么相对于所有黎曼度量也都是拟共形的。这里给出的带边界流形情形下的定义，等价于要求：对于带边界流形之间的同胚 $M \to N$，其限制$\mathrm{int}M \to \mathrm{int}N$ 是拟共形的。这可由拟共形同胚的经典边界延拓以及 *Tukia* 和 $V\ddot{}ais\ddot{}al\ddot{}a$ [20, 21] 的定理推出。还有其他等价定义，尤其是度量定义，以及利用曲线族模给出的几何定义；关于拟共形理论，可参阅 *Ahlfors* [1] 和 $V\ddot{}ais\ddot{}al\ddot{}a$ [22] 的专著。

约翰域的概念由 F. John 提出 [11], ，而“约翰域”这一术语由 Martio 和 Sarvas 在 [14]中创造。约翰域常见于弹性力学和几何分析的研究中。若任意两点$a, b \in D$ 都可以用一条可求长曲线 $\gamma \subset D$ 连接，且该曲线满足长度—距离估计，则区域 D 在 $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ 中的真子区域是一个 C-*John domain for* $C \geq 1$

$$\min\{s(\gamma(a,x)), s(\gamma(b,x))\} \leq C \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus D) \quad \text{for all } x \in \gamma, \tag{2}$$

其中， $\gamma(a,x)$（分别为 $\gamma(b,x)$）是 γ在 a与 x之间（分别在b与 x之间）的部分，而 $s(\cdot)$是长度。

黎曼流形 M（可能带有边界）中的开连通真子集 D ，若其相对于 dist $(x, M \setminus D)$ 的可求长曲线满足长度—距离估计 (2)，则称为 C-*John domain in* M 。

粗略地说，约翰域 D 中的任意两点都可以由 D 中的一个扭曲双锥连接，该双锥的顶点恰好是这两点。若f： $B^n(0,r) \to M$ 是从欧几里得球 $B^n(0,r)$到黎曼流形的拟共形嵌入，那么其像 $f(B^n(0,r/2))$仍在一定程度上保持圆整，其直径大致等于到像之补集的距离。尽管欧几里得球的许多拟共形像都是约翰域，但这两类并不相同。例如，对于 $n \geq 3$，在 $\mathbb{R}^n$ 中含有向内尖刺的区域不能通过拟共形映射映到一个球，但它可以是约翰域。另一方面，含有向外尖刺的区域不是约翰域，但可以通过拟共形映射映到一个球。相关解释参见 [7] 和 [8] 。

除了高维 Wada 湖的内在几何之外，我们对 Wada 连通体的兴趣还源于它们在构造

拟正则映射和复动力系统中的作用。回顾一下，定向黎曼流形之间的连续映射 $f\colon M \to N$ 若满足以下条件，则称为拟正则： f属于索伯列夫空间 $W^{1,\,n}_{\mathrm{loc}}(M;\,N)$，并且对于某个 $K \geq 1$ 满足畸变不等式 (1)。

Rickman [17] 在其构造中使用了二维复形（称为映射复形），构造了一个拟正则映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$，该映射省略了 $\mathbb{S}^3$中的一个给定有限集。后来，Heinonen 和 Rickman 使用了类似的二维复形 [9, 10] ——最初在 [9]中称为分离多面体，之后在 [10] 中称为分离复形——例如，用来构造拟正则映射 $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$，其分支集包含 Antoine 项链；还构造了拟正则映射 $B^3 \to B^3$，它们在某些克莱因群的极限集中没有径向极限。这些构造的共同性质是，映射的畸变由一个仅取决于维数以及与构造相关的拓扑数据的量所控制。特别是，在这些构造中，畸变不会对映射的（整体）度施加限制。术语和精确表述参见 [9], [10], 和 [17]。在更高维数下 $n \geq 4$, Drasin 和第一作者在 $\mathbb{R}^n$的标准立方结构下使用分离复形的立方版本 [5]，构造了一个拟正则映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$，该映射省略了 $\mathbb{S}^n$中的一个给定有限集；关于此问题的讨论，见 [5] 引言末尾。

在复动力系统中，Martí–Pete、Rempe 和 Waterman 最近在 [13] 对 Fatou 于 1926年提出的问题给出了肯定答案。该问题探讨是否存在一个和田连续统 $\mathbb{S}^2$，它是超越整函数 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的无穷多个 Fatou 分支的公共边界。在维数 $n \geq 3$ 中，Fatou 问题的一个类似问题是：对于 $n \geq 3$，是否存在一个位于 $\mathbb{S}^n$ 中的和田连续统，它是一致拟正则映射 f 的 Fatou 分支的公共边界？ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 关于 Fatou 问题的历史以及动力系统中和田连续统的实例，请参阅 [13] 。

证明思路。 定理 1.2 中的和田连续统 X 是通过一个迭代细分过程构造出来的，该过程从流形 M 上的一个立方结构 K 开始。

我们首先将黎曼流形 (M, g) 转化为一个具有空间 $|K| = M$ 的立方n-复形 K。该立方复形带有自然的多面体度量 d_K，使得度量空间 $(|K|, d_K)$ 与 (M, d_g) 拟相似，其中 d_g 是由黎曼度量 g 诱导的长度度量；参见命题 2.1。

接下来，我们取一个单调序列 $K_0 = K$, K_1, K_2, ..., 由立方体细分构成，其中 K 中的每个复形 $K_{\ell+1}$ 都是通过按照固定规则细分 K_ℓ 中的立方体得到的。这种细分与度量 d_K 相容，具体而言， K_ℓ 中的立方体相对于度量 d_K的边长为 $3^{-\ell}$。

证明的关键在于构造一列 $Z_0 \subset K_0$、 $Z_1 \subset K_1$、 $Z_2 \subset K_2$, ...位于$|K|$ 内部的（$n-1$）维（分离）子复形，使其具有这样的性质： $|K|\backslash|Z_\ell|$ 的每个连通分支恰好包含 $|K|$ 的一个边界分支，并且与该边界分支的领圈拟共形。瓦达连续统 X 是通过取复形 Z_ℓ的空间 $|Z_\ell| \subset M$ 的豪斯多夫极限得到的。

从直观上看，从 Z_ℓ 到 $Z_{\ell+1}$ 的归纳步骤可以理解为一种受控的交换方式：在 Z_ℓ附近，将 $K_{\ell+1}$ 中的 n维立方体在 $|K| \setminus |Z_\ell|$ 的各连通分支之间转移。这种交换有三个目的：

(1) 在每一步， $|K| \setminus |Z_{\ell+1}|$ 的连通分支与 $|\partial K|$的连通分支保持一一对应；(2) 从 Z_ℓ 中的每个立方体到 $|K| \setminus |Z_\ell|$ 任一连通分支的最大距离，随着 $\ell \to \infty$趋于零；(3) 每个 $|K| \setminus |Z_{\ell+1}|$ 都与 $|\partial K|$ 的一个固定领圈 K-拟共形，其中畸变常数 K 不依赖于 ℓ。

构造中的一个难点源于条件（2），它可视为复形 Z_ℓ的一种瓦达型条件。更准确地说， Z_ℓ 中的每个$(n-1)$-立方体 q 都是恰好两个 n-立方体 K_ℓ 的一个面。因此， q 至多位于 $|K| \setminus |Z_\ell|$中两个连通分支的边界上。然而，根据（2），要求q 接近 $|K| \setminus |Z_\ell|$的所有连通分支。

文章结构。第2节讨论黎曼流形上的立方结构，以及立方复形上的多面体度量。我们还介绍一些与立方复形相关的术语。

第 3 节首先讨论邻接图、邻接图子图作为复形的实现，以及割图。接着，我们定义一类特殊的复形，称为隧道，并证明隧道收缩引理，该引理在证明中会被反复应用。最后，我们介绍良复形的概念，它涵盖了构造中所需的立方复形的所有本质性质。

第 4 节定义分离复形，并陈述关于分离复形演化的定理，该定理将用于指导我们的构造。

第 5 节介绍凹陷的概念，并证明一个关于凹陷的压平定理，该定理用于控制区域的拟共形常数。

分离复形序列 Z_0， Z_1， Z_2.....的迭代构造见第 6 节和第 7 节。第 6 节讨论构造所需的构件——蓄水池-运河系统——以及通道化方法。第 7 节讨论迭代过程。该序列 Z_0， Z_1， Z_2.....的拟共形稳定性在第7.5节中得到证明。最后，定理 1.2 在第 8 节中得到证明。在最后这一节中，我们还证明二维瓦达湖不是约翰域。

2. Cubical structures on Riemannian manifolds

本节讨论黎曼流形上的立方结构。回顾一下，每个黎曼 n-流形（M， g）都存在一个三角剖分 T，其中每个 n-单形（σ， $g|_\sigma$）都与一个仿射欧几里得 n-单形双利普希茨等价。关于这些构造，可参阅 Cairns、 [4], Whitehead [23], 和 Munkres ； 另见 Dyer 、 Vegter 和 Wintraecken [6], Peltonen [16], 或 Saucan [18]关于具有受控几何性质的三角剖分。

在下文中，我们将具有空间 M 的单纯复形 T 称为 M 的三角剖分。我们还将 M 上的单纯度量记作

其中 T 的单形分别与欧几里得空间中的标准单形 $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 相似，即 $k = 0$、……、n。

三角剖分的重心细分会在M 上诱导出一种立方结构 [19]（例如参见 Shtan'ko 和 Shtogrin），并赋予其自然的多面体度量。尽管专家们熟知这种将黎曼流形约化为度量立方复形的方法，我们仍在本节中阐明这一联系。讨论分为三部分：立方复形及相关记号、立方复形上的多面体度量，最后是重心细分中度量的变换——先从立方复形变为单纯复形，再从单纯复形变为立方复形。

下面的命题使我们能够在主定理（定理 1.2）中，将带边界的紧黎曼流形转化为有限立方复形。

命题 2.1。对于每个带边界的紧黎曼流形(M, g)，都存在一个立方复形 K 及其度量 d_K，其中 K 的每个立方体都与欧几里得单位立方体等距；此外，还存在一个拟相似同胚$(M, g) \to (K, d_K)$。

回忆一下，映射 $f\colon X \to Y$ 是 L-双利普希茨的（关于 $L \geq 1$），如果

$$L^{-1}\, d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \text{for all } x, x' \in X.$$

映射 $f\colon X \to Y$ 是 L-拟相似的（关于 $L \geq 1$），如果存在 $\lambda > 0$ 使得

$$L^{-1}\lambda\, d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq L\lambda\, d(x, y) \quad \text{for all } x, x' \in X.$$

这个命题的证明将在第 2 节结束。我们首先介绍多面体度量；例如，Bridson 和 Haefliger [2, 第 I.7]章中有类似的讨论。证明命题 2.1 后，我们将在第 2.1.3 节介绍立方复形细分的术语，并在第 3.3 节介绍良复形的概念。

2.1. 立方复形预备知识。通常，单纯复形是指其元素为带有标准单纯结构的胞腔的复形。

定义 2.2。胞腔的一个集合 K 是一个胞腔复形，如果 $C, C' \in K$，$C \cap C' \in K \cup \{\varnothing\}$。

显然，胞腔复形 K 在其胞腔 $C \in K$ 上的限制 $K|_C = \{C' \subset C\colon C' \in K\}$ 是一个胞腔复形。

对于 $k \in \mathbb{N}$，我们称复形 $\mathsf{C}_k = \{\{0\}, \{1\}, [0, 1]\}^k$ 为上的标准立方结构；我们还令 $\mathsf{C}_0 = \{\{0\}, \{1\}, [0, 1]\}^0 = \{\{0\}\}$ 和 $\mathsf{C}_{-1} = \{\{0\}, \{1\}, [0, 1]\}^{-1} = \varnothing$。

给定一个 k-胞腔 Q 和一个同胚 $\phi\colon Q \to [0, 1]^k$，我们称该复

$$\mathsf{C}_\phi(Q) = \{\phi^{-1} q\colon q \in \mathsf{C}_k\}$$

形为上的标准立方结构(由 诱导)。若无歧义，我们简单地写作 $\mathsf{C}(Q) = \mathsf{C}\phi(Q)$。$\mathsf{C}\phi(Q)$ 中的 $(k-1)$-立方体和 $(k-2)$-立方体分别称为的面和棱。

立方复形是胞腔复形，其胞腔具有立方结构。下文将采用以下稍加限制的定义。

定义 2.3。 胞腔复形 K 是立方 n复形，当且仅当 $n \geq 0$ 如果

(1) 对每个 $Q \in K$，限制映射 $K|_Q = \mathsf{C}(Q)$ 是 Q上的标准立方结构；

(2) 对每一对胞腔 Q、$Q' \in K$，$\mathsf{C}(Q)|_{Q\cap Q'} = \mathsf{C}(Q')|_{Q\cap Q'}$，且复合映射 $(\phi_Q|_{Q\cap Q'}) \circ (\phi_{Q'}|Q \cap Q')^{-1}$: $\phi_{Q'}(Q \cap Q') \to \phi_Q(Q \cap Q')$是等距变换；

(3) K 中的每个胞腔都包含在 K中的一个 n-胞腔内。

k-胞腔称为立方 n-复形 K 中的 k-立方体。胞腔$P \subset K$ 的一个集合称为 K 的立方 k-子复形，如果 P 是一个立方 k-复形。

在此定义中，我们默认假设，对于 K中的每个 n-胞腔 Q，都已固定一个同胚 ϕ_Q: $Q \to [0,1]^n$。

注 2.4. 性质(3) 通常并非复形定义的一部分，而满足(3) 的复形在文献中称为齐性复形或纯复形。对于空间为流形的立方复形，这个更强的条件成立。我们强调，以下讨论中，我们考虑满足这一附加假设的立方复形及其子复形。

性质 (2) 的第二部分通常也不是立方复形定义的一部分。不过，这一条件使得在具有连通空间 $|K|$的立方-复形 K 上可以定义良好的多面体度量 d_K n。在讨论立方复形上的多面体度量构造之前，我们先用两个定义结束这段一般性讨论。

定义 2.5. 给定一个同胚 ϕ: $X \to |K|$，其中 K 是一个立方n-复形，我们称

$$\phi^* K = \{\phi^{-1} Q \colon Q \in K\}$$

为复形的拉回 K，经由 ϕ；显然 $|\phi^* K| = X$。在立方复形 K 和 K' 的空间之间的同胚 ϕ: $|K| \to |K'|$，若满足 $\phi^*(K') = K$，则称为立方同构 。

定义 2.6。 我们称立方 n复形 K 中的 n-子复形 K_1、...、K_ℓ 本质不相交，若对于 $i \neq j$， K_i 和 K_j 没有共同的 n-立方体。若 $K = K_1 \cup \cdots \cup K_\ell$，且 K_1、...、K_ℓ 本质不相交，则称 $\{K_1, \ldots, K_\ell\}$ 是立方 n-复形 K 的本质划分 。

2.1.1. 立方复形的多面体度量。 首先，对于 K中的每个 n-立方体 Q，我们通过公式 $d_Q(x,y) = |\phi_Q(x) - \phi_Q(y)|$ 定义度量 d_Q: $Q \times Q \to [0,\infty)$，其中 x, $y \in Q$。根据定义 2.3 中的 (2)，对于 $x, y \in |Q \cap Q'|$，有 $d_Q(x,y) = d_{Q'}(x,y)$。

如果序列 (x_0、.....、x_m) 中的 x_i 和 x_{i-1} 属于 K 中同一个 n-立方体，我们就称其为 $|K|$ 中的 K-链。由于 $|K|$ 是连通的， $|K|$ 中任意两点 x 和 y 都可以通过一条 K-链相连。因此，我们可以用公式定义 $|K|$ 的多面体度量 d_K： $|K| \times |K| \to [0,\infty)$

$$d_K(x,y) = \inf_{(x_0,\ldots,x_m)} \sum_{i=1}^{m} d_{Q_i}(x_{i-1}, x_i),$$

其中，下确界取遍连接 x 和 y 的 K-链，且每个 Q_i都是包含 x_{i-1} 和 x_i的 n-立方体。

注 2.7. 关于立方 n-复形 K上的多面体度量 d_K ， K 中的每个 n-立方体 Q 都与 $[0,1]^n$ 等距，且 $d_Q(x,y) = d_K(x,y)$ 适用于 $x,y \in |Q|$。

2.1.2. 立方复形的子复形。 设 K 是一个立方 n-复形，且$0 \le k \le n$。记作 $K^{[k]} = \{q \in K\colon \ q \text{ 是一个 } k\text{-立方体}\}$ ，表示 K 中的所有k-立方体的集合；而 $K^{(k)} = \bigcup_{\ell \le k} K^{[\ell]}$ 表示 K的 k-骨架。

定义 2.8。 设 S 是立方 n-复形 K的一个子集。由 S 张成的子复形张成$K(S)$是 K 中包含 S的最小子复形。

我们称立方 n-复形 K 中的一个（$n-1$）-立方体 q 为单侧的，如果 K 中只有一个包含 q的 n-立方体。立方 n-复形的边界 ∂K 是由所有单侧立方体张成的 K 的子复形，也就是说，

$$\partial K = \operatorname{Span}_K\left(\{q \in K^{[n-1]}\colon q \text{ is one-sided}\}\right).$$

子复形 $\Sigma \subset K$ 是 K 的边界分支，当且仅当 $|\Sigma|$ 是$|\partial K|$的一个连通分支。注意，对于一个以带边界流形为其空间 $|K|$的立方复形 K ，空间 $|\partial K|$ 就是 $|K|$的流形边界。

设 P和 N 是 K的子复形。我们称复形

$$P - N = \operatorname{Span}_P(\{q \in P\colon q \notin N\})$$

为 P与 N的差。注意，按照此定义，当 $P \cap N$的维数严格小于 P的维数时，$P - N = P$。

我们的星形定义比通常的定义更严格；在通常的定义中，星形由所有与 q相交的立方体张成。

定义 2.9。 K 中 q 这个 k维立方体的星形 $\mathsf{St}_K(q)$，是由 K 中所有包含 q的立方体张成的最小子复形，也就是说，

$$\mathrm{St}_K(q) = \operatorname{Span}_K(\{Q \in K\colon q \subset Q\}).$$

子集 $S \subset K$的星形 $\mathsf{St}_K(S)$是$\mathsf{St}_K(S) = \bigcup_{q\in S}\mathsf{St}_K(q)$。

子复形的星形导出了局部欧几里得复形的概念。定义如下：令 $\mathsf{C}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准立方结构，其中每个立方体的边长均为 1，且顶点位于整数格点 $\mathbb{Z}^n$。

定义 2.10。 设 K 是一个分段线性 n-复形， $S \subset K$ 是其子复形。

若 K在 S 处局部欧几里得，$(\mathrm{St}_K(S),\ S)$ 同构于$\mathsf{C}(\mathbb{R}^n)$ 中的一对子复形$(\mathrm{St}(P),\ P)$，则称 K在 S 处局部欧几里得。

注 2.11。 设 Q 是一个 n-立方体， q 是一个$(n-1)$-立方体， ξ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个$(n-2)$-立方体，且满足 $n \ge 2$。于是根据定义 *2.9*，$\mathsf{Stc}_{(\mathbb{R}^n)}(Q)$、$\mathsf{Stc}_{(\mathbb{R}^n)}(q)$ 和$\mathsf{Stc}_{(\mathbb{R}^n)}(\xi)$ 分别包含一个、两个和四个 n-立方体。因此，局部欧几里得分段线性 n-复形也具有同样的性质。

2.1.3. 立方复形的细分。 欧几里得 n-立方体 $[0,1]^n$ 的标准立方结构 C^n可自然细分为 3^n 个全等的 n-立方体。

对于每个 $v \in \{0,1,2\}^n$，令 $q_v = \frac{1}{3}(v + [0,1]^n)$ 和 $\iota_v\colon \ q_v \to [0,1]^n$ 为全等映射 $x \mapsto 3^n(x - v)$；我们将 $\mathsf{C}(q_v) = \mathsf{C}_{\iota_v}(q_v)$ 记作。于是，立方体 q_v, $v \in \{0,1,2\}^n$ 是全等的欧几里得立方体，它们覆盖 $[0,1]^n$，并且彼此

内部不相交，且满足 $q_v \cap q_{v'} \in \mathsf{C}(q_v) \cap \mathsf{C}(q_{v'})$，其中 $v,\ v' \in \{0,1,2\}^n$。于是

$$\mathsf{R}_n = \bigcup_{v\in\{0,1,2\}^n} \mathsf{C}(q_v)$$

是一个具有 $[0,1]^n$ 空间的立方 n-复形，被称为 C_n 的标准细化。

现在设 K 是一个立方 n-复形，并且对于每个 $Q \in K^{[n]}$，令 $\phi_Q\colon\ Q \to [0,1]^n$ 为立方 n-复形定义中的固定立方同构。对于每个 $Q \in K^{[n]}$，我们取

$$\mathrm{Ref}(Q) = \phi_Q^*(\mathsf{R}_n).$$

由于具有公共面的 n-立方体的过渡映射 $q = Q \cap Q' \in K^{[n-1]}$ 是等距映射，我们有 $\mathsf{Ref}(Q)|_q = \mathsf{Ref}(Q')|_q$。此外，由于每个 n-立方体 $Q' \in \mathsf{Ref}(K)^{[n]}$ 都包含于某个 n-立方体 $Q \in K^{[n]}$ 中，因此对于某个 $v \in \{0,1,2\}^n$，我们有 $\phi_Q(Q') = q_v$，并且可以定义 $\phi_{Q'}\colon\ Q' \to [0,1]^n$ 为映射 $\phi_{Q'} = \iota_v \circ \phi_Q|_{Q'}$。于是

$$\mathrm{Ref}(K) = \bigcup_{Q\in K^{[n]}} \mathrm{Ref}(Q)$$

是一个定义良好的立方 n复形。我们称 $\mathsf{Ref}(K)$ 为 K的标准细分 。对于 $k \geq 1$，我们称立方 n复形 $\mathsf{Ref}^k(K) = \mathsf{Ref}(\mathsf{Ref}^{k-1}(K))$ 为 K的第 k次迭代细分 。

对于 $x,\ x' \in |\mathsf{Ref}^k(K)| = |K|$，有

$$d_{\mathrm{Ref}^k(K)}(x,x') = 3^k d_K(x,x')$$

在这两种不同的度量下。为使所有细化尺度保持一致，我们在所有细分 $\mathsf{Ref}^k(K)$，$k \geq 1$ 上赋予度量 d_K。

约定 2.12 (Ref 上的标准度量$^k(K)$)。 设 K 为一个立方 n复形， K为其多面体度量。对于 $k \geq 1$，我们在$\mathrm{Ref}^k(K)$上赋予度量 $d_K = 3^{-k} d_{\mathrm{Ref}^k(K)}$。我们称 d_K Ref 上的标准度量$^k(K)$。

2.2. **从单纯结构到立方结构**。 现在，我们利用重心细分，从单纯复形的重心细分构造一个立方复形。一般情形可由单个单形的情形推出。设 $\Delta_n = [e_1,\dots,e_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为标准的 n-单形。

在下述陈述中， n-立方体 Q 是一个带有立方结构 $\mathsf{C}(Q)$ 且与 C_n同构的多面体；若存在一个既是等距变换又是立方同构的映射 $\psi\colon\ Q \to Q'$，则两个 n-立方体 Q和 Q' 是全等的。

引理 2.13. 在 Δ_n 上存在一个立方复形 $\Delta_n^{\square}$，由$(n+1)$个全等的 n-立方体 $Q_0,\dots,Q_n$组成；对于 Δ_n 的每个面σ，其限制 $\Delta_n^{\square}|_\sigma$都是定义良好的立方$(n-1)$-复形，由 n 个全等$(n-1)$-立方体组成。

证明。 我们记作 $\Delta_n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$，并令 X为 Δ_n 的重心细分，其中同维数的单形全等。对于 Δ_n的每个顶点 v_i，令 $\mathsf{St}_X(v_i)$ 表示复形 X 中 v_i 的星形，并令 $Q_i = |\mathsf{St}(v_i)|$。

我们断言，每个 Q_i 都存在一个立方结构 $\mathsf{C}(Q_i)$，与 $[0,1]^n$ 上的 C_n 同构，并且对于 $\mathsf{C}(Q_i)$ 中的每个 k-立方体 $0 \le k \le n$，它都是 X中的若干 k-单形的并。证明采用维数归纳法。该断言对 $n = 1$显然成立。

假设命题对维数 $n-1$ 成立。对于维数 n，只需证明该命题对顶点 v_0 成立。

根据归纳假设，对于每个 $i \neq 0$，$\mathsf{St}_X(v_0)$ 在面 $[v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots\dots, v_n]$ 上的限制都允许一个立方结构 $K_{0\,i}$，其中有一个 $(n-1)$-立方体，且其 k-立方体 $k \in [0, n-1]$，是 $X|_{Q_0}$ 中 k 个单形的并。因此，$K_0 = K_{0\,1} \cup \cdots \cup K_{0\,n}$ 是立方 $(n-1)$-复形 $\mathsf{St}_{X^{(n-1)}}(v_0)$。

设 v 是 X 中位于 Δ_n 内部的唯一顶点。设 L_0 是 X 中顶点 v_0 的链环，τ_0 是 Δ_n 中与 v_0 相对的面。由于 X 是 Δ_n 的重心细分，链环 L_0 同构于 τ_0 的重心细分 $X|_{\tau_0}$。根据归纳假设，$X|_{\tau_0}$ 允许一个由 n 个维数为 $(n-1)$ 的立方体组成的立方 $(n-1)$-复形，且它是 τ_0 内部唯一顶点的星形。因此，对 L_0 和 v 也同样成立。我们将 $|L_0|$ 上相应的立方 $(n-1)$-复形记为 K_0'。

于是，$K_0 \cup K_0'$是 $\mathsf{St}_X(v_0)$ 边界上的一个立方复形，它由对 X 中的单形取并得到。此外，$|K_0|$ 和 $|K_0'|$ 是（$n-1$）胞腔，而 $\partial Q_0 = |K_0 \cup K_0'|$ 是一个（$n-1$）球面。因此，Q_0 是一个 n胞腔，并且是立方复形 $\mathsf{C}(Q_0) = K_0 \cup K_0' \cup \{Q_0\}$ 的空间，该复形与 C_n同构。

对于每个 $i = 1, \dots\dots, n$，我们固定一个等距变换 $\rho_i\colon\ \Delta_n \to \Delta_n$，它将$v_i$ 映射到 v_0。于是 ρ_i 固定 Δ_n 的重心 v，并满足 $\rho_i(Q_i) = Q_0$。因此，Q_i 具有一个标准立方结构 $\mathsf{C}(Q_i)$，使得 $\rho_i^*(\mathsf{C}(Q_i)) = \mathsf{C}(Q_0)$。根据定义，$n$维立方体 $Q_0, \dots\dots, Q_n$ 全等。对于 $i \neq j$，$\mathsf{C}(Q_i)|_{Q_i \cap Q_j} = \mathsf{C}(Q_j)|_{Q_i \cap Q_j}$ 这一事实由归纳假设以及对 Δ_n进行的欧几里得重心细分得出。

我们令 $\Delta_n^{\square}$ 为复形 $\mathsf{C}(Q_0)\dots\dots, \mathsf{C}(Q_n)$ 的并。为简便起见，将复形 $\mathsf{C}(Q_i)$ 记作 Q_i。

接下来只需证明标准立方结构的相容性。令 $h\colon\ Q_0 \to [0,1]^n$ 为一个立方同构，使得 $h(v_0) = 0$, $h(v) = e_1 + \cdots + e_n$，并且 h 将 Q_0 中每个固定 v_0 和 v 的等距变换共轭为 $[0,1]^n$ 的一个等距变换。令 $h_0 = h\colon\ Q_0 \to [0,1]^n$，并且对于 $i > 0$，令 $h_i = h \circ \rho_i\colon\ Q_i \to [0,1]^n$。

由于 $\rho_j(Q_j \cap Q_i)$ 和 $\rho_i(Q_j \cap Q_i)$ 是 K_0' 中 Q_0 的面的并，且二者相差一个等距变换，因此映射 $h_i \cap h_j^{-1}|_{h_j(Q_j \cap Q_i)}\colon\ h_j(Q_j \cap Q_i) \to h_i(Q_j \cap Q_i)$ 是欧氏等距变换。□

由前一个引理可立即得出：单纯复形 T 的空间 $|T|$ 上存在一个立方复形 $T^{\square}$。

命题 2.14。设 T是一个分段线性 n复形，且$(|T|, d_T)$ 是一个黎曼流形。则存在一个定义在$|T|$ 上的立方复形 $K = T^{\square}$，使得其在每个 n-单形 $\sigma \in T$ 上的限制 $T^{\square}|_{\sigma}$与$\Delta_n^{\square}$同构。此外，多面体度量 $d_{T^{\square}}$与黎曼度量 d_T是 $L(n, T)$-拟相似的。

证明。 对于每个 n-单形 $\sigma \in T$，我们固定一个仿单纯形同胚$\psi_\sigma\colon \sigma \to \Delta_n$。由于过渡映射 $\psi_{\sigma'} \circ \psi_\sigma^{-1}$在公共面上是欧几里得等距变换，拉回结构 $\psi_\sigma^*(\Delta_n^\square)$ 和 $\psi_{\sigma'}^*(\Delta_n^\square)$ 在$\sigma \cap \sigma'$上相同。我们定义

$$T^\square = \bigcup_{\sigma \in T^{[n]}} \psi_\sigma^*(\Delta_n^\square).$$

回想一下，根据引理 2.13 的证明， n中的所有 Q_0立方体，…， Q_n 都全等，并且映射 $h_i\colon Q_i \to [0,1]^n$ 是立方同构。

设 σ 是 T 中的一个 n单形， Q 是 $T^\square|_\sigma$中的一个 n立方体。设 $i_Q \in \{0, 1 \ldots, n\}$ 为满足 $\psi_\sigma(Q) = Q_{i_Q}$的指标。对每个 $Q \in T^\square$，令 $\phi_Q = h_{i_Q} \circ \psi_\sigma|_Q\colon Q \to [0,1]^n$。现在很容易验证，过渡映射 $\phi_{Q'} \circ \phi_Q^{-1}$ 在公共面上是欧氏等距变换。

注意，对于 T 中的每个 σ 单形和 ψ_σ 中的每个 n立方体， ψ_σ 是拟相似映射，其常数取决于 σ；而 h_{i_Q} 是在欧氏度量下的双利普希茨映射，其常数取决于维数 n。因此，映射 $\phi_Q\colon (Q, d_T|_Q) \to [0,1]^n$ 是一个 $L(n, \sigma)$-拟相似映射。由此可得两个度量之间的 $L(n, T)$-拟相似性。□

命题 *2.1* 的证明。 黎曼 n流形 M 承认一个单纯形三角剖分 T，其中每个 n-单形都与一个仿射欧几里得n-单形双利普希茨等价。由命题 2.14 即可得出结论。□

注 2.15。 命题 *2.1* 中的立方复形可以选取得具有适用于和田构造的其他性质；参见注 *3.20*。

3. Adjacency graphs

本节讨论立方复形的邻接图及其子图。我们研究邻接图为给定子图的立方复形，并称之为实现。割图及其实现尤其值得关注。利用邻接图，我们在本节末尾引入隧道和良复形的概念。本节可视为第 4 节研究分离复形的预备内容。

首先回顾一下，若复形 K 的空间 $|K|$是连通的，则称该复形为连通 的。类似地，若子复形 $P \subset K$ 是 K 的连通分支 ，则 $|P|$ 是 $|K|$的连通分支

在下文中，我们对立方复形采用一种基于邻接的更强连通性概念。

定义 3.1。 若两个 n维立方体 Q 和 Q' 在立方 n复形 K 中有一个公共面 $Q \cap Q'$ ，则称它们邻接 。

这一对

$$\Gamma(K) = \left(K^{[n]}, \left\{\{Q, Q'\}\colon Q \neq Q',\ Q \cap Q' \in K^{[n-1]}\right\}\right)$$

称为 K的邻接图。我们将 $K^{[n]}$ 中的立方体称为顶点，将相邻的对 $\{Q, Q'\}$ 称为边。

若立方体 n复形 K 的邻接图 Γ（K）是连通的，则称其为邻接连通。

显然， K 中的两个 n立方体 Q和 Q' 可能有非空交集，却彼此不邻接。因此，立方体 n复形的拓扑连通空间可能不是邻接连通的。

注3.2。 设 K 是一个立方体 n-复形，其中每个$(n-1)$-立方体至多是两个 n-立方体的面。于是， $\Gamma(K)$ 的每条边 $\{Q, Q'\}$ 都可以与面 $Q \cap Q' \in K^{[n-1]}$ 等同，因此 $\Gamma(K)$ 的边集可以视为 $K^{[n-1]}$的子集。

3.1. **子图的实现**。 设 K 是一个立方体 n-复形。设$G = (V_G, E_G)$是邻接图 $\Gamma(K)$ 的一个子图，并设

$$\mathrm{Span}_K(G) = \mathrm{Span}_K\left(\{Q \in K^{[n]} \colon Q \in V_G\}\right)$$

是由 G张成的 K 的子复形。

我们定义一个立方体 n-复形 $\mathsf{R}_K(G)$，称为相对于 K的实现，其构造方法是将 $\mathrm{Span}_K(G)$ 中属于两个或更多 n-立方体、但不位于树 G的边上的点解除等同。参见图2和图1。

对于该定义，令

$$S_G = \bigsqcup_{Q \in V_G} Q \quad \text{and} \quad F_G = \bigsqcup_{Q \in V_G} \mathsf{C}(Q)$$

分别为 n-立方体 Qin G 的不交并，以及以 S_G 为其空间的立方 n复形。令 $\sim_G$ 为 S_G 中由 $x \sim_G x'$ 生成的等价关系，其中 $x \in Q$ 和 $x' \in Q'$ 是满足 $x = x'$ in $|K|$ 且 $\{Q, Q'\}$ 是 G 中一条边的点。用 $[x]$ 表示 $x \in S_G$ 的等价类，并令 $[q] = \{[x] \colon x \in q\}$ for $q \in F_G$。

注3.3。 对于 $Q \in$ 张成$_K(G)^{[n]}$，等价类 $[Q]$ 是一个 n-立方体。对于 $q \in$ 张成$_K(G)^{(n-1)}$，等价类 $[q]$ 或是一个立方体，或是两个立方体的并。

定义3.4。 设 K 为一个立方 n复形。子图 G $\Gamma(K)$（相对于 K ）的实现 $\mathcal{R}_K(G)$ 是立方复形

$$\mathcal{R}_K(G) = F_G/\!\sim_G = \{[q] \colon q \in F_G\}.$$

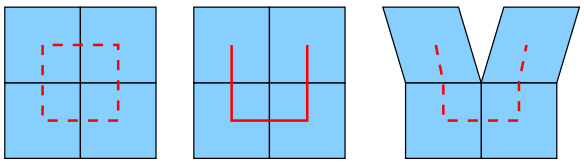

FIGURE 1. 左：复形 K 和 $\Gamma(K)$。中：生成树 $G \subset \Gamma(K)$ 和张成$_K(G)$。右：实现 $\mathsf{R}_K(G)$ 和 $\Gamma(\mathsf{R}_K(G))$。

注3.5。 根据定义， $\Gamma(\mathcal{R}_K(G)) = G$。我们想强调的是，仅凭邻接图并不能确定实现。存在立方结构不同构的复形，它们的邻接图却是同构的。环境复形 K 在定义中至关重要。

根据关系 $\sim_G$ 的传递性，实现 $\mathrm{R}_K(G)$ 的连通分支与 G 的连通分支一一对应。

设 K 是一个立方体 n-复形，G 是 $\Gamma(K)$ 的子图。令 $\iota_G\colon S_G \to |\text{张成}_K(G)|$ 为从 n-立方体到 $|\text{张成}_K(G)|$ 的包含映射，并用同一符号表示 $\iota_G\colon F_G \to \text{张成}_K(G)$ 这一复形的包含映射。根据构造，映射 $\iota_G\colon S_G \to |\text{张成}_K(G)|$ 可经由商映射 $S_G \to |\mathrm{R}_K(G)|$，$x \mapsto [x]$ 分解，映射 $\iota_G\colon F_G \to \text{张成}_K(G)$ 则经由商 $F_G \to \mathrm{R}_K(G)$，$q \mapsto [q]$ 分解。

因此，我们得到定义良好的商映射，

$$\pi_G\colon |\mathcal{R}_K(G)| \to |\mathrm{Span}_K(G)| \quad \text{and} \quad \pi_G\colon \mathcal{R}_K(G) \to \mathrm{Span}_K(G)$$

其中，限制映射 $\pi_G|_Q\colon Q \to \text{张成}_K(G)$ 是同构嵌入，而限制映射 $\pi_G|_{|Q|}\colon |Q| \to |\text{张成}_K(G)|$ 对于 $Q \in \mathrm{R}_K(G)^{[n]}$ 是同胚嵌入。我们称立方体 $Q \in \mathrm{R}_K(G)$ 的像 $\pi_G(Q)$ 为 Q 的投影，称 $C \in \text{张成}_K(G)$ 中立方体的原像 $\pi_G^{-1}(C)$ 为 C 的 提升。

G商 $\pi_G\colon \mathrm{R}_K(G) \to \text{张成}_K(G)$ 诱导出一个单射

$$\hat{\pi}_G\colon \Gamma(\mathcal{R}_K(G)) \to \Gamma(\mathrm{Span}_K(G))$$

在邻接图之间，该映射在顶点上由 $Q \mapsto \pi_G(Q)$ 给出，在边上由 $\{Q, Q'\} \mapsto \{\pi_G(Q)\ \pi_G(Q')\}$ 给出。根据 $\mathrm{R}_K(G)$ 的定义，图 $\Gamma(\mathrm{R}_K(G))$ 与 G 同构，并且映射 $\hat{}\pi_G$ 是到 $G \subset \Gamma(\text{张成}_K(G))$ 上的同构。

$G \subset \Gamma(\text{张成}_K(G))$ 的包含可能是严格的；参见图1。

注 3.6。 G商 $\pi_G\colon \mathcal{R}_K(G) \to \text{张成}_K(G)$ 在 $\mathrm{Ref}^k(\mathcal{R}_K(G))$ 中的 n维立方体与$\mathrm{Ref}^k(\text{张成}_K(G))$中的 n维立方体之间诱导出一个双射。

在我们的构造中，我们主要考虑子图 $G \subset \Gamma(K)$ 的实现 $\mathrm{R}_K(G)$，其中这些子图是树；关于隧道，参见第 3.2 节。

在这种情况下，实现的空间是 n-胞腔。我们在下面的引理中证明这一事实；图 2 也给出了一个例子。

引理 3.7. 设 K 是一个立方体 n-复形，且 $G \subset \Gamma(K)$ 是一棵树。那么$|\mathcal{R}_K(G)|$是一个 n-胞腔。

证明。 由于 G是一棵树，因此 $\Gamma(\mathrm{R}_K(G)) = (V, E)$ 也是一棵树。设 $Q \in \mathrm{R}_K(G)$ 是一个n-立方体，且 $|Q|$ 是 $\Gamma(\mathrm{R}_K(G))$ 的叶，也就是说，存在唯一一个 n-立方体$Q' \in \mathrm{R}_K(G)^{[n]}$使得 $\{Q, Q'\} \in G$。设 $R'_G = \mathsf{Span}(\mathrm{R}_K(G) - \mathsf{C}(Q))$ 是移除了 $\mathsf{C}(Q)$ 后的子复形。

我们断言 Q 不与 $\mathrm{R}_K(G)$ 中的任何其他叶相交。否则，设$Q'' \in \mathrm{R}_K(G)$ 是与 Q 有非空交集的另一片叶。由关系 $\sim_G$的传递性，存在一列 $Q = Q_0, \ldots, Q_m = Q''$ $\mathrm{R}_K(G)$ 中相邻的 n-立方体，满足对每个 $i = 0, \ldots, m$都有 $Q \cap Q'' \subset Q_i$。特别地，$Q \cap Q''$ 包含在一个 $(n-1)$-立方体 $Q_0 \cap Q_1 \in \mathrm{R}_K(G)$ 中。由于 Q' 是 $\mathrm{R}_K(G)$ 中唯一与 Q相邻的 n-立方体，因此我们有 $Q = Q_0$和 $Q' = Q_1$。

因此，存在一个分片线性同胚 $h_Q\colon |\mathrm{R}_K(G)| \to |R'_G|$，使得对于所有 n-立方体 $q \in \mathrm{R}_K(G)$，$h_Q|_q = \mathsf{id}\ q \neq Q,\ Q'$。通过反复使用同胚移除 G 的叶节点，我们可以将 $\mathrm{R}_K(G)$ 化简为一个 n- 立方体，而它是一个 n- 胞腔。因此，$|\mathrm{R}_K(G)|$ 是一个 n- 胞腔。□

3.1.1. 割图。 $\Gamma(K)$ 的一类特殊子图，可通过用 Z 中的一个余维为一的子复形切割 $\Gamma(K)$ 而得到。

定义 3.8。设 K 是一个立方 n-复形， $Z \subset K$ 是一个立方$(n-1)$-子复形。相对于 Z，邻接图 $\Gamma(K)$ 的 割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z)$ 是子图

$$\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z) = \left(K^{[n]}, \{\{Q \cap Q'\} \in \Gamma(K) \colon Q \cap Q' \notin Z\}\right).$$

我们将实现 $\mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z))$ 称为相对于 Z 的提升 K，而将 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z)$-商映射

$$\pi_{(K;Z)} \colon \mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z)) \to K$$

从提升到 K 的典范投影。

$\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z)$ 的一个连通分支 G，如果 $\mathsf{Span}_K(G)$ 不与 ∂K 相交，则称为内部分支；如果它不是内部分支，则称为外部分支。

3.1.2. Σ-割图的分支及其提升。本文主要关注 Z 位于 K 内部的情形。

假设 Z 位于 K 的内部，且 $\Sigma \subset \partial K$ 是一个边界分支。我们用 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z;\Sigma)$ 表示 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z)$ 中满足以下条件的唯一连通分支

$$\Sigma \subset \mathrm{Span}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z;\Sigma)) \subset K$$

并将张成

$$\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma) = \mathrm{Span}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z;\Sigma)),$$

该 Σ-分支称为 K。

注 *3.9*。一般而言， Z 不一定将 ∂K 的各个分支分离。因此可能出现 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z;\ \Sigma) = \Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z;\ \Sigma')$，从而 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma) = \mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma') \supset \Sigma \cup \Sigma'$，其中 Σ 和 Σ' 是两个不同的边界分支。还请注意，若割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z)$ 有一个内部分支，则对所有边界分支 Σ，其并集 $\bigcup_\Sigma \mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma)$ 严格包含于 K。这两点引出了我们在第 *4* 节对分离复形的讨论。

当 Z 位于 K 的内部时，我们记作

$$\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma) = \mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;Z;\Sigma)).$$

由于 $\pi_{(K;Z)}$ 将 $\mathsf{Lift}_K(Z;\ \Sigma)$ 投影到 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma)$ 上，我们也可以写作

$$\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma) = \pi_{(K;Z)}^{-1}(\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma)),$$

并称其为 $\mathrm{R}_K(\Gamma^{\mathsf{cut}}(K;\ Z))$ 中 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma)$ 的提升。

注3.10。 Σ-连通分支 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma)$是 K 的子复形，因此继承了来自 K 的多面体度量。类似地，立方 n-复形 $\mathsf{Lift}_K(Z;\ \Sigma)$具有一种度量，在此度量下，每个 n-立方体 Q 都与其在 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma)$中的投影 $\pi_{(K;Z)}(Q)$ 等距同构。在这些度量下，

$$\pi_{(K;Z)}|_{\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma)} \colon |\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma)| \to |\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma)|$$

是一个保长度映射，也就是说，对于每条路径 γ *in* $|$提升$_K(Z;\ \Sigma)|$，都有$\ell(\pi_{(K;Z)} \circ \gamma) = \ell(\gamma)$。

由于 $|\mathrm{Lift}_K(Z;\,\Sigma)|$ 和 $|\mathrm{Comp}_K(Z;\,\Sigma)|$ 的内部相对于继承的度量都是局部欧几里得度量空间，前述注立即推出映射 $\pi_{(K;Z)}$ 在 $|\mathrm{Lift}_K(Z;\,\Sigma)|$ 的内部是共形的。我们将此事实记录如下。

引理 3.11. 关于上述度量，内部 $\mathrm{int}(|\text{提升}(Z;\Sigma_i)|)$ 和 $\mathrm{int}(|\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)|\setminus|Z|)$ 共形等价。

我们以一些记号结束本节。设 P 是 K 的一个 n-子复形，为简便起见，我们可以记为

$$\pi^{-1}_{(K;Z)}(P)=\mathrm{Span}_{\mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;Z))}(\pi^{-1}_{(K;Z)}(P^{[n]})).$$

显然，$\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;Z)$-商映射 $\pi_{(K;Z)}$ 在细分之间诱导出一个自然同构 $\mathrm{Ref}^k(\mathrm{R}_K(\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;\,Z)))\to\mathrm{Ref}^k(K)$。因此，给定 $\mathrm{Ref}^k(K)$ 的一个 n-子复形 R，我们也可以记为

$$\pi^{-1}_{(K;Z)}(R)=\mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}^k(\mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;Z)))}(\pi^{-1}_{(K;Z)}(R^{[n]})).$$

3.2. **隧道**。本节中，我们定义一类称为隧道的特殊立方复形。

定义 3.12. 若一个立方 n-复形 K 的隧道邻接图 $\Gamma(K)$ 是一棵树，且 $|K|$ 是一个 n-胞腔，则称其为隧道。

立方体 n复形 K 相对于一个 $()$-子复形$Z\subset K$ 而言是类隧道的，当且仅当 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;Z)$ 是一棵树。

注 3.13。“类隧道复形”这一术语由引理 *3.7* 得到佐证。事实上，如果 K 相对于子复形 Z是类隧道的，那么其实现 $\mathcal{R}_K(\Gamma^{\mathrm{cut}}(K;\,Z)$ 是一个隧道。

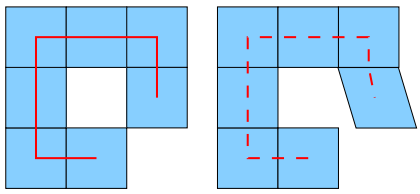

FIGURE 2. 左：不是隧道。右：是隧道

隧道的重要性部分源于以下收缩性质。在定理 1.2 的证明中会用到这一事实。

命题 3.14 (隧道收缩)。设 $K\cup T$ 是一个立方体 n复形，其中 T是一个隧道，且交集 $q_T=K\cap T$是恰好两个 n立方体的公共面。那么存在一个常数 $L=L(n,\,\#T^{[n]})\geq 1$，以及一个分段线性 L双利普希茨同胚 ϕ_T：$|K\cup T|\to|K|$，使得 ϕ_T在 $|K-Q_T|$上是恒等映射；其中 Q_T是 K中唯一一个以 q_T 为面的 n立方体。

证明。令 $T'=T\cup Q_T$。那么 $\Gamma(T')$ 是一棵树。

设 $Q\in T'$、$Q\neq Q_T$，为 $\Gamma(T')$ 中的一片叶，且 Q'为 T' 中与 Q共享一个面 $q=Q\cap Q'$的唯一 n-立方体。由于 T'与 $\Gamma(T')$ 的实现同构，我们有 $Q\cap(T'-Q)=Q\cap Q'$。因此存在一个分段线性

同胚 $\varphi_Q\colon |Q\cup Q'|\to |Q'|$，它在 $|\partial Q'|\setminus|Q|$ 上是恒等映射，并且其双利普希茨常数仅取决于 n。我们通过恒等映射将 φ_Q 延拓为同胚 $\varphi_Q\colon |K\cup T|\to |(K\cup T)-Q|$。命题中的映射 ϕ_T 由这一类同胚复合而成，每次收缩一片叶。因此，ϕ_T 的双利普希茨常数仅取决于维数 n 以及树 $\Gamma(T)$ 的大小，即 $\#T^{[n]}$。□

3.3. **良好的立方复形**。命题 2.1 中定义的黎曼流形所关联的立方复形 K 具有若干性质，这些性质是我们构造所需的。我们将这些性质归纳为良复形的概念。

定义 3.15。立方 n-复形 K 若满足以下条件，则称为良复形：

(1) $\Gamma(K)$ 是连通的；*(2)* 每个 $(n-1)$-立方体至多是两个 n-立方体的面；*(3)* 每个顶点的星形以及每个 $(n-2)$-立方体都是邻接连通的 n-复形；*(4)* ∂K 是一个至少有一个连通分支的立方 $(n-1)$-复形，并且 ∂K 的每个连通分支 Σ 都是邻接连通的。

若一个立方 n-复形 K 满足条件 (1)、(2) 和 (3)，则称其具有良好内部。

接下来我们证明，由条件（2），条件（3）中的邻接性可提升为循环性。为表述这一点，我们称图 $G=(V,E)$ *cyclic*（循环的），如果它同构于以下两者之一

$$(\{1,\dots,m\},\{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{m-1,m\}\})$$

or

$$(\{1,\dots,m\},\{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{m-1,m\},\{m,1\}\}).$$

在第一种情况下，我们也称 G 是线性的。

引理 3.16。设 K 是一个良好的立方体 n 复形。则一个（$n-2$）-立方体 $\xi\in K^{[n-2]}$ 的星形的邻接图 $\Gamma(\mathrm{St}_K(\xi))$ 是循环的。

证明。设 $\xi\in K^{[n-2]}$。根据定义 3.15 中的条件（3），邻接图 $\Gamma(\mathrm{St}_K(\xi))$ 是连通的。设 $Q\in\mathrm{St}_K(\xi)$ 是一个 n-立方体。则 ξ 是 Q 的恰好两个面的交集。因此，根据条件（2），Q 在 $\mathrm{St}_K(\xi)$ 中至多与另外两个 n-立方体邻接。于是 $\Gamma(\mathrm{St}_K(\xi))$ 是连通的，并且每个顶点的度至多为二。我们得出结论：$\Gamma(\mathrm{St}_K(\xi))$ 是循环的。□

良复形的细分仍然是良复形；简单的论证从略。

引理 3.17. 如果 K 是一个良立方 n-复形，那么 $\mathrm{Ref}(K)$ 是一个良立方 n-复形。

命题 2.14 中的立方结构 $T^{\square}$ 是一个良复形。

命题 3.18. 设 T 是一个单纯 n-复形，且 $(|T|,d_T)$ 是一个带边界的黎曼流形。那么命题 *2.14* 中构造的、与 T 相关联的立方结构 $T^{\square}$ 是一个良复形。

证明. 由于 $|T|$ 是一个带边界的连通流形，单纯复形 T 满足定义 3.15 中条件的单纯复形对应条件。由于 $\Delta_n^{\square}$ 是一个良好的立方复形，根据构造，复形 $T^{\square}$ 也是良复形。□

添加边界的领圈后，复形 $T^{\square}$ 仍然是良好的。我们将这个显然的事实表述为一个引理。

引理 3.19。 设 T 是一个单纯复形，其空间 $|T|$ 是一个连通的n带边界流形。设 ι: $\partial T^{\square} \to \partial T^{\square} \times [0,1]$ 为立方包含映射 $q \mapsto q \times \{0\}$，并设 K 为立方 n 复形

$$K = T^{\square} \bigcup_{\iota} \left(\partial T^{\square} \times [0,1]\right)$$

通过识别点 q 和 ι（q） （其中 $q \in \partial T^{\square}$）得到。那么 K 是一个良好的立方 n复形。此外，（$|T^{\square}|$，$d_{T^{\square}}$） 与（K，d_K） 是双利普希茨等价的，其常数仅取决于 T。

注 3.20。 根据引理 *3.19*，我们可以假设命题 *2.1* 中的立方 n复形K 是一个良好的立方 n复形，其边界的星形St_K（∂K）与 $\partial K \times [0,1]$同构。此外，配备多面体度量 d_K的复形 K与原黎曼流形 M拟相似。

4. Separating complexes

我们构造的核心是分离复形这一概念。粗略地说，在一个具有边界的良好立方 n-复形 K 中，分离复形 Z 是一个 $(n-1)$ 维子复形，其在 $|K|$ 中的补集同胚于 $|\partial K| \times [0,1)$ 。通常，分离复形 Z 的空间并不是流形。比上述拓扑描述更强的正式定义使用了提升这一概念。定义见第 3 节。

定义 4.1 (分离复形)。 设 K 是一个良好立方 n-复形，且 $\mathrm{St}_K(\partial K)$ 同构于 $\partial K \times [0,1]$。若一个$(n-1)$-子复形$Z \subset K$ 满足以下条件，则称其为 中的分离复形

(1) $Z \cap \mathrm{St}_K(\partial K) = \varnothing$; *(2)* $\Gamma(Z)$ 连通; *(3)* 对每个边界分支 $\Sigma \subset \partial K$，$\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma) \cap \partial K = \Sigma$，且所有 Σ-连通分支的并为 K，即 $\bigcup_{\Sigma} \mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma) = K$; *(4)* 对每个边界分支 $\Sigma \subset \partial K$，提升空间 $\mathsf{Lift}_K(Z;\ \Sigma)$同胚于 $|\Sigma| \times [0,1]$。

注*4.2.* 一般而言，空间 $|\mathit{Comp}_K(Z;\ \Sigma)|$ 和 $|\mathit{Lift}_K(Z;\ \Sigma)|$ 并不同胚；甚至 $|\mathit{Comp}_K(Z;\ \Sigma)|$ 和 $|\mathit{Lift}_K(Z;\ \Sigma)|$ 的内部也未必同胚。事实上，在图*3*中，割图 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(K; Z)$ 有四个连通分支，并且对于每个 $i = 1, \ldots, 4$，$\mathit{Lift}_K(Z;\ \Sigma_i)$ 有两个边界分支。图中的子复形 $\tau \subset Z$ 由四个 *1*-立方体组成，包含在 $\mathit{Comp}_K(Z;\ \Sigma_1)$ 中，但不包含在 $\partial(\mathit{Comp}_K(Z;\ \Sigma_1))$ 中。因此，立方复形 $\mathit{Comp}_K(Z;\ \Sigma_1)$ 有三个边界分支。

然而，条件 (4) 蕴含一个较弱的性质

$$|\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma_1)| \setminus |Z| \approx \pi^{-1}_{(K;Z)}(|\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma_1)| \setminus |Z|)$$
$$= |\mathsf{Lift}_k(Z;\Sigma_1)| \setminus \pi^{-1}_{(K,Z)}(|Z|) \approx |\Sigma_1| \times [0,1).$$

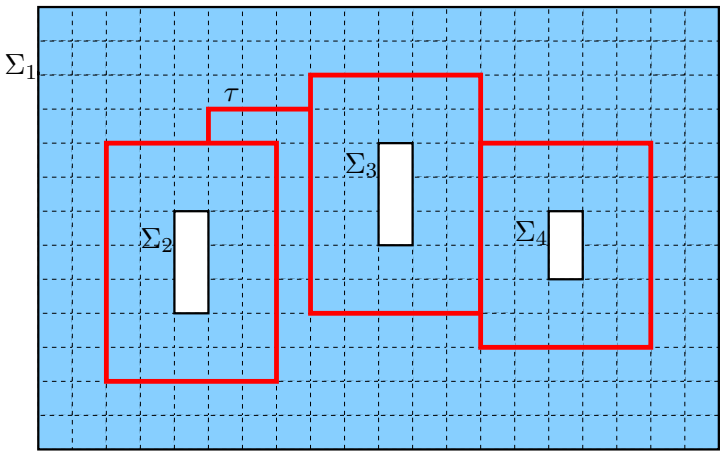

FIGURE 3. 分离复形 Z （红色）位于一个复形 K （蓝色）中。

注记 4.3. 由 (1)， Z与星形 $\mathrm{St}_K(\partial K)$不相交，因此 $\Gamma(\mathrm{St}_K(\Sigma)) \subset \Gamma^{\mathsf{cut}}(K; Z, \Sigma)$。因此，$\mathrm{St}_K(\Sigma)$ 同构地提升到$\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma)$中，即，

$$\pi_{(K;Z)}|_{\pi^{-1}_{(K;Z)}(\mathrm{St}_K(\Sigma))} \colon \pi^{-1}_{(K;Z)}(\mathrm{St}_K(\Sigma)) \to \mathrm{St}_K(\Sigma)$$

是一个同构。从这里开始，我们假设星形$\mathrm{St}_K(\Sigma)$ 及其提升 $\pi^{-1}{}_{(K;Z)}(\mathrm{St}_K(\Sigma))$ 已如此识别。

注记 4.4. 设 Z 是一个良立方 n复形K 中的分离复形，且 $\Sigma \subset \partial K$ 是一个边界分支。那么，$\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma)$ 也是一个良复形。直接验证从略。

分离复形在细分下保持稳定，我们将这一事实记录为一个引理，并略去直接的证明。

引理 4.5. 如果 $Z \subset K^{(n-1)}$ 是立方 n-复形K中的一个分离复形，那么 $\mathrm{Ref}(Z)$ 是 $\mathrm{Ref}(K)$中的一个分离复形。

4.1. 分离复形的存在性。 下述定理表明，经过细分后，每个良复形 K 都存在一个具有特定形式的分离复形。具体而言，在 $\mathsf{Ref}(K)$ 中存在一个分离复形 Z ，满足以下性质： $Z \subset \mathsf{Ref}(K - \mathsf{St}_K(\partial K))$ 和 $\mathsf{Ref}(K - \mathsf{St}_K(\partial K))$ 相对于 Z 是隧道线性的。我们将在第 7 节讨论被分离复形分开的子复形的结构及其提升；鉴于后续讨论，我们用 Z的互补分支来表述这一陈述。

定理 4.6. 设 $n \geq 2$, K 是一个良好的立方 n-复形，使得 $\mathrm{St}_K(\partial K)$同构于 $\partial K \times [0,1]$, 且 $\Sigma' \subset \partial K$ 是一个边界分支。那么存在一个分离复形 Z ，它属于 $\mathrm{Ref}(K)$ 并具有以下性质：

(1) 对于每个边界分支 $\Sigma \subset \partial K$, $\Sigma \neq \Sigma'$, Σ-连通分支$\mathsf{Comp}^{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma) = \mathrm{Ref}(\mathrm{St}_K(\Sigma))$以及提升 $\mathsf{Lift}^{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma)$ 同构于 $\mathrm{Ref}(\mathrm{St}_K(\Sigma))$。

(2) 对于边界分支 Σ',

$$\mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma') = \mathrm{Ref}(\mathrm{St}_K(\Sigma')) \bigcup (\mathrm{Ref}(K) - \mathrm{St}_K(\partial K)),$$

and

$$\mathsf{Lift}_{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma') = \mathrm{Ref}(\mathrm{St}_K(\Sigma')) \cup \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}(K)}(\tau),$$

其中 τ 是 $\Gamma(\mathrm{Ref}(K - \mathrm{St}_K(\partial K)))$ 中的一棵生成树，$\mathcal{R}^{\mathrm{Ref}(K)}(\tau)$ 是 τ 的实现，而 $\mathrm{Ref}(\mathrm{St}_K(\Sigma')) \cap \mathcal{R}^{\mathrm{Ref}(K)}(\tau)$ 是一个 $(n-1)$ 维立方体。

证明。设 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ 是 ∂K 和 $\Sigma' = \Sigma_1$ 的边界分支。根据假设，星形 $\mathrm{St}_K(\Sigma_i)$ 必然两两不相交，并且每个 $\Gamma(\mathrm{St}_K(\Sigma_i))$ 都是连通的。

令 A' 为 K 的子复形，去掉所有星形 $\mathrm{St}_K(\Sigma_i)$ 后得到，即

$$A' = K - (\mathrm{St}_K(\Sigma_1) \cup \cdots \cup \mathrm{St}_K(\Sigma_m)),$$

回顾第2节中定义的两个复形之差。由于 $\Gamma(K)$ 是连通的，且星形 $\mathrm{St}_K(\Sigma_i)$ 两两不相交，复形 A' 是邻接连通的。令 $B' = \mathrm{St}_K(\Sigma_1)$，并且

$$K' = B' \cup A'.$$

那么， K' 是邻接连通的，并且 $B' \cap A' = \partial(\mathrm{St}_K(\Sigma_1)) \setminus \Sigma_1$。

设 $T \subset \Gamma(A')$ 是一棵生成树，并令

$$\Omega = \{c(q) \in \mathrm{Ref}(q) \colon q \in (A')^{[n-1]} \text{ is an edge in } T\},$$

其中 $c(q)$ 是 $\mathrm{Ref}(q)$ 中的中心立方体，表示 T 中各条边的中心立方体的集合。令

$$Y = \mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}(K)} \left(\mathrm{Ref}((A')^{(n-1)}) \setminus \Omega \right).$$

接下来，在 $\Gamma(\mathrm{Ref}(A'))$ 中固定一棵生成树 τ，它包含于割图 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(\mathrm{Ref}(A'); Y)$ 中，并且对所有 $Q \in (A')^{[n]}$，都包含 $\mathrm{Ref}(Q)$ 中中心立方体 $c(Q)$ 的所有面。再固定一个 n-立方体 $Q' \in (A')^{[n]}$，它有一个面 q' 属于 $\mathrm{St}_K(\Sigma_1)$，并用 $\omega = c(q')$ 表示 $\mathrm{Ref}(q')$ 中的中心立方体。

我们断言

$$Z = \mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}(K)} \left((\mathrm{Ref}(A'))^{[n-1]} \setminus (\tau \cup \{\omega\}) \right)$$

是 $\mathrm{Ref}(K)$ 中的一个分离复形。

由于 $Z \subset \mathrm{Ref}(A')$，交集 $Z \cap \mathrm{St}^{\mathrm{Ref}(K)}(\mathrm{Ref}(\partial K)) = \varnothing$。分离复形定义中的条件 (1) 成立。

由于（$n-1$）复形（A'）$^{(n-1)}$ 是邻接连通的，因此细分 $\mathrm{Ref}((A')^{(n-1)})$ 也是邻接连通的。从 $\mathrm{Ref}((A')^{(n-1)})$ 中移除由（$n-1$）维中心立方体组成的集合 Ω 后，复形 Y仍然是邻接连通的。根据 τ 的选择，Z中任何不属于 Y 的（$n-1$）立方体，都与 Y 中的一个（$n-1$）立方体相邻。因此， Z 是邻接连通的，条件（2）成立。

根据构造，割图

$$\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}(K');Z)=\Gamma(\mathrm{Ref}(B'))\cup\tau\cup\{\omega\}$$

是连通的。因此， $\Gamma(\mathsf{Ref}(K);Z)$ 的连通分支与 ∂K 的分支一一对应。因此条件（3）成立。

由于 $\Gamma(\mathsf{Lift}^{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma_1))$ 与 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathsf{Ref}(K');Z)$ 同构，提升具有一个本质划分

$$\mathsf{Lift}_{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma_1)=B\cup A,$$

其中 $B=\pi^{-1}{}_{(K;\ Z)}(B')$ 与 $\mathsf{Ref}(\mathsf{St}_K(\Sigma_1))$ 同构，因此视为与其相同；$A=\mathsf{R}^{\mathrm{Ref}(K)}(\tau)$ 是一棵树的实现，因此是一个以 n-胞腔为其空间的隧道，并且 $B\cap A=\{\omega\}$。最后，对于 $i=2,\dots,m$，$\mathsf{Lift}^{\mathrm{Ref}(K)}(Z;\Sigma_i)$ 的邻接图与 $\Gamma(\mathsf{Ref}(\mathsf{St}_K(\Sigma_i)))$ 同构。因此条件（4）也成立。

因此， Z 是 $\mathsf{Ref}(K)$ 中一个具有定理所述性质的分离复形。□

分离复形的存在性立即为边界至多有一个连通分支的流形给出了定理 1.2 的对应结果。

推论 4.7。 设 $n\geq 3$，且设 M 是一个具有 m 个边界分支的紧致连通黎曼 n-流形。那么存在一个常数 $\mathsf{K}=\mathsf{K}(n,M)>1$ 以及一个连续统 $X\subset \mathrm{int}M$，它没有内点，使得：

(1) 对于 $m=1$， $M\setminus X$ 与 $\partial M\times[0,1)$ 是 K-拟共形的，并且在 M 中是一个约翰域。*(2)* 对于 $m=0$， $M\setminus X$ 与欧几里得 n 维球 B^n $(0,\ 1)$ 是 K-拟共形的，并且在 M 中是一个约翰域。

证明。 设 K 是一个良复形，如注 3.20 所述，并以 M 作为其空间。

假设 $m=1$，并令 Z 为在定理 4.6 的证明中选取的 $\mathsf{Ref}(K)$ 的一个分离复形。于是，根据注3.10， $|K|\setminus|Z|$ 与其提升共形；根据隧道收缩命题 3.14， $|K|\setminus|Z|$的提升与 $|\partial K|\times[0,1)$ 双利普希茨同胚，其常数仅取决于 K和 n。令 $X=|Z|$。因此， $M\setminus X$与 $\partial M\times[0,1)$ K-拟共形。 $|K|\setminus|Z|$ 各分支的约翰性质由复形 K的有限性推出。

对于 $m=0$，令 $Q\in K$ 为一个 n-立方体， $Q'\in\mathsf{Ref}(Q)$ 为该 n-立方体，它不与 Q的边界相交。令 $K'=\mathsf{Ref}(K)-Q'$。那么 $|K'|$ 是一个具有一个边界分支的n-流形，并且 K' 是 $|K'|$上的一个良复形。令 Z 为按照定理 4.6 中的方式选取的 $\mathsf{Ref}(K')$ 的一个分离复形。于是$|K'|\setminus|Z|$ 与 $|\partial Q|\times[0,1)$ 拟共形。因此， $M\setminus|Z|$ 与一个开 n-立方体 $(-1,\ 1)^n$ 拟共形，畸变常数仅取决于 M和 n。约翰性质同样由复形K的有限性推出。□

4.2. **演化定理的陈述**。 本节陈述分离复形的演化定理（定理 4.16），它将主定理（定理 1.2）的证明归结为对一列分离复形（Z_k）进行迭代构造，并使其具有受控几何；这些复形位于

良复形 K的细分中。我们首先为良好的立方复形 K定义两个量，即立方复形的局部重数和细化尺度。

定义 4.8。 立方 n复形 K 的局部重数为

$$\mu(K)=\max\left\{\#\{q\in K^{[n-1]}\colon e\in q^{[n-2]}\}\colon e\in K^{[n-2]}\right\}.$$

定义 4.9。 良好立方 n-复形K （具有 m 个边界分支）的细化尺度 $\nu(K)\geq 1$ 是满足以下条件的最小整数 $\nu\geq 1$ ：

$$3^{\nu}\geq 3^{10}m\mu(K)^2.$$

现在我们描述演化定理所要实现的具体性质。

以下设 K 是一个良好立方 n-复形，使得 $\mathrm{St}_K(\partial K)$ 同构于 $\partial K\times[0,1]$， Z 是 K 中的一个分离复形，并且 $\nu=\nu(K)$ 是细化尺度。

相对 Wada 性质描述了分离复形的补集连通分支如何逐步交织在一起。

定义 4.10 (相对 Wada 性质**)**。 分离复形 Z' $in\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 具有关于分离复形的相对 Wada 性质Z ，其中 K 满足：对于每个 $q\in Z^{[n-1]}$， 共享面 q 的 n-立方体 Q和 Q^* 的并$\mathrm{Ref}^{\nu}(Q\cup Q^*)$ 在每个$\mathrm{Comp}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z';\Sigma)$中至少包含一个 n-立方体，其中 Σ 是 ∂K的一个连通分支。

第二个是核心扩张性质。对于每个连通分支 $\Sigma\subset\partial K$，$\mathrm{Comp}_K(Z;\Sigma)$ 的核心定义为

$$\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma)=\mathrm{Comp}_K(Z;\Sigma)-\mathrm{St}_K(Z)\subset K.$$

由于 $Z\cap\mathrm{St}_K(\partial K)=\varnothing$，$\mathrm{Core}_K(Z;\ \Sigma)$ 具有一个外边界分支 Σ和一个内边界分支

$$(\partial\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma))_{\mathrm{inner}}=\partial\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma)-\Sigma=\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma)\cap\mathrm{St}_K(Z).$$

定义 4.11 (核心扩张性质**)**。 分离复形 Z' 属于$\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$，且相对于分离复形 Z of K 是核心扩张的，当且仅当

$$|\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma)|\subset|\mathrm{Core}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z';\Sigma)|\setminus|(\partial\mathrm{Core}_K(Z';\Sigma))_{\mathrm{inner}}|$$

对每个连通分支 $\Sigma\subset\partial K$。若对于每个 k， Z_{k+1} 相对于 Z_k 都是核扩张，则称分离复形的序列 $(Z_k)Z_k\subset\mathrm{Ref}^{\nu k}(K)$是核扩张的 。

注 4.12。 由于$\mathrm{Core}_K(Z;\ \Sigma)$ 同构地提升到$\mathrm{Lift}_K(Z;\ \Sigma)$中，我们将$\mathrm{Core}_K(Z;\Sigma)$ 与其提升相认同，并从现在起将$\mathrm{Core}_K(Z;\ \Sigma)$视为$\mathrm{Lift}_K(Z;\ \Sigma)$的子空间。

第三个性质量化了引言中讨论的分离复形的互补分支之间的立方体交换。

定义 4.13 (λ-扰动)。 复形$K'=\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 中的分离复形 Z' ，是分离复形 Z 在 K 中的 λ-扰动，如果存在一个数 $\lambda\geq 1$ 以及本质不相交的子复形 $T_\Sigma\subset\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathrm{St}_K(Z))$，其中 Σ是 ∂K的一个连通分支，并且 $T=\bigcup_\Sigma T_\Sigma$ 具有以下性质：

(1) 对每个 Σ，$\mathrm{Comp}_{K'}(Z';\ \Sigma) = (\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathrm{Comp}_K(Z;\ \Sigma)) - T) \bigcup T_\Sigma$；并且 *(2)* 对每个 Σ，$\pi^{-1}{}_{(K';\ Z')}(T_\Sigma)$ 都是互不相交的隧道的并集，每个隧道至多包含 λ n个立方体。

注 4.14. 如引言中所述，第 *6* 节和第 *7* 节通过先在每个 Σ 连通分支上挖出一个凹口，并将挖出的凹口汇集成复形 T，来实现扰动。接下来，我们将 T 重新划分为子复形 T_Σ，使其邻接图为树，然后再重新分配。凹刻这一凹口的形式化概念将在第 *5.2* 节讨论。

为了进行几何讨论，回顾 Σ_i 连通分支上的度量以及注 3.10 中的提升会有所帮助。

定义 4.15 (拟共形稳定性**)**。设 K 是一个良好的立方分段线性复形，且 ≥ 1 满足 K。在细化 $(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K))$中，分离复形的序列 (Z_k) 分别称为 K-拟共形稳定，如果对于每个 $k \geq 1$ 和每个边界分支 $\Sigma \subset \partial K$，都存在一个 K-拟共形同胚

$$|\mathsf{Lift}_K(Z;\Sigma)| \to |\mathsf{Lift}_{\mathrm{Ref}^{\nu k}(K)}(Z_k;\Sigma)|,$$

在 $|$核心$_K(Z;\ \Sigma)|$ 上为恒等映射。

现在我们可以陈述关于分离复形的演化定理了。

定理 4.16 (分离复形的演化**)**。设 $n \geq 3$ 和 $m \geq 2$。设 K 是一个良好的立方 n-复形，具有 m 个边界分支和多面体度量 d_K，并设 $\nu = \nu(K) \geq 1$ 为细化尺度。假设 Z_0 是 K 中的一个分离复形。那么存在常数 $\lambda = \lambda(K) \geq 1$ 和 $\mathsf{K} = \mathsf{K}(K) \geq 1$，以及一个分离复形序列 (Z_k)，$Z_k \subset \mathrm{Ref}^{\nu k}(K)$，使得

(1) 每个 Z_k 相对于 Z_{k-1} 都具有相对 *Wada* 性质；*(2)* (Z_k) 具有核扩张性；*(3)* 每个 Z_k 都是 Z_{k-1} 的一个 λ-扰动；*(4)* (Z_k) 是K-拟共形稳定的。

该定理的证明将在接下来的三节中展开。

拓扑 *Wada* 湖。定理 4.16 中的前两个条件推出了拓扑 Wada 湖的存在性。

命题 4.17。设 K 是一个良好的立方复形，其边界分支为 Σ_1、……、Σ_m，其中 $m \geq 3$。假设 (Z_k) 是 $(\mathrm{Ref}^{\nu k}(K))$ 中满足相对 *Wada* 性质的核心扩张分离复形序列。那么

$$X = \bigcap_{k=1}^{\infty} |\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)|$$

是一个 *Wada* 连续统，并且具有如下性质：$|K| \setminus X$ 的每个连通分支都恰好包含一个边界分支 Σ_i。

证明。设

$$M_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} |\mathsf{Core}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k;\Sigma_i)| \quad \text{for } i = 1,\dots,m.$$

核心扩张性质表明，每个 M_i 都是一个区域，即 $M = |K|$ 中的开连通集，并且 $\bigcup_{i=1}^{m} M_i$ 在 M 中稠密。此外，相对 Wada 性质意味着 M_1, ..., M_m 具有相同的拓扑边界。下面给出详细证明。

由于核心 $\mathsf{Core}(Z_k;\ \Sigma_i) = \mathsf{Comp}(Z_k;\ \Sigma_i) - \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)$ 都在扩张，因此立即可得，对于每个 $i = 1$, ..., m，边界 $\partial_{\mathrm{top}} M_i$ 包含于 X。

接下来我们验证，对每个 $i = 1$, ..., m, $X \subset \partial_{\mathrm{top}} M_i$。固定一个指标 i，并令 $x \in X$。那么，对每个 $k \geq 1$，点 x 都包含在两个相邻的 n-立方体 Q_k, $Q'_k \in \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)$ 的并集 $Q_k \cup Q'_k$ 中，它们在 $Z_k^{[n-1]}$ 中有一个公共面。Z_{k+1} 相对于 Z_k 的相对 Wada 性质保证存在一个 n-立方体 $Q^*_{k+1} \in \mathsf{Comp}(Z_{k+1};\ \Sigma_i)^{[n]} \bigcap \mathsf{Ref}^{\nu}(Q_k \cup Q'_k)^{[n]}$。$\mathsf{Comp}(Z_{k+1};\ \Sigma_i)$ 中的每个 n-立方体都必须与核心 $|\mathsf{Core}(Z_{k+1};\Sigma_i)|$ 相交。我们在 $Q^*_{k+1} \cap |\mathsf{Core}(Z_{k+1};\Sigma_i)|$ 中固定一点 x_{k+1}。因此，x 是 M_i 中的一个序列 (x_{k+1}) 的极限点。由于 x 不在 M_i 的内部，它必定是 M_i 的边界点。

由此得出

$$\partial_{\mathrm{top}} M_1 = \cdots = \partial_{\mathrm{top}} M_m = X.$$

□

5. Indentations

本节旨在证明凹陷展平定理（定理 5.17）。直观地说，通过某种特定类型的凹陷形成的带凹陷立方复形，可以借助双利普希茨同胚恢复为凹陷前的形式，且双利普希茨常数不依赖于凹陷的结构。这类凹陷称为凹陷。读者也可以先阅读第 6.2.5 节中蓄水池和运河的构造，再阅读本节。

5.1. 谱立方体。

在讨论凹陷之前，我们先定义谱立方体和子复形的谱。

定义5.1。设 K 是一个立方 n复形， P 是$\mathrm{Ref}^k(K)$的一个 n子复形，且 $0 \leq j \leq k$。若$\mathrm{Ref}^j(K)$ 是一个 n立方体，则称其为关于 P 秩 j 相对于 K 的谱立方体，如果

(1) $|Q| \subset |P|$，且 *(2)* Q 不属于任何满足 $i < j$ 和 $|Q'| \subset P$的 n-立方体 $Q' \in \mathrm{Ref}^i(K)$细分。

注 5.2. 显然，子复形的细分具有相同的谱立方体，也就是说， Q 是秩为 j 的 $P \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 的谱立方体，当且仅当Q 是秩为 j的 $\mathrm{Ref}(P) \subset \mathrm{Ref}^{k+1}(K)$ 的谱立方体。

定义 5.3. 设 K 是一个立方体 n-复形，且 P 是 $\mathrm{Ref}^k(K)$的一个 n-子复形。P 关于 K 的谱 $\mathcal{S}_*(P;\ K)$ 是序列

$$\mathcal{S}_*(P;K) = (\mathcal{S}_0(P;K), \mathcal{S}_1(P;K), \ldots, \mathcal{S}_k(P;K)),$$

其中 $\mathcal{S}j(P;\ K)$ 是由相对于 K秩为 j 的 P 的谱立方体张成的$\mathrm{Ref}^j(K)$ 的子复形。

稍微滥用一下记号，我们用以下符号表示相对于 K 的 P 的整个谱立方体族

$$\mathcal{S}_*(P;K)^{[n]} = \bigcup_{j=0}^{k} \mathcal{S}_j(P;K)^{[n]}.$$

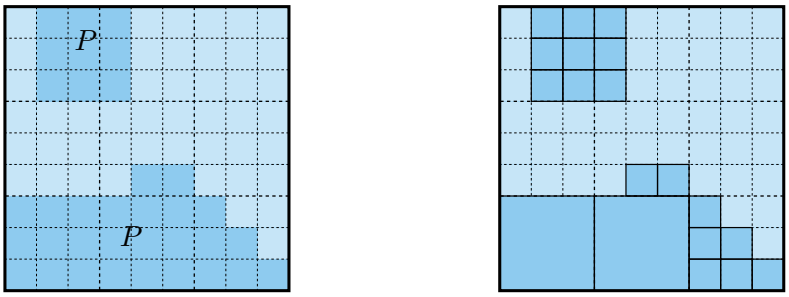

FIGURE 4. 左：由一个二维立方体组成的立方复形，以及 $P\,\mathrm{Ref}^2(K)$ 的一个子复形。右： P的谱立方体。

注5.4。 根据定义*5.1*中(2) 的极大性条件，子复形 $P \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 有唯一的谱 $\mathcal{S}_*(P;\, K)$，并且

$$P = \bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{Ref}^{k-j}(\mathcal{S}_j(P;K)).$$

此外，$\mathcal{S}_*(P;\, K)$ 是 $|P|$的本质划分。

5.2. **立方体与星形凹陷**。 我们定义两类凹陷，即立方体凹陷和星形凹入，然后将它们合并为凹陷的定义。

粗略地说，立方体凹陷是 $\mathrm{Ref}^k(K)$ 中的一个 n-子复形，其所有谱立方体都位于边界 $|\partial K|$ 上。下面给出的正式定义限制更严格，并对谱立方体的大小和邻接关系施加了一些额外的正则性条件。

定义 5.5. 设 K 是一个良好的立方体 n复形，且 q 是$(n-1)^{[n-1]}$中的(∂K) 立方体。一个立方体 n子复形 $D \subset \mathrm{Ref}^k(K)$（可以为空）称为中的立方体凹陷（在 q上），如果其谱$\mathcal{S}_*(D;K)$ 满足以下性质。

(1) $S_0(D;K) = S_1(D;K) = \varnothing$。*(2)* D 的每个谱立方体都有一个面包含在 $|q|$的内部。*(3)* 三个不同谱立方体 Q、Q'、Q'' 的交集 $Q \cap Q' \cap Q''$ 为空。*(4)* 谱立方体 $Q \in S^j(D;K)$ 与 $Q' \in S^{j'}(D;K)$ 的交集 $Q \cap Q'$（若非空）是 Q' 的一个面；在 $j < j'$ 的情况下，Q' 仅与 Q 的两个面相交，其中一个面是 $Q \cap |q|$。

我们记录关于立方体凹陷的两个简单观察。

引理 5.6. 设 $D \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K 上的一个分段线性 $q \in (\partial K)^{[n-1]}$ 立方体凹陷，且 $Q \in \mathcal{S}_*(D;K)^{[n]}$ 是 D中的一个谱立方体。则 Q 至多与两个边长相同或更大的谱立方体相交，其中至多一个的边长大于 Q。此外，若 Q 与两个边长相同或更大的谱立方体 Q' 和 Q'' 相交，则$Q \cap Q'$ 和 $Q \cap Q''$ 是 Q的对面。

注意，对于 $\mathsf{S}_*(D;K)$ 中边长较小的谱立方体，立方体 Q 可能与之相交的数量并无限制。这是后续构造中的一个关键性质。

引理 *5.6* 的证明。 对于第一个断言，假设 $\mathsf{S}_*(D;K)$ 中的一个谱立方体 $Q^{[n]}$ 与 $\mathsf{S}_*(D;K)^{[n]}$ 中边长相同或更大的谱立方体 Q' 和 Q'' 相交。由于根据 (3)，$Q \cap Q' \cap Q''$ 为空集，因此 $Q \cap Q'$和 $Q \cap Q''$ 是 Q的对面。由于这对 $\mathsf{S}_*(D;K)^{[n]}$ 中所有边长与 Q相同或更大的谱立方体都成立，我们得出结论： Q至多与两个边长相同或更大的谱立方体相交。

沿用前面的记号，我们可以假设Q'' 的边长不大于 Q'的边长。由于互不相交的谱立方体之间的距离至少等于较小立方体的边长，我们进一步有 Q'' 的边长不大于 Q的边长。因此， Q 至多与一个边长更大的谱立方体相交。□

引理 5.7。 设 $D \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K 中关于 q的一个立方体凹陷，对任意一个$(n-1)$-立方体 $q \in \partial K$，则

(1) 由 ℓ 个互异的 n-立方体组成的 $\mathcal{S}j(D;K)$ 的一个连通 n-子复形同构于 $[0,1]^{(n-1)} \times [0,\ell]$; *(2)* D 的每个连通分支都是邻接连通的，并且也是关于 q的一个立方体凹陷；以及 *(3)* 如果 D是连通的，那么 $|D|$ 是一个 n-胞腔，而 $|D \cap \partial K|$ 和 $|\partial D - \partial K|$是$(n-1)$-胞腔。

证明。 性质 (1) 和 (2) 直接由定义可得。性质 (3) 可以通过对 $\mathsf{S}_*(D;K)$ 中谱立方体的数量进行归纳法轻松验证。□

现在我们定义第二类凹陷——星形凹入。启发式地说，关于 ∂K 的立方体凹陷不会弯曲。为了使其弯曲，我们用星形凹入连接关于相邻 $(n-1)$-立方体的凹陷。我们分两部分给出形式化定义。

定义 5.8。 设 K 是一个良好的立方体 n-复形，且 $\xi \in (\partial K)^{[n-2]}$ 是一个 $(n-2)$-立方体。对于 $e \in (\mathrm{Ref}^j(\xi))^{[n-2]}$，我们称子复形 $S = \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^j(K)}(e) \subset \mathrm{Ref}^j(K)$ 为从 ξ 发出的星形。

定义 *5.9*。设 K 是一个良好的立方体 n-复形，且 $\xi \in (\partial K)^{[n-2]}$ 是一个 $(n-2)$-立方体。如果子复形 $A \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K 中的一个星形凹入（由 ξ 发出），则 $A = \mathrm{Ref}^{k-j}(S)$ 是从 ξ 发出的星形 $S = \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^j(K)}(e)$ 的细分。在这种情况下，我们称 S 为定义 A 的星形，并将其记为 S_A。

注 5.10. 根据引理 *3.16*，$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^j(K)}(e)$的邻接图是循环的，而 $S \cap \mathrm{Ref}^j(\partial K)$ 是 ∂S 中包含 η 的两个 $(n-1)$ 立方体的并集。

K 中的凹陷定义为： ∂K 中一族位于$(n-1)$立方体上的立方体凹陷与 ∂K中从$(n-2)$立方体发出的一族星形凹入的并集，它们的交集还须遵循一些特定规则。

定义 5.11. 设 K 是一个良好的立方体 n复形。 B 的一个子复形，属于 $\mathrm{Ref}^k(K)$ $k \geq 2$，称为 K 中的凹陷，如果 B 有一个本质不相交划分

$$B = (\bigcup_{D\in\mathcal{D}(B)} D) \cup (\bigcup_{A\in\mathcal{A}(B)} A),$$

其中 $\mathcal{D}(B) = \{D_q\colon \ q \in (\partial K)^{[n-1]}\}$ 是由本质不相交的立方体凹陷组成的族，而 $\mathcal{A}(B)$ 是 K 中由互不相交的星形凹入组成的族，且具有以下性质：

(1) 若 $D_q, D_{q'} \in \mathcal{D}(B)$ 对 $q \neq q'$ 相交，则对于 $|D_q \cap D_{q'}|$ 的每个连通分支 η，都存在一个从 $\xi = q \cap q'$ 发出的星形凹入 $A_\eta = \mathrm{Ref}^{k-j}(S_\eta) \in \mathcal{A}(B)$，使得 $|D_q \cap D_{q'} \cap A_\eta| = \eta$。*(2)* 若星形凹入 $A = \mathrm{Ref}^{k-j}(S_A) \in \mathcal{A}(B)$ 与立方体凹陷 $D_q \in \mathcal{D}(B)$ 相交，其中 S_A 是从 ξ 发出的星形，则 $|A \cap D_q|$ 是 S_A 与 D_q 中一个不与 ξ 相交的谱立方体的公共面。

我们对该定义作两点注释。

注 5.12。 假设 $D_q \cap D_{q'} \neq \varnothing$ *for* $q \neq q'$。那么， q 和 q'是 K中同一个 n 立方体的面，该立方体包含 $|D_q|$ 和$|D_{q'}|$；见图 *5* 左图。根据 (1) 以及星形的结构，交集的每个连通分支都是相交谱立方体的公共边 e （即 $(n-2)$-立方体）。特别地，相交的谱立方体具有相同的边长。此外，在这种情况下，从$\xi = q \cap q'$ 发出的每个星形都由单个 n-立方体组成。因此，A_η 是一个单独的立方体，它的一个面位于 D_q 中，另一个面位于 $D_{q'}$中。

注 5.13。 设 $A = \mathrm{Ref}^{k-j}(S_A) \in \mathcal{A}(B)$ 为一个星形凹入， S_A为从 ξ发出的星形。由于 ξ 恰好与 ∂K的两个 $(n-1)$-立方体相交，S_A 至多与 $\mathcal{D}(B)$中的两个立方体凹陷相交。注意，该定义并不排除以下可能性：$\mathcal{D}(B)$ 中只有一个，甚至没有一个与 S_A相交的立方体凹陷；见图 *5* 右图。

5.3. **压平凹陷**。 本节讨论一种用于展平凹陷的迭代过程。我们的目标是从带凹陷复形的空间到原复形的空间获得一个双利普希茨同胚，其双 Lipschitz 常数不依赖于具体的凹陷。为此，我们首先讨论凹陷的邻域，即楔形；借助楔形，我们可以追踪展平过程中双 Lipschitz 常数的变化。

5.3.1. 楔形。 子复形的楔形定义如下。

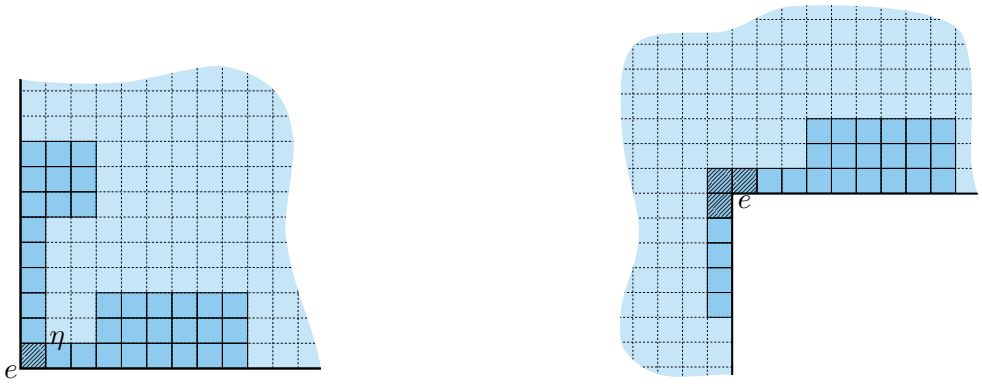

FIGURE 5.凹陷——立方体凹陷中的谱立方体（中蓝色）以及星形凹陷中的星形（阴影蓝色）。

定义 5.14。设 K 是一个良好的立方体 n-复形。设 $P \subset \mathrm{Ref}^k(K)$是一个子复形，其中每个谱立方体要么有一个面位于 $|\partial K|$上，要么属于边界 $|\partial K|$中某个$(n-2)$-立方体 e 的星形 $\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^j(K)}(e)$。若存在 $p \in |P|$ 使得……，则称 $x \in |K|$ 位于 P的楔形中

$$\mathrm{dist}_K(x, |P|) = d_K(x, p) \leq \mathrm{dist}_K(p, |\partial K|)/4,$$

其中， d_K 是第 *2.1.3* 节中定义的 K 的标准度量。我们称

$$\mathrm{Wedge}_{|K|}(P) = \{x \in |K| \colon x \textit{ is in the wedge of } P\}$$

为 P在 $|K|$中的楔形。

注意，楔形$_{|K|}(P)$ =楔形$_{|K|}$(Ref(P))，并且观察到，楔形既可以在凹陷上定义，也可以在凹陷中的单个 n立方体 Q 上定义。

我们首先证明与立方体凹陷中的立方体相关联的楔形具有不重叠性质。

引理 5.15. 设 $k \geq 2$ 和 $D \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K中的一个立方体凹陷，且位于一个$(n-1)$-立方体 $q \in \partial K$中。那么

(1) 若 Q 和 Q' 是 $S_*(D)^{[n]}$ 中的立方体，且满足 $Q \cap Q' = \varnothing$，则 $\mathrm{Wedge}_{|K|}(Q) \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q') = \varnothing$；*(2)* 若 Q、Q'、Q'' 是 $S_*(D)^{[n]}$ 中的三个互不相同的立方体，则 $\mathrm{Wedge}_{|K|}(Q) \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q') \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q'') = \varnothing$。

证明. 为证明 (1)，设 $Q \in \mathrm{S}j(D)$ 和 $Q' \in \mathrm{S}j'(D)$ 是两个不相交的n-立方体。不妨设 $j \leq j'$。则 Q 与 Q'之间的距离至少为 $3^{-j'}$。

反设 $\mathrm{Wedge}_{|K|}(Q) \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q') \neq \varnothing$，且 $x \in \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q') \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q'')$。再设 $p \in Q$ 和 $p' \in Q'$ 是满足以下条件的点：dist $(x, Q) = d(x, p) \leq$ dist $(p, |\partial K|)/4$，且 dist $(x, Q') = d(x, p') \leq$ dist $(p', |\partial K|)/4$。注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\,(p, |\partial K|) &\leq d(p, x) + d(x, p') + \mathrm{dist}\,(p', |\partial K|) \\ &\leq \mathrm{dist}\,(p, |\partial K|)/4 + 5\,\mathrm{dist}\,(p', |\partial K|)/4.\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{dist}(p,\ |\partial K|) \leq 5\operatorname{dist}(p',\ |\partial K|)/3$，并且

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(Q,Q') &\leq d(p,p') \leq d(p,x)+d(x,p')\\ &\leq \operatorname{dist}(p,|\partial K|)/4+\operatorname{dist}(p',|\partial K|)/4\\ &\leq 2\operatorname{dist}(p',|\partial K|)/3 \leq 2\cdot 3^{-j'-1}.\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此 $\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q')\cap\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q'')=\varnothing$。

为证明 (2)，设 Q，Q'，Q'' 是 $\mathsf{S}_*(D)^{[n]}$ 中的三个互不相同的立方体，并假设 Q'' 的尺寸小于或等于另外两个。设 $\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q)\cap\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q')\cap\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q'')\neq\varnothing$。那么，根据本引理的第 (1) 部分，$Q\cap Q''\neq\varnothing$ 和 $Q'\cap Q''\neq\varnothing$；又由引理 5.6 可知，这些交集是 Q''的对面。这就产生了矛盾，因为 $Q\cap Q'\neq\varnothing$。因此 $\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q)\cap\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q')\cap\operatorname{Wedge}^{|K|}(Q'')=\varnothing$。□

引理 5.15 的证明稍作修改即可得到以下结论。

推论 5.16. 设 $B\subset\operatorname{Ref}^k(K)$ 是 K 中的一个凹陷 。如定义 *5.11* 中所述，记 $B=\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(B)} D\right)\cup\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}(B)} A\right)$，并令

$$\mathcal{C}(B)=\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(B)}\mathcal{S}_*(D)^{[n]}\right)\cup\{S_A\colon A\in\mathcal{A}(B)\}$$

为定义 B 的谱立方体和星形的集合。则

(1) 若 C 和 C' 是$\mathcal{C}(B)$ 中的两个元素，且 $|C|\cap|C'|=\varnothing$，则楔形$^{|K|}(C)\cap$楔形$^{|K|}(C')=\varnothing$；*(2)* 若 Q、Q'、Q'' 是$\mathcal{C}(B)$ 中三个互不相同的谱立方体，则它们的楔形交集为空。

证明. 性质 (1) 在 C 和 C' 均属于同一个立方体凹陷的情况下，已在引理 5.15 中证明。当 C 和 C' 分别属于 $\mathsf{D}(B)$ 中不同的 D 和 D'，或它们中至少一个是星形时，也可用类似方法证明。

性质（2）已在三个立方体都与同一个 $D\in\mathsf{D}(B)$相关联的情形下得到证明。其他情形也可以类似地证明。□

5.3.2. 凹陷展平定理。 现在我们已经准备好陈述本节的主定理。由于谱立方体周围楔形之间具有不相交性质，凹陷可以通过支撑在楔形中的双利普希茨同胚展平。回顾一下，定理表述中的 $\mu(K)$是 K的局部重数；参见定义 4.8。

定理 5.17 （凹陷展平）。 设 K 是一个良好的立方体 n-复形。则存在一个常数 $L=L(n,\ \mu(K))\geq 1$，使得满足以下条件。若$B\subset\operatorname{Ref}^k(K)$是 K中的一个凹陷，则存在一个分段线性L-双利普希茨同胚

$$\phi_B\colon|\operatorname{Ref}^k(K)-B|\to|\operatorname{Ref}^k(K)|,$$

其在 $|K|\setminus$楔形$^{|K|}(B)$上是恒等映射。

定理 5.17 的证明从展平单个立方体开始。

命题 5.18。 设 $B \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K 中的一个凹陷，且 Q 是$\mathcal{C}(B)$ 中边长最小的谱立方体。则复形空间$T = \partial Q \cap \partial(\mathrm{Ref}^k(K) - B)$ 和 $\partial Q - T$ 是$(n-1)$-胞腔，其公共边界是一个$(n-2)$-球面。此外，存在一个分段线性$L(n)$-双利普希茨映射

$$\psi\colon |\mathrm{Ref}^k(K) - B| \to |\mathrm{Ref}^k(K) - B| \cup |Q|,$$

它是在楔形$|K|(Q)$的补集中的恒等映射。

证明。 设 $q_0 = Q \cap |\partial K|$，并设 $t \in \{0,1,2\}$ 为 $\mathsf{C}(B)$ 中与 Q相邻的元素个数。对于第一个断言，分三种情况讨论。

若 $t = 0$，即 Q 与 $\mathsf{C}(B)$ 中的其他任何元素都不相交，则$\partial Q - T = q_0$ 和 $T = \partial Q - q_0$ 是 $(n-1)$-胞腔。

若 $t = 1$，即 Q 与一个谱立方体或 $\mathsf{C}(B)$ 中的一个星形共用一个面 q_1，且不与其他元素共用面。由于 q_0 和 q_1 必须相邻，$\partial Q - T = q_0 \cup q_1$ 和 $T = \partial Q - (q_0 \cup q_1)$ 是 $(n-1)$-胞腔。

最后，若 $t = 2$，则 Q 与 $\mathsf{C}(B)$ 中两个不同的元素分别共用面 q_1 和 q_2。由于 q_1 和 q_2 必须是 Q的对面，两者都与q_0相邻。因此， $\partial Q - T = q_0 \cup q_1 \cup q_2$和 $T = \partial Q - (q_0 \cup q_1 \cup q_2)$ 是 $(n-1)$-胞腔。

对于第二个断言，只需注意到，存在一个常数$L \geq 1$和一个分段线性的 L- 双利普希茨映射 $|T| \to |\partial Q - T|$，它在边界 $|\partial T|$ 上是恒等映射。该映射可延拓为一个分段线性双利普希茨映射 $\mathrm{cl}(\mathrm{Wedge}|K|(Q) \setminus |B|) \to \mathrm{cl}(\mathrm{Wedge}|K|(Q) \setminus |B - Q|)$，且在 $\mathrm{Wedge}|K|(Q)$ 的边界上是恒等映射。现在令 ψ 为该映射按恒等映射延拓所得的映射。□

有了命题 5.18，我们现在可以归纳地展平所有最小尺寸的谱立方体。为表述该结论，令 $\delta(B)$为最大的指标 j，使得对于某个 $D \in \mathsf{D}(B)$，有 $\mathsf{S}j(D) \neq \varnothing$，并令

$$B^\dagger = B - \bigcup_{D \in \mathcal{D}(B)} \mathrm{Ref}^{k-\delta(B)}(\mathcal{S}_{\delta(B)}(D))$$

为 B 的一个子复形，其中排除了 B 的最小谱立方体。注意， $B^\dagger$ 仍然是一个凹陷。观察到 $\delta(B^\dagger) < \delta(B)$，并记

$$\mathcal{C}(B)_{\delta(B)} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}(B)} \mathcal{S}_{\delta(B)}(D)^{[n]}.$$

引理 5.19。 存在一个常数 $L = L(n) \geq 1$，满足以下条件。若$B \subset \mathrm{Ref}^k(K)$ 是 K 中的一个凹陷，则存在一个分段线性 L- 双利普希茨同胚

$$\phi_{B^\dagger}\colon |\mathrm{Ref}^k(K) - B| \to |\mathrm{Ref}^k(K) - B^\dagger|,$$

它在 $|K| \setminus$楔形$|K|(\mathcal{C}(B)^{\delta(B)})$上是恒等映射。

证明。 固定 $\mathsf{C}(B)^{\delta(B)}$ 中 n-立方体的一个枚举 $Q_1, \ldots, Q_s$，用以确定展平这些立方体的顺序。对于每个 $i = 1, \ldots, s$，令 $E_i = Q_1 \cup \cdots \cup Q_i$，并且也令 $E_0 = \varnothing$。注意，每个 $B - E_i$ 都是 K 中的一个凹陷，并且 $B - E_s = B^\dagger$。

由命题 5.18，存在 $L = L(n) \geq 1$，并且对于每个 $i = 1, \dots, s$，存在一个分段线性的 L'-双利普希茨映射

$$\psi_i \colon |(\mathrm{Ref}^k(K) - B) \cup E_{i-1}| \to |(\mathrm{Ref}^k(K) - B) \cup E_i|,$$

其在 $\mathrm{Wedge}^{|K|}(Q_i)$ 的补集上是恒等映射。根据推论 5.16，可以选择映射 ψ_i，使得对于每个与 Q_i 相交的 $Q \in \mathrm{C}(B)^{\delta(B)}$，像 $\psi_i(\mathrm{Wedge}^{|K|}(Q))$ 对任意 $Q' \in \mathrm{C}(B)^{\delta(B)}, Q' \neq Q_i, Q$ 都不与 $\mathrm{Wedge}^{|K|}(Q')$ 相交。

由于 D 的每个谱立方体至多与另外两个相同大小的谱立方体相交，因此对每个 $x \in |K|$，有

$$\psi_i(\psi_{i-1} \dots (\psi_1(x))) \neq \psi_{i-1}(\psi_{i-2} \dots (\psi_1(x)))$$

至多对于两个指标 $i \in \{2, \dots, s\}$ 成立。因此复合映射

$$\psi_B = \psi_s \circ \cdots \circ \psi_1 \colon |\mathrm{Ref}^k(K) - B| \to |\mathrm{Ref}^k(K) - B^\dagger|$$

是一个 $(L')^2$-双利普希茨同胚，并且在 $\mathrm{Wedge}^{|K|}(\mathrm{C}(B)^{\delta(B)})$ 的补集上是恒等映射。□

定理 *5.17* 的证明。 由于凹陷 B 的子复形 $B^\dagger$ 仍然是一个凹陷，我们可以反复应用引理 5.19，将所有谱立方体展平。根据推论 5.16，如果 Q, Q', Q'' 是 $\bigcup_{D \in \mathcal{D}(B)} \mathrm{S}_*(D)^{[n]}$ 中三个不同的谱立方体，那么

$$\mathrm{Wedge}_{|K|}(Q) \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q') \cap \mathrm{Wedge}_{|K|}(Q'') = \varnothing.$$

反复应用引理 5.19 及其证明，可得存在各自的 $L(n)$-双利普希茨同胚

$$|\mathrm{Ref}^k(K) - B_0| \to |\mathrm{Ref}^k(K) - B_1| \to \cdots \to |\mathrm{Ref}^k(K) - B_t|,$$

它们的复合映射 $\psi_{\mathcal{D}(B)}$ 是 $(L(n))^2$-双利普希茨的，且在 $\mathrm{Wedge}^{|K|}(\bigcup_{D \in \mathcal{D}(B)} D)$ 的补集上是恒等映射。这里 $B_0 = B$, $B_i = (B_{i-1})^\dagger$，而 $t \in [1, k]$ 是满足 $\mathrm{S}_j(\bigcup_{D \in \mathcal{D}(B)} D) \neq \varnothing$ 的指标 j 的个数。因此 $B_t = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(B)} A$，并且所有谱立方体都被该映射压平

$$\psi_{\mathcal{D}(B)} \colon |\mathrm{Ref}^k(K) - B| \to |\mathrm{Ref}^k(K) - \bigcup_{A \in \mathcal{A}(B)} A|.$$

由于 $\mathrm{A}(B)$ 中的元素两两不相交，根据推论 5.16，不同元素的楔形也不相交。$\mathrm{A}(B)$ 中的星形凹陷可以分别压平。令 $A = \mathrm{Ref}^{k-j}(S_A) \in \mathrm{A}(B)$，且 $S_A \subset \mathrm{Ref}^j(K)$。那么 $|\partial A \cap \mathrm{Ref}^k(\partial K)| = |S_A \cap \mathrm{Ref}^j(\partial K)|$ 是两个相邻的 $(n-1)$-立方体之并，因此是一个 $(n-1)$-胞腔。因此，$\partial A - \mathrm{Ref}^k(\partial K)|$ 也是一个 $(n-1)$-胞腔。

由于 $S_A, A \in \mathrm{A}(B)$ 中 n-立方体的数量至多为 $\mu(K)$，因此存在一个分段线性的 $L(n, \mu(K))$-双利普希茨同胚

$$\psi_{\mathcal{A}(B)} \colon |\mathrm{Ref}^k(K) - \bigcup_{A \in \mathcal{A}(B)} A| \to |K|,$$

它在 $\mathrm{Wedge}^{|K|}(\bigcup_{A \in \mathcal{A}(B)} A)$ 的补集中是恒等映射。

令 $\phi_B = \psi_{\mathcal{A}(B)} \circ \psi_{\mathcal{D}(B)}$ 即可得出该结论。 □

6. Channeling by reservoirs and canals

本节将展开演化定理 4.16（通过蓄水池和运河进行导流）证明中的技术部分。

为具体起见，假设给定了一个立方体 n复形 K 中的分离复形 Z，该复形具有 m个边界分支，并给定细化尺度 ν。我们的任务是将 $\mathsf{Ref}^{\nu}(Z)$ 在 $\mathsf{Ref}^{\nu}(K)$ 中扰动为一个新的（$n-1$）-$\widetilde{}$复形 Z，使其相对于 Z 具有相对 Wada 性质，并具有受控几何。

扰动分两步进行。第一步，我们沿着 Z 构造一个蓄水池—运河系统 $\mathsf{RC}(Z)$，该系统具有 m 个子系统 $\mathsf{RC}(Z)_1$、……、$\mathsf{RC}(Z)_m$，并将 Z 变换为一个新的（$n-1$）-子复形 $\mathsf{Tr}(Z) \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(Z) \cup \mathsf{RC}(Z)$，使其相对于 Z满足前 Wada 性质。复形 $\mathsf{Tr}(Z)$ 尚不是分离复形，因为割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathsf{Ref}^{\nu}(K); \mathsf{Tr}(Z))$ 具有 m 个额外的连通分支，每个分支都与 $\mathsf{RC}(Z)_i$ 的一棵生成树相关联。第二步，我们从 $\mathsf{Tr}(Z)$ 中移除一些（$n-1$）-立方体，以在Γ^{cut}的某些分支之间建立连接，从而解决这一问题。我们将这一过程称为通道化，并将新复形$\sim Z = \mathsf{Ch}(Z)$ 称为 Z的通道化。

从直观上看，$|K|$ 中被分离复形 Z隔开的区域，可以视为注满不同颜色水的湖。蓄水池-运河系统只是中间结构，经过变换后会被划分为人工湖，再通过通道化注入水。$\widetilde{}$特别地，$Z = \mathsf{Ch}(Z)$的湖与 Z中的湖颜色相同。

注。我们强调，尽管 Z 是 K的子复形，但对 Z 的扰动是在 K的细分 $\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 中进行的。因此，变换 $\mathsf{Tr}(Z)$、通道化$\mathsf{Ch}(Z)$以及蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Y)$ 均被理解为 $\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 的子复形。

本节分为两部分。第一部分（第6.1、6.2和6.3节）构造蓄水池-运河系统并讨论变换。第二部分（第6.4节）讨论通道化。

对 Z 进行初始扰动后，从第二次迭代开始，将在分离复形的子复形上局部进行通道化。因此，本节中的构造针对的是这样的配对 $(U, Y) \subset (K, Z)$：其中 Y 与 U 之间的拓扑关系比 Z 与 K 之间的拓扑关系更复杂。特别是，Y 不必是 U 中的分离复形，Y 甚至不必包含在 U 的内部。

6.1. 目标与基本假设。我们在命题 6.5 中陈述变换的目标，并在之后的命题 6.39 中概述变换与通道化的组合过程。本节中，我们对复形 K 作如下假设。

既定假设 6.1。

- K 是一个良好的立方 n-复形，具有 $m(\geq 2)$ 边界分支，Σ_1，……，Σ_m，并且容许一个分离复形。
- $\mu = \mu(K)$ 是 K 的局部重数，而 $\nu = \nu(K) \geq 1$ 是 K 的细化尺度，也就是说，是一个满足 $3^{\nu} \geq 3^{10}\mu^2 m$ 的整数。

现在我们定义可用于变换的复形对 (U, Y)。

定义 6.2. 设 $k \geq 0$ 和 Z_k 是$\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$中的一个分离复形。若存在一个邻接连通的 n-子复形 U，它是$\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$ 的子复形，且满足

(1) $Y \subset U$，*(2)* Y中的每个 $(n-1)$-立方体都是 U中的一个 n-立方体的面，*(3)* U 中的每个 n-立方体都有一个面属于 Y，*(4)* 割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(U; Y)$ 的每个连通分支都是某个 $\Gamma(\mathit{Comp}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k; \Sigma_i))$ 的子图，并且 *(5)* 对于每个 $i = 1, \ldots, m$，子复形 U 在 $\mathit{Comp}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k; \Sigma_i)$ 中至少有一个 n-立方体。

我们称 (U, Y) 为一个容许对。

定义 6.3。若本质不相交划分$\mathcal{L}$ 中每个元素在$(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)\ Z_k)$中都是可容许的，则称其为的局部化。

显然，(K, Z) 是 (K, Z) 中的一个容许对，且 $\mathrm{L}_0 = \{Z\}$ 是 Z的局部化。

根据定义 6.2 中的条件 (4) 和 (5)，$\Gamma^{\mathsf{cut}}(U; Y)$ 至少有 m个连通分支。我们采用以下约定来标记这些分支。

约定 *6.4*。设对 (U, Y) 在 $(\mathit{Ref}^{k\nu}(K)\ Z_k)$ 中是可容许的。我们将割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(U; Y)$ 的连通分支 $G_1, \ldots, G_r$ 标记如下：对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$，$\mathit{Span}_U(G_i)$ 包含于 $\mathit{Comp}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k; \Sigma_i)$ 中，其中 $r = r(U, Y) \geq m$。

现在陈述本节第一部分的主要结果。

命题 6.5. 假设既定假设 *6.1* 成立，并且 Z_k 是$\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$中的一个分隔复形。设(U, Y) 是$(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)\ Z_k)$ 中的一个可容许对，并且 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(U; Y)$ 的连通分支 $G_1, \ldots, G_r$ 按照约定 *6.4* 标记。那么，存在一个邻接连通的$(n-1)$ 子复形

$$\mathsf{Tr}(Y) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(U)$$

使得

(1) 割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U); \mathsf{Tr}(Y))$ 有 $r+m$ 个连通分支，

$$G_1', \ldots, G_r', \tau_1, \ldots, \tau_m,$$

其中，对于 $i \in \{1, \ldots, r\}$，G_i' 是 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathrm{Span}_U(G_i)))$ 的一个子图，而对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$，τ_i 是一个大小至多为 $\lambda = \lambda(\#(Y^{[n-1]})\ \mu, \nu)$ 的树；并且 *(2)* $\mathsf{Tr}(Y)$ 满足前 Wada 性质：对每个 $q \in Y^{[n-1]}$ 和每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，在张成$\mathrm{Ref}^{\nu(U)}(\tau_i)$ 中都存在一个 n-立方体，其一个面位于 q 中。

复形 $\mathsf{Tr}(Y)$ 称为 Y的变换。该命题的证明在第 6.3.1 节末完成。

6.1.1. 偏好函数。在构建用于该变换的蓄水池-运河系统之前，我们先介绍偏好函数的概念，这些函数用于指导蓄水池和运河的布置。

定义 6.6. 设 U 是一个具有良好内部的 n-立方复形，且$Y \subset U$是一个($n-1$)-子复形。若函数 $\rho\colon Y^{[n-1]} \to U^{[n]}$满足在 Y上，对每个 $q \in Y^{[n-1]}$, $\rho(q)$ 都是一个以 q 为面的 n-立方体，则称其为偏好函数。

我们不假设偏好函数 ρ 是单射，也不假设立方体 $\rho(q)$ 和 $\rho(q')$ 相邻，即使 q 和 q' 相邻也是如此。

对于 $(\mathsf{Ref}^{k\nu}(K)\ Z_k)$ 中的一个容许对 (U, Y)，若偏好函数ρ_Y: $Y^{[n-1]} \to U^{[n]}$ 满足： $\rho_Y(Y^{[n-1]})$ 在每个 $\mathsf{Span}_U(G_i)$ 中都至少包含一个n-立方体，因而在 $\mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k;\ \Sigma_i)$ 中也如此（对 $i \in \{1, \dots, m\}$），则称其为可容许的 。注意，每个容许对总是存在一个可容许的偏好函数。

6.2. **蓄水池与运河系统**。现在我们为命题 6.5 的证明构造蓄水池—运河系统。图 6 和图 7 展示了这一构造的示意图。[1]

为此，我们保留命题中的所有假设，并固定一个可容许的偏好函数 ρ_Y: $Y^{[n-1]} \to U^{[n]}$ 以及 Γ（Y）中的一个偏序生成树 T_Y。

利用数据（U， Y， ρ_Y，T_Y），我们在每个 $q \in Y^{[n-1]}$ 上方建造一个蓄水池，然后用运河将它们连接起来。蓄水池的位置由偏好函数 ρ_Y 决定，运河的流向由生成树 T_Y 决定。为简便起见，我们记 $\rho = \rho_Y$ 和 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_Y$。

我们首先介绍第 6.2.1 $\sim$ 6.2.4 节中预储库块、标记、运河截段和连接器的构造。

6.2.1. 预储库块。 我们固定一族模型蓄水池 $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m$，它们位于单位 n 立方体 $[0,1]^n$ 中。对于每个 $i = 1, \dots, m$，令

$$D_i = \left[\frac{4}{9} + \frac{i-1}{3^\nu}, \frac{5}{9} - \frac{i-1}{3^\nu}\right]^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{9} - \frac{i-1}{3^\nu}\right] \subset [0,1]^n,$$

并令 $D_{m+1} = \varnothing$。我们将 $\mathbf{R}_i \subset \mathsf{Ref}^\nu([0,1]^n)$ 取为其空间是 $\mathsf{cl}(D_i \setminus D_{i+1})$ 的子复形，即

$$\mathbf{R}_i = \mathrm{Span}_K(\{Q \in \mathrm{Ref}^\nu(U)^{[n]} \colon Q \subset \mathrm{cl}(D_i \setminus D_{i-1})\}).$$

注意，每个 $|\mathbf{R}_i|$ 都是一个 n-胞腔，且 $\Gamma(\mathbf{R}_i)$ 是连通的。我们称这些立方复形 $\mathbf{R}_i$ 预储库块。

为了根据偏好函数 ρ 在 Y 上构造预储库块，令 $q \in Y^{[n-1]}$ 和 $Q = \rho(q)$。如有必要，对 $[0,1]^n$ 作等距变换后，我们可以假设与立方结构中的 Q 相关联的映射 $\phi_Q\colon Q \to [0,1]^n$ 具有如下性质： $\phi_Q(q) = [0,1]^{n-1} \times \{0\}$。由于 $\mathsf{Ref}^\nu(Q) = \phi_Q^*(\mathsf{Ref}^\nu([0,1]^n))$，子复形

$$\mathsf{R}_{q;i} = \phi_Q^*(\mathbf{R}_i) \subset \mathrm{Ref}^\nu(Q), \qquad i = 1, \dots, m,$$

[1]图 6 和图 7 是在 Julie Kaufman 的协助下绘制的。

是良定义的。我们称 $\mathsf{R}_{q,\,1}$，……，$\mathsf{R}_{q,\,m}$ 与 相邻的预储库块。这个名称源于这样一个事实：

$$\mathsf{R}_{q;i} \cap \operatorname{Ref}^{\nu}(q) = \phi_Q^*(\mathsf{R}_i \cap \operatorname{Ref}^{\nu}([0,1]^{n-1} \times \{0\}))$$

是包含于 $|q|$中的一个邻接连通立方复形。我们称其并集

$$\mathsf{R}_q = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{R}_{q;i}$$

为 q上的一个预储库立方体，并注意到 R^q 是 $\mathsf{Ref}^2(Q)$ 中某个立方体的细分。

6.2.2. 标记。首先固定单位立方体 $[0,1]^{n-2}$ 中的一族模型标记。由于 $3^{\nu} \geq 3^{10}\mu^2 m$，存在一族

$$\mathbf{E} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m;\ \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{2m};\ \dots;\ \zeta_{(\mu^2-1)m+1} \dots, \zeta_{\mu^2 m}\}$$

包含于 $\mathsf{Ref}^{\nu-2}\left([\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]^{n-2} \times \{0\} \times \{0\}\right)$ 中且两两不相交的（$n-2$）-立方体。$\mathbf{E}$ 中的元素称为模型标记。

注意到 $[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]^{n-2} \in \mathsf{Ref}^2([0,1]^{n-2})$，因此

$$\operatorname{Ref}^{\nu-2}\left(\left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right]^{n-2} \times \{0\} \times \{0\}\right) \subset \operatorname{Ref}^{\nu}([0,1]^{n-2} \times \{0\} \times \{0\})).$$

我们使用立方同构 $\phi_Q\colon\ Q \to [0,1]^n$ 在U的立方结构中定义 $Y^{[n-2]}$上的标记。对于每个（$n-2$）-立方体 $e \in Y^{[n-2]}$，我们固定一个包含 e的 n-立方体 $Q \in U^{[n]}$。令 $\phi_Q\colon\ Q \to [0,1]^n$ 为立方 n-复形 U中与 Q 关联的映射。如有必要，应用$[0,1]^n$ 的等距变换后，我们可以假设 $\phi_Q(e) = [0,1]^{n-2} \times \{0\} \times \{0\}$。我们称之为

$$\zeta_{e;i} = \phi_Q^*(\zeta_i), \qquad i = 1, \dots, \mu^2 m,$$

e上的标记，并设

$$\mathsf{E}(e) = \{\zeta_{e,1}, \dots, \zeta_{e,m};\ \zeta_{e,m+1}, \dots, \zeta_{e,2m};\ \dots;\ \zeta_{e,(\mu^2-1)m+1} \dots, \zeta_{e,\mu^2 m}\}.$$

注意，$\mathsf{E}(e)$中的标记包含于 $\mathsf{Ref}^{\nu-2}(c^2(e)) \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(e)$中，其中$c^2(e) \in \mathsf{Ref}^2(e)$是 e的中心立方体 $c(e)$的中心立方体。我们强调，尽管记号如此，U 的标记并不是 U 的元素，而是 $\mathsf{Ref}^{\nu}(U)$的元素。

由于模型标记是细化 $\mathsf{Ref}^{\nu}([0,1]^{n-2} \times \{0\} \times \{0\})$ 中两两不相交的 $(n-2)$-立方体，因此 $\mathsf{Ref}^{\nu}(U)$ 中标记的星形彼此不相交；回忆定义 2.9 中的星形概念。

引理 6.7。设 ζ 和 ζ' 是 U, $\zeta \neq \zeta'$中的标记。则

$$\operatorname{St}_{\operatorname{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta) \cap \operatorname{St}_{\operatorname{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta') = \varnothing.$$

对于每个 $e \in U^{[n-2]}$，我们将 $\mathsf{E}(e)$ 上的标记分配给 $\mathsf{St}_U(e)^{[n-1]}$ 中满足 $q \cap q' = e$ 的 $(n-1)$-立方体的 $\{q, q'\}$ 对。为此，对于每个 $e \in U^{[n-2]}$，我们固定一个单射标记函数

$$\kappa_e\colon \{\{q, q'\}\colon q, q' \in \operatorname{St}_U(e)^{[n-1]}, q \cap q' = e\} \to \{1, \dots, \mu^2\},$$

并将与这一对 $\{q, q'\}$ 相关联的 m 标记记为

$$\zeta_{e,\{q,q'\};i} = \zeta_{e,(\kappa_e(\{q,q'\})-1)m+i} \in \mathsf{E}(e), \qquad i = 1, \dots, m.$$

设置标记如此繁复的原因将在注6.15中解释。

6.2.3. 运河截面。我们借助 $\Gamma(Y)$ 的一棵生成树 T，定义连接预蓄水池块与标记的运河截面；见图6

设 $q \in Y^{[n-1]}$。对于 T 中的每条边 $\{q,q'\}$ 和 $i \in \{1,\dots,m\}$，取 $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$ 为 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q))$ 的唯一邻接连通 n-子复形，它由满足下列条件的最少数量的 n-立方体构成

(1) $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i} \cap \mathsf{R}_{q;i}$ is an $(n-1)$-cube, and
(2) $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i} \cap \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i})$ is an $(n-1)$-cube.

注 *6.8*。$C_{q,\{q,q'\};i}$ 的极小性有两个直接推论。首先，空间 $|C_{q,\{q,q'\};i}|$ 与 $[0,s]^{[n-1]} \times [0, s\#(C_q^{[n]},\{q,q'\};i)]$, 等距，其中 s 是 $\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i}$ 的边长。特别地，复形 $C_{q,\{q,q'\};i}$ 和 $C_{q',\{q,q'\};j}$ 不相交，除非 $q=q'$ 和 $i=j$。

其次，$\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$ 中的每个 n-立方体都有一个面位于 q 中。事实上，根据(2)，$\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$与 $\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i})$ 在一个面上相交，并且根据极小性，该面与 q 相交。

我们将连接预储库块 $\mathsf{R}_{q;i}$与标记的星形邻域 $\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i}$的 $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\},i}$ 称为运河截段。我们记作

$$\mathsf{C}_{q;i} = \bigcup_{\{q,q'\}\in\mathcal{T}} \mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}.$$

显然，$\mathsf{C}_{q;i} \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q)) \subset \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\mathrm{Ref}^{\nu}(q))$。

以下两个性质直接由该构造得出，尤其是由预储库块的嵌套性质得出。

推论6.9。设 $q \in Y^{[n-1]}$、$\{q,q'\} \in \mathcal{T}$ 以及 i、$i' \in \{1,\dots,m\}$。则$\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$ 与 $\mathsf{R}_{q,i'}$ 相交（在一个 n-立方体中）当且仅当 $1 \le i' < i \le m$。

推论 6.10. 对于每个 $q \in Y^{[n-1]}$和 $i \in \{1,\dots,m\}$，立方复形 $\mathsf{R}_{q;i} \cup \mathsf{C}_{q;i}$ 是邻接连通的。

6.2.4. 连接器。现在，我们为 T 中的每条边 $\{q,q'\}$ 以及每个 $i \in \{1,\dots,m\}$定义一个子复形 $\mathsf{J}_{\{q,q'\};i}$，它连接运河截面 $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$和 $\mathsf{C}_{q',\{q,q'\};i}$。下文的定义用到了复形 U 具有良好内部这一事实。

定义 6.11. 设 $\{q,q'\} \in \mathcal{T}$ 是一条边，$i \in \{1,\dots,m\}$ 是一个指标。我们分两种情况定义一个连接器 $\mathsf{J}_{\{q,q'\};i} \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(K)$，它在标记 $\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}$ 和 $\mathsf{C}_{q',\{q,q'\};i}$之间连接$\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i}$。

情形 *1*。如果 $\rho(q) = \rho(q')$，我们取 $J_{\{q,q'\};i}$ 为 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q)) \cap \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i})$ 中唯一的 n-立方体。情形 *2*。如果 $\rho(q) \neq \rho(q')$，我们取 $J_{\{q,q'\};i}$ 为 $\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i})$ 的一个极小邻接连通 n-子复形，使得

$$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i}) \cap \big(\mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q)) \cup \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q'))\big) \subset \mathsf{J}_{\{q,q'\};i}.$$

注 6.12。在情形 *2* 中，连接器 $\mathsf{J}_{\{q,q'\};i}$ 可能包含优选立方体之外的 n-立方体，即复形 Ref^{ν}(张成$U(\rho(Y^{[n-1]}))$)。

由于 $\rho(q) \neq \rho(q')$，$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i}) \cap (\mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q)) \cup \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q')))$ 有两个 n-立方体。由于星形 $\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\zeta_{q\cap q',\{q,q'\};i})$ 是循环的，最多有两种

种可能的连接器选择$\mathsf{J}_{\{q,q'\};\,i}$. 定义中的极小性保证，连接器的任何真子复形都不是连接器。

现在，我们将运河截面与连接器结合起来，并称两个运河截面通过一个连接器连接而成的部分为运河段；见图6。

定义6.13。 对于每条边 $\{q,q'\}$ *in* $\mathcal{T}$ 和 $i\in\{1,\dots,m\}$，复形

$$\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}=\mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i}\cup\mathsf{J}_{\{q,q'\};i}\cup\mathsf{C}_{q',\{q,q'\};i}$$

称为边 上指标为 i 的运河段。

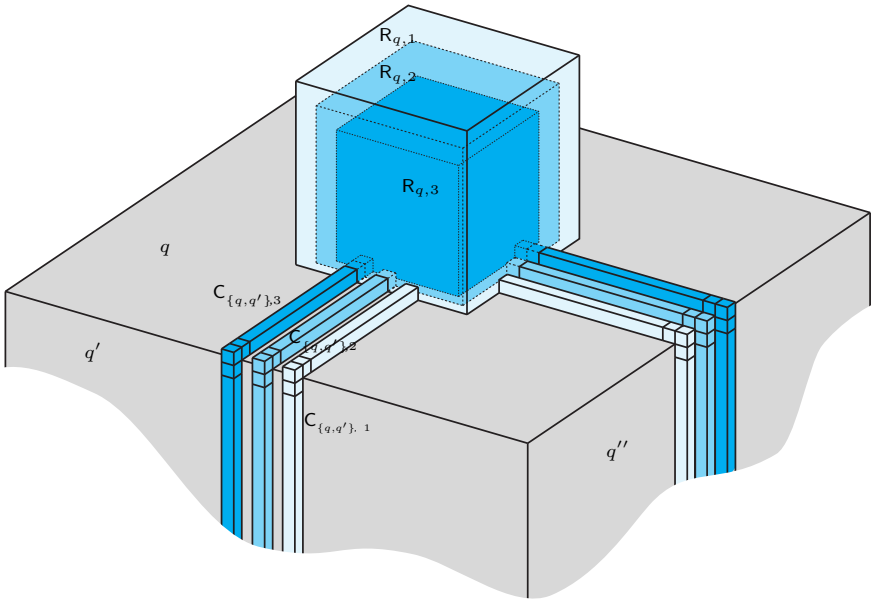

FIGURE 6. 在一个（$n-1$）维立方体上方的预储库块和运河段 $q\in Y$（未按比例绘制）。

我们省略以下引理的直接证明。

引理 6.14. 对于每条边 $\{q,q'\}\in\mathcal{T}$ 和 $i\in\{1,\dots,m\}$，运河段 $\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 及其边界 $\partial\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 均为邻接连通。

注6.15. 标记的布置保证，对于满足 $q\cap q'=q''\cap q'''=e$ 的运河段$\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$和 $\mathsf{C}_{\{q'',q'''\};j}$，也就是说，它们经过同一条边 e，二者不会相交，并且每个$\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$的邻接图都是线性的。见图7。

6.2.5. 系统的构造 $\mathsf{RC}^{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$. 对于每个固定的 i，我们将每一对预储库块 $\mathsf{R}_{q;i}$ 和 $\mathsf{R}_{q';i}$（ $\{q,q'\}\in\mathsf{T}$）连接起来，形成一个运河段 $\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$。由于每个运河段 $\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 都会进入每个指标较低的预储库块 $\mathsf{R}_{q,i'}$ $i'<i$（推论6.9），我们首先从每个预储库块中移除交集里的 n维立方体。

对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$和每个 $q\in Y^{[n-1]}$，我们称

$$\widehat{\mathsf{R}}_{q;i}=\mathsf{R}_{q;i}-\bigcup_{\{q,q'\}\in\mathcal{T}}\left(\bigcup_{i'>i}\mathsf{C}_{q,\{q,q'\},i'}\right)$$

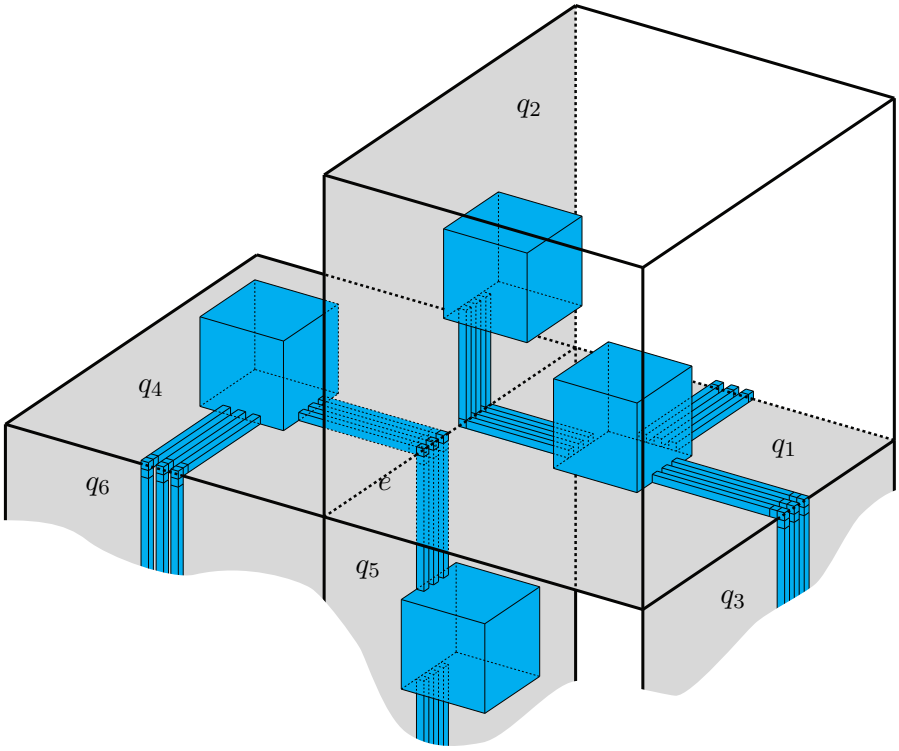

FIGURE 7. 蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 的空间示意图——局部图（不按比例）。 Y 中的立方体以灰色着色。

该指标 i 相邻于 q的蓄水池。

引理 6.16. 复形$\mathsf{R}_{q;i}$ 和 $\partial\mathsf{R}_{q;i}$ 是邻接连通的。

证明。 由于每个运河段 $\mathsf{C}_{\{q,q'\},i'}$ 与 $\mathsf{R}_{q;i}$ 相交于一个 n-立方体当且仅当 $i' > i$, 且这些 n-立方体两两不相交，因此我们得出两个邻接图 $\Gamma(\mathsf{R}_{q;i})$ 和 $\Gamma(\partial\mathsf{R}_{q;i})$ 都是连通的。 □

定义6.17。 我们称子复形

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y;\mathcal{T},\rho)_i = \left(\bigcup_{q\in Y^{[n-1]}} \widehat{\mathsf{R}}_{q;i}\right) \cup \left(\bigcup_{\{q,q'\}\in\mathcal{T}} \mathsf{C}_{\{q,q'\};i}\right) \subset \mathrm{Ref}^\nu(U).$$

该指标为 i 、定义在 Y 上的蓄水池-运河系统（与生成树 T 和偏好函数 ρ相关），并称复形

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y;\mathcal{T},\rho) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y;\mathcal{T},\rho)_i \subset \mathrm{Ref}^\nu(U)$$

Y上的蓄水池-运河系统。为简洁起见，我们分别将 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 和 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$记作 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y;\mathcal{T}\ \rho)_i$和 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y;\mathcal{T}\ \rho)$。

6.2.6. 蓄水池—运河系统的性质。我们现在记录蓄水池-运河系统及其边界的性质，这些性质将在后续构造中用到。

我们首先注意到，除连接器族 $\mathsf{J}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 外，系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 包含于 $\mathrm{Ref}^\nu(\rho(Y^{[n-1]}))$ 中。更准确地说，我们有以下推论。

推论 6.18. 根据构造，我们有

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y) \subset \mathrm{Ref}^\nu(\rho(Y^{[n-1]})) \cup \mathsf{J}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y) \subset \mathrm{Ref}^\nu(\mathrm{St}_U(Y)),$$

and

$$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)) \subset \mathrm{Ref}^\nu(\mathrm{St}_U(Y)).$$

邻接连通性由引理 6.14 和 6.16 得出。

推论 6.19. 对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，复形 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 都是邻接连通的，并且具有邻接连通边界。此外，系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 是邻接连通的，且 $\bigcup_{i=1}^m \partial\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 也具有邻接连通性。

指标为 i的蓄水池-运河系统的空间是 n-胞腔。

推论 6.20. 对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 的空间是一个n-胞腔。

证明。令 $i \in \{1,\dots,m\}$。对于每个 $q \in Y^{[n-1]}$，$\widehat{\mathsf{R}}_{q;i}$ 的空间是一个 n-胞腔。此外，对于每个 $\{q,q'\} \in \mathsf{T}$，$\mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 的空间是一个 n-胞腔，而 $\widehat{\mathsf{R}}_{q;i} \cap \mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 是一个 $(n-1)$-立方体，因此 $\mathsf{R}_{q;i} \cup \mathsf{C}_{\{q,q'\};i}$ 的空间是一个 n-胞腔。沿着树 T 归纳即可得出结论。□

由于复形 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i, i = 1,\dots,m,$（指标互不相同）仅在蓄水池处相交，因此有如下结论。

推论 6.21。 对于 $i \neq i'$，交集 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i \cap \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_{i'}$ 是一个 $(n-1)$-复形。

最后，系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 在图距离意义下远离 ∂Y Y 的边界。

推论 6.22。 假设 ∂Y 非空。对于 $\Gamma(\mathrm{Ref}^\nu(U))$，$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 中的一个 n-立方体与 $\mathrm{Ref}^\nu(U)$ 中任意一个与 $\mathrm{Ref}^\nu(\partial Y)$ 相交的 n-立方体之间的图距离至少为 $3^{\nu-2}$。

证明。由于 Y边界上的 $(n-2)$-立方体不是树 T 的棱，因此 ∂Y中没有标记。所以，$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 中没有连接预蓄水池块与 $\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(\partial Y)$ 的运河截段。该断言现在由以下事实得出：每个预蓄水池块都位于某个 $q \in Y^{[n-1]}$ 对应的 $\mathrm{Ref}^2(q)$ 的中心立方体之上。□

6.2.7. 由树 T确定的 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 的偏序划分。为准备第 7.2 节中的局部扰动，我们选择并固定蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 的一个划分 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$，如下所示。

我们将每段运河划分为两部分：利用 T 中的偏序 $<_Y$，把每个连接器完整地分配给两个运河截段中的一个。对于满足 $q <_Y q'$ 的边 $\{q,q'\} \in \mathsf{T}$，我们取

$$\widetilde{\mathsf{C}}_{q,\{q,q'\};i} = \mathsf{C}_{q,\{q,q'\};i} \cup J_{\{q,q'\};i} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathsf{C}}_{q',\{q,q'\};i} = \mathsf{C}_{q',\{q,q'\};i}.$$

Let

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_{q;i} = \widehat{\mathsf{R}}_{q;i} \cup \bigcup_{\{q,q'\}\in\mathcal{T}} \widetilde{\mathsf{C}}_{q,\{q,q'\};i},$$

and

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_{q} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_{q;i}.$$

然后，集合

$$\mathcal{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y) = \{\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_{q} \colon q \in Y^{[n-1]}\}$$

是$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$的一个本质划分。我们称 $\mathcal{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 为由树 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$（唯一）确定的偏序划分 $\mathcal{T}$。

由引理 6.16 和 6.14， 每个 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_{q}$ 都是邻接连通的，且具有邻接连通边界。

注 6.23。 环境复形 $\mathrm{Ref}^{\nu}(U)$ 在$(n-2)$-立方体处均为局部欧几里得，只要该立方体在连接器中不是标记。划分的要求“每个连接器完全属于$\mathcal{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$中的某个元素”，确保每个标记只属于划分中的一个元素。这个条件简化了后续对局部几何的讨论。

6.3. **变换**。 利用 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$，我们将 Y变换为 $\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 中的一个复形 $\mathsf{Tr}(Y)$，其补分支比 Y多 m 个。

对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，我们固定一棵生成树 $\tau_i \subset \Gamma(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_i)$，并记

$$\tau_Y = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_m.$$

我们将表示 τ_Y 中各条边的 $(n-1)$-立方体族 $Q \cap Q'$ 称为

$$P_{\tau_Y} = \{Q \cap Q' \in \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)^{[n-1]} \colon \{Q, Q'\} \in \tau_Y\},$$

τ_Y-通道。

定义 6.24。 Y的变换是$(n-1)$-子复形

$$\mathsf{Tr}(Y) = \mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y) = \left(\mathrm{Ref}^{\nu}(Y) \cup \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)^{(n-1)}\right) - P_{\tau_Y}.$$

注 6.25。 尽管定义中未特别强调，$\mathsf{Tr}(Y)$ 的定义取决于命题 *6.5* 中的假设，也取决于生成树 $\mathcal{T}$、标记的选取，以及证明中树 τ_i 的选择。我们省略对这些依赖关系的记录，因为它们在下文中不起作用。

注 6.26。 τ_Y-通道被编码进蓄水池-运河变换 $\mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$中。实际上，对于每个 $i = 1,\dots,m$，我们有

$$\tau_i = \Gamma^{\mathsf{cut}}\left(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_i;\ \mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y) \cap \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)_i\right).$$

下面的引理表明， Y 的变换 $\mathsf{Tr}(Y)$ 继承了 Y 的邻接连通性。这是分离复形归纳构造中的关键性质之一。

引理 6.27. 变换 $\mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 是邻接连通的。

证明。 由于 Y 是邻接连通的，细分 $\mathsf{Ref}^\nu(Y)$ 也是邻接连通的。接下来我们验证 $\Gamma(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)^{(n-1)} - P_{\tau_Y})$ 是连通的。

对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，令 P_i 为与树 τ_i 相关联的通道集合，因此

$$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)^{(n-1)} - P_{\tau_Y} = \bigcup_{i=1}^{m} (\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i^{(n-1)} - P_i). \tag{3}$$

由于 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 是一个邻接连通的 n-复形，子复形 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i^{(n-1)}$ 也邻接连通。由于 P_i 中的 $(n-1)$-立方体位于 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i$ 内部，我们得出结论：移除这些立方体后，邻接图$\Gamma(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i^{(n-1)} - P_i)$ 仍然连通。

由于复形 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_i{}^{(n-1)} - P_i$ 和 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)_j{}^{(n-1)} - P_j$ 的指标 i 和 j 连续，且它们交于 $(n-1)$-立方体，因此它们的并邻接连通。于是，由 (3)， $\Gamma(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)^{(n-1)} - P_{\tau_Y})$ 是连通的。

$\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 中运河段里的 n-立方体，其面属于 $\mathsf{Ref}^\nu(Y)$，且这些面不属于 P_{τ_Y}。因此，邻接图$\Gamma(\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)^{(n-1)} - P_{\tau_Y})$ 和 $\Gamma(\mathsf{Ref}^\nu(Y))$ 属于 $\Gamma(\mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y))$ 的同一个连通分支。因此 $\Gamma(\mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y))$ 是连通的。□

由推论 6.22 以及 $\mathsf{Tr}(Y)$ 的构造可知，变换后， Y 的边界仍处于 $\mathsf{Tr}(Y)$ 的边界中。

推论 6.28。 $(n-2)$-复形 $\mathrm{Ref}^\nu(\partial Y)$ 在变换后仍处于边界$\partial(\mathsf{Tr}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y))$ 中。

6.3.1. 退缩子复形。 回顾一下， $G_1,\dots,G_r$ 是割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(U;Y)$ 的连通分支，其标记依据约定 6.4，其中 $r = r(U,Y) \geq m$。我们记

$$U_j = \mathrm{Span}_U(G_j), \qquad j = 1,\dots,r.$$

我们将移除蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 后剩下的 $\mathsf{Ref}^\nu(U_j)$ 子复形称为一个退缩子复形。

定义 6.29。对于 $j \in \{1,\dots,r\}$，我们称

$$U_j^{\mathsf{rec}} = \mathrm{Ref}^\nu(U_j) - \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y),$$

指标为 j 的 ***Ref()*** 退缩子复形。

复形 U_j^{rec}是邻接连通的。我们先证明这一性质的一个局部版本。

引理 6.30。 对于每个 $j \in \{1,\dots,r\}$ 以及 U_j中的每个 n-立方体 Q，邻接图 $\Gamma(\mathrm{Ref}^\nu(Q) \cap U_{\text{退缩}j})$ 是连通的。

证明。 设 Q 是 U_j中的一个 n-立方体。先假设 $Q \cap Y = \varnothing$。那么 $\mathsf{Ref}^\nu(Q) \subset U_{\text{退缩}j}$。因此， $\Gamma(\mathsf{Ref}^\nu(Q) \cap U_{\text{退缩}j}) = \Gamma(\mathsf{Ref}^\nu(Q))$ 是连通的。

接下来，假设 $Q \cap Y \neq \varnothing$。我们考虑两种情况。首先假设$Q$ 不在偏好函数 ρ 的像中。那么，交集 $\mathsf{Ref}^\nu(Q) \cap \mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 要么（i）不含 n-立方体，要么（ii）在 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(Y)$ 的连接器中仅含 n-立方体。在情况（i）中， $\Gamma(\mathsf{Ref}^\nu(Q) \cap U_{\mathsf{rec}j}) = \Gamma(\mathsf{Ref}^\nu(Q))$

是连通的。在情况（ii）中，交集中的每个 n-立方体都在一个 $(n-1)$-胞腔中与 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\partial Q)$ 相交。因此， $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap U_{\mathrm{rec}j})$ 是连通的。

其次，假设 Q 是 Y 中一个或多个 $n-1$-立方体在 ρ 下的偏好立方体。那么， $R = \mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap \mathrm{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 的空间有一个本质划分，分成 n-胞腔；其中每个胞腔要么是 $\mathrm{Ref}^{2}(Q)$ 中一个在 $|\partial Q|$ 上有一个面的 n-立方体的空间，要么是 $\mathrm{Ref}^{\nu}(Q)$ 中一个在 $|\partial Q|$ 上有一个或两个面的 n-立方体的空间。由于

$$\mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap U_j^{\mathrm{rec}} = \mathrm{Ref}^{\nu}(Q) - R,$$

$\mathrm{Ref}^{\nu}(Q)$ 中的每个 n-立方体 $\cap U_{\text{递归}j}$，都可以通过 $\mathrm{Ref}^{\nu}(Q)$ 中一串相邻的 n-立方体 $\cap U_{\text{递归}j}$，与 $\mathrm{Ref}^{\nu}(Q)$ 的中心 n-立方体连通。因此， $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap U_j^{\mathrm{rec}})$ 是连通的。□

推论6.31。 每个复形 U_j^{rec} 都是邻接连通的。

证明。设 $\{Q, Q'\} \in \Gamma(U_j)$ 和 $q = Q \cap Q'$。由于图 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap U\mathrm{rec}j)$ 和 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q') \cap U\mathrm{rec}j)$ 均为连通的，且它们可以通过 $\mathrm{Ref}^{\nu}(q)$ 中的一些 $(n-1)$-立方体彼此连通，因此图 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q) \cap U\mathrm{rec}j)$ 和 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{\nu}(Q') \cap U\mathrm{rec}j)$ 属于 $\Gamma(U\mathrm{rec}j)$ 的同一个连通分支。由于 $\Gamma(U_j)$ 是连通的，我们得出 $\Gamma(U_j^{\mathrm{rec}})$ 是连通的。□

由注 6.26 和推论6.31可知，割图 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U); \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y))$ 有 $r+m$ 个连通分支。

推论 6.32。 设 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 是 Y 在 $\mathrm{Ref}^{\nu}(U)$ 中的一个变换。那么， $\Gamma^{\mathrm{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U); \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y))$ 的连通分支为

$$\Gamma(U_1^{\mathrm{rec}}), \ldots, \Gamma(U_r^{\mathrm{rec}}), \tau_1, \ldots, \tau_m.$$

此外，每个 τ_i 都是一棵长度至多为 $\lambda = \lambda(\#Y^{[n-1]}, \mu, \nu)$ 的树。

命题 *6.5* 的证明。 命题中的性质 (1) 由推论 6.32 得出。性质 (2) 成立，因为根据构造，对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，每个 $q \in Y^{[n-1]}$ 上方都有一个 $\mathrm{RC}(Y)_{q;i}$。□

6.3.2. 实现中的凹陷。 回忆一下， $G_1, \ldots, G_r$ 是割图 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(U; Y)$ 的连通分支， $U_j = $张成$_U(G_j)$， $\mathrm{R}_U(G_j)$ 是 G_j 的实现， $\mathrm{R}_U(\Gamma^{\mathrm{cut}}(U; Y))$ 是 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(U; Y)$ 的实现，并且

$$\pi_{(U;Y)} \colon \mathcal{R}_U(\Gamma^{\mathrm{cut}}(U; Y)) \to U$$

是 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(U; Y)$-商映射。

接下来我们证明， $\mathrm{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 在 $\mathrm{R}_U(G_j)$ 中的提升，

$$D_U(G_j) = \pi^{-1}_{(U;Y)} \left(\mathrm{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(U_j) \right),$$

对于每个 $j = 1, \ldots, r$，都是 $\mathrm{R}_U(G_j)$ 中的凹陷。

命题 6.33。 对于每个 $j \in \{1, \ldots, r\}$，复形 $D_U(G_j)$ 是$\mathcal{R}_U(G_j)$中的凹陷。

首先，我们证明每个运河段 $\mathrm{C}_{\{q,q'\};i}$ 的提升都是 $\mathrm{R}_U(G_j)$ 中的凹陷。注意，指标 i 和 j 之间没有关联。

引理 6.34. 对于 $j \in \{1, \ldots, r\}$，任意运河段 $\mathrm{C}_{\{q,q'\};i}$ 的提升 $\pi^{-1}{}_{(U;Y)} \left(\mathrm{C}_{\{q,q'\};i} \right) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathcal{R}_U(G_j))$（若非空）是 $\mathcal{R}_U(G_j)$ 中的一个凹陷。

在给出证明之前，我们先作一个观察。

注 6.35. 虽然运河段 $C_{\{q,q'\};i}$ 是邻接连通的，但它在 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathcal{R}(\Gamma^{\mathrm{cut}}(U;Y))$ 中的提升不一定是连通的。当 Y 进入连接器 $J_{\{q,q'\};i}$ 的内部时，提升会发生分裂；示意见图 *8*。

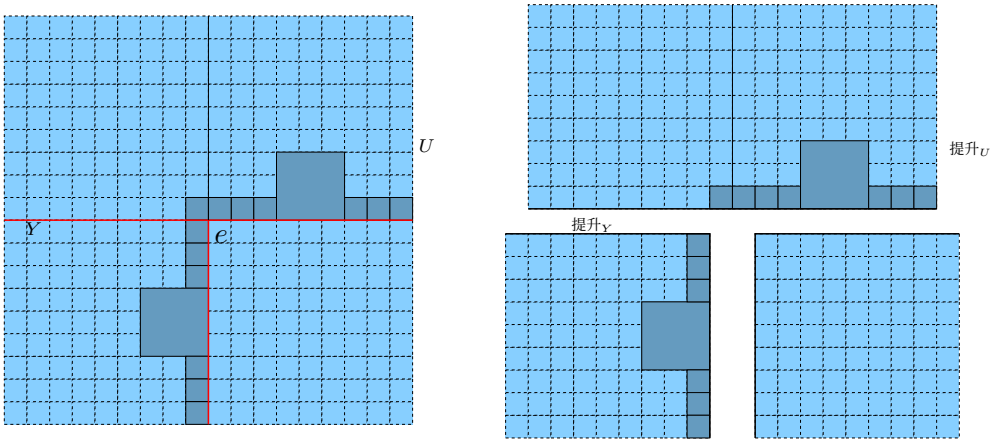

FIGURE 8. 蓄水池-运河系统（深蓝色）及其提升的示意图。

引理 6.34 的证明。设 $C_{\{q,q'\};i}$ 是一个具有非空提升 $\pi^{-1}(U;Y)(C_{\{q,q'\};i}) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(R_U(G_j))$ 的运河段。设 P 是 $C_{\{q,q'\};i}$ 的一个子复形，其提升 $\pi^{-1}(U;Y)(P)$ 是 $\pi^{-1}(U;Y)(C_{\{q,q'\};i}) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(R_U(G_j))$ 的一个连通分支。那么，$\Gamma(P)$ 是 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(C_{\{q,q'\};i};Y)$ 的一个连通分支，并且同构于 $\Gamma\left(\pi_U^{-1}(\ ;Y)(P \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(U_j))\right)$。

复形 P 因此具有以下三种形式之一：
(1) 整个 $C_{\{q,q'\};\,i}$；或 (2) $C_{\{q,q'\};\,i}$ 中一个运河截段与连接器的一个邻接连通子复形 R 的并；或 (3) 连接器的一个邻接连通子复形 R，且它与任一运河截段都不邻接。

属于运河截段的每个 n-立方体 $Q \in P^{[n]}$，在 ∂U_j 中同一个 $(n-1)$-立方体内都有一个面。因此，运河截段的提升是 $R_U(G_j)$ 中的一个谱立方体凹陷。在情形 (2) 或 (3) 中，R 的部分星形在 Y 上有两个面，因此 $\pi^{-1}(U;\,Y)(R)$ 是 $\mathrm{Ref}^{\nu}(R_U(G_j))$ 中的一个星形。因此，$\pi^{-1}(U;\,Y)(P \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(U_j))$ 是 $R_U(G_j)$ 中的一个凹陷。由于互不相交的凹陷之并仍是一个凹陷，结论得证。□

命题 *6.33* 的证明。与系统 $RC_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(Y)$ 相关联的每个预储库立方体 Q，都是 $\mathrm{Ref}^{2}(K)$ 中一个 n-立方体 C_Q 的细分，因此 C_Q 是 Q 的谱立方体。因此，若预储库立方体 Q 属于 U_j，则 $\pi^{-1}(U;\,Y)(C_Q)$ 是 $\mathrm{Ref}^{\nu}(R_U(G_j))$ 中 $D_U(G_j)$ 的谱立方体，并且有一个面位于 ∂U_j 上。

根据构造中蓄水池和运河的布置，预储库立方体与运河段只能在运河段的一个面上相交。特别地， $D_U(G_j)$ 中三个不同谱立方体的交集为空。因此， $D_U(G_j)$ 是 $\mathrm{R}_U(G_j)$ 中的一个凹陷。□

6.4. **通道化**。 蓄水池-运河系统提供了一种将$Y \subset U$变换为新复形 $\mathrm{Tr}(Y) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(U)$的方法。原来的割图 $\Gamma^{\mathrm{cut}}(U;\ Y)$有 r 个连通分支，其中 $r = r(U,\ Y) \geq m$；而割图$\Gamma^{\mathrm{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U);\ \mathrm{Tr}(Y))$有 m个额外分支 τ_1，……， τ_m，它们由蓄水池-运河系统生成，如推论 6.32 所示。我们现在要讨论的通道化，通过移除 $\mathrm{RC}(Y)_i$与 U_i^{rec}之间的一个闸口，将 τ_1，……， τ_m连接到 $\Gamma(U_1^{\mathrm{rec}})$ ……， $\Gamma(U_{\mathrm{rec}m})$，对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$都是如此。

6.4.1. *RC()*上的闸口。 设 $(U,\ Y,\ \rho_Y)$ 在 $(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)\ Z_k)$ 中是可容许的，并假设割图的标记方式如约定 6.4 所述。

由于 ρ_Y是可容许的，我们可以为每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$固定一个 n-立方体$C_i \in \mathrm{RC}(Y)_i \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(U_i)$，它在系统 $\mathrm{RC}(Y)$ 中位置良好，也就是说，C_i 属于 $\mathrm{RC}(Y)$ 中的一个运河截段$_i$，但不与任何预储库立方体相邻，并且根据图距离，它比连接器更靠近一个预储库立方体。

令 ω_i 为 C_i 的唯一一个不与 Y 相交的面，换句话说，ω_i 位于 U_i的内部。我们通过 ω_i连接 $\Gamma(U_i^{\mathrm{rec}})$ 和 τ_i 。由于 $\omega_i \in \mathrm{RC}(Y)_i \cap U_{\text{后退}i}$，我们将 ω_i称为 $\mathrm{RC}(Y)_i$与 U_i^{rec}之间的闸口。

定义 6.36。该子复形

$$\mathsf{Ch}(Y) = \mathsf{Tr}(Y) - \bigcup_{i=1}^{m} \{\omega_i\} \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(U)$$

称为 Y 的通道化（基于 ρ_Y 和 $\mathbb{T}_Y$）。

注 6.37。 为便于今后的讨论，现在我们为每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$固定一个 ω_i 在后退复形 U_i^{rec} 的边界 ∂ 上的片状邻域 $\Lambda(\omega_i)\ U_i^{\mathrm{rec}}$，方法是令

$$\Lambda(\omega_i) = |\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\omega_i) \cap \partial(U_i^{\mathrm{rec}})|.$$

注意到 Λ（ω_1） ...， Λ（ω_m）彼此不相交，都是 $n-1$）-胞腔，并且 Λ（ω_i）在其内部包含相应的 ω_i 。

现在记录通道化的基本性质。

引理 6.38。 设 Ch（Y）是 Y的一种通道化。则 Ch（Y）是邻接连通的，Ch（Y）关于 Y 具有命题 *6.5* 中所述的前 *Wada* 性质，并且 Ch（Y）是 λ 对 Y 的一个扰动，其常数为$\lambda = \lambda$（#（$Y^{[n-1]}$） μ， ν）。此外，图 Γ^{cut}（Ref^{ν}（U）；Ch（Y）的连通分支是

$$G_{\mathsf{Ch}(Y);i} = \begin{cases} \Gamma(U_i^{\mathrm{rec}}) \cup \tau_i \cup \{\omega_i\} & for\ i = 1, \ldots, m, \\ \Gamma(U_i^{\mathrm{rec}}) & for\ i = m+1, \ldots, r. \end{cases}$$

证明。 对于第一个断言，只需注意到，由引理 6.27 可知 $\mathrm{Tr}(Y)$ 是邻接连通的，并且移除两两不相交的 $(n-1)$-立方体 ω_1，……， ω_m 不会改变连通性，因此 $\mathsf{Ch}(Y)$ 是邻接连通的。第二部分已在命题 6.5 中证明。

对于第三个断言，我们首先注意到， $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Ch}(Y))$ 的连通分支 $G_{\mathsf{Ch}(Y);i}$的结构可由推论 6.32 及门 ω_i 的选择立即得出。令 $U_i' = \mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(G_{\mathsf{Ch}(Y);i})$，其中$i = 1$，……， r，并令

$$\pi_{(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Ch}(Y))} \colon \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Ch}(Y))) \to \mathrm{Ref}^\nu(U)$$

是 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Ch}(Y))$-商映射。

由于 $U_i' = (\mathrm{Ref}^\nu(U_i) - \mathsf{RC}(Y)) \cup \mathsf{RC}(Y)_i$，且提升 $\pi^{-1}{}_{(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Ch}(Y))}(\mathsf{RC}(Y)_i)$ 的邻接图是树 τ_i，所以通道化 $\mathsf{Ch}(Y)$ 是一个 λ-扰动，对于某个常数 $\lambda = \lambda(\#(Y^{[n-1]}), \mu, \nu)$。□

6.4.2. 通道化总结。 我们总结通道化过程，并在下一个命题中汇集 $\mathsf{Ch}(Y)$ 的性质；记号参见第 6.3 节和第 6.4 节。此处列出的所有性质均已在上文证明。

命题 6.39。 保留命题 *6.5* 中的所有假设和标记。由偏好函数 $\rho_Y \colon Y^{[n-1]} \to U^{[n]}$ 和生成树$\mathcal{T}_Y$引导，在 $\Gamma(Y)$中，我们可以构造以下对象：$\mathrm{Ref}^\nu(U)$

(1) 一个邻接连通的蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Y) = \bigcup_{i=1}^m \mathsf{RC}(Y)_i$由本质不相交的 n-子复形 $\mathsf{RC}(Y)_1, \dots, \mathsf{RC}(Y)_m$组成，其中每个子复形都邻接连通，且具有一棵生成树， τ_i其大小至多为 $\lambda = \lambda(\#(Y^{[n-1]}), \mu, \nu)$，并满足 *(a)* $\mathsf{RC}(Y) \subset \mathrm{Ref}^\nu(\mathsf{St}_U(Y))$，以及 *(b)* $\mathsf{RC}(Y) \cap \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^\nu(U)}(\mathrm{Ref}^\nu(\partial Y)) = \varnothing$;

(2) 一个 $(n-1)$-子复形 $\mathsf{Tr}(Y) \subset \mathrm{Ref}^\nu(Y) \cup \mathsf{RC}(Y)^{(n-1)}$，其中 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^\nu(U);\mathsf{Tr}(Y))$ 的连通分支为

$$\Gamma(U_1^{\mathsf{rec}}), \dots, \Gamma(U_r^{\mathsf{rec}}), \tau_1, \dots, \tau_m,$$

其中 $r = r(U,Y) \geq m$, $U_{\mathsf{rec}i} = \mathrm{Ref}^\nu(U_i) - \mathsf{RC}(Y)$ 对于 $i \in \{1, \dots, r\}$, 且 τ_i 是 Γ中的一棵生成树 $(\mathsf{RC}(Y)_i)$ 对于 $i \in \{1、\dots\dots、m\}$;

(3) 对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，一个$(n-1)$维立方体 $\omega_i \in \partial \mathsf{RC}(Y)_i \cap \partial U_i^{\mathsf{rec}}$包含在 U_i 的内部，且其片状邻域$\Lambda(\omega_i)$ 两两不相交;

(4) 一个邻接连通的$(n-1)$维子复形

$$\mathsf{Ch}(Y) = \mathsf{Tr}(Y) - \bigcup_{i=1}^m \{\omega_i\} \subset \mathrm{Ref}^\nu(U),$$

使得

(a) Γ^{cut}（Ref^ν（U）；Ch（Y）） 的连通分支是

$$G_{\mathsf{Ch}(Y);i} = \begin{cases} \Gamma(U_i^{\mathsf{rec}}) \cup \tau_i \cup \{\omega_i\} & for\ i = 1, \dots, m, \\ \Gamma(U_i^{\mathsf{rec}}) & for\ i = m+1, \dots, r, \end{cases}$$

(b) Ch（Y）相对于 Y满足命题 *6.5* 中的前 *Wada* 性质命题 *6.5* ，*and*

(c) Ch（Y）是 Y 的 λ-扰动。

证明。 对于 (1)，请参见推论 6.19 和 6.21。树 τ_i 的长度估计记载于推论 6.32。对于 (1a)，请参见推论 6.18；对于 (1b)，请参见推论 6.28。对于 (2)，请参见推论 6.32；对于 (3)，请参见注 6.37。第 (4) 项由引理 6.38 得出。□

前一个命题描述了相对于 Y 的补分支，Ch(Y) 的互补分支的结构；而下面的推论则给出了实现 $\mathsf{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U);\ \mathsf{Ch}(Y)))$ 相对于 $\mathsf{R}_U(\Gamma^{\mathsf{cut}}(U;\ Y))$ 的类似结构。

推论 6.40。 在命题 *6.39* 的设定下，令

$$\pi_{(U;Y)}\colon \mathcal{R}_U(\Gamma^{\mathsf{cut}}(U;Y)) \to U$$

为典范商映射，它将 $\mathcal{R}_U(G_i)$ 映到 U_i。那么提升

$$D_U(G_i) = \pi^{-1}_{(U;Y)}(\mathsf{RC}(Y) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(U_i))$$

是 $\mathcal{R}_U(G_i)$ 中的一个凹陷，并且 $\mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U);\mathsf{Ch}(Y)))$ 具有一个本质划分，

$$\mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(G_{\mathsf{Ch}(Y);i}) = \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma(U_i^{\mathsf{rec}})) \cup \mathsf{t}_i & for\ i = 1,\dots,m, \\ \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma(U_i^{\mathsf{rec}})) & for\ i = m+1,\dots,r, \end{cases}$$

其中 t_i 是一条隧道，其邻接图是树 τ_i，而交集$\mathsf{t}_i \cap \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma(U_i^{\mathsf{rec}}))$ $= \pi^{-1}{}_{(U;Y)}(\omega_i)$。

证明。 根据命题 6.33，提升 $D_U(G_i)$ 是一个凹陷；而实现 $\mathsf{R}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(U)}(\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(U);$ Ch(Y))) 的本质划分，则由前一个命题的第 (4a) 项以及门 ω_i 的作用可知。□

7. Evolution of separating complexes

现在我们回到立方n-复形 K中的分离复形 Z 这一情境。本节的任务是构造一个分离复形序列 (Z_k)，以用于演化定理。

定理 4.16 (分离复形的演化)。 设 $n \geq 3$ 和 $m \geq 2$。设 K 是一个良好的立方 n-复形，具有 m个边界分支和多面体度量 d_K，并且 $\nu = \nu(K) \geq 1$ 为细化尺度。假设 Z_0 是 K中的一个分离复形。那么存在常数 $\lambda = \lambda(K) \geq 1$ 和 $\mathsf{K} = \mathsf{K}(K) \geq 1$，以及一个分离复形序列 (Z_k)，$Z_k \subset \mathrm{Ref}^{\nu k}(K)$，满足

(1) 每个 Z_k 相对于 Z_{k-1}都具有相对 *Wada* 性质；*(2)* (Z_k) 是核扩张的；*(3)* 每个 Z_k 都是 Z_{k-1}的 λ-扰动；*(4)* (Z_k) 是K-拟共形稳定的。

在本节中，我们始终假设既定假设 6.1，并固定

- 一个偏好函数 $\rho_Z\colon Z^{[n-1]} \to K^{[n]}$，使得 $\rho_Z(Z^{[n-1]})$ 在每个 $\mathsf{Comp}_K(Z;\ \Sigma_i)$ $i = 1$、 ..... m 中都至少包含一个 n- 立方体，以及
- 一个偏序生成树 T_Z，位于 $\Gamma(Z)$ 中。

还固定一个整数

$$\lambda_{\mathrm{loc}} = \lambda_{\mathrm{loc}}(n, \mu, \nu)$$

它是对所有 $Q \in K^{[n]}$，$\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{St}_K(Q))$ 中 n-立方体和 $(n-1)$-立方体数量的上界。

我们在第7.1节定义通道化 $Z_1 = \mathsf{Ch}(Z)$，在第 7.2 节通过对 Z_1 进行局部通道化构造 $Z_2 = \mathsf{Ch}(Z_1)$，然后反复进行局部

操作，在第7.3节得到整个序列 (Z_k)。第7.4节讨论核之间的几何，并在第7.5节证明 (Z_k) 的拟共形稳定性。

第一步之后采用局部通道化，是为了确保后续步骤中附加的隧道具有层级关系，且大小一致有界。这些性质是建立拟共形稳定性所必需的。

记号。 在本节中，我们记

$$\pi_k = \pi_{(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K);Z_k)} \colon \mathcal{R}_{\mathrm{Ref}^{k\nu(K)}}(\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{k\nu}(K);Z_k)) \to \mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$$

表示与该实现关联的典范商映射，其中 Z_k 是 $\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$ 中的一个分离复形。回顾一下，我们用 $\mathsf{Comp}(Z_k;\Sigma_i)$ 表示由 Z_k 分离且包含 Σ_i 的 $\mathrm{Ref}^{\nu k}(K)$ 的连通分支，并且 $\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i) = \pi_k^{-1}(\mathsf{Comp}(Z_k;\Sigma_i))$。还需回顾的是，子复形 $\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)$ 在 π_k 中同构地提升，并且我们已将 $\pi_k^{-1}\,\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)$ 与 $\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)$ 认作同一对象。因此，我们也称 $\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)$ 为 $\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)$ 的一个核心。

7.1. **通过通道化构造** $Z_1 = \mathsf{Ch}(Z)$。根据第 6.4 节中的 $U = K$ 和 $Y = Z$，命题 6.39 应用于

$$(K,\, Z,\, \rho_Z,\, \mathcal{T}_Z),$$

得出一个通道化

$$Z_1 = \mathsf{Ch}(Z).$$

由于 Z_1 是通过通道化得到的，割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{\nu}(K);\, Z_1)$恰有 m 个连通分支 $G_{Z_1;1}$、……、$G_{Z_1;m}$，每个 Σ_i对应一个，并且

$$\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i) = \mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(G_{Z_1;i}).$$

为了证明 Z_1 是一个分离复形，我们简要回顾构造中某些复形的性质。根据命题 6.5 和命题 6.39 中的性质 (1b)，蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Z)$ 满足

$$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1) \subset \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(\mathsf{RC}(Z) \cup \mathrm{Ref}^{\nu}(Z)) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathrm{St}_K(Z)),$$

由此立即得到核扩张性质。

推论 7.1。对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$,

$$|\mathsf{Core}(Z;\Sigma_i)| \subset |\mathsf{Core}(Z_1;\Sigma_i)| \setminus |(\partial\mathsf{Core}(Z_1;\Sigma_i))_{\mathrm{inner}}|.$$

由命题 6.33 可知

$$\mathsf{D}(Z;\Sigma_i) = \pi_1^{-1}(\mathsf{RC}(Z) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)))$$

是 $\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)$ 中的一个凹陷。推论 6.40 现在可以改述如下（参见定理 4.6）。

推论 7.2。对于 $i = 1,\dots,m$,

$$\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i) = \mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z;\Sigma_i) \cup \mathsf{tunnel}(Z;\Sigma_i),$$

其中

(1) 提升$^{\mathsf{dented}}(Z;\ \Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{\nu}$(提升$(Z;\ \Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z;\ \Sigma_i)$，*(2)* 隧道$(Z;\ \Sigma_i)$ 是一个隧道，其邻接图是一棵大小至多为 $\tau_{Z;i}\ \ \lambda(n,\mu,\nu,\#Z^{[n-1]})$的树，并且

(3) $\mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z;\Sigma_i)\cap\mathsf{tunnel}(Z;\Sigma_i)=\pi_1^{-1}(\omega_{Z;i})$ *is the lift of a gate.*

凹陷展平定理 5.17 和隧道收缩命题 3.14 现在给出以下双利普希茨扩张性质。

推论 7.3。存在一个常数 $L=L(n,K)\geq 1$，它仅取决于维数 n 和复形 K，以及满射的 $L(n,K)$-双利普希茨同胚映射

$$|\mathsf{Lift}(Z;\Sigma_i)|\xrightarrow{f}|\mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z;\Sigma_i)|\xrightarrow{g}|\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)|,$$

其复合在提升$(Z;\Sigma_i)$的核心上是恒等映射。

我们将 Z_1 的性质总结如下。

推论 7.4。 Z 的通道化 $Z_1=\mathsf{Ch}(Z)$ 是$\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$中的一个分离复形，并且它相对于 Z具有相对 *Wada* 性质，相对于 Z是核扩张的，并且是 Z的一个 $\lambda(n,K,Z)$-扰动。

证明。我们首先验证 $Z_1=\mathsf{Ch}(Z)$ 是 $\mathsf{Ref}^{\nu}(K)$ 的一个分离复形。

由于 $Z\cap\partial K=\varnothing$，我们有 $Z_1(q)\cap\partial\mathsf{Ref}^{\nu}(K)=\varnothing$对每个 $q\in Z^{[n-1]}$都成立。因此 $Z_1\cap\partial\mathsf{Ref}^{\nu}(K)=\varnothing$。这验证了分离复形定义中的第一条性质。根据命题 6.39 中的 (4)，$\Gamma(Z_2)$ 是连通的。这验证了第二条性质。

现在我们注意到，该构造立即得出以下性质：$\mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1;\Sigma_i)\cap\partial\mathsf{Ref}^{\nu}(K)=\Sigma_i$，且 $\bigcup_{i=1}^{m}\mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1;\Sigma_i)=\mathsf{Ref}^{\nu}(K)$。因此，第三个条件成立。

根据推论 7.3，$|\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)|\approx|\mathsf{Lift}(Z;\Sigma_i)|\approx|\Sigma_i|\times[0,1]$。因此，最后一个条件成立，并且 Z_1 是 $\mathsf{Ref}^{\nu}(K)$ 的一个分离复形。

核心扩张性质已在推论 7.1 中证明，其他性质列于命题 6.39 的 (4) 和引理 6.38 中。□

7.1.1. 关于 的相对约翰性质 Z_1 关于 Z。作为证明瓦达湖的约翰性质的准备，我们现在证明与 Z 和 Z_1 相关的核心具有一种相对约翰型性质。

引理 7.5。每个 n-立方体 Q（位于

$$P=\mathsf{Core}(Z_1;\Sigma_i)-\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Core}(Z;\Sigma_i))$$

）都可以通过一串相邻的 n-立方体与 P 中的一个 n-立方体 Q' 连通，该立方体的一面位于 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\partial$核心$(Z;\ \Sigma_i)-\partial K)$ 的内边界分支中，而这串立方体的长度至多为 $3^{\nu}\theta(K)$，其中

$$\theta(K)=\max\left\{\#\{Q\in\mathrm{St}_K(\{p\})^{[n]}\}\colon p\in K^{[0]}\right\}.$$

证明。由于

$$\mathsf{Core}(Z;\Sigma_i)=\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)-\mathrm{St}_K(Z)$$

and

$$\mathsf{Core}(Z_1;\Sigma_i)=\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)-\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1),$$

我们有

$$P=\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)\cap\left(\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathrm{St}_K(Z))-\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1)\right).$$

根据变换 $\mathsf{Tr}(Z)$ 的构造，$\mathsf{Comp}(Z_1;\,\Sigma_i)$ 中未包含在 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z;\,\Sigma_i)$ 中的每个 n-立方体都有一个面位于 Z_1 中，因此不在 P 中。因此 $P \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z;\,\Sigma_i))$，并且我们有

$$P = \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}_K(Z;\Sigma_i) \cap \mathrm{St}_K(Z)) - \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1).$$

现在设 Q 是 P 中的一个 n-立方体，并设 C 是 $\mathsf{Comp}_K(Z;\,\Sigma_i) \cap \mathsf{St}_K(Z))$ 中的一个 n- 立方体，其细分包含 Q。由于 K 是良复形，且 Z 位于 K 的内部，根据核心的定义，C 至少在一个顶点 v 处与 $\mathsf{Core}_K(Z;\,\Sigma_i)$ 相交。由于 K 是良复形，v 的星形 $\mathsf{St}_K(v)$ 邻接连通。由于 $\mathsf{St}_K(v)$ 包含一个 n- 立方体，例如 C''，且该立方体位于 $\mathsf{Core}_K(Z;\,\Sigma_i)$ 中，我们可以固定一条相邻立方体链 $C = C_1, \dots, C_r = C'$，这些立方体包含于 P，其中$r < \theta(K)$，从 C 到一个与 C'' 共享一个面的立方体 C'。现在很容易找到一条经过细分 $\mathrm{Ref}^{\nu}(C_1) \dots, \mathrm{Ref}^{\nu}(C_r)$ 的相邻立方体链，从 Q 到一个长度至多为 $3^{\nu}\theta(K)$ 的立方体 Q'；其中乘数3^{ν} 是一个上界，表示在 $\mathrm{Ref}^{\nu}(C_i)$ 中连接给定的、位于 $\mathrm{Ref}^{\nu}(C_i)$ 中的 n-立方体与 C_i 任一面的相邻 n-立方体链所需的 n-立方体数量。□

7.1.2. 几乎嵌套于 ρ_1 上的 $Z_1^{[n-1]}$ 偏好函数 ρ_0。回顾一下，$\rho_0 = \rho_Z$: $Z^{[n-1]} \to K^{[n]}$ 是用于对 Z 进行通道化的偏好函数，并且

$$Z_1 = \mathsf{Ch}(Z) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(Z) \cup \mathsf{RC}(Z)^{(n-1)}.$$

为了构造 Z_2，我们固定一个偏好函数

$$\rho_1 \colon Z_1^{[n-1]} \to \mathrm{Ref}^{\nu}(K)^{[n]}$$

它满足以下（几乎嵌套）条件:

(1) $\rho_1(q^*) \in \mathsf{RC}(Z)^{[n]}$ if $q^* \in \mathsf{RC}(Z)^{[n-1]}$, and
(2) $\rho_1(q^*) \in \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_0(q))$ if $q^* \notin \mathsf{RC}(Z)^{[n-1]}$ but $q^* \in \mathrm{Ref}^{\nu}(q)$ for some $q \in Z^{[n-1]}$.

注 7.6。 “几乎嵌套”这一名称源于以下观察。

除去 $\mathsf{RC}(Z)$ 中的连接器 $\mathsf{J}(Z)$ 外，系统$\mathsf{RC}(Z)$ 完全包含于 $\rho_0(Z^{[n-1]})$ 中。由于 ρ_1 满足上述条件，我们有

$$\rho_1((Z_1)^{[n-1]}) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_0(Z^{[n-1]})) \cup \mathsf{RC}(Z) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_0(Z^{[n-1]})) \cup \mathsf{J}(Z).$$

7.2。 **通过局部通道化构造** $Z_2 = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_1}(Z_1)$。我们已经有

$$Z_0 = Z,\ \mathcal{L}_0 = \{Z_0\},\ Z_1 = \mathsf{Ch}(Z),$$

其中构造 $\mathsf{Ch}(Z)$ 基于 $\mathbf{L}_0$, $\rho_0 = \rho_Z$ 以及 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_Z$。

7.2.1. 构造 Z_2的概要。 为定义 Z_2，我们在局部进行扰动。我们首先定义一个偏序划分

$$\mathcal{L}_1 = \{Z_1(q) \colon q \in Z^{[n-1]}\}$$

由树 $\mathbf{T}_0$引导的 Z_1。为每个 $Z_1(q)$ 选择适当的环境复形$U(q)$ 后，我们证明所有的对 $(U(q),\ Z_1(q))$ 都是可容许的，因此 $\mathbf{L}_1$ 是一个局部化；并且，在第7.1.2节中选取的函数 ρ_1 限制到 $Z_1(q)^{[n-1]}$ 后，对于每个 q，其像都包含于 $U(q)^{[n]}$。因此

$$\rho_q = \rho_1|_{Z_1(q)} \colon Z_1(q)^{[n-1]} \to U(q)^{[n]}$$

是一个定义良好的偏好函数。令

$$\mathscr{P}_1 = \{\rho_q \colon q \in Z^{[n-1]}\}.$$

最后，我们固定一族

$$\mathfrak{T}_1 = \{\mathcal{T}_q \colon q \in Z^{[n-1]}\}$$

T_q 上的生成树，其中 $Z_1(q)$ 中的每棵树都是偏序且在 $\mathsf{Ref}^{\nu}(K)$ 中局部欧几里得。

对于局部欧几里得树的定义，我们采用定义 2.10。

定义 7.7。 在立方 n-复形 P 中的邻接连通$(n-1)$子复形 R 内的一棵生成树 $\mathcal{T} \subset \Gamma(R)$ ，若$\mathcal{T}$在其每条边处都局部欧几里得，则称其在 P 中局部欧几里得。

有了 $\mathbf{L}_1$,$\mathbf{P}_1, \mathfrak{T}_1$ 之后，我们应用命题 6.39

$$(U(q), Z_1(q), \rho_q, \mathcal{T}_q)$$

以得到局部通道化 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$，然后取它们的并

$$Z_2 = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_1}(Z_1) = \bigcup_{q \in Z^{n-1]}} \mathsf{Ch}(Z_1(q)).$$

7.2.2. 的局部化 Z_1。我们先将复形 Z_1 细分为两个子复形

$$I(Z_1) = Z_1 \cap \mathsf{RC}(Z) \quad \text{and} \quad II(Z_1) = \mathrm{Ref}^{\nu}(Z) - \mathsf{RC}(Z)^{(n-1)}.$$

利用第 6.2.5 节中由 $\mathbf{T}_0$ 确定的 $\mathsf{RC}(Z)$ 的偏序划分 $\mathsf{RC}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z) = \{\mathsf{RC}(Z)_q \colon q \in Z^{[n-1]}\}$，我们进一步将复形 $I(Z_1)$ 和 $II(Z_1)$细分为子复形

$$I_q(Z_1) = Z_1 \cap \mathsf{RC}(Z)_q, \quad \text{and} \quad II_q(Z_1) = \mathrm{Ref}^{\nu}(q) - \mathsf{RC}(Z)^{(n-1)},$$

对于 $q \in Z^{[n-1]}$。显然

$$I(Z_1) = \bigcup_{q \in Z^{[n-1]}} I_q(Z_1) \quad \text{and} \quad II(Z_1) = \bigcup_{q \in Z^{[n-1]}} II_q(Z_1).$$

不难验证

$$Z_1(q) = I_q(Z_1) \cup II_q(Z_1)$$

是邻接连通的。

由于任意一个为两个不同的 $\mathsf{RC}(Z)_q$ 和 $\mathsf{RC}(Z)_{q'}$ 所共有的$(n-1)$-立方体，都属于通道化之前已被移除的通道，因此这类$(n-1)$-立方体不在 Z_1中。因此，族 $\{I_q(Z_1)^{[n-1]} \colon q \in Z^{[n-1]}\}$是 $I(Z_1)^{[n-1]}$的一个本质划分。显然，族 $\{II_q(Z_1)^{[n-1]} \colon q \in Z^{[n-1]}\}$ 也是 $II(Z_1)^{[n-1]}$的一个本质划分。

现在，我们为 $Z_1(q)$固定一个环境 n-子复形 $U(q) \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(\rho(q))$。对于每个 $q \in Z^{[n-1]}$，令

$$N(q) = \mathrm{Span}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}\left(\{Q' \in \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho(q))^{[n]} \colon Q' \cap q \neq \varnothing\}\right) - \mathsf{RC}(Z)$$

并进行

$$U(q) = \mathsf{RC}(Z)_q \cup N(q) \subset \mathrm{Ref}^{2\nu}(K).$$

作为在 Z_1上进行局部通道化的准备步骤，我们总结了这一过程所需的数据。

引理 7.8。对于每个 $q \in Z^{[n-1]}$，（U（q） Z_1（q））在（Ref^{ν}（K） Z_1）中是可容许的，并且

$$\rho_q = \rho_1|_{Z_1(q)} \colon Z_1(q)^{[n-1]} \to U(q)^{[n]}$$

是一个可容许偏好函数。此外，每个 Γ（Z_1（q））都具有一棵生成树，该生成树在Ref^{ν}（K）中是局部欧几里得的，且大小至多为λ_{loc}。

证明。由于 $\mathrm{RC}(Z)_q = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{RC}(Z)_{q;i}$，且每个 $\mathrm{RC}(Z)_{q;i}$ 都属于一个不同的 Σ_i-连通分支 $\mathrm{Comp}(Z_1; \Sigma_i)$，因此，序对 $(U(q)\ Z_1(q))$ 在 $(\mathrm{Ref}^{\nu}(K)\ Z_1)$ 中是可容许的。由于 ρ_1 几乎嵌套于 ρ_0 中，每个偏好函数 ρ_q 都是可容许的。

由注6.15和注 6.23可知，连接器中的标记彼此相距很远，并且每个标记只包含在一个 $Z_1(q)$中。由于标记是 $Z_1(q)$ 中唯一可能使 $\mathrm{Ref}^{\nu}(K)$ 不局部欧几里得的（$n-2$）-立方体，因此，在 $\Gamma(Z_1(q))$ 中存在不经过标记的生成树。这样的树是局部欧几里得的。□

7.2.3. 局部化族 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$。我们首先注意到，根据定义 6.3，本质划分 L_1 是 Z_1的一个局部化。根据引理 7.8，对于每个 $q \in Z^{[n-1]}$，我们可以固定一个 $\Gamma(Z_1(q))$的偏序局部欧氏生成树 T_q，其大小至多为 λ_{loc}。令 $\mathfrak{T}_1 = \{\mathrm{T}_q \colon q \in Z^{[n-1]}\}$。

如第 7.2.1 节所述，现在我们可以对每个 $(U(q)\ Z_1(q)\ \rho_q,\ \mathrm{T}_q)$ 应用命题 6.39，从而得到 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$。

回顾定义 6.36，通道化

$$\mathsf{Ch}(Z_1(q)) = \mathsf{Tr}(Z_1(q)) - \bigcup_{i=1}^{m} \omega_{Z_1(q);i}$$

是通过移除变换 $\mathsf{Tr}(Z_1(q))$ 上的闸口 $\omega_{Z_1(q)\,;\,i}$ 而得到的，并且该变换具有如下形式

$$\mathsf{Tr}(Z_1(q)) = \left(\mathrm{Ref}^{\nu}(Z_1(q)) \cup \mathsf{RC}(Z_1(q))^{(n-1)}\right) - P_{Z_1(q)} \subset \mathrm{Ref}^{2\nu}(K),$$

其中 $\mathsf{RC}(Z_1(q)) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{RC}(Z_1(q))_i \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(U(q)) \subset \mathsf{Ref}^{2\nu}(K)$，$P_{Z_1(q)}$ 是表示其中各棱的 $(n-1)$-立方体族

$$\tau_{Z_1(q)} = \tau_{Z_1(q),1} \cup \cdots \cup \tau_{Z_1(q),m},$$

并且每个$\tau_{Z_1(q);i}$ 都是 $\Gamma(\mathsf{RC}(Z_1(q))_i)$中的一棵生成树，其大小至多为 λ_{loc}。

关于蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 的选择，我们首先注意到，每棵树 $\mathrm{T}_q \in \mathfrak{T}_1$ 都是局部欧几里得的。因此，可以选择蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 在 $Z_1(q)$ 上的连接器，使这些连接器包含于 $\mathsf{RC}(Z)$ 与偏好立方体$\rho_q(Z_1(q))$ 的并集中。我们将这一观察表述如下，其验证留给有兴趣的读者。

引理 7.9. 设 $q \in Z^{[n-1]}$。蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 可以选取为：对于每条边 $\{q^*, q^{**}\} \in \mathcal{T}_q$ 以及每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，运河段 $\mathsf{C}_{\{q^*,q^{**}\};i} \subset \mathsf{RC}(Z_1(q))$ 中的连接器 $\mathsf{J}_{\{q^*,q^{**}\};i}$ 满足

$$\mathsf{J}_{\{q^*,q^{**}\};i} \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z)) \cup \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_q(Z_1(q)^{[n-1]})).$$

特别是，如果 $q^* \in \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z))$ 且 $q^{**} \in \mathrm{Ref}^{\nu}(Z_1(q)) - \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z))$，那么 $\mathsf{J}_{\{q^*,q^{**}\};i} - \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z))$ 恰由一个 n-立方体组成，该立方体有一个面位于 q中。

在定义复形 Z_2 之前，我们注意到复形 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$ 本质不相交。

推论 *7.10*。设 $q \neq q' \in Z^{[n-1]}$。那么局部系统 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 和 $\mathsf{RC}(Z_1(q'))$ 不相交，且它们在 $\Gamma(\mathrm{Ref}^{2\nu}(K))$ 中的图距离至少为$3^{\nu-2}$。特别是，对于 $q \in Z^{[n-1]}$，$|\partial Z_1(q)| \subset |\partial \mathsf{Ch}(Z_1(q))|$，并且对于 $q \neq q'$，$|\mathsf{Ch}(Z_1(q)) \cap \mathsf{Ch}(Z_1(q'))| = |Z_1(q) \cap Z_1(q')|$。

证明。 根据推论 6.22，当 $q \in Z^{[n-1]}$时，复形 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 具有所声称的图距离。因此，$\mathsf{Ch}(Z_1(q))$ 和 $\mathsf{Ch}(Z_1(q'))$（若 $q \neq q'$）只能在其公共边界处相交。□

7.2.4. $Z_2 = \mathsf{Ch}(Z_1)$ 的定义和性质。我们定义

$$Z_2 = \mathsf{Ch}(Z_1) = \bigcup_{q \in Z^{[n-1]}} \mathsf{Ch}(Z_1(q)).$$

注 7.11。 复形 Z_2 由局部化 $\mathcal{L}_1$，中元素的通道化所关联的选择决定，但局部化 $\mathcal{L}_1$ 取决于 $(K、\ Z、\ \rho_Z、\ \mathcal{T}_Z)$，如第 *7.2.2* 节所示；对 $Z^{[n-1]}$ 中元素所取的并集也存在这种依赖关系。因此，复形Z_2 既源自 Z_1，也源自 $Z_0 = Z$。

我们证明， Z_2 是 $\mathsf{Ref}^{2\nu}(K)$ 中的一个分离复形，其相对于 Z_1 具有相对 Wada 性质，是 Z_1 的 λ_{loc}-扰动，并且具有核扩张性质。

我们先给出四个显然的性质。

推论 7.12. 复形 Z_2 是邻接连通的。

证明. 由于每个 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$ 都是邻接连通的，且每个 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$ 的边界与 $\mathsf{Ref}^{\nu}(q)$ 一致，因此我们得出复形 Z_2 是邻接连通的。□

推论 7.13. 复形 $\mathsf{Ch}(Z_1) \subset \mathrm{Ref}^{2\nu}(K)$ 相对于 Z_1具有相对 *Wada* 性质。

证明. 相对 Wada 性质可由命题 6.39 以及为 $q \in Z_1^{[n-1]}$ 构造局部通道化 $\mathsf{Ch}(Z_1(q))$ 得出。□

推论 7.14. 对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$|\mathsf{Core}(Z_1; \Sigma_i)| \subset |\mathsf{Core}(Z_2; \Sigma_i)| \setminus |(\partial \mathsf{Core}(Z_2; \Sigma_i))_{\mathrm{inner}}|.$$

证明。 根据引理 7.9，$\mathsf{RC}(Z_1(q)) \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z)) \cup \mathsf{Ref}^{\nu}(\rho_q(Z_1(q)))$，且 $\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(Z_2) \subset \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(\mathsf{RC}(Z_1) \cup \mathsf{Ref}^{\nu}(Z_1)) \subset \mathsf{Ref}^{\nu}(\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(Z_1)$。现在，核扩张性质的证明与推论 7.1 的情形相同。□

推论 7.15。 割图 $\Gamma^{\mathsf{cut}}(\mathrm{Ref}^{2\nu}(K);\, Z_2)$ 恰有 m 个连通分支，

$$G_{Z_2;i} = \Gamma(\mathrm{Comp}^{\mathsf{rec}}(Z_1;\Sigma_i)) \cup \bigcup_{q\in Z^{[n-1]}} (\tau_{Z_1(q);i} \cup \omega_{Z_1(q);i}), \quad i = 1,\dots,m.$$

证明。 对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，从 $\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)$ 中移除系统 $\mathsf{RC}(Z_1) = \bigcup_{q\in Z^{[n-1]}} \mathsf{RC}(Z_1(q))$ 后得到的后退 Σ_i-连通分支为

$$\mathrm{Comp}^{\mathsf{rec}}(Z_1;\Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)) - \mathsf{RC}(Z_1).$$

由于配对 $(U(q);\, Z_1(q))$ 是可容许的，因此所有指标为 i 的局部系统 $\mathsf{RC}(Z_1(q))_i$，$q \in Z^{[n-1]}$，都被导入后退复形 $\mathsf{Comp}^{\mathsf{rec}}(Z_1;\Sigma_i)$。结论得证。□

为证明 Z_2 是 Z_1 的一个扰动，我们先作如下观察。根据构造，Σ_i-连通分支 $\mathsf{Comp}(Z_2;\Sigma_i) = \mathsf{Span}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(G_{Z_2;\, i})$ 有一个本质划分

$$\mathsf{Comp}(Z_2;\Sigma_i) = \mathrm{Comp}^{\mathsf{rec}}(Z_1;\Sigma_i) \cup \mathsf{RC}(Z_1)_i.$$

根据命题 6.33,

$$\mathsf{D}(Z_1;\Sigma_i) = \bigcup_{q\in Z^{[n-1]}} \pi_2^{-1}\left(\mathsf{RC}(Z_1) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i))\right)$$

是若干两两不交的凹陷的并，因此也是提升 $\mathsf{Lift}(Z_1;\, \Sigma_i) = \pi_1^{-1}(\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i))$ 中的一个凹陷。因此，推论 7.15 给出了 $\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i) = \pi_2^{-1}(\mathsf{Comp}(Z_2;\Sigma_i))$ 与 $\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)$ 之间结构关系的描述。

引理 7.16。对于每个 $i = 1,\, ...,\, m$,

$$\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i) = \mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_1;\Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_2;\Sigma_i),$$

其中

(1) $\mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_1;\Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_1;\Sigma_i)$,

(2) $\mathsf{Tunnel}(Z_2;\Sigma_i) = \bigcup_{q\in Z^{[n-1]}} \mathsf{tunnel}(q;\Sigma_i)$ *is a family of tunnels whose adjacency graphs are isomorphic to trees* $\tau_{Z_1(q);i}$, *of sizes at most* λ_{loc}, *and*

(3) $\mathsf{tunnel}(q;\Sigma_i) \cap \mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_1;\Sigma_i) = \pi_2^{-1}(\omega_{Z_1(q);i})$ *is the lift a gate.*

同样，对于 Z_1，凹陷展平定理 5.17 和隧道收缩命题 3.14 现在给出以下双利普希茨关系。请注意，由于隧道 $\mathsf{tunnel}(q;\Sigma_i)$ 的长度受到控制，并且选择了近乎嵌套的偏好函数 ρ_1，陈述中的常数仅取决于维数 n 和原复形 K。

推论 7.17。 存在一个常数 $L = L(n,K) \geq 1$，它仅取决于维数 n 和复形 K；并且存在满射的 $L(n,K)$-双利普希茨同胚

$$|\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)| \xrightarrow{f} |\mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_1;\Sigma_i)| \xrightarrow{g} |\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i)|,$$

它们的复合映射在提升$(Z_1;\ \Sigma_i)$的核心上是恒等映射。

现在我们可以总结 Z_2 的性质了。

推论 7.18。 复形 Z_2 是$\mathrm{Ref}^{2\nu}$（K）中的分离复形，关于 Z_1具有相对 *Wada* 性质，是Z_1的 λ_{loc}-扰动，并且是核扩张的。

证明。 我们首先验证 Z_2 是一个分离复形。由于

$$Z_1 \cap \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{\nu}(K)}(\partial \mathrm{Ref}^{\nu}(K)) = \varnothing,$$

对于每个 $q \in Z_1^{[n-1]}$，我们有 $\mathsf{Ch}(Z_1(q)) \cap \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(\partial \mathsf{Ref}^{2\nu}(K)) = \varnothing$。因此 $Z_2 \cap \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(\partial \mathsf{Ref}^{2\nu}(K)) = \varnothing$，第一个条件成立。根据推论 7.12，$\Gamma(Z_2)$ 是连通的，第二个条件成立。

对于第三个条件，回顾一下，我们将边界 ∂K 及其分支 Σ_i 分别与它们的细分 $\mathsf{Ref}^{k\nu}(\partial K)$ 和 $\mathsf{Ref}^{k\nu}(\Sigma_i)$ 视为相同。由于构造，复形 Z_2 继承了 Z_1 的性质 $\Sigma_i \subset \mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(Z_2;\, \Sigma_i) \cap \mathsf{Ref}^{2\nu}(K) = \Sigma_i$ 以及 $\bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{Comp}_{\mathrm{Ref}^{2\nu}(K)}(Z_2;\, \Sigma_2) = \mathsf{Ref}^{2\nu}(K)$。因此第三个性质成立。

最后，根据推论 7.17，$|\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i)|$ 与 $|\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)|$同胚，因此也与 $|\Sigma_i| \times [0,1]$同胚。由此可知，Z_2 是一个分离复形。

根据推论 7.13 和推论 7.14，Z_2 相对于 Z_1具有和田性质，并且相对于 Z_1 是核扩张的。最后，再根据引理 7.16，$\mathsf{Ch}(Z_1)$ 是 Z_1的一个 λ_{loc}-扰动。□

7.2.5. 通道化的累积效应 $\mathsf{Ch}(Z)$ 和 $\mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_1}(\mathsf{Ch}(Z))$。 在继续构造 Z_k 以用于 $k \geq 3$之前，我们先考察连续通道化对 $\mathsf{Comp}(Z;\Sigma)$ 的累积效应。对于 $\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i)$，这一累积效应可概括如下：

> $\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)$ 中的凹口是通过在每个 $q \in Z^{[n-1]}$附近，从 $\mathsf{Comp}(Z_1;\Sigma_i)$ 中刻去 $\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 而形成的，其中也包括那些在 $\partial\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)$ 上、在构造 Z_1期间未被改变的 $q \in Z^{[n-1]}$。由此，构造 Z_2 时生成的 $\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i)$ 中的隧道，不仅连接到构造 Z_1 时生成的隧道边界，也连接到未受构造 Z_1影响的 Z 边界部分。这使得在归纳步骤中，第 k步新生成的隧道将连接到其所有前代的祖先。

这一看似直接的观察带来了记号和排版方面的问题。我们通过考虑组合蓄水池-运河系统和累积凹陷来处理这些问题。

在本节讨论中，我们从观察复形 $Z_0 = Z$ 和 Z_1 中谱立方体之间的关系开始。

引理 7.19。 复形 $\mathsf{RC}(Z_1)$ 的每个谱立方体，要么包含于 $\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z_0))$ 的某个谱立方体中，要么在 Z_0 中有一个面。

证明。由于

$$\mathrm{Ref}^{\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}(Z_0) \subset Z_1 \subset \mathsf{RC}(Z_0) \cup (\mathrm{Ref}^{\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}(Z_0)),$$

我们有

$$\mathsf{RC}(Z_1) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z_0)) \cup \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_1((\mathrm{Ref}^{\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}(Z_0))^{[n-1]}),$$

其中 $\rho_1\colon Z_1^{[n-1]} \to \mathrm{Ref}^{\nu}(K)^{[n]}$ 是偏好函数，在 ρ_0 中几乎嵌套，用于 Z_2 的构造。由这些包含关系和引理 7.9，可得该结论。□

现在，我们将前两步中的蓄水池-运河系统合并为一个复形：

$$\mathsf{RC}_{\cup}(Z_0, Z_1) = \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}(Z_0)) \cup \mathsf{RC}(Z_1) \subset \mathrm{Ref}^{2\nu}(K).$$

引理 7.20. 复形

$$\mathsf{D}_{\cup}(Z_0, Z_1; \Sigma_i) = \pi_0^{-1}\left(\mathsf{RC}_{\cup}(Z_0, Z_1) \bigcap \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z_0; \Sigma_i))\right)$$

是$\mathrm{Ref}^{2\nu}$(提升$(Z_0;\ \Sigma_i)$) 的良定义子复形，并且是复形提升$(Z_0;\ \Sigma_i)$中的一个凹陷。

证明。第一个断言由注 3.6 得出。对于第二个断言，我们首先注意到，复形 $\mathsf{D}(Z_0; \Sigma_i) = \pi_0^{-1}(\mathsf{RC}(Z_0) \cap \mathsf{Comp}(Z_0; \Sigma_i))$ 根据命题 6.33 是 $\mathsf{Lift}(Z_0; \Sigma_i)$ 中的一个凹陷。

系统 $\mathsf{RC}(Z_1) = \bigcup_{q\in Z_0^{[n-1]}} \mathsf{RC}(Z_1(q))$ 是由互不相交的局部系统组成的并。由于 $\mathsf{RC}(Z_1(q)) - \mathsf{RC}(Z_0)$ 包含于偏好立方体$\rho_1(q) \in K$，其局部几何是欧几里得的。根据引理 7.19，$\mathsf{RC}(Z_1(q))$ 的每个谱立方体，若不包含于 $\mathsf{RC}(Z_0)$，则有一个面位于 Z_0中。事实上，根据引理 7.9，$\mathsf{RC}(Z_1(q)) - \mathsf{RC}(Z_0)$ 与 $\mathsf{RC}(Z_0)$ 的交集由互不相交的 $(n-1)$-立方体组成。此外，根据构造，$\mathsf{RC}_{\cup}(Z_0, Z_1)$ 中三个不同谱立方体的交集为空。

提升 $\pi_0^{-1}(\mathsf{RC}(Z_1(q)) - \mathsf{RC}(Z_0))$ 和 $\mathsf{RC}(Z_1(q)) - \mathsf{RC}(Z_0)$ 同构。因此，$\mathsf{D}_{\cup}(Z_0,\ Z_1;\ \Sigma_i)$ 是本质不相交的凹陷 $\mathsf{D}(Z_0; \Sigma_i)$ 和 $\pi_0^{-1}((\mathsf{RC}(Z_1(q)) - \mathsf{RC}(Z_0)) \cap \mathsf{Comp}(Z_0; \Sigma_i))$ 的并，其中 $q \in Z_0^{[n-1]}$ 的两两交集满足定义 5.5 中的要求，并且任意三个不同谱立方体的交集均为空。由此可得，$\mathsf{D}_{\cup}(Z_0,\ Z_1; \Sigma_i)$ 是 $\mathsf{Lift}(Z_0; \Sigma_i)$ 中的一个凹陷。□

以下命题描述了提升 $\mathsf{Lift}(Z_2;\ \Sigma_i)$ 与 $\mathsf{Lift}(Z_0; \Sigma_i)$ 之间的迭代关系。它可以看作推论 7.2 和引理 7.16 的合成。

命题 7.21. 对于每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，$\mathsf{Lift}(Z_2;\ \Sigma_i)$ 都有一个本质划分

$$\mathsf{Lift}(Z_2; \Sigma_i) = \mathsf{Lift}^{\dagger_2}(Z_0; \Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}^{\dagger_2}(Z_1; \Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_2; \Sigma_i),$$

其中

(1) $\mathsf{Lift}^{\dagger_2}(Z_0;\ \Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{2\nu}(\mathsf{Lift}(Z_0;\ \Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_0, Z_1;\ \Sigma_i)$*; (2)* 隧道$^{\dagger_2}(Z_1;\ \Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{\nu}($隧道$(Z_1;\ \Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_1;\ \Sigma_i)$ 是一条有凹痕的隧道，它在 $\pi_2^{-1}(\omega_{Z;i})$ 处与 $\mathsf{Lift}^{\dagger_2}(Z_0; \Sigma_i)$ 相交；*(3)* 隧道$(Z_2;\ \Sigma_i) = \bigcup_{q\in Z^{[n-1]}}$隧道$(q; \Sigma_i)$ 是一组隧道，其中每条隧道都在 $(n-1)$- 立方体 $\pi_2^{-1}(\omega_{Z_1(q);i})$ 处与 $\mathsf{Lift}^{\dagger_2}(Z_0; \Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}^{\dagger_2}(Z_1; \Sigma_i))$ 相交。

证明。 由引理 7.16 和该构造可知

$$\begin{aligned}\mathsf{Lift}(Z_2;\Sigma_i) &= (\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_1;\Sigma_i)) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_2;\Sigma_i)\\ &= \big(\mathrm{Ref}^{2\nu}(\mathsf{Lift}(Z_0;\Sigma_i)) - \mathsf{D}_{\cup}(Z_0,Z_1;\Sigma_i)\big)\\ &\quad \cup \Big((\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Lift}(Z_1;\Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_1;\Sigma_i))\\ &\qquad - (\mathrm{Ref}^{2\nu}(\mathsf{Lift}(Z_0;\Sigma_i)) - \mathsf{D}_{\cup}(Z_0,Z_1;\Sigma_i))\Big) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_2;\Sigma_i)\\ &= \big(\mathrm{Ref}^{2\nu}(\mathsf{Lift}(Z_0;\Sigma_i)) - \mathsf{D}_{\cup}(Z_0,Z_1;\Sigma_i)\big)\\ &\quad \cup (\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Tunnel}(Z_1;\Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_1;\Sigma_i)) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_2;\Sigma_i).\end{aligned}$$

命题中的其他断言都是对引理 7.16 中断言的重新表述。 □

7.2.6. 关于 ρ_2 的 Z_2 在 ρ_1中几乎嵌套的偏好函数。 定义 $Z_2 = \mathsf{Ch}(Z_1)$ 的过程很容易得到一个定义良好的偏好函数

$$\rho_2 = (\rho_1)_{\mathsf{Ch}} \colon {Z_2}^{[n-1]} \to \mathrm{Ref}^{2\nu}(K)^{[n]},$$

在 ρ_1 中几乎嵌套： ${Z_1}^{[n-1]} \to \mathbf{Ref}^{\nu}(K)^{[n]}$， 其中

(1) $\rho_2(q^*) \in \mathsf{RC}(Z_1)^{[n]}$ if $q^* \in \mathsf{RC}(Z_1)^{[n-1]}$, and
(2) $\rho_2(q^*) \in \mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_1(q))$ if $q^* \subset q \in Z_1^{[n-1]}$ and $q^* \notin \mathsf{RC}(Z_1)^{[n-1]}$.

7.2.7. 按照 L_2 对 Z_2 进行局部化， L_1 以及 $\mathfrak{T}_1$。 令 $\mathrm{L}_1 = \{Z_1(q') \colon q' \in Z_0^{[n-1]}\}$ 表示 Z_1 的局部化，并令 $\mathfrak{T}_1 = \{\mathrm{T}_{q'} \colon q' \in Z_0^{[n-1]}\}$表示先前定义的、在 $Z_1(q')$ 上的生成树族。

对于每个 $q' \in Z_0^{[n-1]}$ ，局部通道化 $\mathsf{Ch}(Z_1(q'))$ 都具有一个偏序划分 $\{Z_2(q) \colon q \in Z_1(q')^{[n-1]}\}$ ，该划分由树 $\mathrm{T}_{q'} \in \mathfrak{T}_1$ 按照与第 6.2.7 节中相同的细分规则确定。因此，

$$\mathsf{Ch}(Z_1(q')) = \bigcup_{q \in Z_1(q')^{[n-1]}} Z_2(q),$$

以及其并集

$$\mathcal{L}_2 = \{Z_2(q) \colon q \in Z_1^{[n-1]}\} = \bigcup_{q' \in Z_0^{[n-1]}} \left(\bigcup_{q \in Z_1(q')^{[n-1]}} \{Z_2(q)\} \right)$$

是 Z_2 的本质划分。

与第 7.2.2 节类似，对于每个 $Z_2(q) \in \mathrm{L}_2$，我们可以选择一个环境子复形$U_2(q) \subset \mathbf{Ref}^{2\nu}(K)$，使得所有对 $(U_2(q)\ Z_2(q))$ 在 $(\mathbf{Ref}^{2\nu}(K)\ Z_2)$ 中都是可容许的，并且偏好函数 $\rho_2|_{Z_2(q)}$ 也是可容许的。因此， L_2 是一个局部化，并且由 L_1 和 $\mathfrak{T}_1$ 唯一确定。

在为 L_2，中的每个元素固定一棵生成树后，我们可以开始构造 $Z_3 = \mathsf{Ch}(Z_2)$。我们将在第 7.3 节中迭代这一构造。

7.3. **演化序列**。 现在我们通过归纳法构造序列 (Z_k)。与依赖于 Z_1 和 Z_0 的 Z_2 的构造类似， Z_k 的构造既依赖于 Z_{k-1} ，也依赖于 Z_{k-2}。

特此说明，分离复形 $Z_0 = Z \subset K$，$Z_1 = \mathsf{Ch}(Z) = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_0}(Z) \subset \mathrm{Ref}^{\nu}(K)$，以及 $Z_2 = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_1}(Z_1) \subset \mathrm{Ref}^{2\nu}(K)$ 已经构造完成，其中 $\mathrm{L}_0 = \{Z_0\}$ 和 $\mathrm{L}_1 = \{Z_1(q)\colon\ q \in Z_0^{[n-1]}\}$ 是 Z_1 的局部化。

假设对于某个 $k \geq 2$，我们已有一个序列

$$Z_0, \mathcal{L}_0, Z_1, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{k-2}, Z_{k-1}$$

由分离复形 Z_j's 和局部化 L_j's 组成，其中

$$Z_j = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_{j-1}}(Z_{j-1}) = \bigcup_{q \in Z_{j-2}^{[n-1]}} \mathsf{Ch}(Z_{j-1}(q)) \subset \mathrm{Ref}^{\nu j}(K)$$

是基于一族偏好函数 P_{j-1} 和一族定义在 L_{j-1} 的元素上的生成树 $\mathfrak{T}_{j-1}$ 的、在 $\mathrm{L}_{j-1} = \{Z_{j-1}(q)\colon\ q \in Z_{j-2}^{[n-1]}\}$ 上的局部通道化，其中 $1 \leq j \leq k-1$。

7.3.1. 的构造 Z_k。 为构造 Z_k，我们几乎逐字照搬第 7.2 节中构造 Z_2 的步骤，这里仅作简要概述。

按照第 7.2.7 节中的定义，定义一个划分

$$\mathcal{L}_{k-1} = \bigcup_{q' \in Z_{k-3}^{[n-1]}} \{Z_{k-1}(q)\colon q \in Z_{k-2}(q')^{[n-1]}\}$$

按照 L_{k-2} 和 $\mathfrak{T}_{k-2}$，$Z_{k-1} = \bigcup_{q' \in Z_{k-3}^{[n-1]}} \mathsf{Ch}(Z_{k-2}(q'))$。因此，对于 $q' \in Z_{k-3}^{[n-1]}$，

$$\mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_{k-2}}(Z_{k-2}(q')) = \bigcup_{q \in Z_{k-2}(q')^{[n-1]}} Z_{k-1}(q).$$

如第 7.2.2 节所述，任取每个 $q \in Z_{k-2}^{[n-1]}$ 的一个环境复形$U_{k-1}(q)$，它属于 $\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)$，且对应于 $Z_{k-1}(q)$，使得 $(U_{k-1}(q)\ Z_{k-1}(q))$ 在 $(\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)\ Z_{k-1})$ 中是容许的。因此，划分 L_{k-1} 是一个局部化。

接下来，固定一个偏好函数 $\rho_{k-1}\colon\ Z_{k-1}^{[n-1]} \to (\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K))^{[n]}$，它在 ρ_{k-2} 中几乎嵌套，如第 7.2.6 节所述，并令

$$\mathcal{P}_{k-1} = \{\rho_q = \rho_{k-1}|_{Z_{k-1}(q)}\colon q \in Z_{k-2}^{[n-1]}\}.$$

根据引理 7.8，P 中的每个 $\rho_{q\,k-1}$ 都是可容许的。

最后，对每个 $q \in Z_{k-2}^{[n-1]}$，固定一个偏序的局部欧几里得张成树，使其位于 $Z_{k-1}(q)$ 上，并令

$$\mathfrak{T}_{k-1} = \{\mathcal{T}_q\colon q \in Z_{k-2}^{[n-1]}\}.$$

有了 $(\mathrm{L}_{k-1},\ \mathrm{P}_{k-1},\ \mathfrak{T}_{k-1})$，我们便按照定义 $Z_2 = \mathsf{Ch}(Z_1)$ 的步骤，得到

$$Z_k = \mathsf{Ch}_{\mathcal{L}_{k-1}}(Z_{k-1}) = \bigcup_{q \in Z_{k-2}^{[n-1]}} \mathsf{Ch}(Z_{k-1}(q)).$$

作为局部通道化 $\mathsf{Ch}(Z_{k-1}(q))$ 的并集。

注释 7.22. 注意，与我们相对于 Z 选择复形 $Z_1(q)$ 的方式类似，我们可以假设，对于每个 $q \in Z_{k-2}^{[n-1]}$，蓄水池-运河系统 $\mathsf{RC}(Z_{k-1}(q))$ 相对于 Z_{k-2} 的蓄水池 - 运河系统和偏好函数 ρ_q 满足引理 *7.9* 的性质。

7.3.2. 性质 Z_k。在总结复形Z_k的性质之前，我们先讨论提升 $\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)$ 的性质。至于 Z_1 和 Z_2，本讨论用于证明 Z_k 是一个具有 λ-扰动性质的分离复形。

类似于 $k=2$ 的情形，我们有

$$\mathsf{Comp}(Z_k;\Sigma_i) = \mathrm{Comp}^{\mathsf{rec}}(Z_{k-1};\Sigma_i) \cup \mathsf{RC}(Z_{k-1})_i$$

并且有

$$\mathsf{D}(Z_{k-1};\Sigma_i) = \pi_k^{-1}(\mathsf{RC}(Z_{k-1}) \cap \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Comp}(Z_{k-1};\Sigma_i)))$$

是 $\mathsf{Lift}(Z_{k-1};\Sigma_i)$ 中的一个凹陷。

下面的命题形式化了 $\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)$ 与 $\mathsf{Lift}(Z_{k-1};\Sigma_i)$ 之间的关系；参见引理 7.16。

命题 7.23. 令 $k \geq 2$。对于每个 $i = 1, \ldots, m$,

$$\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i) = \mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_{k-1};\Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_k;\Sigma_i),$$

其中

(1) $\mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_{k-1};\Sigma_i) = \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Lift}(Z_{k-1};\Sigma_i)) - \mathsf{D}(Z_{k-1};\Sigma_i)$,

(2) $\mathsf{Tunnel}(Z_k;\Sigma_i) = \bigcup_{q\in Z_{k-2}^{[n-1]}} \mathsf{tunnel}(q;\Sigma_i)$ *is a family of tunnels each of which has graph size at most* λ_{loc}, *and*

(3) $\mathsf{tunnel}(q;\Sigma_i) \cap \mathsf{Lift}^{\mathsf{dented}}(Z_{k-1};\Sigma_i) = \pi_k^{-1}(\omega_{Z_{k-1}(q),i})$ *is the lift of a gate.*

与推论 7.18 的证明类似，我们得到以下性质。

推论 7.24. 序列 (Z_k)，$Z_k \subset \mathrm{Ref}^{k\nu}(K)$由满足以下条件的分离复形组成

(1) Z_k 相对于 Z_{k-1}具有相对 *Wada* 性质；*(2)* Z_k 相对于 Z_{k-1}是核扩张的；*(3)* Z_k 是 Z_{k-1}的 λ-扰动，

其中，当 $k \geq 2$时，常数 $\lambda = \lambda_{\mathrm{loc}}$ 和 $L = L_{\mathrm{loc}}$；当 $k = 1$时，λ 和 L 取决于n 和 K。

这就完成了序列（Z_k）的构造。

7.4. 核之间的几何。关于瓦达湖的几何性质，我们证明核之间的点可以通过一条立方体链连通，且这条链不会太靠近边界。

对于该陈述，请回忆序列（Z_k）是核扩张的。

引理7.25。令 $k \geq 1$。给定一个 n-立方体 $Q_0 \in$ 核心$(Z;\ \Sigma_i)$ 以及一个 n-立方体Q_k，在

$$P_k = \mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i) - \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Core}(Z_{k-1};\Sigma_i)),$$

存在一条C_k 个 n-立方体组成的链

$$Q_k = Q_{k,1}, \ldots, Q_{k,p_k};\ Q_{k-1,1}, \ldots, Q_{k-1,p_{k-1}};\ \ldots;\ Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,p_0} = Q_0,$$

连接 Q_k 与 Q_0，使得

(1) 对于每个 $\ell \geq 1$、$Q_{\ell,\,1}$、……、$Q_{\ell,\,p_\ell}$，都是一条位于其中的线性邻接连通立方体序列

$$P_\ell = \mathsf{Core}(Z_\ell;\Sigma_i) - \mathrm{Ref}^\nu(\mathsf{Core}(Z_{\ell-1};\Sigma_i)),$$

并且 $Q_{\ell,\,p_\ell}$ 与 n-立方体 $Q_{\ell-1,\,1} \in \mathrm{Ref}^\nu(Q_{\ell-1,\,1})$相邻；

(2) $p_\ell \leq 3^\nu \theta(K)$ 对于 $1 \leq \ell \leq k$，并且 $p_0 \leq \#(K^{[n]})$。

证明。给定 $Q_k \in P_k$，我们按照引理 7.5 的证明，得到一条位于 P_k 中的线性邻接连通 n-立方体序列$Q_k = Q_{k,\,1}$、……、$Q_{k,\,p_k}$，满足

(1) 该序列包含于 $\mathsf{Ref}^\nu(\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}(Z_{k-1}))$ 中；(2) $Q_{k,\,p_k}$ 在 $\mathsf{Ref}^\nu\left(\mathsf{Core}(Z_{k-1};\Sigma_i) \cap \mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}(Z_{k-1})\right)$ 中有一个面；以及 (3) $p_k \leq 3^\nu\theta(K)$。

设 $Q_{k-1,\,1}$ 为 $\mathsf{Core}(Z_{k-1};\Sigma_i)$ 中与 $Q_{k,\,p_k}$ 在一个面上相交的 n-立方体$Q_{k,\,p_k}$。由于 $Q_{k-1,\,1}$ 包含于 $\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}\left(\mathsf{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}(Z_{k-1})\right)$ 且

$$\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}\left(\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(K)}(Z_{k-1})\right) \subset \mathrm{Ref}^\nu(\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{(k-2)\nu}(K)}(Z_{k-2})),$$

n-立方体 $Q_{k-1,\,1}$ 不在 $\mathsf{Ref}^\nu(\mathsf{Core}(Z_{k-2};\,\Sigma_i))$ 中。因此 $Q_{k-1,\,1}$ 属于 P_{k-1}。

我们按降序对 $\ell = k-1$，……，1，重复上述构造，从而得到序列 $Q_{\ell,\,1}$，……，$Q_{\ell,\,p_{k-1}}$，它们位于 P_ℓ 和 n-立方体 $Q_{\ell-1,\,1}$ 中，且满足 $P_{\ell-1}$ 中的 $p_\ell \leq 3^\nu\theta(K)$，最后一个序列 $Q_{0,\,1}$，……，$Q_{0,\,p_0} = Q_0$ 属于 $\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)$，其中 $p_0 \leq \#(K^{[n]})$。□

引理7.25表明核心 $|\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)|$具有约翰性质。我们在此不作正式陈述，因为第8节将讨论瓦达湖的约翰性质。不过，我们在此记录一条注。

注7.26. 相对于 K上的多面体度量 d_K，引理*7.25*中的立方体$Q_{\ell,\,j}$（$j = 1, \ldots, p_\ell$）的边长为 $3^{-\ell\nu}$。令 $x_{\ell,\,j}$ 为立方体 $Q_{\ell,\,j}$ 的中心。于是存在常数 $c_1 = c_1(n,\nu) > 0$ 和$c_2 = c_2(n,\nu) > 0$（对于 $\ell \geq 1$），以及常数 $c_1 = 1$ 和 $c_2 = \#(K^{[n]})$（对于$\ell = 0$），使得

$$c_1 3^{-\ell\nu} \leq \mathrm{dist}\,(x_{\ell,j}, |\partial\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)|) \leq c_2 3^{-\ell\nu}.$$

因此，我们可以固定一条分段线性曲线 σ，它位于 $|$核心$(Z_k;\Sigma_i)|$ 中，并依次连接各立方体的中心

$$x_k = x_{k,1}, \ldots, x_{k,p_k}; x_{k-1,1}, \ldots, x_{k-1,p_{k-1}}; \ \ldots; \ x_{0,1}, \ldots, x_{0,p_0} = x_0,$$

用线段连接各立方体的中心。

7.5. **拟共形稳定性**。现在我们证明序列 (Z_k) 的拟共形稳定性。拟共形稳定性结合推论 7.24，完成了演化定理（定理 4.16）的证明。

稳定性的证明基于命题 7.23 中各次提升之间的归纳关系。为了控制膨胀，我们同时展平所有步骤中产生的凹陷，而不是逐步进行。为此，我们将此前针对 $k = 2$ 定义的组合储库-运河系统 和累积凹陷的概念扩展到所有 k。

设 $k \geq 0$。我们为每个 $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ 定义一个组合储库-运河系统

$$\mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}) = \bigcup_{j=\ell}^{k-1} \mathrm{Ref}^{\nu(k-j-1)}(\mathsf{RC}(Z_j)) \subset \mathrm{Ref}^{k\nu}(K).$$

注意，合并后的系统不满足核心 $|\mathsf{Core}^{K_\ell}(Z_\ell; \Sigma_i)|$。

$\mathsf{RC}(Z_k)$ 的谱立方体与 $\mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1})$ 的谱立方体具有如下关系。

引理 7.27。设 $k \geq 1$。复形 $\mathsf{RC}(Z_k)$ 的一个谱立方体要么包含于 $\mathsf{RC}_{\cup}(Z_0, \ldots, Z_{k-1})$ 的一个谱立方体中，要么在 Z_0 中有一个面。

证明。对于 $k = 1$，该断言由引理 7.19 得出。

类似于情形 $k = 1$，由构造可得，对于$k \geq 2$,

$$Z_k \subset \mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}) \cup \left(\mathrm{Ref}^{k\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}))\right)$$

and

$$\mathrm{Ref}^{k\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}) \subset Z_k.$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{RC}(Z_k) \subset & \mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1})) \\ & \cup \left(\mathrm{Ref}^{\nu}(\rho_{k-1}(\mathrm{Ref}^{(k-1)\nu}(Z_0) - \mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1})\right),\end{aligned}$$

其中，$\rho_{k-1} : (Z_{k-1})^{[n-1]} \to \mathbf{Ref}^{(k-1)\nu}(K)^{[n]}$ 是构造 Z_k 时所用的偏好函数。由此包含关系即可得出所述结论。□

设 $k \geq 2$。我们为每个 $0 \leq \ell \leq k-1$ 定义一个子复形

$$\begin{aligned}&\mathsf{D}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i) \\ &\quad = \pi_\ell^{-1}\left(\mathsf{RC}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}) \bigcap \mathrm{Ref}^{(k-\ell)\nu}(\mathsf{Comp}(Z_\ell; \Sigma_i))\right) \\ &\quad \subset \mathrm{Ref}^{(k-\ell)\nu}(\mathsf{Lift}(Z_\ell; \Sigma_i)).\end{aligned}$$

与情形 $k = 2$ 一样，根据注 3.6，商 π_ℓ 可以转化为区域的细分与目标的细分之间的映射，因此 $\mathsf{D}_{\cup}(Z_\ell, \ldots\ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i)$ 是良定义的。

现在设对于 $\ell \geq 1$,

$$\mathsf{D}^{\mathsf{T}}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i) = \mathsf{D}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i) \bigcap \mathrm{Ref}^{(k-\ell)\nu}(\mathsf{Tunnel}(Z_\ell; \Sigma_i)),$$

其中 $\mathsf{Tunnel}(Z_\ell; \Sigma_i)$ 是 $\mathsf{Lift}(Z_\ell; \Sigma_i)$ 的隧道部分；记号参见命题 7.23。

引理 7.28. 设 $k \geq 1$ 和 $i \in \{1, \ldots, m\}$。则 $\mathsf{D}_{\cup}(Z_0, \ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i)$是提升$(Z_0; \Sigma_i)$中的一个凹陷。此外，对每个 $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$，$\mathsf{D}^{\mathsf{T}}_{\cup}(Z_\ell, \ldots, Z_{k-1}; \Sigma_i)$ 都是隧道$K_\ell($ $Z_\ell; \Sigma_i)$中的一个凹陷。

证明。当 $k = 1$ 时，$\mathsf{D}_{\cup}(Z_0; \Sigma_i) = \pi_0^{-1}(\mathsf{RC}(Z_0) \cap \mathsf{Comp}(Z_0; \Sigma_i))$ 由命题 6.33 可知是 $\mathsf{Lift}(Z_0; \Sigma_i)$ 中的一个凹陷。当 $k = 2$ 时，$\mathsf{D}_{\cup}(Z_0, Z_1; \Sigma_i)$ 由引理 7.20 可知是 $\mathsf{Lift}(Z_0; \Sigma_i)$ 中的一个凹陷。关于 $k \geq 3$ 的结论由归纳法得到。若假设该命题对 k 成立，要得到

关于 $k-1$ 的结论，我们应用引理 7.27，并沿用引理 7.20 中的论证思路。至此，第一个结论得证。

令 $\ell \in \{1,\dots,k-1\}$。对于第二个断言的证明，我们仿照第一个陈述的证明进行，其中 (Tunnel$^{K_\ell}(Z_\ell;\ \Sigma_i)$; $\mathsf{D}^{\mathsf{T}}_{\cup}(Z_\ell,\dots,Z_{k-1};\ \Sigma_i)$) 起到 (Lift$(Z_0;\ \Sigma_i)$; $\mathsf{D}_{\cup}(Z_0,\dots,Z_{k-1};\ \Sigma_i)$) 的作用。除 Tunnel$^{K_\ell}(Z_\ell;\Sigma_i)$ 有多个连通分支这一事实外，证明几乎完全相同。细节从略。□

我们用一个命题记录 Lift$(Z_k;\Sigma_i)$ 与 Lift$(Z_0;\Sigma_i)$ 的结构之间的迭代关系，该命题揭示了 Lift$(Z_k;\Sigma_i)$ 对于 $k \geq 2$ 在第 7.2.5 节开头所描述的非标准树状结构。下面命题的证明是命题 7.21 证明的直接延拓，细节从略；记号见命题 7.23 和引理 7.28。

命题 7.29。设 $k \geq 2$。对每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，提升$(Z_k;\ \Sigma_i)$ 都有一个本质划分

$$\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i) = \mathsf{Lift}^{\dagger_k}(Z_0;\Sigma_i) \cup \bigcup_{\ell=1}^{k-1} \mathsf{Tunnel}^{\dagger_k}(Z_\ell;\Sigma_i) \cup \mathsf{Tunnel}(Z_k;\Sigma_i),$$

其中

(1) 提升$^{\dagger_k}(Z_0;\ \Sigma_i)$ $=$*Ref*$^{k\nu}$(提升$(Z_0;\ \Sigma_i)$) $-D_{\cup}(Z_0,\dots,Z_{k-1};\ \Sigma_i)$;

(2) 隧道$^{\dagger_k}(Z_\ell;\ \Sigma_i)$ $=$*Ref*$^{(k-\ell)\nu}$(隧道$(Z_\ell;\ \Sigma_i)$) $-D^{\mathsf{T}}_{\cup}(Z_\ell,\dots Z_{k-1};\ \Sigma_i)$,

其中 *(a)* 隧道$^{\dagger_k}(Z_1;\ \Sigma_i)$ 是一个凹陷隧道，它与提升$^{\dagger_k}(Z_0;\ \Sigma_i)$ 相交于 $\pi_k^{-1}(\omega_{Z;i})$ 的一个细分，并且 *(b)* 对于 $\ell \geq 2$，隧道 $^{\dagger_k}(Z_\ell;\ \Sigma_i)$ $=\bigcup_{q\in Z_{\ell-2}^{[n-1]}}$ 隧道$^{\dagger_k}(q;\ \Sigma_i)$ 是一组凹陷隧道，它们相交于

$$\mathsf{Lift}^{\dagger_k}(Z_0;\Sigma_i) \cup \bigcup_{j=1}^{\ell-1} (\mathsf{Tunnel}^{\dagger_k}(Z_j;\Sigma_i))$$

在一族闸口提升中，$\pi_k^{-1}(\omega_{Z_{\ell-1}(q);i})$，$q \in Z_{\ell-2}^{[n-1]}$。

(3) 隧道$(Z_k;\ \Sigma_i)$ $=\bigcup_{q\in Z_{k-2}^{[n-1]}}$ 隧道$(q;\ \Sigma_i)$ 是一族隧道，其中每一条都与.....相交

$$\mathsf{Lift}^{\dagger_k}(Z_0;\Sigma_i) \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathsf{Tunnel}^{\dagger_k}(Z_j;\Sigma_i))$$

在一个闸口的提升 $\pi_k^{-1}(\omega_{Z_{k-1}(q);i})$ 中。

证明。由于 Lift$(Z_1;\ \Sigma_i)$ $=$(Ref$^{\nu}$(Lift$(Z_0;\ \Sigma_i)$) $-\mathsf{D}(Z_0;\ \Sigma_i)$) $\cup$隧道$(Z_1;\ \Sigma_i)$，该结论对 $k=1$ 成立。关于 $k=2$ 的结论已在命题 7.21 中证明。对于 $k \geq 3$，Lift$(Z_k;\Sigma_i)$ 的本质划分通过归纳法证明。假设该陈述对 $k-1$ 成立，则关于 k 的结论的证明几乎可以逐字照搬命题 7.21 的证明。细节从略。□

有了命题 7.29，我们可以同时展平不同代中形成的凹陷。固定一个整数 $k \geq 2$。对于该陈述，我们记

$$W_{0;i} = \mathrm{Wedge}_{|\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i))|}(\mathsf{D}_{\cup}(Z_0,\dots,Z_{k-1};\Sigma_i)),$$

并且对于 $\ell \in \{1,\dots,k-1\}$,

$$W_{\ell;i} = \mathrm{Wedge}_{|\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i))|}(\mathsf{D}^{\mathsf{T}}_{\cup}(Z_\ell,\dots,Z_{k-1};\Sigma_i)).$$

命题 7.30. 固定一个整数 $k \geq 2$。对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，存在一个空间

$$X_{k;i} = R_{0;i} \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^{k-1} T_{\ell;i}\right) \cup T_{k;i},$$

其中 $R_{0;i}$ 是 |提升(Z_0; Σ_i)| 的等距副本，而 $T_{1;i}$、……、$T_{k;i}$ 分别是 |隧道(Z_1; Σ_i)|、……、|隧道(Z_k; Σ_i)| 的等距副本，并且存在一个 $L(n,\ K)$-双利普希茨同胚

$$\varphi_{k;i}\colon |\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)| \to |X_{k;i}|,$$

它将限制为映射 |提升^{†_k}(Z_0; Σ_i)| $\to R_{0;i}$、|隧道^{†_k}(Z_j; Σ_i)| $\to T_{j;i}$，其中 $j = 1$，……，$k-1$，以及映射 |隧道(Z_k; Σ_i)| $\to T_{k;i}$。此外，

(1) $\varphi_{k;i}$ *is an isometry in the complement of the wedges* $W_{0;i}\cup\cdots,\cup W_{k-1;i}$, *and an isometry on* $|\pi_k^{-1}(\omega_{Z;i})|\cup\left(\bigcup_{\ell=1}^{k-1}\left(\bigcup_{q\in Z_{\ell-1}^{[n-1]}}|\pi_k^{-1}(\omega_{Z_\ell(q);i})|\right)\right)$; *and*

(2) $T_{1;i}\cap R_{0;i} = \varphi_{k;i}(|\pi_k^{-1}(\omega_{Z;i})|)$, *and for* $\ell \in \{2,\dots,k\}$,

$$T_{\ell;i}\cap\left(R_{0;i}\cup(\bigcup_{j=1}^{\ell-1}T_{j;i})\right) = \bigcup_{q\in Z_{\ell-2}^{[n-1]}}\varphi_{k;i}(|\pi_k^{-1}(\omega_{Z_{\ell-1}(q);i})|).$$

证明。证明过程中，我们依次展平命题 7.29 中 Lift(Z_k; Σ_i) 的子复形 Lift^{†_k}(Z_0; Σ_i)、Tunnel^{†_k}(Z_1; Σ_i)…,Tunnel^{†_k}(Z_{k-1}; Σ_i)。我们只详细说明第一步。

由于 Lift^{†_k}(Z_0; Σ_i) $=$Ref$^{k\nu}$(Lift(Z_0; Σ_i)) $-$D$_{\cup}$($Z_0,\dots,Z_{k-1}$; Σ_i)，而 D$_{\cup}$($Z_0,\dots,Z_{k-1}$; Σ_i) $\cap$Ref$^{k\nu}$(Lift(Z_0; Σ_i)) 是一个凹陷，根据凹陷展平定理（定理 5.17），存在一个双利普希茨映射

$$\psi_{0;i}\colon |\mathsf{Lift}^{\dagger_k}(Z_0;\Sigma_i)| \to |\mathrm{Ref}^{k\nu}(\mathsf{Lift}(Z_0;\Sigma_i))|$$

它在复形 D$_{\cup}$($Z_0,\dots,Z_{k-1}$; Σ_i) 的楔形 $W_{0;i}$ 补集上是恒等映射。此外，根据定理 5.17 证明中的构造，我们还可以进一步假设，$\psi_{0;i}$ 在 Lift^{†_k}(Z_0; Σ_i) 中所有连接隧道的闸口上都是等距变换。

现在，我们用展平复形 Ref$^{k\nu}$(Lift(Z_0; Σ_i)) 替换 Lift^{†_k}(Z_0; Σ_i) 中的子复形 Lift(Z; Σ_i)，并保留子复形 Tunnel^{†_k}(Z_j; Σ_i)（j =1,…,$k-1$），以及在对应闸口的像处按规范方式连接的隧道 Tunnel(Z_k; Σ_i)。

对子复形隧道^{†_k}(Z_j; Σ_i)、$j = 1$、……、$k-1$迭代重复此过程，即可得出结论。由于定理 5.17 的应用是在本质不相交的子复形中进行的，$\phi_{k;i}$ 的双 Lipschitz 常数就是定理 5.17 的双 Lipschitz 常数。□

凹陷展平后，为了证明拟共形稳定性，还需要收缩隧道。

定理 7.31。 存在一个常数 $\mathsf{K} = \mathsf{K}(n, K) \geq 1$，使得如下结论成立。对于每个 $k \geq 1$ 和 $i \in \{1, \dots, m\}$，存在一个 K-拟共形同胚

$$f_{k;i} \colon |\mathsf{Lift}(Z_k; \Sigma_i)| \to |\mathsf{Lift}(Z; \Sigma_i)|,$$

它在核心 $\mathsf{Core}(Z; \Sigma_i)$ 上是恒等映射。

下面的论证是对 [5] 中论证的简化。为进行论证，我们首先固定一个参数 $\beta \in \mathbb{N}$ 如下。

局部通道构造给出一个常数 $N = N(n, \nu) \geq 1$，使得在 $\mathsf{Tunnel}(Z_{\ell+1}; \Sigma_i)$ 中，至多有 N 个隧道可以连接到之前的集合 $\mathsf{Tunnel}(Z_\ell; \Sigma_i)$ 中同一个隧道 $\mathsf{tunnel}(q; i)$ 上。令 $\beta \in \mathbb{N}$ 为满足以下条件的最小整数：$\mathsf{Ref}^{\beta\nu}([0,1]^{n-1})$ 至少包含 N 个两两不交的、包含于 $(0,1)^{n-1}$ 中的 $(n-1)$-立方体。

此外，为了证明，回想命题 3.14 中的隧道收缩映射，其双利普希茨常数仅取决于 n 和隧道的大小。由命题 7.29 和 7.30 可知，$\mathsf{Tunnel}(Z_1; \Sigma_i)$ 恰好由一个隧道组成，其图大小至多为 $\#(Z^{[n-1]})3^{(n-1)\nu}$；并且对于 $\ell \geq 2$，集合 $\mathsf{Tunnel}(Z_\ell; \Sigma_i)$ 中的每个隧道 $\mathsf{tunnel}(q; \Sigma_i)$ 的大小至多为 λ_{loc}。因此，隧道收缩映射的双利普希茨常数仅取决于 n 和 K。

定理 7.31 的证明。作为预备步骤，令

$$\varphi = \varphi_{k;i} \colon |\mathsf{Lift}(Z_k; \Sigma_i)| \to R_{0;i} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k} T_{\ell;i}$$

为命题 7.30 中的 $L(n, K)$-双利普希茨凹陷压平映射。

对每个 $\ell \in \{2, \dots, k\}$，我们取 $\Omega_{q;i}$, $q \in Z_{\ell-2}^{[n-1]}$ 为 $R_{0;i} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell-1} T_{j;i}$ 中的 n-立方体，它以 $\mathsf{w}_{q;i} = \varphi(|\pi_k^{-1}(\omega_{Z_{\ell-1}(q);i})|)$ 为一个面，并称其为位于 $\mathsf{w}_{q;i}$ 上方的立方体。另取 $\widehat{\ }\Omega_{q;i}$ 为 $R_{0;i} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell-1} T_{j;i}$ 中包含 $\Omega_{q;i}$ 的立方体，使得有序对 $(\widehat{\ }\Omega_{q;i}, \Omega_{q;i})$ 是 $([0,3]^n, [1,2]^{[n-1]} \times [0,1])$ 的一个缩放。我们称 $\widehat{\ }\Omega_{q;i}$ 为位于 $\mathsf{w}_{q;i}$ 上方的帐篷。当 $\ell = 1$ 时，我们对记号作显而易见的调整，并以类似方式定义立方体 $\Omega_{q;i}$ 以及位于 $\varphi(|\pi_k^{-1}(\omega_{Z;i})|)$ 上方的帐篷 $\widehat{\ }\Omega_{q;i}$。

鉴于命题 7.29，我们不妨假设：必要时在 φ 后复合一个双利普希茨映射，使其中的帐篷

$$\{\widehat{\Omega}_{q;i}\} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k} \{\widehat{\Omega}_{q;i} \colon q \in Z_{\ell-2}^{[n-1]}\}$$

两两不相交。

当 $k = 1$ 时，由命题 3.14 可知，存在一个 L'-双利普希茨同胚，因而是拟共形的 $\psi_{1;i}$：$R_{0;i} \cup T_{1;i} \to R_{0;i}$ 它在 $|\mathsf{Core}(Z; \Sigma_i)|$ 上是恒等映射，其中常数 $L' = L'(n, K)$ 仅取决于 n 和 $\#(Z^{[n-1]})$。复合映射 $\widehat{\psi}_{1;i} \circ \varphi_{1;i}$ 即为命题中所声称的映射。

现在设 $k \geq 2$。我们固定一个隧道收缩双Lipschitz同胚

$$\psi_{k;i}\colon R_{0;i} \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^{k-1} T_{\ell;i} \right) \cup T_{k;i} \to R_{0;i} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k-1} T_{\ell;i}$$

如命题 3.14 所述，

(1) 在 $T_{k;i} \cup \left(\bigcup_{q \in Z_{k-2}^{[n-1]}} |\widehat{\ }\Omega_{q;i}| \right)$ 的补集上是恒等映射，并且 (2) 将 $T_{k;i}$、$q \in Z_{k-2}^{[n-1]}$ 中的每个 $\tau_{q;i} = \varphi(\text{隧道}(q;\Sigma_i))$ 映射到与 $\tau_{q;i}$ 相邻的立方体 $\Omega_{q;i}$ 上。

由于隧道$(q;\Sigma_i)$ 的图大小至多为 λ_{loc}，双利普希茨常数$L'' = L''(n,K)$ 可以选取为仅依赖于 n 和 λ_{loc}。

接下来我们固定一个 L'''-双利普希茨同胚

$$\psi_{k-1;i}\colon R_{0;i} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k-1} T_{\ell;i} \to R_{0;i} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k-2} T_{\ell;i},$$

其 (1) 在 $T_{k-1;i} \cup \left(\bigcup_{q \in Z_{k-3}^{[n-1]}} \widehat{\ }\Omega_{q;i} \right)$ 的补集中是恒等映射，(2) 将 $T_{k-1;i}$ 中每个 $\tau_{q;i} = \varphi(\text{隧道}(q;\Sigma_i))$（$q \in Z_{k-3}^{[n-1]}$）映到 $\Omega_{q;i}$，(3) 在每个帐篷 $\widehat{\ }\Omega_{q';\,i}$ 上是缩放（$q' \in Z_{k-2}^{[n-1]}$），

其中双 Lipschitz 常数 $L''' = L'''(n,\ K) \geq L''$ 可选为仅依赖于 n、λ_{loc} 和 ν。

对 $\ell = k-2,\ \ldots,\ 2$ 归纳地按照 $\psi_{k-1;i}$ 的构造进行，并将条件（3）替换为

(3)' $\psi_{\ell;i}$ is a scaling on each $\widehat{\Omega}_{q';i}$, for $q' \in Z_j^{[n-1]}$ and $j \in \{\ell-1,\ldots,k-2\}$.

于是我们得到一个由 L'''-双利普希茨同胚组成的序列

$$\psi_{\ell;i}\colon R_{0;i} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} T_{j;i} \to R_{0;i} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell-1} T_{j;i}, \quad \ell = k-2,\ldots,2,$$

使得该序列

$$\psi_{k;i},\ \psi_{k-1;i},\ \psi_{k-2;i},\ \ldots,\ \psi_{1;i},$$

具有一个性质，这是使该复合映射成为拟共形映射且畸变常数独立于 k 所必需的。具体而言，对于每个 $\ell \in \{1,\ldots,k\}$，$T_{\ell;i}$ 中的点不会被 $\psi_{\ell+2;i} \circ \cdots \circ \psi_{k;i}$ 移动。它们先被 $\psi_{\ell+1;i}$ 移动到 $T_{\ell;i}$ 中的点，然后由隧道收缩映射 $\psi_{\ell;i}$ 映射到与 $T_{\ell;i}$ 相邻的帐篷中。此后，在每个这样的帐篷上，$\psi_{1;i} \circ \cdots \circ \psi_{\ell-1;i}$ 都是一个缩放。在上述过程中，我们取 $\psi_{k+1;i}$ 和 $\psi_{k+2;i}$ 为恒等映射。$R_{0;i}$ 中的点在 $\psi_{2;i} \circ \cdots,\ \circ \psi_{k-1;i} \circ \psi_{k;i}$ 下保持不动，只由 $\psi_{1;i}$ 移动。

因此，该复合映射

$$f_{k;i} = \psi_{1;i} \circ \cdots, \circ \psi_{k;i} \circ \varphi\colon |\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)| \to |\mathsf{Lift}(Z;\Sigma_i)|,$$

是一个 K-拟共形同胚，其常数 K 仅取决于$L(n,\ K)$ L'，L''，L'''，并且在核心 $\mathsf{Core}_K(Z;\ \Sigma_i)$ 上是恒等映射。□

演化定理 *4.16* 的证明。 序列 (Z_k) 的拟共形稳定性可通过取定理 7.31 中映射 $f_{k;i}$ 的逆映射$f_{k\,i}^{-1}$; 得到。

拟共形稳定性与推论 7.24 一起完成了定理 4.16 的证明。□

8. 瓦达湖

8.1. 主定理的证明。 分离复形的演化无限重复，产生一个连续统，其补集由瓦达湖组成。下述定理将主定理（定理 1.2）推广到具有两个边界分支的流形。

定理 8.1。 设 $n \geq 3$、 $m \geq 2$和 M 是一个紧致连通的黎曼 n 维流形，其具有 m 个边界分支。那么存在一个常数 $\mathsf{K} = \mathsf{K}(n, M) > 1$ 以及一个连续统 $X \subset \operatorname{int} M$，具有以下性质：

(1) 每个 $x \in X$ 都是 $M \setminus X$ 的所有连通分支的公共边界点；*(2)* $M \setminus X$ 的每个连通分支 Ω 都是 M 中的一个约翰域，其中 $\Omega \cap \partial M$ 恰好包含 ∂M 的一个连通分支，并且Ω 与$(\Omega \cap \partial M) \times [0, 1)$是$\mathsf{K}$-拟共形的。

证明。 为证明此结论，我们从黎曼流形 (M, g) 转到一个立方 n复形 K ，其上带有多面体度量 d_K ，每个立方体都与欧几里得单位立方体等距，并且 $(|K|, d_K)$ 与 (M, g) 拟相似；参见命题 2.1。因此，只需在 $(|K|, d_K)$ 的情形下证明定理 1.2。

我们继续用 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ 表示 K 的边界分支，并随时参照第 7 节中的构造。设 $Z_0, Z_1, \ldots, Z_k, \ldots$ 分别为 $K, \mathrm{Ref}^{\nu}(K) \ldots, \mathrm{Ref}^{k\nu}(K) \ldots$ 中的分离复形，它们是在第 7 节中构造的，并具有定理 4.16 中所述的性质。

公共边界。 对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，核心

$$\mathsf{Core}(Z_k; \Sigma_i) = \mathsf{Comp}(Z_k; \Sigma_i) - \mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)$$

是扩张的，也就是说， $|\mathsf{Core}(Z_{k-1}; \Sigma_i)| \subset \mathsf{int}|\mathsf{Core}(Z_k; \Sigma_i)|$。因此

$$M_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} |\mathsf{Core}(Z_k; \Sigma_i)|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

是 M中的两两不相交开集。令

$$X = \bigcap_{k=1}^{\infty} |\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)|.$$

命题 4.17 已证明，区域 M_i 的拓扑边界$\partial_{\mathrm{top}} M_i$ 满足
$\partial_{\mathrm{top}} M_1 = \ldots = \partial_{\mathrm{top}} M_m = X.$

拟共形性。 回顾约定 2.12 和引理 3.11，在限制于内部 int(|Lift($Z_k;\Sigma_i$)|) 和 int(|Comp($Z_k;\Sigma_i$)| \ |Z_k|) 时， |Lift($Z_k;\ \Sigma_i$)| 与 |Comp($Z_k;\Sigma_i$)| 上的度量是共形等价的（事实上是局部等距的）。

还要记住，核心 Core($Z_k;\Sigma_i$) 及其提升 π_k^{-1} (Core($Z_k;\Sigma_i$)) 同构，因此用相同的记号表示。

对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$ 和 $k\geq 2$，令

$$g_{k;i}=f_{k;i}^{-1}:|\mathsf{Lift}(Z;\Sigma_i)|\to|\mathsf{Lift}(Z_k;\Sigma_i)|$$

为定理 7.31 中 K-拟共形映射 $f_{k;i}$ 的逆映射，并令

$$h_{k;i}\colon \operatorname{int}(|\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)|\setminus|Z|)\to\operatorname{int}(|\mathsf{Comp}(Z_k;\Sigma_i)|\setminus|Z_k|)$$

为映射 $h_{k;i}=\pi_k\circ g_{k;i}\circ\pi_0^{-1}$。

对于固定的 $i\in\{1,\dots,m\}$，每个映射 $h_{k;i}$ 在 |Core($Z;\ \Sigma_i$)| 上都是恒等映射。因此，序列 ($h_{k;i}$) 是等度连续的，并构成一个 K-拟共形映射的正规族 int(|Comp($Z;\ \Sigma_i$)| \ |Z|) $\to M$。因此，存在一个子列 ($h_{k_j;i}$)，它局部一致收敛到一个 K-拟共形映射

$$h_i\colon \operatorname{int}(|\mathsf{Comp}(Z;\Sigma_i)|\setminus|Z|)\to\ker\left(\operatorname{int}(|\mathsf{Comp}(Z_{k_j};\Sigma_i)|\setminus|Z_{k_j}|)\right);$$

见第五节¨ais¨al¨ [22, 节 20]。回忆一下，集合序列 (A_j) 的核 ker(A_j) 是 $|K|$ 中所有满足如下条件的点的集合： $|K|$ 该点存在一个邻域，且该邻域包含于除有限多个集合之外的所有集合中 A_j。由于

$$|\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)|\subset|\mathsf{Comp}(Z_k;\Sigma_i)|\setminus|Z_k|\subset|\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)|\cup|\mathrm{St}_{\mathrm{Ref}^{k\nu}(K)}(Z_k)|,$$

而核心在扩张，因此不难验证

$$\ker\left(\operatorname{int}(|\mathsf{Comp}(Z_{k_j};\Sigma_i)|\setminus|Z_{k_j}|)\right)=M_i\setminus|\partial K|.$$

由于 int(|Comp($Z;\ \Sigma_i$)| \ |Z|) 与 $L(n,\ K)$-双利普希茨等价于 $\Sigma_i\times(0,\ 1)$，每个$M_i\setminus|\partial K|$ 都通过某个常数 K $=$ K($n,\ K$) ≥ 1与空间 $\Sigma_i\times(0,\ 1)$ K-拟共形。

约翰域。 令 $i\in\{1,\dots,m\}$。我们固定 Core($Z_0;\ \Sigma_i$) 中的一个 n-立方体 Q_0'。此外，令 x_0' 为 Q_0'的中心。

首先，对于每个 $a\in M_i$，我们构造一条从 a到 x_0'的路径 γ_a。给定 $a\in M_i$，令 $k\geq 0$ 为满足 $a\in|P_k|$的最小整数，其中

$$P_k=\mathsf{Core}(Z_k;\Sigma_i)-\mathrm{Ref}^{\nu}(\mathsf{Core}(Z_{k-1};\Sigma_i)).$$

设 $Q_k\in P_k^{[n]}$ 是一个包含 a的 n-立方体，并令 x_k 为Q_k的中心。

首先假设 $k\geq 1$，并令

$$Q_k=Q_{k,1},\dots,Q_{k,p_k};\ Q_{k-1,1},\dots,Q_{k-1,p_{k-1}};\ \dots;\ Q_{0,1},\dots,Q_{0,p_0}=Q_0',$$

为引理7.25中的 n-立方体，并令点 $x_{\ell,\ j}$ 分别为立方体 $Q_{\ell,\ j}$的中心。根据核心的定义以及注7.26中的距离估计，存在常数 $c=c(n,\ K)>0$和 $C=C(n,\ K)>0$，使得

$$c3^{-\ell\nu}\leq\operatorname{dist}(x_{\ell,j},M\setminus M_i)\leq C3^{-\ell\nu},$$

对于 $1\leq\ell\leq k$和 $j\in\{1,\dots,p_\ell\}$。在这种情况下，我们按如下方式固定一条路径 γ_a，从 Q_k 的中心 x_k 到 Q_0' 的中心 x_0'。首先，令 σ_a 为 PL

曲线，它连接 $x_k = x_{k,\,1}$ 和 $x_0 = x_{0,\,p_0}$，如注7.26所述。另令σ'_a 为连接 a 和 x_k 的线段。我们取 $\gamma_a = \sigma_a \cup \sigma'_a$。

对于 $k = 0$，我们注意到，由于 P_0 是边界分支 Σ_i的一个（乘积）领圈，因此存在一串 n-立方体

$$Q_0 = Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,p_0} = Q'_0,$$

其中 p_0 只取决于 Σ_i，因而也只取决于 K。因此，我们可以像情形 $k \geq 1$中那样，固定一条从 x_0 到 x'_0 的路径 γ_a。

由引理7.25，很容易验证存在一个常数$C = C(n,\ \mu,\ \nu,\ \#(K^{[n]})) > 0$，使得

$$s(\gamma_a(a,x)) \leq C \operatorname{dist}(x, M \setminus M_i) \quad \text{for all } x \in \gamma_a,$$

其中 $\gamma_a(x_k,\ x)$ 是 γ_a 中位于 x_k 与 x之间的部分，$s(\cdot)$ 是长度。

现在令 $a,\ b \in M_i$ 并定义 $\gamma = \gamma_a \cup \gamma_b$。根据约翰域定义中的 γ 长度—距离估计可立即得出结论。

定理的证明至此完成。 □

推论8.2。设 $n \geq 3$、$m \geq 2$ 和 $D_1, \ldots, D_m$ 是闭且互不相交的连通分段线性 n 维子流形，包含于一个闭且连通的黎曼 n 维流形 M 中。那么存在一个连续统 X，包含于 $M \setminus \bigcup_{i=1}^m D_i$，其在 M 中的补集恰有 m 个连通分支 $M_1, \ldots, M_m$，满足 $D_i \subset M_i$，并且

$$\partial_{\mathrm{top}} M_1 = \cdots = \partial_{\mathrm{top}} M_m = \bigcap_{i=1}^m \overline{M_i} = X,$$

且每个 M_i 都与内部D_i 拟共形等价，并且是一个约翰域。

通过选取 $D_1, \ldots, D_m$ 为欧几里得球，即可由推论8.2得出主定理（定理1.1）。为供参考，我们重述该定理。

定理 1.1（瓦达湖）。对于 $n \geq 3$ 和 $m \geq 3$，存在一个位于 $\mathbb{S}^n$ 中的瓦达连续统，其恰有 m 个互补分支；每个互补分支既与欧几里得球 B^n（0,1）拟共形等价，也是一个约翰域。

8.2. **中的瓦达湖** $\mathbb{S}^2$。在维数为 $n = 2$ 时，情况有所不同。本文最后给出如下结果：$\mathbb{S}^2$ 中的瓦达湖绝不是约翰域。注意，$\mathbb{S}^2$ 中的瓦达湖总是开胞腔，因此与单位圆盘共形。

命题 8.3。设 $m \geq 3$、M_1、...、M_m 是 $\mathbb{S}^2$ 中的互不相交的连通开集，满足

$$\partial_{\mathrm{top}} M_1 = \cdots = \partial_{\mathrm{top}} M_m = \bigcap_{i=1}^m \overline{M_i}.$$

那么，区域 M_1、...、M_m 都不是约翰域。

证明。设 $X = \bigcap_{i=1}^m \overline{M_i}$ 反设，区域 $M_1, \ldots, M_m$ 中有一个是约翰域。不妨设 M_1 是约翰域。我们可以假设 $\infty \in M_m$，因此区域 M_1 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 C-约翰域。注意，此时 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个连续统。

固定一点 $a \in M_1$。令 $S^1(a, r)$（分别令 $S^1(a, r')$）为以 a 为中心且与 X 相交的最小（分别为最大）圆。因此， $B^2(a, r) \subset M_1$ 且 $M_1 \cup X \subset B^2(a, r')$。

固定点 $p \in S^1(a, r) \cap X$ 和 $p' \in S^1(a, r') \cap X$，令

$$\epsilon = \min\{|p - p'|/10, r/(10C), (r' - r)/(10C)\}.$$

再令 $D = B^2(p, \epsilon)$ 和 $D' = B^2(p', \epsilon)$。由于 p 和 p' 位于 X中，我们有：每个 M_i 都与 D 的内部相交，也与 D'的内部相交。

对于 $i = 2, 3$，我们固定一条若尔当弧 $\gamma_i \subset M_i \setminus (D \cup D')$，其一个端点$q_i$ 位于 ∂D中，另一个端点 q_i' 位于 $\partial D'$中；这样的若尔当弧 γ_i 由 M_i 中的一条若尔当弧的子弧给出，该若尔当弧连接 D 和 D'中的点。

令 τ为 ∂D 的子弧，其端点为 q_2 和 q_3，且不与圆盘 $B^2(a, r)$相交。现在， $\gamma_2 \cup \tau \cup \gamma_3$是 $\mathbb{R}^2 \setminus (D \cup D')$中的一条若尔当弧。再令 τ'为 $\partial D'$的连接 q_2'和 q_3'的子弧之一。于是， $J = \gamma_2 \cup \tau \cup \gamma_3 \cup \tau'$ 是一条若尔当曲线，并具有如下性质： $\mathbb{R}^2 \setminus J$的某个连通分支包含圆盘 $B^2(a, r)$。令 Q 为 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 中不包含 $B^2(a, r)$ 的连通分支。

由于 γ_2和 γ_3都与圆 $S = S^1(a, (r + r')/2)$相交，交集 $\mathrm{Q} \cap S$ 包含 X中的点。因此，我们可以固定一点 $b \in M_1 \cap \mathrm{Q}$，使得 $\operatorname{dist}(b, S) < \epsilon$。

设 $\gamma \subset M_1$ 为连接 a 和 b的一条弧。由于 a 和 b 属于 $\mathbb{R}^2 \setminus J$的不同连通分支，且 γ与弧 γ_2和 γ_3不相交，我们得出结论：γ与 τ或 τ'相交。设 $t \in \gamma \cap (\tau \cup \tau')$。由于 $\tau \subset D$和 $\tau' \subset D'$，我们得出结论：$\operatorname{dist}(t, X) \leq \epsilon$。因此

$$\min\{|t - a|, |t - b|\} \geq \min\{r, (r' - r)/2 - 2\epsilon\} > C\epsilon \geq C \operatorname{dist}(t, X).$$

这与我们的假设矛盾，因为我们假设 M_1 是 C-John。 □

References

[1] L. V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings* 10 *Van Nostrand*，第 卷，*Mathematical Studies* 编号：。D. Van Nostrand Co., Inc.，多伦多（安大略省）—纽约—伦敦，1966年。手稿由 Clifford J. Earle, Jr. 协助编写。[2] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。*Metric spaces of non-positive curvature*，第 319 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of* 卷，出自 *Mathematical Sciences]* 1999 。施普林格出版社，柏林，。[3] L. E. J. Brouwer。《关于位置分析》。 *Math. Ann.*，68(3):422–434，1910年。[4] S. S. Cairns。《论正则点集的三角剖分》。 *Ann. of Math. (2)*，35 587，1934 3 579( ): – 。[5] D. Drasin 和 P. Pankka。《Rickman 皮卡定理在所有维数下的锐性》。*Acta Math.*，214(2):209–306，2015年。[6] R. Dyer、G. Vegter 和 M. Wintraecken。《黎曼单形与三角剖分》。*Geom. Dedicata*，179:91–138，2015年。[7] F. W. Gehring 和 J. V¨ais¨al¨a。《空间中区域的拟共形系数》。 *Acta Math.*，114:1–70，1965年。[8] J. Heinonen。 *Lectures on analysis on metric spaces*。Universitext。施普林格出版社，纽约，2001年。[9] J. Heinonen 和 S. Rickman。《具有野分支集的拟正则映射》$\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^3$ 。*Topology*，37(1):1–24，1998年。[10] J. Heinonen 和 S. Rickman。《广义流形之间的几何分支覆盖》。 *Duke Math. J.*，113(3):465–529，2002年。[11] F. John。《旋转与应变》。*Comm. Pure Appl. Math.*，14:391–413，1961年。

[12] M. Luba´nski。《一个绝对邻域收缩的例子，它是三维欧几里得空间中三个区域的公共边界》。 *Fund. Math.*，40:29– 38，1953年。[13] D. Mart´ı-Pete、L. Rempe 和 J. Waterman。《埃列缅科猜想、游荡的和田湖与特立点》。 *J. Amer. Math. Soc.*，38(4):877–918，2025年。[14] O. Martio 和 J. Sarvas。《平面与空间中的单射定理》。

Ann. Acad. Sci.，( ): – 。[15]

Fenn. Ser. A I Math. 4 2 383 401, 1979

J. R. Munkres。 *Elementary differential topology*。Annals of Mathematics Studies，第54号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），修订版，1966年。课程于1961年秋季在麻省理工学院讲授。[16] K. Peltonen。《拟正则映射的存在性》。

Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.，( ): 。[17]

A I Math. Dissertationes 85 48, 1992

S. Rickman。《三维拟正则映射的皮卡定理类比》。 *Acta Math.*，154(3-4):195–242，1985年。[18] E. Saucan。《关于 Munkres 定理的注记》。 *Mediterr. J. Math.*，2(2):215–229，2005年。[19] M. A. Shtan'ko 和 M. I. Shtogrin。《将立方流形和复形嵌入立方格》。 *Uspekhi Mat. Nauk*，47(1(283)):219–220，1992年。[20] P. Tukia 和 J. V¨ais¨al¨a。《Lipschitz 与拟共形逼近及延拓》。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*，6(2):303–342，1981年。[21] P. Tukia 和 J. V

¨ ¨ ¨

n $n+1$ *Ann.* aisala。《从 *of Math. (2)* 115 2 331 348, 1982

维数到 的拟共形延拓》。 ，( ): – 。[22] J. V¨ais¨al¨a。

Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings。数学讲义，第229卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1971年。[23] J. H. C. Whitehead。《关于 C^1-复形》。 *Ann. of Math. (2)*，41:809–824，1940年。[24] K. Yoneyama。《连续点集理论》。 *Tôhoku Math.*，12:43–158，1917年。

Department of Mathematics and Statistics, P. O. Box 68 (Pietari Kalmin katu 5), FI-00014, University of Helsinki, Finland

Email address: pekka.pankka@helsinki.fi

Department of Mathematics, University of Illinois, 1409 West Green Street, Urbana, IL 61822, USA*Email address*: jmwu@illinois.edu