arXiv:2601.02274v1 [math.AP] 5 Jan 2026

闭黎曼曲面上薛定谔预解式的半经典局部化

SÉBASTIEN CAMPAGNE

摘要。本文研究闭黎曼曲面上半经典薛定谔方程解的局部化性质。不同于假设势函数光滑的经典研究，本文探讨了由不规则势带来的挑战，特别是势函数仅有有界性的情形。我们采用正则化技术来处理势函数缺乏光滑性的问题，并建立了一个局部到整体估计。该结果定量刻画了势函数的局部正则性如何影响解的整体集中性，从而弥合了半经典分析中光滑与非连续情形之间的差距。

1. 引言

本文研究半经典薛定谔方程解的局部化性质： $u \in H^2$

$$(P_V - E)u := (-h^2\Delta + V - E)u = f, \tag{1.1}$$

其中， V是定义在闭黎曼曲面 M上的实值有界势， $E \in I \subset \mathbb{R}$是在紧集 I中变化的能级，而 $f \in L^2($ $M)$是源项。

众所周知，当 V光滑时，可以推出以下局部到整体估计：对于任意开子集 $U \subset M$，当 h充分小时，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\int_M |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{C/h}\left(\int_U |u|^2 + |h\nabla u|^2 + \int_M |f|^2\right). \tag{1.2}$$

该估计依赖于微局部分析中的技巧，尤其是半经典 Carleman 估计。具体而言，对于 $R > 0$ 和 $E \in I$，存在 $C > 0$，使得对于所有充分小的h 以及所有 $u \in \mathcal{C}_0^\infty$（$B(0,\ R)$），

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{C/h}\int_{B(0,R)} |(P_V - E)u|^2, \tag{1.3}$$

正如Dyatlov 和 Zworski （2019）所证明的（例如参见定理 2.32）。

在本研究中，势 V并未假设为光滑函数，因此无法直接应用这些经典结果。为应对这些挑战，我们开发了替代方法。近期研究表明，在对 V施加较弱正则性假设的条件下，也可以得到 Carleman 型估计。例如，Klopp 和 Vogel (2019) 针对势函数建立了半经典 Carleman

日期：2026年1月6日。

估计：对于势函数 $V \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，任意 $R > 0$ 和 $E \in I$，均存在 $C > 0$，使得当 h 充分小且 $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0, R))$ 时，

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{C/h^{4/3}} \int_{B(0,R)} |(P_V - E)u|^2. \tag{1.4}$$

随后，Vodev （2020）通过纳入 V 的霍尔德正则性改进了这一估计：对于一个 α-霍尔德势 V，可以证明

$$\int_{B(0,R)} |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{Ch^{-4/(\alpha+1)}} \int_{B(0,R)} |(P_V - E)u|^2. \tag{1.5}$$

受 Vodev 方法的启发，我们在闭黎曼曲面上建立如下结果，这不同于传统的欧氏平面或非紧双曲曲面：

定理 1。设 M 是一个闭黎曼曲面，且 $U \subset M$ 是一个开子集。设 $E \in I \subset \mathbb{R}$和 $V \in L^\infty（M, \mathbb{R}）$。那么存在常数 $C > 0$ 和 $h_0 > 0$，使得对所有 $0 < h < h_0$和 $u \in H^2（M）$，

$$\int_M |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{C\beta(h)} \left(\int_U |u|^2 + |h\nabla u|^2 + \int_M |(P_V - E)u|^2 \right), \tag{1.6}$$

其中

$$\beta(h) = \frac{1}{h^{4/3}} \sup_{x_0 \in M} \sup_{x \in B(x_0, h^{2/3}\kappa)} |V(x) - V(x_0)|^{1/2}, \tag{1.7}$$

且 $\kappa > 0$ 是一个固定的小常数。

函数 $\beta(h)$ 量化了势函数 V 的局部正则性。当 V 是 α-Hölder 连续时，我们有

$$\beta(h) \leq C_0 h^{2\alpha/3} \kappa^\alpha,$$

因此，

$$\int_M |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq Ce^{Ch^{\frac{\alpha-4}{3}}} \left(\int_U |u|^2 + |h\nabla u|^2 + \int_M |(P_V - E)u|^2 \right). \tag{1.8}$$

当 V 是利普希茨连续时，这就恢复了经典的光滑情形，尽管我们的估计比 Vodev 的结果略弱。然而，它也恢复了 Klopp 和 Vogel 针对仅有界且不连续势函数 V 的估计。

我们的证明遵循Vodev (2020) 的一般策略，并针对闭黎曼曲面的几何结构以及势函数 V 的较低正则性进行了调整。

2. 定理1的证明

2.1. 问题的约化。设 M 是一个闭黎曼曲面。根据庞加莱一致化定理，我们知道，M 与一个唯一的常曲率闭曲面共形等价。该曲面是以下某个覆盖曲面在其等距群的离散子群自由作用下的商：

- 欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$,

- 球面 S^2,
- 双曲圆盘 $\mathbb{H}^2$。

（例如，参见de Saint-Gervais （2016年））。

因此， M 可以视为这三种曲面之一的紧致商空间。这三种曲面都可以通过离散子群的自由作用被 M 覆盖。于是，我们可以将函数 u视为覆盖空间上的周期函数 u_{per} ， 其中 u_{per} 满足覆盖空间上的以下周期薛定谔方程：

$$(-h^2\Delta + V_{\mathrm{per}} - E)u_{\mathrm{per}} = f_{\mathrm{per}}. \tag{2.1}$$

这使我们的分析归结为以下三种情形：

- **欧几里得平面的情形** $\mathbb{R}^2$**：** 我们可以将 U 替换为 M内以 0 为中心的小球 $B(0,\ R)$。只需在一个包含 M的较大球 $B(0,\ R_0)$中进行研究。
- **双曲圆盘情形** $\mathbb{H}^2$**：</style}我们可以用一个以 0 为中心、位于 内的小球 (0,** R) 替换 U 。只需在圆盘内一个较大的球 $B(0,\ R_0)$ 中进行研究。庞加莱圆盘配备的度量为

$$ds^2 = \frac{4\sum_i dx_i^2}{(1-\sum_i x_i^2)^2}, \tag{2.2}$$

  因此，在 $B(0,\ R_0)$ 上，该度量等价于欧几里得度量。因此，这种情形可以用与欧几里得平面情形类似的方法处理。
- **球面情形** S^2**：** 我们可以用一个以球面 S^2 的南极为中心的小球 $B(0,\ R)$ 替换 U ，并将 M 视为 S^2。接着，我们在 $B(0,\ R)$ 内移去一个以南极为中心的更小球 $B(0,\ R/2)$。穿孔球面可以展开为一个球 $B(0,\ R_0)$，从而使 $B(0,\ R) \setminus B(0,\ R/2)$ 在 $B(0,\ R_0)$ 的边缘处变成一个环域 $A(0,\ R_0,\ R_0)$，此处的度量变为欧几里得度量。

因此，在每种情况下，我们都将研究归结为一个球 $B(0,\ R_0)$。然而，我们仍须考虑两种子情况： U 被识别为 $B(0,\ R_0)$内部以 0 为中心的球 $B(0,\ R)$，或者 U被识别为 $B(0,\ R_0)$边缘处的一个环域 ˜ $A(0,\ R_0,\ R_0)$。

2.2. 球上的 Carleman估计。 鉴于上一节的结果，设 $R_0 > 0$、˜ ˜ $R > 0$和 $R_0 > 0$ 满足 $R < R_0$ 和 $R_0 < R_0$。令 $V_{\mathrm{per}} \in L^\infty(B(0,\ R_0))$。作为预备步骤，我们构造势 V_{per}的正则化版本。为此，我们首先将 V_{per} 在 $B(0,\ R_0)$ 外定义为 0，并延拓到整个平面 $\mathbb{R}^2$。令 $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R})$ 为一个在球 $B(0,\ 1)$ 中具有紧支撑的正则化核。我们假设 φ 满足以下性质：

- φ has total mass 1, i.e., $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\,dx = 1$,
- for $i \in \{1,2\}$, $\partial_{x_i}\varphi$ has total mass 0, i.e., $\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_i}\varphi(x)\,dx = 0$.

接下来，我们将正则化势定义如下：

$$\tilde{V_\theta}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\theta^2} V_{per}(x-t)\varphi(\frac{t}{\theta})dt, \text{where } x \in \mathbb{R}^2 \text{ and } \theta \in]0,1] \tag{2.3}$$

˜V_θ 是 V_{per}的“光滑版本”。

命题 2.1。对于 $\theta > 0$ 和 $i \in \{1, 2\}$:

$$||\tilde{V}_\theta - V_{per}||_{L^\infty(B(0,R_0))} \leq \omega_V(\theta) \tag{2.4}$$

and:

$$||\partial_{x_i}\tilde{V}_\theta||_{L^\infty(B(0,R_0))} \leq \frac{1}{\theta}\omega_V(\theta) \tag{2.5}$$

with

$$\omega_V(\theta) := \sup_{x_0 \in B(0,R_0)} \sup_{t \in B(0,\theta)} |V_{per}(x_0 - t) - V_{per}(x_0)| \tag{2.6}$$

证明。实际上，对于 $x \in B(0,\ R_0)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_\theta(x) - V_{per}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\theta^2}|V_{per}(x-t) - V_{per}(x)|\varphi(\frac{t}{\theta})dt \\ &\leq \sup_{t \in B(0,\theta)} |V_{per}(x-t) - V_{per}(x)| \\ &\leq \sup_{x_0 \in B(0,R_0)} \sup_{t \in B(0,\theta)} |V_{per}(x_0 - t) - V_{per}(x_0)| = \omega_V(\theta) \end{aligned} \tag{2.7}$$

至于第二个性质，对于 $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i}\tilde{V}_\theta(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\theta^3}|V_{per}(x-t) - V_{per}(x)||\partial_{x_i}\varphi(\frac{t}{\theta})|dt \\ &\leq \|\partial_{x_i}\varphi\|_{L^1}\frac{1}{\theta}\sup_{t \in B(0,\theta)} |V_{per}(x-t) - V_{per}(x)| \\ &\leq \|\nabla\varphi\|_{L^1}\frac{1}{\theta}\omega_V(\theta) \end{aligned} \tag{2.8}$$

□

˜如果 V 足够规则（即连续），那么当$\theta \to 0$时， V_θ 在 L^∞ 范数下收敛到 V_{per} 。然而，对于 $V \in L^\infty$，这种收敛一般并不成立：光滑函数只能一致收敛到连续函数。

˜因此，我们需要控制 V_θ 的导数发散的速率。具体而言，除非 V_{per} 为常数，否则连续模 $\omega_V(\theta)$随 $\theta \to 0$趋于 θ 时，至多以.....的速度减小。

由于将 V_{per} 在 $B(0,\ R_0)$之外延拓为 0， ω_V 可能不会趋于 0。为了解决这一问题，我们利用 V_{per} 的周期性，并假设 V_{per} 最初定义在更大的球$B(0,\ R_1)$上，其中 $R_1 > R_0$，然后在 $B(0,\ R_1)$之外延拓为 0。对于足够小的 θ， ω_V便只取决于 V_{per} 在球 $B(0,\ R_0)$内的正则性。

完成 V_{per}的正则化后，我们现在可以着手证明我们的主要结果。我们首先给出以下定理:

˜**定理 2**。 设 $(V_\theta)_\theta$ 是方程2.3中定义的势函数族。则:

• 存在函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 是正的， $h_0 > 0$, $\theta_0 > 0$ 且 $C > 0$，使得对所有$h \in]0, h_0]$, $\theta \in]0, \theta_0]$, $u \in C_0^\infty(B(0, R_0))$:

$$\begin{aligned} & h \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\frac{\omega_V(\theta)^{1/2}}{h\theta^{1/2}}} \left(|u(x)|^2 + \frac{\theta}{\omega_V(\theta)} |h\nabla_x u(x)|^2 \right) dx \\ & \leq C \frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}} \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}} |(-h^2\Delta_x + \tilde{V}_\theta(x) - E)u(x)|^2 dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

• 存在一个函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ，它是正的且径向递减的， $h_0 > 0$, $\theta_0 > 0$ 和$C > 0$，使得对所有 $h \in]0, h_0]$, $\theta \in]0, \theta_0]$, $u \in C_0^\infty(B(0, R_0) \setminus B(0, R/2))$:

$$\begin{aligned} & h \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\frac{\omega_V(\theta)^{1/2}}{h\theta^{1/2}}} \left(|u(x)|^2 + \frac{\theta}{\omega_V(\theta)} |h\nabla_x u(x)|^2 \right) dx \\ & \leq C \frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}} \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}} |(-h^2\Delta_x + \tilde{V}_\theta(x) - E)u(x)|^2 dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

为了得到黎曼曲面上的估计，递减情形将用于实平面和双曲圆盘，递增情形将用于球面。

˜证明。 鉴于此前得到的关于 V_θ (方程 2.5) 的结果，令:

$$V_\theta := \frac{\theta}{\omega_V(\theta)} \tilde{V}_\theta \tag{2.11}$$

因此，它的导数不太可能在无穷范数下发散。如果 V_{per} 在 $B(0, R_0)$ 上不是常数，那么量 $\theta/\omega_V(\theta)$ 是有界的，因为 $\omega_V(\theta)$ 不可能比趋于 0 的 θ 下降得更快。在 V_{per} 为常数的情形下，我们只需取 $V_\theta = 0, \omega_V = Id$，并用 $E - V_{per}$ 替换 E。此外，对于任意 V_{per}，当 θ 足够小时，量 $\omega_V(\theta)$ 不为 0。

同样地，我们将 E 替换为:

$$E_\theta := \frac{\theta}{\omega_V(\theta)} E \tag{2.12}$$

设为 $u \in C_0^\infty(B(0, R_0))$，并设为 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，我们可以假设 $V_\theta - E_\theta$和 $\nabla_x V_\theta$都很小。˜事实上，若取足够小的 $\delta > 0$ 并令 $h = h\delta$，则:

$$e^{\phi/\tilde{h}}(-\tilde{h}^2\Delta_x + \delta^2(V_\theta - E_\theta))e^{-\phi/\tilde{h}}u = \delta^2 e^{\phi/\delta h}(-h^2\Delta_x + V_\theta - E_\theta)e^{-\phi/\delta h}u \tag{2.13}$$

因此，我们只需在定理 ϕ 中将 ϕ/δ 替换为 C，并将 $C\delta^3$ 替换为 2。

下文中，我们用 $\bullet$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 与 $\langle$中的向量的标量积，用 $\rangle$ 表示 L^2的通常标量积。

定义算子 P:

$$\begin{aligned} P &:= e^{\phi/h}(-h^2\Delta_x + V_\theta - E_\theta)e^{-\phi/h} \\ &= -h^2\Delta_x + 2h\nabla_x\phi \bullet \nabla_x + h\Delta_x\phi - \nabla_x\phi \bullet \nabla_x\phi + V_\theta - E_\theta \end{aligned} \tag{2.14}$$

并展示关于 P 的这一简短结果:

引理 2.2. 设 $u \in C_0^\infty(B(0,R_0)),\ \forall h > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\|Pu\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{h}\langle \left[(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*, e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}\right] u, u\rangle \\ - 4\|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x\phi\|_\infty \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $P_0 = -h^2\Delta_x$。

证明。 事实上:

$$\frac{1}{h}\|Pu\|^2 \geq \frac{1}{h}(\|Pu\|^2 - \|P^*u\|^2) \tag{2.16}$$

其中 P^*是 P的伴随算子:

$$P^* = -h^2\Delta_x - (2h\Delta_x\phi + 2h\nabla_x\phi \bullet \nabla_x) + h\Delta_x\phi - \nabla_x\phi \bullet \nabla_x\phi + V_\theta - E_\theta \tag{2.17}$$

So:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\|Pu\|^2 &\geq \frac{1}{h}(\|Pu\|^2 - \|P^*u\|^2) \\ &= \frac{1}{h}(\|(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})u\|^2 - \|(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*u\|^2) \\ &\quad + \frac{2}{h}(Re\langle(V_\theta - E_\theta)u, (2h\nabla_x\phi \bullet \nabla_x)u\rangle + Re\langle(V_\theta - E_\theta)u, (2h\Delta_x\phi + 2h\nabla_x\phi \bullet \nabla_x)u\rangle) \\ &= \frac{1}{h}(\langle(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}), u\rangle - \langle(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*, u\rangle) \\ &\quad + 4Re(\langle(V_\theta - E_\theta)u, (\nabla_x\phi \bullet \nabla_x)u\rangle + \langle(V_\theta - E_\theta)u, (\Delta_x\phi + \nabla_x\phi \bullet \nabla_x)u\rangle) \end{aligned} \tag{2.18}$$

由于所有项都是实数，因此无需取实部。对$\langle(V_\theta - E_\theta)u,(\nabla_x\phi \bullet \nabla_x)u\rangle$分部积分，最终得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\|Pu\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{h}\langle \left[(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*, (e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})\right] u, u\rangle \\ - 4\langle(\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x\phi)u, u\rangle \end{aligned} \tag{2.19}$$

并且很容易看出:

$$\langle(\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x\phi)u, u\rangle \leq \|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x\phi\|_\infty \|u\|_{L^2}^2$$

□

因此，借助引理2.2，我们可以集中讨论对易子项：

$$\left[(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*, e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}\right].$$

与证明 Carleman估计时相同，我们希望找到 $d>0$、 $h_0>0$ 和 $C_0>0$，使得

$$\frac{1}{h}\langle\left[(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})^*, e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}\right]u,u\rangle + d\|(e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h})u\|^2_{L^2} \geq C_0\|u\|^2_{H^1} \tag{2.20}$$

对于 $0<h<h_0$。因此，与证明 Carleman估计时相同，我们构造 ϕ，使其满足 Hörmander条件：

$$p_\phi(x,\xi)=0 \Longrightarrow \{Re\, p_\phi, Im\, p_\phi\}(x,\xi)>0 \tag{2.21}$$

其中 p_ϕ 是 P_ϕ 的主符号：$=e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}$：

$$p_\phi(x,\xi)=(\xi+i\nabla_x\phi(x))^2. \tag{2.22}$$

我们希望将 ϕ 构造成在 0 处的径向函数。当 u的支集包含于 $B(0,R_0)\setminus B(0,R/2)$时，这很容易。但如果支集可以遍及整个 $B(0,R_0)$， ϕ 就会在 0 (图 1) 处出现一个临界点。当 $\{Im\, p_\phi, Re\, p_\phi\}$ 满足 $p_\phi(0,\xi)=0$时，这个点会导致其抵消。因此，增长情形在这里会遇到困难。我们就从这个问题开始。

为了解决关于 ϕ 的这个构造问题，我们取 $B(0,R_0)$ 上的两点 x_1 和 x_2，并设：

$$e^{2\phi(x)/h} := e^{2\phi_{x_1}(x)/h}\chi_1^2(x) + e^{2\phi_{x_2}(x)/h}\chi_2^2(x) \tag{2.23}$$

其中 $\phi_{x_1}(x)=c\,e^{\|x-x_1\|}$， $\phi_{x_2}(x)=c\,e^{\|x-x_2\|}$，且 $c>0$。 χ_1 在以 x_1 为中心的球 B_1 上为 0，在以 x_1 为中心的球 B_1 外为 1；同样， χ_2 在以 x_2 为中心的球 B_2 上为 0，在以 x_2 为中心的球 $\tilde{B_2}$ 外为 1。我们取 B_1 和 B_2，使得 $B_1\cap B_2=\emptyset$ （图 2）。

因此，我们不再考虑球 $B(0,R_0)$ 上的 Carleman不等式，而是通过这种插值来考虑变形圆环上的两个不等式。

为简化接下来的计算，我们假设现在在以 0 为中心的环域 $A(0,r_1,r_2)$ 上进行研究。设 ϕ 为 $\phi(r)=c\,e^r$。在极坐标下，拉普拉斯算子为：

$$P_0=-h^2\partial_r^2-\frac{1}{r}h^2\partial_r-\frac{h^2}{r^2}\Delta_{S^1} \tag{2.24}$$

其中 Δ_{S^1} 是圆周 S^1上的 Beltrami拉普拉斯算子。其主符号为 i s:

$$p_0(r,\rho)=\rho^2+\frac{1}{r^2}\omega^2,\ (r,\rho)\in[r_1,r_2]\times\mathbb{R}_+ \tag{2.25}$$

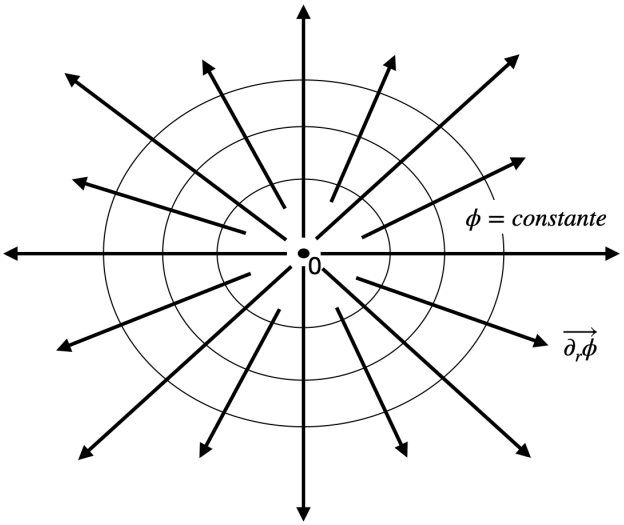

图 1. 径向函数的临界点： ϕ 是以 0 为中心的径向函数，因此 ϕ 在以 0 为中心的圆周上为常数，并沿垂直于这些圆周的方向变化。因此，在 0 处，导数向量应为 0。

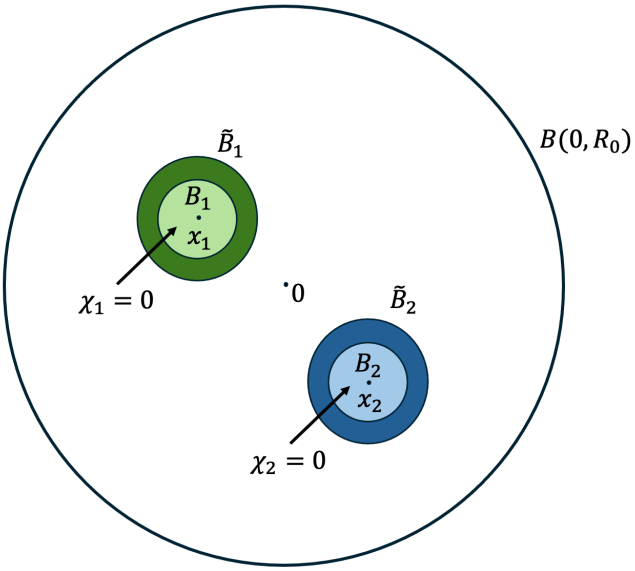

图 2. 对球 $B(0, R_0)$ 进行划分以构造 ϕ。

其中 $\omega^2 > 0$ 是 $-h^2\Delta_{S^1}$的主符号。通过对 $e^{\phi/h}$进行共轭变换，我们得到以下符号：

$$p_\phi(r,\rho) = (\rho + i\partial_r\phi(r))^2 + \frac{1}{r^2}\omega^2 \tag{2.26}$$

即:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(p_\phi)(r,\rho) = & \rho^2 - (\partial_r\phi(r))^2 + \frac{1}{r^2}\omega^2 \\ \mathrm{Im}(p_\phi)(r,\rho) = & 2\rho\,\partial_r\phi(r) \end{cases}$$

因此，泊松括号的形式为:

$$\frac{1}{4}\{\mathrm{Re}(p_\phi), \mathrm{Im}(p_\phi)\}(r,\rho) = \rho^2\partial_r^2\phi(r) + \left(\partial_r\phi(r)\partial_r^2\phi(r) + \frac{\omega^2}{r^3}\right)\partial_r\phi(r) \tag{2.27}$$

即:

$$\frac{1}{4}\{\mathrm{Re}(p_\phi), \mathrm{Im}(p_\phi)\}(r,\rho) = c\,\rho^2 e^r + c\,e^r\left(c^2e^{2r} + \frac{\omega^2}{r^3}\right) > c\,\rho^2 + c^3 \tag{2.28}$$

因此，当 $p_\phi = 0$ （即当 $\rho = 0$ 和 $\omega^2 = r^2\partial_r\phi$）时，有:

$$\frac{1}{4}\{\mathrm{Re}(p_\phi), \mathrm{Im}(p_\phi)\}(r,\rho) \geq c^3 \tag{2.29}$$

与此同时，当 $\rho >> 1$时，我们得到 p_ϕ 的下界:

$$|p_\phi(r,\rho)|^2 \geq |\,\mathrm{Re}(p_\phi)(r,\rho)|^2 \simeq \rho^4 \tag{2.30}$$

因此，当 $d > 0$ 和 $c > 0$ 足够大时:

$$2\{\mathrm{Re}(p_\phi), \mathrm{Im}(p_\phi)\}(r,\rho) + d|p_\phi(r,\rho)|^2 \geq C(\rho^2+1)^2 \tag{2.31}$$

其中 $C > 0$。需要注意的是，$2h\{\mathrm{Re}(p_\phi), \mathrm{Im}(p_\phi)\}(r, \rho)$ 是 $\left[P_\phi^*, P_\phi\right]$ 的主符号，其中 $P_\phi = e^{\phi/h}P_0e^{-\phi/h}$。

利用符号代数和加丁不等式（例如参见 Alinhac 和 Gérard (2007)），我们得到:

$$\frac{1}{h}\langle\left[P_\phi^*, P_\phi\right]u, u\rangle + d\|P_\phi u\|^2 \geq C_0\|u\|_{H^1}^2 \tag{2.32}$$

其中 $C_0 > 0$、 $u \in \mathcal{C}_0^\infty(A(0, r_1, r_2))$ 且 h 很小。

现在我们需要将以下余项相加: $V_\theta - E_\theta$ 和 $\nabla_x V_\theta$。因此，我们取 $u \in \mathcal{C}_0^\infty(A(0, r_1, r_2))$。根据引理 2.2，我们得到:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\|Pu\|^2 + 2d\|Pu\|^2 &\geq \frac{1}{h}\langle \left[P_\phi^*, P_\phi\right] u, u\rangle + 2d(\|P_\phi u\| - \|(V_\theta - E_\theta)u\|)^2 \\
&\quad - 4\|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x \phi\|_\infty \|u\|^2 \\
&\geq \frac{1}{h}\langle \left[(P_\phi^*, P_\phi\right] u, u\rangle + 2d\|P_\phi u\|^2 + 2d\|(V_\theta - E_\theta)u\|^2 \\
&\quad - 4d\|P_\phi u\|\|(V_\theta - E_\theta)u\| - 4\|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x \phi\|_\infty \|u\|^2 \\
&\geq \frac{1}{h}\langle \left[P_\phi^*, P_\phi\right] u, u\rangle + d\|P_\phi u\|^2 - 2d\|(V_\theta - E_\theta)u\|^2 \\
&\quad - 4\|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x \phi\|_\infty \|u\|^2 \\
&\geq C_0\|u\|_{H^1}^2 - 4\|\nabla_x V_\theta \bullet \nabla_x \phi\|_\infty \|u\|^2 - 2d\|(V_\theta - E_\theta)\|_\infty^2 \|u\|^2
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

我们使用了以下不等式： $2|a||b| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + 2|b|^2$。我们注意到，余项的形式为$\mathcal{O}_{\|V_\theta\|_\infty, \|\nabla_x V_\theta\|_\infty, E_\theta}(1)\|u\|^2$。根据 $\|V_\theta - E_\theta\|_\infty$和 $\|\nabla_x V_\theta\|_\infty$足够小这一假设（见式：2.13），我们可以将余项吸收到 H^1 的 u范数中。因此，我们可以推出，在环域 $A(0, r_1, r_2)$上，有：

$$
\tilde{C}_0\|Pu\|^2 \geq h\|u\|_{H^1}^2 \tag{2.34}
$$

~对于 $0 < h < h_0$ 和 $C_0 > 0$。这一结果可推广到我们的变形圆环情形 $B(0, R_0) \setminus B_1$和 $B(0, R_0) \setminus B_2$。

最后，我们需要将分别在两个环域上得到的不等式拼接起来。为此，将u 替换为 $e^{\phi/h}u$ ，其中 $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0, R_0))$ 并根据 ϕ (2.23)的定义：

$$
\begin{aligned}
& h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)/h}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\qquad = h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_1}(x)/h}\chi_1^2(x)(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\qquad\quad + h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_2}(x)/h}\chi_2^2(x)(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\qquad \leq \tilde{C}_0\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_1}(x)/h}\chi_1^2(x)|(-h^2\Delta_x + V_\theta(x))u(x)|^2dx \\
&\qquad\quad + \tilde{C}_0\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_2}(x)/h}\chi_2^2(x)|(-h^2\Delta_x + V_\theta(x))u(x)|^2dx \\
&\qquad\quad + \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_1}(x)/h}(\tilde{C}_0|[-h^2\Delta_x, \chi_1]u(x)|^2 + |[-h\nabla_x, \chi_1]u(x)|^2)dx \\
&\qquad\quad + \int_{B(0,R_0)} e^{2\phi_{x_2}(x)/h}(\tilde{C}_0|[-h^2\Delta_x, \chi_2]u(x)|^2 + |[-h\nabla_x, \chi_2]u(x)|^2)dx
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

在最后两个右端积分中，项 $|[-h^2\Delta_x,\chi_i]u(x)|^2$ 和 $|[-h\nabla_x,\chi_i]u(x)|^2$ 可由 $C_ih^2(|u|^2+|h\nabla_xu|^2)$ 控制，其中 $C_i>0$，积分则在集合 $Supp(\nabla_x\chi_i)\subset\tilde{B}_i\setminus B_i$ 上进行。

根据构造，ϕ_1 在 $\tilde{B}_1\setminus B_1$ 上小于 ϕ_2，反之亦然。又由于 $\tilde{B}_1\setminus B_1\subset Supp(\chi_2)$（分别地，$\tilde{B}_2\setminus B_2\subset Supp(\chi_1)$），当 h充分小时，最后两个右端积分可以被前两个右端积分吸收：

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi_{x_1}(x)/h}(\tilde{C}_0|[-h^2\Delta_x,\chi_1]u(x)|^2+|[-h\nabla_x,\chi_1]u(x)|^2)dx\\&\qquad=\mathcal{O}_h\left(h\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi_{x_2}(x)/h}\chi_2^2(x)(|u(x)|^2+|h\nabla_xu(x)|^2)dx\right)\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi_{x_2}(x)/h}(\tilde{C}_0|[-h^2\Delta_x,\chi_2]u(x)|^2+|[-h\nabla_x,\chi_2]u(x)|^2)dx\\&\qquad=\mathcal{O}_h\left(h\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi_{x_1}(x)/h}\chi_1^2(x)(|u(x)|^2+|h\nabla_xu(x)|^2)dx\right)\end{aligned}\tag{2.37}$$

最后，存在 $h_0>0$ 和 $C>0$，使得对所有 $0<h<h_0$ 和 $u\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,R_0))$：

$$h\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi(x)/h}(|u(x)|^2+|h\nabla_xu(x)|^2)dx\le C\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi(x)/h}|(-h^2\Delta_x+V_\theta(x)-E_\theta)u(x)|^2dx\tag{2.38}$$

若将 h^2 替换为 $\theta\,h^2/\omega_V(\theta)$，则得到：

$$\begin{aligned}&h\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}(|u(x)|^2+\theta|h\nabla_xu(x)|^2/\omega_V(\theta))dx\\&\le C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)}e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(-h^2\Delta_x+\tilde{V}_\theta(x)-E)u(x)|^2dx\end{aligned}\tag{2.39}$$

对于 $u\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,R_0))$。这就是定理 2的第一部分。

对于第二种情况，u的支集位于 $B(0,R_0)\setminus B(0,R/2)$ 因此我们离 0较远，所以可以对 ϕ 考虑一个径向函数，并从方程 2.24开始。取 $\phi=r^{-1}$。因此，当 $p_\phi=0$（即当 $\rho=0$ 且 $\omega^2=r^2\partial_r\phi$时），我们有：

$$\{Re(p_\phi),Im(p_\phi)\}=r^{-7}\ge R_0^{-7}>0\tag{2.40}$$

证明随后仅在一个环域上以与之前相同的方式进行。因此我们得到：

$$
\begin{aligned}
&h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}(|u(x)|^2+\theta|h\nabla_x u(x)|^2/\omega_V(\theta))dx\\
&\leq C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(-h^2\Delta_x+\tilde{V}_\theta(x)-E)u(x)|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

当 h 足够小时，且 $u\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,\ R_0)\setminus B(0,\ R/2))$。

□

根据定理 2，我们现在为 V_{per} 建立以下推论：

推论 2.3。

- 存在一个函数 $\tilde{\phi}\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 为正的，$h_0>0$ 且 $C>0$，使得对所有 $h\in]0,h_0]$,$u\in C_0^\infty(B(0,R_0))$：

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\
&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

  其中 $\tilde{\omega}_V(h)=\omega_V(h^{2/3}\kappa),\ \kappa>0$。
- 存在一个函数 $\tilde{\phi}\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 为正且径向递减，$h_0>0$ 且 $C>0$，使得对所有 $h\in]0,h_0]$,$u\in C_0^\infty(B(0,R_0)\setminus B(0,R/2))$：

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\
&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

  with $\tilde{\omega}_V(h)=\omega_V(h^{2/3}\kappa),\ \kappa>0.$

证明。 事实上，由定理 2可得：

$$
\begin{aligned}
&h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}(|u(x)|^2+\theta|h\nabla_x u(x)|^2/\omega_V(\theta))dx\\
&\leq C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(-h^2\Delta_x+\tilde{V}_\theta(x)-E^2)u(x)|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

对于 $u\in C_0^\infty(B(0,\ R_0))$（或 $u\in C_0^\infty(B(0,\ R_0)\setminus B(0,\ R/2))$），$h\in]0,\ h_0]$ 且 $\theta\in]0,\ \theta_0]$。于是：

$$
\begin{aligned}
& h\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}(|u(x)|^2+\theta|h\nabla_x u(x)|^2/\omega_V(\theta))dx \\
& \le 2C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\,\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}(x)-E)u(x)|^2dx \\
& \quad +2C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\,\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(\tilde{V}_\theta(x)-V_{per}(x))u(x)|^2dx \\
& \le 2C\frac{\theta^{3/2}}{\omega_V(\theta)^{3/2}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\,\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}(x)-E)u(x)|^2dx \\
& \quad +2C\theta^{3/2}\omega_V(\theta)^{1/2}\int_{B(0,R_0)} e^{2\phi(x)\,\omega_V(\theta)^{1/2}/h\theta^{1/2}}|u(x)|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

根据 ω_V 2.1 的定义，我们取 $\theta = h^{2/3}\kappa$，令 $\kappa > 0$ 足够小，使得最后一项可以被第一项吸收。于是得到：

$$
\begin{aligned}
& \int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
& \le \frac{\tilde{C}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

˜其中 $C > 0$, $h \in]0,\ h_0]$, $\theta \in]0,\ \theta_0]$, $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,\ R_0)$（或在第二种情况下为 $u \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0,\ R_0)$ $\setminus B(0,\ R/2)$），且其中 $\tilde{\omega}_V(h) = \omega_V(h^{2/3}\kappa)$, $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)/\kappa^{1/2}$。只有当 V_{per} 在 $B(0,\ R_0)$ 上不连续时，才需要选择 κ（也就是说，当 h 趋于 0 时，ω_V 不会趋于 0）。

□

在方程（2.45）中，我们首先选择 $\theta = h^{2/3}\kappa$其中 $\kappa > 0$。然而，若 V 是 α-Hölder 连续的，则可以进一步优化这一选择。具体而言，我们要求

$$2C\theta^{3/2}\omega_V(\theta)^{1/2} \ll h.$$

由于 V 是 α-Hölder 连续的，我们有 $\omega_V(\theta)^{1/2} \le \theta^{\alpha/2}$。因此，只需确保

$$\theta \ll \left(\frac{h}{2C}\right)^{2/(\alpha+3)}.$$

因此，我们令 $\theta = h^{2/(\alpha+3)}\kappa$，其中 $\kappa > 0$ 足够小。由此得到以下估计：

$$\frac{\omega_V(\theta)^{1/2}}{h\theta^{1/2}} \le \tilde{\kappa}h^{-4/(\alpha+3)},$$

对于某个 $\tilde{\kappa} > 0$。这恢复了 Vodev (2020) 中得到的估计。

为了将这些结果推广到周期函数 u_{per}，我们必须去除紧支撑这一假设。这自然引出了以下推论：

推论 2.4。

- 存在一个正的函数 $\tilde{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$， $h_0 > 0$ 且 $C > 0$，使得对所有 $h \in]0, h_0]$，$u \in H^2(B(0, R_0))$：

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\tilde{R}_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x + V_{per} - E)u|^2dx \\
&\quad + C\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx
\end{aligned} \tag{2.47}$$

  其中 $\tilde{\omega}_V(h) = \omega_V(h^{2/3}\kappa)$， $\kappa > 0$ 且 $A(0, \tilde{R}_0, R_0)$ 是以0 为中心、半径为 $\tilde{R}_0 < R_0$ 的环域中心。
- 存在一个正的、径向递减的函数 $\tilde{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$， $h_0 > 0$ 且 $C > 0$，使得对所有 $h \in]0, h_0]$，$u \in H^2(B(0, R_0) \setminus B(0, R/2))$：

$$\begin{aligned}
&\int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x + V_{per} - E)u|^2dx \\
&\quad + C\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{B(0,R)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\quad + C\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,R_2,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx
\end{aligned} \tag{2.48}$$

  其中 $\tilde{\omega}_V(h) = \omega_V(h^{2/3}\kappa)$， $\kappa > 0$, $K > \tilde{\phi}$ 在 $A(0, R_1, R_0)$ 上， B_r 一个以0 为中心、半径为 r 的小球，且 $A(0, R_1, R_2)$ 是以 0 为中心、半径为 $R/2 < R_1 < R < R_2 < R_0$ 的环域中心。

证明。 由于光滑函数在 H^2（B（0， R_0））中的稠密性，只需证明光滑函数的情形即可。先从第一点开始。根据推论 2.3 ，我们知道，对于$u \in C_0^\infty$（B（0， R_0））， 当 h 足够小时：

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2 + |h\nabla_x u(x)|^2)dx \\
&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x + V_{per} - E)u|^2dx
\end{aligned} \tag{2.49}$$

取 $u \in \mathcal{C}^\infty(B(0, R_0))$ 并令 χ 属于 $C_0^\infty(B(0, R_0))$。则可将推论 2.3 应用于χu：

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|\chi u(x)|^2+|h\nabla_x\chi u(x)|^2)dx\\&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)\chi u|^2dx\end{aligned}\tag{2.50}$$

˜ ˜因此，若取 $\chi=1$ 在 $B(0,R_0)$ 上，且满足 $R_0<R_0$ 和 $\chi\geq 0$，则：

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,\tilde{R}_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx\\&\quad+C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|[-h^2\Delta_x,\chi]u|^2dx\end{aligned}\tag{2.51}$$

$\nabla\chi$ 的支集位于 $A(0,\ \tilde{R}_0,\ R_0)$中，因此 $[-h^2\Delta_x,\chi]u$ 的支集也位于 $A(0,\ \tilde{R}_0,\ R_0)$中。此外，存在 $\beta>0$ 使得：

$$|[-h^2\Delta_x,\chi]u|^2\leq h^2\beta(|u|^2+|h\nabla_x u|^2)\tag{2.52}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,\tilde{R}_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\&\leq \tilde{C}\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx\\&\quad+\tilde{C}\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\end{aligned}\tag{2.53}$$

˜且 C。于是得到第一个结果。
对于第二种情况，由推论2.3 我们知道，对于 $u\in C_0^\infty(B(0,\ R_0)\ \setminus B(0,\ R/2))$，当 h足够小时：

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\&\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)u|^2dx\end{aligned}\tag{2.54}$$

将 u 替换为一个光滑函数，并令 χ 属于 $C_0^\infty(B(0,R_0)\ \setminus B(0,R/2))$。则可将推论 2.3 应用于 χu：

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|\chi u(x)|^2+|h\nabla_x\chi u(x)|^2)dx\\ &\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V_{per}-E)\chi u|^2dx\end{aligned}\tag{2.55}$$

设 $\chi=1$ 在 $A(0,R_1,R_2)$ 上，且满足 $R/2<R_1<R<R_2<R_0$ 和 $\chi\geq 0$。则：

$$\begin{aligned}&\int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\ &\leq C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)}\chi e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V-E)u|^2dx\\ &\quad+C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|[-h^2\Delta_x,\chi]u|^2dx\end{aligned}\tag{2.56}$$

$\nabla\chi$ 的支集位于 $A(0,R_2,R_0)\cup A(0,r/2,R_1)$中，因此 $[-h^2\Delta_x,\chi]u$ 的支集也位于$A(0,R_2,R_0)\cup A(0,R/2,R_1)$中。此外，还存在 $\beta>0$

$$|[-h^2\Delta_x,\chi]u|^2\leq h^2\beta(|u|^2+|h\nabla_x u|^2)\tag{2.57}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\ &\leq \tilde{C}\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)}\chi e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V-E)u|^2dx\\ &\quad+\tilde{C}\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,R_2,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\ &\quad+\tilde{C}\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,r/2,R_1)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\end{aligned}\tag{2.58}$$

~ ~ ~与 $C>0$。在 $A(0,R_1,R_0)$ 上， $\phi\leq\phi(R_1)=:K$。最终，我们得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\
&\le \tilde{C}\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|(-h^2\Delta_x+V-E)u|^2dx\\
&\quad+\tilde{C}\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{B_r} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx\\
&\quad+\tilde{C}\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,R_2,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u(x)|^2+|h\nabla_x u(x)|^2)dx
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

由此得到第二个结果。

□

2.3. 结论。因此，从一开始，我们就在闭黎曼曲面 M 上研究，并考察方程:

$$(-h^2\Delta+V-E)u=f \quad \text{on M} \tag{2.60}$$

其中 $V\in L^\infty(M,\ \mathbb{R})$、 $u\in H^2(M,\ \mathbb{R})$ 和 $f\in L^2(M,\ \mathbb{R})$。令 $U\subset M$ 为一个开子集。在小节2.1中，我们看到，可以将研究简化为球 $(0,\ R_0)\subset\mathbb{R}^2$ 上的两种情形：中心为0，半径为 $R_0>0$:

- U 被一个半径为 $0<R<R_0$ 的球 $B(0,\ R)$ 所替代。
- U 被一个环域 $A(0,\ R_0,\ R_0)$ 所替代，其中 $0<R_0<R_0$。

u、 V、 f 被替换为“周期”函数 u_{per}、 V_{per}、 f_{per}，其变换意义见小节2.1:

$$(-h^2\Delta+V_{per}-E)u_{per}=f_{per} \quad \text{on } B(0,R_0).$$

对于第一种情形，我们使用推论的第二个陈述2.4:

$$
\begin{aligned}
&\int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u_{per}(x)|^2+|h\nabla_x u_{per}(x)|^2)dx\\
&\le C\frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}h^{2/3}}\int_{B(0,R_0)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}|f_{per}(x)|^2dx\\
&\quad+C\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{B(0,R)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u_{per}(x)|^2+|h\nabla_x u_{per}(x)|^2)dx\\
&\quad+C\frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}}\int_{A(0,R_2,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}}(|u_{per}(x)|^2+|h\nabla_x u_{per}(x)|^2)dx
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

当 h 足够小时，其中 $\phi(x)$ 为光滑正的径向递减函数， $C>0$、 $K>\phi$ 位于 $A(0,\ R_1,\ R_0)$ 上，0 为半径为 $R/2<R_1<R<R_2<R_0$ 的圆环中心，并且

$$\tilde{\omega}_V(h) = \frac{1}{h^{4/3}} \sup_{x_0 \in B(0,R_0)} \sup_{x \in B(x_0, h^{2/3}\kappa)} |V(x) - V(x_0)|^{1/2} \tag{2.62}$$

˜得益于“周期化”以及 $\phi(x)$ 是递减函数这一事实：

$$\begin{aligned} &\int_{A(0,R_2,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &= \mathcal{O}\left(\int_{B(0,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

如果 $1 << R_2 < R_0$。

因此，当 h 足够小时：

$$\begin{aligned} &C \frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}} \int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &\leq C \frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}} \int_{B(0,R)} e^{2K\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &+ \int_{A(0,R_1,R_2)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \end{aligned} \tag{2.64}$$

因此：

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,R_0)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &\leq \int_{B(0,R)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &+ \int_{A(0,R_1,R_2)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &+ \int_{A(0,R_2,R_0)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &\leq \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} \int_{B(0,R)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\ &+ \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} \int_{B(0,R_0)} |f_{per}(x)|^2 dx \end{aligned} \tag{2.65}$$

由 $\tilde{C} > 0$ 周期性可知，我们可以将 $\tilde{\omega}_V(h)$ 替换为 $\beta(h) = \frac{1}{h^{4/3}} \sup_{x_0 \in M} \sup_{x \in B(x_0, h^{2/3}\kappa)} |V(x) - V(x_0)|^{1/2}$。根据第2.1小节，我们可以将 $B(0, R_0)$ 上的积分化为在 M 上的积分，并替换 u_{per} 和 f_{per}：

$$\int_M |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\beta(h)^{1/2}/h^{4/3}} \left(\int_M |f|^2 + \int_U (|u|^2 + |h\nabla u|^2) \right) \tag{2.66}$$

至此，第一种情况的证明完成。

对于第二个，我们在此使用推论 2.4:

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,\tilde{R}_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\
&\leq C \frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2} h^{2/3}} \int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} |f_{per}(x)|^2 dx \\
&\quad + C \frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}} \int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx
\end{aligned} \tag{2.67}$$

~ ~当 h 足够小时，其中 $\phi(x)$ 是一个光滑正函数， $C > 0$, $A(0,\ R_0,\ R_0)$ 是以 0 为圆心、半径为 $0 < R_0 < R_0$ 的环域~，并且

$$\tilde{\omega}_V(h) = \frac{1}{h^{4/3}} \sup_{x_0 \in B(0,R_0)} \sup_{x \in B(x_0, h^{2/3}\kappa)} |V(x) - V(x_0)|^{1/2}. \tag{2.68}$$

So:

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R_0)} |u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2 \\
&\qquad = \int_{B(0,\tilde{R}_0)} |u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2 + \int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} |u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2 \\
&\qquad \leq (C \frac{h^{4/3}}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}} + 1) \int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\
&\qquad\quad + C \frac{1}{\tilde{\omega}_V(h)^{1/2} h^{2/3}} \int_{B(0,R_0)} e^{2\tilde{\phi}(x)\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} |f_{per}(x)|^2 dx \\
&\qquad \leq \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} \int_{A(0,\tilde{R}_0,R_0)} (|u_{per}(x)|^2 + |h\nabla_x u_{per}(x)|^2) dx \\
&\qquad\quad + \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\tilde{\omega}_V(h)^{1/2}/h^{4/3}} \int_{B(0,R_0)} |f_{per}(x)|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.69}$$

其中 $\tilde{C} > 0$。由周期性可知，我们可以将 $\tilde{\omega}_V(h)$ 替换为 $\beta(h) = \frac{1}{h^{4/3}} \sup_{x_0 \in M} \sup_{x \in B(x_0, h^{2/3}\kappa)} |V(x) - V(x_0)|^{1/2}$。然后，根据第2.1小节，我们可以将 $B(0, R_0)$ 上的积分化简为 M 上的积分，并替换 u_{per} 和 f_{per}:

$$\int_M |u|^2 + |h\nabla u|^2 \leq \tilde{C} e^{\tilde{C}\,\beta(h)^{1/2}/h^{4/3}} \left(\int_M |f| + \int_U (|u|^2 + |h\nabla u|^2) \right) \tag{2.70}$$

由此得到第二种情况。

参考文献

Alinhac, S., Gérard, P., 2007. 伪微分算子与 Nash–Moser 定理。美国数学会。网址：http://dx.doi.org/10.1090/gsm/082，doi：10.1090/gsm/082。Dyatlov, S., Zworski, M., 2019. 散射共振数学理论。第 200 卷，数学研究生教材。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。doi：10.1090/gsm/200。Klopp, F., Vogel, M., 2019. 有界势的半经典预解算子估计。纯粹与应用分析 1，1–25。doi：10.2140/paa.2019.1.1。de Saint-Gervais, H.P., 2016年。黎曼曲面一致化：重访一项百年定理。欧洲数学遗产 网址：http://dx.doi.org/10.4171/145，doi：10.4171/145。Vodev, G., 2020. Hölder 势的半经典预解算子估计。纯粹与应用分析 2，841–860。doi：10.2140/paa.2020.2.841。巴黎-萨克雷大学数学系，法国国家科学研究中心联合研究单位 8628，307 号楼，91405 奥赛邮政专区，法国，以及法国大学研究院电子邮箱：Sebastien.campagne@universite-paris-saclay.fr