多重违约风险下的前向绩效过程

Wing Fung Chong*、Roxana Dumitrescu†、Gechun Liang‡和 Kenneth Tsz Hin Ng§

2026年1月6日

arXiv:2601.02276v1 [q-fin.MF] 5 Jan 2026

摘要

本文构建了一个存在多重可违约风险的市场中的前向指数效用。我们利用随机场的 Jacod-Pham 分解，首先刻画无违约滤过下可违约市场中的前向绩效过程。随后，我们通过一个递归定义的、带贴现的指标化无限时域反向随机微分方程（BSDE）系统构建前向效用，并证明其解的存在性、唯一性和有界性。为验证绩效过程所需的（超）鞅性质，我们针对一般滤过，基于相对于无违约滤过的一组等式和不等式，对这一性质作出严格刻画。我们还将分析扩展至具有遍历动力学的随机因子模型。在此情形下，我们推导出无限时域倒向随机微分方程的马尔可夫解的一致有界性，从而克服可违约情形下倒向随机微分方程系统特殊结构所带来的技术难题。通过取遍历极限，我们确定了极限后向随机微分方程，并将其常数与最优财富过程的风险敏感长期增长率联系起来。

关键词：前向效用偏好、违约风险、*Jacod-Pham* 分解、无限时域倒向随机微分方程、遍历倒向随机微分方程。

1 引言

无违约市场假设所有金融机构都能履行其金融义务，这意味着不存在可能引发价格骤变的金融失败风险。在这类市场中，资产价格平稳演变，通常以扩散过程进行建模

*香港大学计算与数据科学学院统计与精算学系，香港，中国。电子邮箱：chongwf@hku.hk。

†巴黎综合理工学院 CREST、ENSAE，法国帕莱索。电子邮箱：rox-ana.dumitrescu@ensae.fr。

‡英国考文垂华威大学统计系。电子邮箱：g.liang@warwick.ac.uk。§美国哥伦布俄亥俄州立大学数学系。电子邮箱：ng.499@osu.edu。

从数学上来说。然而，尤其是在 2008 年金融危机之后，人们对可违约资产（面临债务人违约风险）的兴趣日益浓厚。特别是传染效应，即一名债务人的违约可能对其他债务人造成重大影响，可能引发连锁反应，深刻影响市场动态，导致多重违约事件，进而影响投资者的最优投资策略。

为纳入可违约资产， [33] 在单一违约模型下构建了最优投资问题，随后在 [50, 32, 36]中将其扩展至多重违约模型。在这些研究中，可违约市场的滤过 $\mathbb{G}$ 通过扩充无违约滤过 $\mathbb{F}$ 构造而成，以纳入违约时刻及其发生时相应损失标记的信息。利用*Jacod-Pham* 分解，最优投资策略随后由一组由 $\mathbb{F}$中的布朗运动驱动的、带索引的指数二次型倒向随机微分方程（倒向随机微分方程）的递归序列刻画。后续研究探讨了相关问题： [28] 研究了受违约风险影响的非交易资产的无差异定价； [21] 研究了受交易对手风险驱动的随机终止时间倒向随机微分方程； [11] 考察了信用违约互换与货币市场之间的最优配置； [13] 分析了具有违约传染的制度转换市场中的投资组合配置。

上述研究均基于经典效用理论，在该理论中，规划期限开始时便预先指定终止时间 T 和效用函数。随后利用动态规划原理向后确定价值函数和最优策略。这种预先承诺通常被视为经典理论的一项局限。因此，本文旨在通过考虑一种无需预先承诺的前瞻性效用偏好，补充关于可违约市场的这一研究方向。

前瞻偏好的概念最早在一系列论文中提出[42, 43, 44, 45, 46, 47]。不同于经典效用，前瞻偏好是一种动态演化的过程（更准确地说，是一种随机场），当其取值于受控财富过程（或最优受控财富过程）时，满足上鞅（或鞅）性质。它通过持续纳入不断变化的市场条件和投资者偏好，提供了一种面向未来的机制，从而实时评估投资策略的表现。这种方法自然地适应了模型更新和学习等前瞻性特征。在连续时间模型中，前瞻偏好通常通过随机偏微分方程（SPDEs） [25, 51, 23], 对偶表述 [53], 无限时域BSDEs以及遍历倒向随机微分方程 [40, 16]来构建或刻画。前瞻效用也已在一般半鞅模型 [12, 17], 离散时间二项式模型 [4, 39, 52, 2],以及秩依赖偏好 [27, 3]中得到研究。

前瞻偏好的灵活性使其在金融及相关领域得到广泛应用，包括：投资与再保险 [18, 19], 美式期权估值 [37], 最优消费问题 [34, 24], 模型歧义 [35, 38],随机因子模型 [48, 8], 无差异估值 [5, 41], 养老基金管理 [10, 7, 29, 6, 49], 前瞻性熵风险度量 [16], 股权挂钩型人寿保险 [15], 以及机器人顾问 [14, 39]。

本文由两个主要部分组成。第一部分采用倒向随机微分方程方法，在由 m 可违约资产构成的一般市场中构造前向指数效用，并给出相应的最优投资策略。该构造基于 Jacod-Pham 分解，该分解最初由

在 [31] 中提出，后来用于求解 [50] 中的带跳跃的倒向随机微分方程（另见 [32, 33, 36]）。其核心思想是将任意 $\mathbb{G}$-适应（分别为可预测）过程分解为一列 $\mathbb{F}$-适应（分别为可预测）的带指标过程，从而使我们能够在无违约滤过下进行研究；在该滤过下，布朗运动保留其鞅性质——这是一个关键特征，而在增广滤过 $\mathbb{G}$下，该性质可能不再成立。

在这一一般的可违约市场设定中，我们的主要贡献如下。首先，我们基于过程的 Jacod-Pham 分解，通过一组积分（不）等式，对过程的 $\mathbb{G}$（超）鞅性质给出严格刻画。这些（不）等式纳入了给定 $\mathbb{F}$时违约时刻和损失的条件密度过程。利用这一技术结果，我们进而分别刻画了最优策略下前向绩效过程的 $\mathbb{G}$-鞅性质，以及任意可接受策略下的 $\mathbb{G}$-上鞅性质（定理 3.1）。这一刻画为构造前向绩效过程提供了关键基础，尤其是借助 $\mathbb{F}$-布朗运动的鞅性质。

其次，基于定理 3.1，我们提出一种前向偏好 U 的拟设 ，它建立在由$\mathbb{F}$-布朗运动驱动的一列递归定义的带指标倒向随机微分方程之上。为证明这些倒向随机微分方程解的存在唯一性，我们将 [32]中的方法推广至无限时域情形，并采用截断论证和比较原理来处理驱动项中的指数跳跃强度项。事实上，不同于其中考虑的后向有限时域倒向随机微分方程，前向效用的构造不依赖于任何规划期限，并会导出无限时域倒向随机微分方程。对拟设 和驱动项均施加正折现率，以确保有界性和适定性。

随后，我们递归地证明解的存在唯一性，构成本文的第二个主要结果（定理 4.1）。利用这些倒向随机微分方程的解以及定理 3.1，我们验证该拟设 确实定义了前向偏好，并在定理4.2中给出相应的最优投资策略。与 [12, 17], 在一般半鞅框架下构造前向绩效过程相比，我们的工作与之互为补充：我们明确刻画了条件密度过程，并提供了一个基于倒向随机微分方程的框架，从而能够以具体且系统的方式进行构造。

在本文的第二部分，我们将研究扩展到因子模型，其中市场参数由具有遍历性的随机因子驱动。在该因子模型下，我们首先证明无限时域倒向随机微分方程系统存在马尔可夫解。随后，我们为马尔可夫解建立界，这与 [40], 中的界类似；此外，我们还为相邻解分量之间的偏差建立单侧界，类似于 [30], 中的结果，并且这些界关于无限时域倒向随机微分方程的贴现率是一致的。

当前可违约市场面临两大主要挑战。首先，违约状态之间的指标不匹配会导致解分量即使处于同一状态，在不同违约时刻或损失水平下取值也不相同。这一复杂性也阻碍了倒向随机微分方程标准多维比较原理的直接应用。其次，与[30], 中的机制切换情形不同，违约所导致的跳跃幅度受投资策略控制。因此，我们无法利用二次距离函数的性质。

为应对这些挑战，我们将截断论证与对多维倒向随机微分方程比较原理证明的一种新颖改造相结合

以递归方式建立无限时域倒向随机微分方程马尔可夫解的界，从而得到定理 5.1。随后，我们分析相邻解分量之间的偏差，并证明在假设5.5下，这些偏差存在一个与贴现率无关的统一上界。这使我们能够本着 [30],的思路递归控制这些偏差，从而得到命题 5.1。

定理 5.1 和命题 5.1 所建立的界保证了倒向随机微分方程的 Z 分量受到一致控制，蕴含了马尔可夫解的一致Lipschitz性质，并防止违约区间之间的指数联系趋于无穷。这些性质确保当贴现率趋于零时，解仍保持稳定。利用这些估计，我们借鉴 [40]和 [30]中的扰动论证，研究贴现率趋于零时马尔可夫解的极限行为。我们将最后一次违约事件之后得到的遍历常数解释为零贴现极限下最优财富过程的长期风险敏感增长率。

在研究的最后部分，我们讨论了由于系统内部的单向依赖关系，利用遍历BSDE构造前向效用所面临的挑战。在附加的单调性假设下，我们展示了一种可能的构造，并证明无限时域倒向随机微分方程系统收敛于遍历倒向随机微分方程系统。

本文其余部分安排如下。第2节介绍市场模型。第3节讨论前瞻偏好的概念及其在无违约滤过下的刻画，如定理 3.1 所述。第4节基于无限时域倒向随机微分方程 (26)-(27)，提出一种前向指数效用的拟设 ，证明该系统解的存在唯一性，并通过检验相关可积性条件，验证该拟设 确实定义了前向指数效用。第5节将分析推广到遍历随机因子模型，并确定无限时域倒向随机微分方程的极限行为。第6节总结全文，附录则给出主要结果的证明。

2 模型构建

2.1 预备知识

令 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个完备概率空间， $m \geq 1$ 为表示违约次数的固定正整数。设 $(T_1, \ldots, T_m)$ 为一列 $\mathcal{F}$- 可测随机时刻，其中每个 $T_i : \Omega \to (0, \infty)$ 均几乎必然满足 $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_m < \infty$。该序列表示风险资产的违约时刻。另设 $(L_1, \ldots, L_m)$ 为一列 $\mathcal{F}$-可测且取值于波兰空间 E 的随机变量。对每个 $i = 1, \ldots, m$， L_i 表示在违约时刻T_i的损失。

令 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 为由d维布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 生成的完备右连续滤过，其中 $d \geq 1$ 是一个固定的正整数，表示无违约市场信息。对于每个 $n = 1$、.....、 m 和 $t \geq 0$，定义 $\mathcal{N}_t^n := \sigma(\mathbb{1}_{\{T_n \leq s\}},\ L_n \mathbb{1}_{\{T_n \leq s\}} :\ s \leq t)$，它刻画了截至时刻 t 的第 n 个违约时刻及损失信息，并令 $\mathcal{N}_t^n := \mathcal{N}_{t^+}^n = \bigcap_{u>t} \mathcal{N}_u^n$ 为 $\mathcal{N}_t^n$ 的右连续版本。接着定义违约滤过 $\mathbb{N} := \bigvee_{n=1}^m \mathbb{N}^n$，其中 $\mathbb{N}^n := (\mathcal{N}_t^n)_{t\geq 0}$，，以及市场滤过 $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{N}$。根据构造，每个

T_n 是一个 $\mathbb{G}$-停时，而每个 L_n 都是 $\mathcal{G}_{T_n}$-可测的。

对每个 $n=0,\ 1,\ \ldots,\ m$，令 $\Delta_n := \{(\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_n) \in [0,\infty)^{n+1} :\ 0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n<\infty\}$，其元素记作 $\theta_{(n)} := (\theta_0,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_n) \in \Delta_n$，表示从零开始的严格递增时间序列。对每个 $n=1,\ \ldots,\ m$，令$E^n := E\times\cdots\times E$($n$个波兰空间 E 的笛卡尔积)，其元素记作 $l_{(n)} := (l_1,\ \ldots,\ l_n) \in E^n$，其中 $l_i \in E$ 对 $i=1,\ \ldots,\ n$，表示前 n 次损失构成的向量。[1]

我们令 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$（分别为 $\mathcal{O}(\mathbb{F})$）表示与滤过 $\mathbb{F}$ 相关联的 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的可预测（分别为可选）σ-代数。对每个 $n=0,\ 1,\ \ldots,\ m$，记 $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$ 为取值于博雷尔集合$\mathcal{D}$（例如 $\mathbb{R},\ \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^{m\times d}$）的 $\mathbb{F}$-可预测带指标过程 $(\varphi_t^n(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ 所构成的集合，其中映射 $(t,\omega,\theta_{(n)},l_{(n)}) \mapsto \varphi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)};\omega)$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Delta_n)\otimes\mathcal{B}(E^n)$-可测的。同样，记 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\mathcal{D})$ 为取值于 $\mathcal{D}$ 的 $\mathbb{F}$-可选带指标过程 $(\psi_t^n(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ 所构成的集合，其中映射 $(t,\omega,\theta_{(n)},l_{(n)}) \mapsto \psi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)};\omega)$ 是 $\mathcal{O}(\mathbb{F})\otimes\mathcal{B}(\Delta_n)\otimes\mathcal{B}(E^n)$-可测的。[2]

对于任意 $n=0,\ldots,m$，我们定义子空间 $\mathcal{S}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$ 和 $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$，使得，$\varphi^n \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$（分别地，$\varphi^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$）当且仅当 $\varphi^n \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$（分别地，$\varphi^n \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$），且

$$\sup_{(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[\theta_n,\infty)\times\Omega} \left|\varphi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right| < \infty,$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathcal{D}$ 中通常的欧几里得范数或矩阵范数。我们还用 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Delta_n, E^n;\ \mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n;\mathcal{D})$ 的一个子空间，它由所有 $\mathbb{F}$-可预测的带指标过程 $Z(\cdot,\cdot)$ 构成，满足对于任意 $\theta_{(n)} \in \Delta_n, l_{(n)} \in E^n$ 和 $t \geq \theta_n$，

$$\mathbb{E}\left[\int_{\theta_n}^t |Z_s(\theta_{(n)},l_{(n)})|^2 ds\right] < \infty.$$

对于任意 $\varepsilon>0$，我们令 $\mathcal{M}^{2,\varepsilon}(\Delta_n, E^n;\mathcal{D})$ 表示所有满足以下条件的 $\mathbb{F}$-可预测带指标过程$Z(\cdot,\cdot)$ 的集合：对于任意 $\theta_{(n)} \in \Delta_n, l_{(n)} \in E^n$，

$$\mathbb{E}\left[\int_{\theta_n}^\infty e^{-2\varepsilon s}|Z_s(\theta_{(n)},l_{(n)})|^2 ds\right] < \infty.$$

我们还定义 $\mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n;\mathcal{D}) := \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{M}^{2,\varepsilon}(\Delta_n, E^n;\mathcal{D})$。

最后，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，我们令 $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ 为所有分量均为 1 的向量。我们还用记号 v' 表示向量或矩阵 v 的转置。

2.2 市场模型

我们考虑一个最优投资组合选择问题，其中由 m 风险资产构成的投资组合面临违约风险，[3] 其中 $m\leq d$。令 $\mu=(\mu_t)_{t\geq 0}$ 和 $\sigma=(\sigma_t)_{t\geq 0}$ 为 $\mathbb{G}$-可预测的 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^{m\times d}$ 值过程，分别表示标的风险资产的收益率

[1]略微滥用一下记号，本文中，当一个数学对象依赖于 E^0、$l_{(0)}$ 或 $L_{(0)}$ 时，我们将其理解为该对象分别不依赖于 E^0、$l_{(0)}$ 或 $L_{(0)}$。[2]对于 $n=0$，$\mathcal{B}(\Delta_0)$ 和 $\mathcal{B}(E^0)$ 是平凡的 σ-代数。[3]为简化数学处理并便于记号表示，我们假设风险资产的数量与违约的数量相同。一般而言，这两个数量可以不同。

和波动率。利用 Jacod-Pham 分解，过程 μ 和 σ 可分解为

$$\begin{aligned}\mu_t &= \sum_{n=0}^{m-1} \mu_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} + \mu_t^m(T_{(m)}, L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t>T_m\}},\\ \sigma_t &= \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} + \sigma_t^m(T_{(m)}, L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t>T_m\}},\end{aligned} \tag{1}$$

其中，对任意 $n = 0,1,\dots,m$, $T_{(n)} := (T_0, T_1, \dots, T_n)$，以及任意 $n = 1,\dots,m$, $L_{(n)} := (L_1, \dots, L_n)$。这里，$\mu^n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)$，且 $\sigma^n(\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^{m\times d})$。我们还令 $\beta = (\beta_t(l))_{t\geq 0,\, l\in E}$ 为一个 $\mathbb{G}$-可预测过程，它具有如下分解：

$$\beta_t(l) = \sum_{n=0}^{m-1} \beta_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}, l)\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}, \tag{2}$$

其中，对每个 $n = 0,\dots,m-1$，$\beta^n(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n, E; \mathbb{R}^m)$，即映射 $(t,\omega,\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) \mapsto \beta_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l;\omega)$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\Delta_n) \otimes \mathcal{B}(E^n) \otimes \mathcal{B}(E)$- 可测的。过程 β 表示标的风险资产的跳跃幅度因子；参见下文的 (5)。我们假设，对任意 $n = 0,\dots,m-1$，$(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) \in \Delta_n \times E^n \times E$，且 $t \geq \theta_n$，$\beta^n{}_{,t}{}^i(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) > -1$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立，其中对 $i = 1,\dots,m$，$\beta^n{}_{,t}{}^i(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l)$ 是 $\beta_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l)$ 的第 i 个分量。我们还用 $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n, E; \mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n, E; \mathbb{R}^m)$ 的一个子空间，使得 $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot) \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n, E; \mathbb{R}^m)$ 当且仅当

$$\sup_{(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l)\in\Delta_n\times E^n\times E} \operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[\theta_n,\infty)\times\Omega} \left|\varphi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l)\right| < \infty.$$

m 风险资产的价格 $S = (S_t)_{t\geq 0}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^m$ 的 $\mathbb{G}$-可选过程，其满足以下 Jacod-Pham 分解：

$$S_t = \sum_{n=0}^{m-1} S_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}} + S_t^m(T_{(m)}, L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\geq T_m\}}, \tag{3}$$

其中，对于每个 $n = 0,\dots,m$, $S^n(\cdot,\cdot) = (S_t^n(\cdot,\cdot))_{t\geq 0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)$。带索引过程序列的动态由以下关系支配：对于 $t \geq 0$,

$$dS_t^0(0) = S_t^0(0) * \Big(\mu_t^0(0)dt + \sigma_t^0(0)dW_t\Big), \tag{4}$$

并且对于任意 $n = 1,\dots,m$, $\theta_{(n)} \in \Delta_n$ 和 $l_{(n)} \in E^n$,

$$\begin{cases} dS_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = S_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) * \left(\mu_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})dt + \sigma_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})dW_t\right),\ t \geq \theta_n,\\ S_{\theta_n}^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = S_{\theta_n^-}^{n-1}(\theta_{(n-1)}, l_{(n-1)}) * (\mathbf{1}_m + \beta_{\theta_n}^{n-1}(\theta_{(n-1)}, l_{(n-1)}, l_n)).\end{cases} \tag{5}$$

这里，对于任意 $x = (x_1,\dots,x_m)' \in \mathbb{R}^m$ 和 $y = (y_1,\dots,y_m)' \in \mathbb{R}^m$，乘积 $x * y$ 由 $(x_1y_1,\dots,x_my_m)' \in \mathbb{R}^m$ 给出。

注 2.1。通过引入与违约时刻和损失值 $(T_n, L_n)_{n=1}^m$ 相关的随机测度 $N(\cdot,\cdot)$，对于任意 $t \geq 0$ 和 $B \in \mathcal{B}(E)$,

$$N([0,t]\times B) = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}}\mathbb{1}_{\{L_n\in B\}}. \tag{6}$$

利用 (6)，我们还可以将 (3)-(5) 表示如下：对于 $t \geq 0$,

$$dS_t = S_t * (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \int_E S_{t^-} * \beta_t(l) N(dt, dl). \tag{7}$$

尽管（7）比（3）–（5）更为简洁，却掩盖了有关跳跃结构的详细信息。我们的目标是通过更明确的结果来探究这一具体的跳跃结构；因此，我们将采用（3）–（5）。□

本文始终对市场参数施加以下假设 2.1。

假设 2.1。对于任意 $n = 0, 1, \ldots, m$,

1. $\mu^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)$、$\sigma^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^{m\times d})$ 和 $\beta^n \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(\Delta_n, E^n, E; \mathbb{R}^m)$；2. 对任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$, $\sigma_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})$ 是一个满秩矩阵。

备注 2.2。条件 $\beta^n{}_{,t}{}^{i}(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) > -1$ $\mathbb{P}$-几乎处处对任意 $n = 0, \ldots, m-1, i = 1, \ldots, m, (\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) \in \Delta_n \times E^n \times E$ 和 $t \geq \theta_n$ 成立，可以放宽为非严格不等式。在这种情况下，当$\beta^n{}_{,t}{}^{i}(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) = -1$时，第 i 个风险资产的价格可能降为零；此后该资产将不再具有价值，也无法以有意义的方式进行交易，即投资该资产不会影响投资者财富。为适应有效可交易资产数量的减少，我们可以将过程 μ 的第 i 个分量设为零。同样，波动率过程 σ 的第 i 行也可以设为零，从而由删除其第 i 行得到的 σ 的剩余 $(m-1) \times d$ 块矩阵仍保持满秩；参见 [32] 中的备注 2.2。为简化数学处理并方便记号，我们假设 $\beta^n{}_{,t}{}^{i}(\theta_{(n)}, l_{(n)}, l) > -1$ $\mathbb{P}$-几乎处处成立。□

令 $\pi := (\pi_t)_{t\geq 0}$ 表示投资于 m 风险资产的金额向量，其可作如下分解:

$$\pi_t = \sum_{n=0}^{m-1} \pi_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}) \mathbb{1}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} + \pi_t^m(T_{(m)}, L_{(m)}) \mathbb{1}_{\{t > T_m\}}, \tag{8}$$

其中，对于任意 $n = 0, \ldots, m$, $\pi^n(\cdot, \cdot) = (\pi_t^n(\cdot, \cdot))_{t\geq 0} \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)$ 的取值属于 $\Pi_n \subseteq \mathbb{R}^m$，其中 Π_n 是表示投资约束集合的闭凸集。为便于后续计算，本文其余部分均假设 $\mathbf{0} \in \cap_{n=0}^m \Pi_n$。不过，我们指出，即使不作此假设，所有结果仍然成立。

采用策略 π 后，财富过程 $X^\pi := (X_t^\pi)_{t\geq 0}$ 可作如下分解：对于 $t \geq 0$,

$$X_t^\pi = \sum_{n=0}^{m-1} X_t^{\pi,n}(T_{(n)}, L_{(n)}) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} + X_t^{\pi,m}(T_{(m)}, L_{(m)}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_m\}}, \tag{9}$$

其中，对于 $n = 0, \ldots\ldots, m$，带索引过程 $X^{\pi,\,n}(\cdot,\ \cdot) \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R})$ 定义如下：对于 $t \geq 0$,

$$dX_t^{\pi,0}(0) = (\pi_t^0(0))' \sigma_t^0(0) \left(\alpha_t^0(0) dt + dW_t\right), \tag{10}$$

并且对于任意 $n=1,\ldots,m$，$X^{\pi,n}=(X^{\pi,n}_t)_{t\geq 0}$ 均由以下随机微分方程支配：对于任意 $(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，

$$\begin{cases} dX^{\pi,n}_t(\theta_{(n)},l_{(n)})=\left(\pi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)'\sigma^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\left(\alpha^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})dt+dW_t\right),\ t\geq\theta_n,\\ X^{\pi,n}_{\theta_n}(\theta_{(n)},l_{(n)})=X^{\pi,n-1}_{\theta_n^-}(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)})\\ \qquad\qquad +\left(\pi^{n-1}_{\theta_n}(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)})\right)'\beta^{n-1}_{\theta_n}(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)},l_n). \end{cases} \tag{11}$$

这里，$\alpha^n(\cdot,\cdot)\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}^d)$ 表示风险市场价格；对于任意 $(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $t\geq\theta_n$，

$$\sigma^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\alpha^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})=\mu^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),$$

其定义如下：

$$\alpha^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})=\sigma^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\left(\sigma^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\sigma^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\right)^{-1}\mu^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)}).$$

结合 (9)-(11)，过程 X^π 可表示为以下动态形式：对于任意 $t\geq 0$，

$$dX^\pi_t=(\pi_t)'\sigma_t\left(\alpha_t dt+dW_t\right)+\int_E(\pi_t)'\beta_t(l)N(dt,dl), \tag{12}$$

其中

$$\alpha_t=\sum_{n=0}^{m-1}\alpha^n_t(T_{(n)},L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}+\alpha^m_t(T_{(m)},L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t>T_m\}}. \tag{13}$$

我们假设，关于滤过 $\mathbb{F}$，$(T_{(m)},L_{(m)})$ 存在条件密度：

假设 2.2。存在 $\eta(\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_m,E^m;\mathbb{R}_+)$，使得对于任意 $t\geq 0$以及定义在 $\Delta_m\times E^m$ 上的有界可测函数 g，

$$\mathbb{E}[g(T_{(m)},L_{(m)})|\mathcal{F}_t]=\int_{E^m\times\Delta_m}g(\theta_{(m)},l_{(m)})\eta_t(\theta_{(m)},l_{(m)})d\theta_{(m)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)}),$$

其中，对于 $n=1,\ldots,m$，

$$d\theta_{(n)}:=d\theta_n\cdots d\theta_1\text{ and }\boldsymbol{\lambda}(dl_{(n)}):=\lambda_1(dl_1)\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}(l_{(i)},dl_{i+1});$$

这里，$\lambda_1(dl_1)$ 是 E 上的非负 Borel测度；对于 $n=1,\ldots,m-1$，$\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})$ 是 $E^n\times E$ 上的概率转移核。为方便记号，下文也可用 $\lambda_1(l_0,dl_1)$ 表示 $\lambda_1(dl_1)$。

该密度假设也称为（**H'**）假设，它确保任何 $\mathbb{F}$-半鞅也是一个 $\mathbb{G}$-半鞅；例如，参见 [50]。最后，我们引入以下记号：对于 $n=0,1,\ldots,m-1$，我们将 $\hat{}\eta^n(\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}_+)$ 定义为：对于任意 $(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $t\geq 0$，

$$\begin{aligned}&\hat{\eta}^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\\ :=&\int_{E^{m-n}}\int_t^\infty\int_{\theta_{n+1}}^\infty\cdots\int_{\theta_{m-1}}^\infty\eta_t\left(\theta_{(m)},l_{(m)}\right)d\theta_m\cdots d\theta_{n+1}\prod_{j=n}^{m-1}\lambda_{j+1}(l_{(j)},dl_{j+1}).\end{aligned} \tag{14}$$

函数 $\hat{\eta}^n(\cdot,\cdot)$，$n=0,\dots,m-1$，可解释为在给定 $\mathbb{F}$ 的条件下T_{n+1} 的生存密度：对于任意 $t\geq 0$,

$$\mathbb{P}(T_1>t|\mathcal{F}_t)=\hat{\eta}_t^0(0),$$
$$\mathbb{P}(T_{n+1}>t|\mathcal{F}_t)=\int_{E^n}\int_{\Delta_n}\hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})d\theta_{(n)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(n)}).$$

此外，我们约定 $\hat{\eta}^m(\cdot,\cdot):=\eta(\cdot,\cdot)$。

我们假设生存密度函数为正，这使我们之后能够通过对随机场的分解进行缩放来构造前向效用偏好；见下文的 (24)。

假设 2.3。对于任意 $(\theta_{(m)},l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$，以及 $t\geq\theta_m$, $\eta_t(\theta_{(m)},l_{(m)})>0$.

特别地，根据生存密度函数的定义，假设 2.3 意味着对于任意 $n=0,\dots,m$、$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和$t\geq\theta_n$，均有 $\hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})>0$。

3 违约市场中的前向效用偏好

本节回顾前向效用偏好的定义，该定义通过市场滤过 $\mathbb{G}$下的（超）鞅性质来表述。由于布朗运动 W 在 $\mathbb{G}$下不一定是鞅，我们需要通过 Jacod-Pham 分解，将鞅条件投影到无违约滤过 $\mathbb{F}$ 上。在第 3.1 节中，我们给出滤过 $\mathbb{F}$下$\mathbb{G}$的（超）鞅性质的刻画。在此基础上，第 3.2 节介绍并刻画 $\mathbb{F}$下的 $\mathbb{G}$-前瞻偏好。

3.1 在过滤 $\mathbb{F}$ 下 $\mathbb{G}$-鞅的刻画

接下来的引理 3.2 将用 $\mathbb{F}$ 刻画 $\mathbb{G}$-鞅性质，其证明借助以下引理 3.1。它们的证明见附录 A。

引理 3.1。设 $M=(M_t)_{t\geq 0}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$、$\mathbb{G}$-可选且可积的过程（即，对任意 $t\geq 0$ 均有 $\mathbb{E}[|M_t|]<\infty$），并具有如下 Jacod-Pham 分解:

$$M_t=\sum_{n=0}^{m-1}M_t^n\left(T_{(n)},L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}+M_t^m(T_{(m)},L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\geq T_m\}},$$

其中，对于任意 $n=0,\dots,m$, $M^n(\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R})$。假设$(M_t)_{t\geq 0}$满足以下递归关系：对于任意 $n=0,\dots,m-1$, $(\theta_{(n)},l_{(n)})\in$

$\Delta_n \times E^n$ 以及任意 $s \geq t \geq \theta_n$,

$$\begin{aligned}
&M_t^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \\
\geq\ & \mathbb{E}\Bigg[M_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \\
&+\int_E \int_t^s M_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\cdot \hat{\eta}_{\theta_{n+1}}^{n+1}((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})) d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \big| \mathcal{F}_t\Bigg],
\end{aligned} \tag{15}$$

且对于 $n = m$, $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$, 以及 $s \geq t \geq \theta_m$,

$$M_t^m\left(\theta_{(m)}, l_{(m)}\right) \eta_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \geq \mathbb{E}\left[M_s^m\left(\theta_{(m)}, l_{(m)}\right) \eta_s(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \big| \mathcal{F}_t\right]. \tag{16}$$

则对于任意 $n = 1, 2, \ldots, m$, $(\theta_{(n-1)}, l_{(n-1)}) \in \Delta_{n-1} \times E^{n-1}$, 且对于任意 $s \geq t \geq \theta_{n-1}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s M_s^n\left((\theta_{(n-1)}, \theta_n), (l_{(n-1)}, l_n)\right) \hat{\eta}_s^n\left((\theta_{(n-1)}, \theta_n), (l_{(n-1)}, l_n)\right) \\
&\quad d\theta_n \lambda_n(l_{(n-1)}, dl_n) \big| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&+\mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s \Bigg\{\sum_{j=n+1}^m \int_{E^{j-n}} \int_{\theta_n}^s \cdots \int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n-1)}, \theta_{(n,j)}), (l_{(n-1)}, l_{(n,j)})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^j((\theta_{(n-1)}, \theta_{(n,j)}), (l_{(n-1)}, l_{(n,j)})) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n}^{j-1} \lambda_{i+1}(l_{(i)}, dl_{i+1})\Bigg\} \\
&\quad d\theta_n \lambda_n(l_{(n-1)}, dl_n) \big| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
\leq\ & \mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s M_{\theta_n}^n\left((\theta_{(n-1)}, \theta_n), (l_{(n-1)}, l_n)\right) \hat{\eta}_{\theta_n}^n\left((\theta_{(n-1)}, \theta_n), (l_{(n-1)}, l_n)\right) \\
&\quad d\theta_n \lambda_n(l_{(n-1)}, dl_n) \big| \mathcal{F}_t\Bigg],
\end{aligned} \tag{17}$$

其中，对于任意 $n = 1, 2, \ldots, m-1$ 和 $j = n+1, n+2, \ldots, m$, $\theta_{(n,j)} := (\theta_n, \ldots, \theta_j)$, $l_{(n,j)} := (l_n, \ldots, l_j)$。此外，若（16）中的等式成立，且（15）对所有 $n = 0, \ldots, m-1$ 均成立，则（17）中的等式也成立。

证明。 参见附录 A.1。 □

该结果表明，若 M 的 Jacod-Pham 分解具有递归性质（15）和（16），则在 $\mathbb{F}$ 下经过第（n–1）次违约后的条件期望，可由单个分量 M^n（·, ·）的条件期望界定。对 M 尾部分量的这种递归刻画，在将 $\mathbb{G}$ 中的（超）鞅性质投影到 $\mathbb{F}$ 上时发挥着关键作用，正如下一个引理所示。

引理 3.2。 若一个取值于 $\mathbb{R}$、 $\mathbb{G}$-可选且可积的过程 $(M_t)_{t \geq 0}$ 满足其 Jacod-Pham 分解中的条件 (15) 和 (16)，则它是一个 $\mathbb{G}$-上鞅。此外，若 (15) 和 (16) 中的等式成立，则它是一个 $\mathbb{G}$-鞅。

证明。 参见附录 A.2。 □

注 3.1。 可以证明，(15) 和 (16) 中的等式不仅是 $(M_t)_{t\geq 0}$ 成为 $\mathbb{G}$-鞅的充分条件，也是必要条件。相比之下，(15) 中的不等式可能略强于上鞅性质所要求的最弱条件。

事实上，按照引理 3.2 的证明，可以证明，如果 $(M_t)_{t\geq 0}$ 是一个 $\mathbb{G}$-上鞅，则 (16) 必然成立，并且对于任意 $n = 0, \ldots\ldots, m-1$，以下不等式对 $\mathbb{P} \otimes d\theta_{(n)} \otimes \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1}(l_{(j)}, dl_{j+1})$-几乎所有的 $(\omega, \theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Omega \times \Delta_n \times E^n$ 以及任意 $s \geq t \geq \theta_n$ 均成立：

$$
\begin{aligned}
&M_t^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_t^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \\
\geq\ &\mathbb{E}\Bigg[M_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) + \int_E \int_t^s \Bigg(M_s^{n+1}\left(\theta_{(n+1)}, l_{(n+1)}\right) \\
&\cdot \hat{\eta}_s^{n+1}\left(\theta_{(n+1)}, l_{(n+1)}\right) + \sum_{j=n+2}^{m} \int_{E^{j-n-1}} \int_{\theta_{n+1}}^s \cdots \int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left(\theta_{(j)}, l_{(j)}\right) \hat{\eta}_s^j\left(\theta_{(j)}, l_{(j)}\right) \\
&d\theta_j \cdots d\theta_{n+2} \prod_{i=n+2}^{j} \lambda_i(l_{(i-1)}, dl_i)\Bigg) d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \Big| \mathcal{F}_t\Bigg].
\end{aligned}
$$

□

3.2 $\mathbb{G}$-在 $\mathbb{F}$ 下的前向效用偏好及其刻画

我们简要回顾前向效用偏好的定义。在下文中，令 $\mathcal{A}$ 为一个可容许策略集，它是所有 $\mathbb{G}$-可预测过程的子集，并且仅需对所得前向随机场满足一个可积性条件。 $\mathcal{A}$ 的确切表述将在第 4.2 节以及随机因子模型下的定理 5.4 中介绍。

定义 3.1. 设 $u_0(\cdot)$ 是严格递增且严格凹的函数。若随机场 $U = (U_t(x;\omega))_{x\in\mathbb{R},\ t\geq 0,\ \omega\in\Omega}$ 满足以下条件，则称其为财富过程 $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\geq 0}$ （ $\pi \in \mathcal{A}$）的前向效用偏好，其初始条件为 u_0 ：

1. $U_0(\cdot) \equiv u_0(\cdot)$；2. 对任意 $x \in \mathbb{R}$， $U_\cdot(x)$ 都是 $\mathbb{G}$-渐进可测的；3. 对任意 $t \geq 0$，$x \mapsto U_t(x)$ 几乎处处是严格递增且严格凹的 $\mathbb{P}$；4. 对任意 $\pi \in \mathcal{A}$，以及任意 $0 \leq t \leq s$，

$$U_t(X_t^\pi) \geq \mathbb{E}\left[U_s(X_s^\pi)|\mathcal{G}_t\right];$$

5. 存在一个 $\pi^* \in \mathcal{A}$ ，使得对于任意 $0 \leq t \leq s$，

$$U_t(X_t^{\pi^*}) = \mathbb{E}\left[U_s(X_s^{\pi^*})|\mathcal{G}_t\right].$$

接下来，我们将基于 Jacod-Pham 分解，为 X^π 构造一种前向效用偏好，其中随机场$(U_t(x))_{x\in\mathbb{R},\ t\geq 0}$ 可表示为

$$U_t(x)=\sum_{n=0}^{m-1}U_t^n\left(x,T_{(n)},L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}+U_t^m\left(x,T_{(m)},L_{(m)}\right)\mathbb{1}_{\{t\geq T_m\}}. \tag{18}$$

这里，对于任意 $n=0,\dots,m$和 $x\in\mathbb{R}$, $U^n(x,\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R})$。

利用引理 3.2，可以通过其在 $\mathbb{F}$ 中的 Jacod-Pham 分解，在 $\mathbb{G}$ 中构造一个前向效用偏好:

定理 3.1。随机场 $U=(U_t(x;\omega))_{x\in\mathbb{R},t\geq 0,\omega\in\Omega}$ 是过程 X^π 的一个前向效用偏好，该过程由 (10)-(11) 定义，且满足 $\pi\in\mathcal{A}$，当它满足定义 *3.1* 中的性质 *1-3* 以及以下条件时:

4'. 对于任意 $\pi\in\mathcal{A}$，$(\theta_{(m)},l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$和 $s\geq t\geq\theta_m$,

$$\begin{aligned}&U_t^m\left(X_t^{\pi,m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\eta_t(\theta_{(m)},l_{(m)})\\&\geq\mathbb{E}\left[U_s^m\left(X_s^{\pi,m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\eta_s(\theta_{(m)},l_{(m)})\middle|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned} \tag{19}$$

并且对于任意 $n=0,\dots,m-1$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$和 $s\geq t\geq\theta_n$,

$$\begin{aligned}&U_t^n\left(X_t^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\\&\geq\mathbb{E}\Bigg[U_s^n\left(X_s^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\hat{\eta}_s^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\\&\quad+\int_E\int_t^s U_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(X_{\theta_{n+1}}^{\pi,n+1}\left(\theta_{(n+1)},l_{(n+1)}\right),\theta_{(n+1)},l_{(n+1)}\right)\\&\quad\hat{\eta}_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{n+1})\right)d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})\Big|\mathcal{F}_t\Bigg];\end{aligned} \tag{20}$$

5' 存在 $\pi^*\in\mathcal{A}$ 使得对于所有 $n=0,\dots,m-1$，等式(19)和(20) 由这样的 π^* 成立。

此外，U 是前向效用偏好意味着性质 *5'* 成立。

^^ 受定理 3.1 启发，我们令 $U=(U_t(x;\omega))_{x\in\mathbb{R},t\geq 0,\omega\in\Omega}$ 为 $\mathbb{G}$ 中的一个随机场，其分解如下:

$$\hat{U}_t(x)=\sum_{n=0}^{m-1}\hat{U}_t^n\left(x,T_{(n)},L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}+\hat{U}_t^m\left(x,T_{(m)},L_{(m)}\right)\mathbb{1}_{\{t\geq T_m\}}, \tag{21}$$

^ 其中，对于每个 $n=0,\dots,m$和 $x\in\mathbb{R}$，$U^n(x,\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R})$ 的定义如下：对于任意$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$和 $t\geq\theta_n$,

$$\hat{U}_t^n\left(x,\theta_{(n)},l_{(n)}\right):=U_t^n\left(x,\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\hat{\eta}_t^n\left(\theta_{(n)},l_{(n)}\right). \tag{22}$$

对于任意 $\pi\in\mathcal{A}$，我们还定义，对于 $n=0$，1，.....，m，$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，以及 $t\geq\theta_n$,

$$\begin{aligned}V_t^{\pi,n}\left(\theta_{(n)},l_{(n)}\right):=&\hat{U}_t^n\left(X_t^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\&+\int_E\int_{\theta_n}^t\hat{U}_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(X_{\theta_{n+1}}^{\pi,n+1}(\theta_{(n+1)},l_{(n+1)}),\theta_{(n+1)},l_{(n+1)}\right)\\&d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1}),\ \text{for } n<m,\\V_t^{\pi,m}\left(\theta_{(m)},l_{(m)}\right):=&\hat{U}_t^m\left(X_t^{\pi,m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right),\ \text{for } n=m.\end{aligned} \tag{23}$$

那么，定理 3.1 中的性质 4' 和 5' 等价于要求带指标过程 $(V^{\pi,\ t\ \ n}(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 对任意 $n=0,\ \ldots\ldots,\ m,\ (\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$、$t\geq\theta_n$ 以及任意可容许策略 $\pi\in\mathcal{A}$ 都是 $\mathbb{F}$-上鞅；在最优策略 $\pi^*\in\mathcal{A}$ 下，它成为真正的 $\mathbb{F}$-鞅。接下来，我们将通过 $\mathbb{F}$ 中 U 的分解，在 $\mathbb{G}$ 中构造前向效用偏好 U。根据假设 2.3，可以利用 U 和 U 的分解之间的关系恢复偏好 U：对于任意 $n=0,\ \ldots\ldots,\ m$、$x\in\mathbb{R}$、$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 以及 $t\geq\theta_n$，

$$U_t^n\left(x,\theta_{(n)},l_{(n)}\right)=\frac{\hat{U}_t^n\left(x,\theta_{(n)},l_{(n)}\right)}{\hat{\eta}_t^n\left(\theta_{(n)},l_{(n)}\right)}. \tag{24}$$

4 指数型前向效用

本节针对财富过程 (12) 提出一种前向效用，其初始条件 u_0 给定为

$$u_0(x)=-e^{-\gamma x},\ x\in\mathbb{R},$$

其中 $\gamma>0$。

为此，我们首先引入递归无限时域倒向随机微分方程，并给出其适定性和有界性结果；随后构造前向效用，并以一个验证结果作结。

4.1 递归无限时域倒向随机微分方程

该构造基于一个 $\mathbb{G}$-可选过程 $Y=(Y_t)_{t\geq0}$，其 Jacod-Pham 分解如下：

$$Y_t=\sum_{n=0}^{m-1}Y_t^n(T_{(n)},L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}+Y_t^m(T_{(m)},L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\geq T_m\}}, \tag{25}$$

其中，对于任意 $n=0,\ldots,m$，$Y^n(\cdot,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R})$ 满足一个带指标倒向随机微分方程，其递归定义如下：对于 $\left(\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\in\Delta_m\times E^m$，以及 $t\geq\theta_m$，

$$\begin{aligned}dY_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})=&\left(\rho Y_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m\left(t,\pi,Z_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\right)dt\\&+Z_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'dW_t,\end{aligned} \tag{26}$$

并且对于 $n=m-1,\ldots,0$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $t\geq\theta_n$，

$$\begin{aligned}dY_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})=&\Bigg(\rho Y_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\\&-\min_{\pi\in\Pi_n}f^n\left(t,\pi,Y_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),Z_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\Bigg)dt\\&+Z_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'dW_t.\end{aligned} \tag{27}$$

这里，$\rho>0$ 是一个固定常数，而倒向随机微分方程 (26)-(27) 的驱动项定义如下：对于任意 $n=0,\ \ldots\ldots,\ m$，$(z,\ \pi,\ y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$，$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，以及 $t\geq\theta_n$，

$$f^m(t,\pi,z,\theta_{(m)},l_{(m)})=F_1^m(t,\pi,z,\theta_{(m)},l_{(m)}),$$

$$f^n(t,\pi,y,z,\theta_{(n)},l_{(n)}) = F_1^n(t,\pi,z,\theta_{(n)},l_{(n)}) + F_2^n(t,\pi,y,\theta_{(n)},l_{(n)}),$$

对于 $n = m-1$, ..., 0, 其中

$$\begin{aligned}
F_1^n(t,\pi,z,\theta_{(n)},l_{(n)}) &:= -\pi'\mu_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}) + \frac{\gamma|z-\sigma_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi|^2}{2} \\
&= \frac{\gamma}{2}\left|\sigma_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi - \left(z + \frac{\alpha_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})}{\gamma}\right)\right|^2 \\
&\quad - \alpha_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'z - \frac{\left|\alpha_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2}{2\gamma}, \\
F_2^n(t,\pi,y,\theta_{(n)},l_{(n)}) &:= \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l))-y-\pi'\beta_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)},l))}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl).
\end{aligned}$$

注记 4.1。 利用一个方程，我们可以通过以下无限时域倒向随机微分方程的解来表示过程 Y：

$$dY_t = (\rho Y_t - f^*(t,Y_t,Z_t))\,dt + Z_t'dW_t + \int_E G_t(l)N(dt,dl),$$

其中，对任意 $t \geq 0$ 和 $l \in E$,

$$\begin{aligned}
Z_t &= \sum_{n=0}^{m-1} Z_t^n(T_{(n)},L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} + Z_t^m(T_{(m)},L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t>T_m\}}, \\
f^*(t,Y_t,Z_t) &= \sum_{n=0}^{m-1}\min_{\pi\in\Pi_n} f^n\left(t,\pi,Y_t^n(T_{(n)},L_{(n)}),Z_t^n(T_{(n)},L_{(n)}),T_{(n)},L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}} \\
&\quad + \min_{\pi\in\Pi_m} f^m\left(t,\pi,Z_t^m(T_{(m)},L_{(m)}),T_{(m)},L_{(m)}\right)\mathbb{1}_{\{t>T_m\}}, \\
G_t(l) &= \sum_{n=0}^{m-1}\left[Y_t^{n+1}\left((T_{(n)},t),(L_{(n)},l)\right) - Y_t^n\left(T_{(n)},L_{(n)}\right)\right]\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}.
\end{aligned}$$

□

我们将在以下定理中证明带指标的无限时域倒向随机微分方程(26)–(27)的适定性。

定理 4.1。 在假设 *2.1–2.2* 下，对每个 $n = 0,\ldots,m$，带指标的无限时域倒向随机微分方程 (26)-(27) 均存在唯一解 (Y^n, Z^n)，其中 $Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n;\mathbb{R})$ 且 $Z^n \in \mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n;\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{loc}(\Delta_n, E^n;\mathbb{R}^d)$。

证明。 参见附录B.1。 □

我们以给出 Y^n, $n = 0,1,\ldots,m$ 的显式界结束本小节，该界将在第5节中发挥作用。

命题 4.1. 假设假设 2.1–2.2 成立。那么，对于任意 $n = 0,\ldots,m$，无限时域倒向随机微分方程 (26) 和 (27) 的唯一有界解 (Y^n, Z^n) 满足 $|Y_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})| \leq K_Y/\rho$，对所有 $(\theta_{(n)},l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$ 均成立，其中

$$K_Y := \frac{1}{\gamma}\max\left\{1, \max_{0\leq n\leq m}\frac{\|\alpha^n\|^2_{\mathcal{S}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}^m)}}{2}\right\}.$$

证明。 见附录 B.2。 □

根据定理 3.1 及其后续讨论，我们将重点放在构造由 (21)–(22) 定义的随机场 U ˆ 上，使得由 (23) 定义的过程在 $\mathbb{F}$ 下满足相关的（超）鞅性质。为此，我们利用倒向随机微分方程 (26)–(27) 的解，提出随机场 U ˆ 的如下拟设：对于任意 $n = 0,\ldots, m$, $x \in \mathbb{R}$, $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$,

$$\begin{aligned} &\hat{U}_t^n\left(x, \theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \\ =& -e^{-\gamma x} e^{\gamma\left(Y_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \rho Y_s^j(\theta_{(j)}, l_{(j)}) ds - \int_{\theta_n}^t \rho Y_s^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) ds - Y_0\right)}. \end{aligned} \tag{28}$$

于是，可以通过关系式 (24)ˆ 得到前向偏好 U 的拟设。利用分解式 (21)、(18) 和 (25)，我们还可以将 U 和 U 的拟设统一写为如下形式：对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \hat{U}_t(x) &= -e^{-\gamma x} e^{\gamma(Y_t - \int_0^t \rho Y_s ds - Y_0)}, \\ U_t(x) &= \frac{\hat{U}_t(x)}{\hat{\eta}_t}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $(\hat{\eta}_t)_{t\geq 0}$ 是一个 $\mathbb{G}$-可选过程，其分解如下：

$$\hat{\eta}_t = \sum_{n=0}^{m-1} \hat{\eta}_t^n\left(T_{(n)}, L_{(n)}\right) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} + \eta_t\left(T_{(m)}, L_{(m)}\right) \mathbb{1}_{\{t \geq T_m\}}, \ t \geq 0. \tag{30}$$

特别地，前向效用的初始条件显然满足，因为 $\hat{\eta}_0^0(0) = \hat{1}$，因此 $U_0(x) = U_0(x) = u_0(x)$。

4.2 验证定理

在定理 4.1 中，我们已证明带指标的倒向随机微分方程 (26)-(27) 存在唯一解，因此随机场 (29) 定义良好。本节验证，对于任意 $n = 0$、.....、m 以及 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，在 (23) 中定义的过程 $(V^{\pi,\ n}_{\cdot,t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 对于任意 $\pi \in \mathcal{A}$都是 $\mathbb{F}$-上鞅，并且在可容许策略 $\pi^* \in \mathcal{A}$下是$\mathbb{F}$-鞅。具体而言，利用 (23) 和 (28)，对于 $n = 0$、.....、m和 $\pi \in \mathcal{A}$，过程 $(V^{\pi,\ n}_{\cdot,t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 可表示为

$$\begin{aligned} &V_t^{\pi,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \\ =& -e^{-\gamma X_t^{\pi,n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})} e^{\gamma\left(Y_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \rho Y_s^j(\theta_{(j)}, l_{(j)}) ds - \int_{\theta_n}^t \rho Y_s^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) ds - Y_0\right)} \\ &- \int_E \int_{\theta_n}^t e^{-\gamma X_{\theta_{n+1}}^{\pi,n+1}(\theta_{(n+1)}, l_{(n+1)})} e^{\gamma\left(Y_{\theta_{n+1}}^{n+1}(\theta_{(n+1)}, l_{(n+1)}) - \sum_{j=0}^{n} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \rho Y_s^j(\theta_{(j)}, l_{(j)}) ds - Y_0\right)} \\ &\quad d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}),\ n = m-1, \ldots, 0, (\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n, t \geq \theta_n, \\ &V_t^{\pi,m}\left(\theta_{(m)}, l_{(m)}\right) \\ =& -e^{-\gamma X_t^{\pi,m}(\theta_{(m)}, l_{(m)})} e^{\gamma\left(Y_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)}) - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \rho Y_s^j(\theta_{(j)}, l_{(j)}) ds - \int_{\theta_m}^t \rho Y_s^m(\theta_{(m)}, l_{(m)}) ds - Y_0\right)}, \\ &\quad (\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m, t \geq \theta_m, \end{aligned} \tag{31}$$

而可容许策略集 $\mathcal{A}$ 将在下文定义。一旦确立了 $(V^{\pi,n}_{\cdot,t}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 的 $\mathbb{F}$-（超）鞅性质，根据定理 3.1 可知，对于任意 $\pi\in\mathcal{A}$，$(U_t(X^\pi_t))_{t\geq0}$ 是 $\mathbb{G}$-上鞅，而 $(U_t(X^{\pi^*}_t))_{t\geq0}$ 是 $\mathbb{G}$-鞅。因此，这就证明了 $(U_t(x))_{t\geq0,\ x\in\mathbb{R}}$ 确实是一个（指数型）前向效用。

我们将可容许策略集合定义如下。对于任意 $n=0,\dots,m$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n:=\Big\{&\pi^n\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}^m):(V^{\pi,n}_\tau(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{\tau\geq\theta_n}\text{ is }\mathbb{F}\text{-uniformly integrable}\\&\text{over }\mathbb{F}\text{-stopping times }\tau,\ \pi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Pi_n\text{ for }(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n,\ t\geq\theta_n\Big\},\end{aligned}\tag{32}$$

其中，过程 $V^{\pi,n}(\cdot,\cdot)$ 由（31）给出。一致可积条件是构造前向指数效用的一项特定要求，可确保相应的 Dol´eans-Dade 指数是 $\mathbb{F}$-鞅。

利用（32）和 Jacod-Pham 分解（8），我们将可容许集合$\mathcal{A}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:=\Big\{&\pi=(\pi_t)_{t\geq0}:\pi_t=\sum_{n=0}^{m-1}\pi^n_t(T_{(n)},L_{(n)})\mathbb{1}_{\{T_n<t\leq T_{n+1}\}}+\pi^m_t(T_{(m)},L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t>T_m\}},\\&\pi^n\in\mathcal{A}_n,\ n=0,1,\dots,m\Big\}.\end{aligned}\tag{33}$$

下面我们推导式 (31) 满足的方程，以验证其$\mathbb{F}$-(超)鞅性质。对于任意 $n=0,\dots,m-1$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，对带指标过程 (31) 应用 Itô 引理可得，对于任意 $t\geq\theta_n$，

$$\begin{aligned}&d\Bigg(\hat U^n_t\left(X^{\pi,n}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\&\quad+\int_E\int_{\theta_n}^t\hat U^{n+1}_{\theta_{n+1}}\Bigg(X^{\pi,n}_{\theta^-_{n+1}}(\theta_{(n)},l_{(n)})+\pi^n_{\theta_{n+1}}(\theta_{(n)},l_{(n)})'\beta^n_{\theta_{n+1}}(\theta_{(n)},l_{(n)},l_{n+1}),\\&\qquad\qquad\theta_{(n+1)},l_{(n+1)}\Bigg)d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})\Bigg)\\&=\hat U^n_t\left(X^{\pi,n}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\Bigg(-\gamma\rho Y^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})dt-\gamma dX^{\pi,n}_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\\&\quad+\gamma dY^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})-\gamma^2d\left\langle X^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),Y^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right\rangle_t\\&\quad+\frac{\gamma^2}{2}\left(d\langle X^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)})\rangle_t+d\langle Y^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\rangle_t\right)\Bigg)\\&\quad+\int_E\hat U^{n+1}_t\left(X^{\pi,n}_{t^-}(\theta_{(n)},l_{(n)})+\pi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})'\beta^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)},l),(\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)\right)dt\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\\&=\hat U^n_t\left(X^{\pi,n}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\Bigg[\Bigg(-\gamma\pi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})'\mu^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\\&\quad-\gamma\min_{\pi\in\Pi_n}f^n\left(t,\pi,Y^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),Z^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\&\quad-\gamma^2\pi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})'\sigma^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})Z^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\gamma^2}{2}\left(|Z_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})|^2+\left|\sigma_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2\right)\\
&+\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}\left((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)\right)-Y_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\pi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\beta_t^n\left(\theta_{(n)},l_{(n)},l\right)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\Bigg)dt\\
&+\gamma\left(Z_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\sigma_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)'dW_t\Bigg].
\end{aligned}
$$

因此，根据 $V^{\pi,n}$ 的定义（见式 (23)），对于任意 $s\geq t\geq\theta_n$,

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\pi,n}\left(\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\
=\;&V_t^{\pi,n}\left(\theta_{(n)},l_{(n)}\right)+\gamma\int_t^s\hat{U}_\tau^n\left(X_\tau^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\
&\cdot\Bigg(-\pi_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\mu_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\\
&-\min_{\pi\in\Pi_n}f^n\left(\tau,\pi,Y_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),Z_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\
&-\gamma\pi_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\sigma_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})Z_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\\
&+\frac{\gamma}{2}\left(|Z_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})|^2+\left|\sigma_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2\right)\\
&+\frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_\tau^{n+1}\left((\theta_{(n)},\tau),(l_{(n)},l)\right)-Y_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\pi_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\beta_\tau^n\left(\theta_{(n)},l_{(n)},l\right)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\Bigg)d\tau\\
&+\gamma\int_t^s\hat{U}_\tau^n\left(X_\tau^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)\\
&\cdot\left(Z_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\sigma_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'\pi_\tau^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)'dW_\tau.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

同样，当 $n=m$ 时，对于任意的 $(\theta_{(m)},l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$ 和 $s\geq t\geq\theta_m$，我们有

$$
\begin{aligned}
&V_s^{\pi,m}\left(\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\\
=\;&V_t^{\pi,m}\left(\theta_{(m)},l_{(m)}\right)+\gamma\int_t^s\hat{U}_\tau^m\left(X_\tau^{\pi,m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\\
&\cdot\Bigg(-\pi_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'\mu_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m\left(\tau,\pi,Z_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\\
&-\gamma\pi_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'\sigma_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})Z_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\\
&+\frac{\gamma}{2}\left(|Z_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})|^2+\left|\sigma_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'\pi_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right|^2\right)\Bigg)d\tau\\
&+\gamma\int_t^s\hat{U}_\tau^m\left(X_\tau^{\pi,m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\theta_{(m)},l_{(m)}\right)\\
&\cdot\left(Z_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\sigma_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'\pi_\tau^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)'dW_\tau.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

我们首先证明，对于任意 $n=0,\ldots,m$、$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 以及 $\pi\in\mathcal{A}$，$(V^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 是一个 $\mathbb{F}$-上鞅。根据 f^n 的定义以及 $\hat{U}^n$ 非正这一事实，我们可以看出，(34) 和 (35) 右侧的第一个积分均非正。因此，对于任意 $\pi\in\mathcal{A}$，过程 $(V^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 是一个 $\mathbb{F}$-局部上鞅。根据 π 的可容许性，我们知道 $(V^{\pi,n}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 是 $\mathbb{F}$-一致可积的，因此它是一个 $\mathbb{F}$-上鞅。由定理 3.1 可推知，对于任意 $\pi\in\mathcal{A}$，$(U_t(X_t^\pi))_{t\geq0}$ 是一个 $\mathbb{G}$-上鞅。

接下来，我们选择 $\pi^* \in \mathcal{A}$，使得对于任意 $n = 0, \ldots, m$ 以及 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$(V^{\pi^*,n}_{t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}))_{t \geq \theta_n}$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅。受 (34) 和 (35) 的启发，我们令 π^* 遵循如下 Jacod-Pham 分解：对于 $t \geq 0$,

$$\pi_t^* = \sum_{n=0}^{m-1} \pi_t^{*n}(T_{(n)}, L_{(n)}) \mathbb{1}_{\{T_n < t \leq T_{n+1}\}} + \pi_t^{*m}(T_{(m)}, L_{(m)}) \mathbb{1}_{\{t > T_m\}}, \tag{36}$$

其中，对每个 $n = 0, \ldots, m-1$，$\pi^{*n}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)$ 满足：对任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$,

$$\pi_t^{*n}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \arg\min_{\pi \in \Pi_n} f^n\left(t, \pi, Y_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}), Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}), \theta_{(n)}, l_{(n)}\right), \tag{37}$$

且对于 $n = m$，$\pi^{*m}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_m, E^m; \mathbb{R}^m)$ 的定义为：对任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \geq \theta_m$,

$$\pi_t^{*m}(\theta_{(m)}, l_{(m)}) = \arg\min_{\pi \in \Pi_m} f^m\left(t, \pi, Z_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)}), \theta_{(m)}, l_{(m)}\right). \tag{38}$$

π^* 的可预测性由 [9] 中的可测选择论证保证。

我们验证 $\pi^* \in \mathcal{A}$ 和 $(V^{\pi^*,n}_{t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}))_{t \geq \theta_n}$ 是 $\mathbb{F}$ 中的一致可积鞅。为此，对任意 $n = 0, \ldots, m$，利用 (34)、(35) 以及 $\pi^{*n}(\cdot, \cdot)$ 的定义可得，对任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$,

$$V_t^{\pi^*,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) = V_{\theta_n}^{\pi^*,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \mathcal{E}^n_{\theta_n,t}\left(\varphi^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right)\right),$$

其中，$\varphi^n(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\Delta_n, E^n)$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\varphi_t^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \\
:= &\frac{\gamma \hat{U}_t^n\left(X_t^{\pi^*,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right), \theta_{(n)}, l_{(n)}\right)\left(Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) - \sigma_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})' \pi_t^{n*}(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right)'}{V_t^{\pi^*,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right)} \\
&\cdot \mathbb{1}_{\{V_t^{\pi^*,n}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \neq 0\}},
\end{aligned}$$

而 $(\mathcal{E}^n_{\theta_n,t}(\varphi^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})))_{t \geq \theta_n}$ 是 Dol´eans-Dade 指数：

$$\mathcal{E}^n_{\theta_n,t}(\varphi^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})) := \exp\left(\int_{\theta_n}^t \varphi_s^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) dW_s - \frac{1}{2}\int_{\theta_n}^t \left|\varphi_s^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right|^2 ds\right).$$

按照（80）的推导过程，我们可以推知存在 $C > 0$ 使得

$$|(\sigma_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}))' \pi_t^{*n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})| \leq C\left(1 + |Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})|\right), \tag{39}$$

对于所有 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$，均成立。根据 (23) 以及 U 非正这一事实，显然有 $V^{\pi^*,n}_{t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \leq \hat{U}_t^n(X^{\pi^*,n}_{t}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \theta_{(n)}, l_{(n)}) \leq 0$。利用这一点、(39) 和假设 2.1，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right| \\
\leq &\gamma \left|\frac{\hat{U}_t^n\left(X_t^{\pi^*,n}\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right), \theta_{(n)}, l_{(n)}\right)}{V_t^{\pi^*,n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})}\right| \left(|Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})| + |(\sigma_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}))' \pi_t^{*n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})|\right)
\end{aligned}$$

$\leq \gamma(1+C)\left(1+|Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})|\right)$.

由于 $\left(\int_{\theta_n}^{\cdot} Z_s^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\right)_{t\geq 0}$ 在 $\mathbb{F}$ 下是一个 BMO鞅，Doléans-Dade 指数（$\mathcal{E}^n_{\theta_n,\ t}(\varphi^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 是一个 $\mathbb{F}$-一致可积鞅。这进一步意味着 $\pi^*\in\mathcal{A}$ 和（$V^{\pi^*,\ n}_t(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))_{t\geq\theta_n}$ 是一个 $\mathbb{F}$-一致可积鞅。根据定理 3.1，我们得到以下结论：

定理4.2。 在假设*2.1-2.3*下，由$(U_t(x))_{x\in\mathbb{R},\ t\geq 0}$ 通过(28)-(29)定义的随机场是(12)对应的前向指数效用，其可容许策略集合 $\mathcal{A}$ 由(33)给出，且最优投资策略 π^* 由(36)-(38)给出。

5 随机因子市场模型

本节中，我们考虑一个马尔可夫模型，其中模型参数（μ、σ、β）由随机因子过程 $\Phi=(\Phi_t)_{t\geq 0}$ 驱动。在第 5.1 节中，我们建立相关倒向随机微分方程的马尔可夫解，并推导出解及相关最优投资策略的界和性质，这些结果对贴现率 ρ 一致成立。在第5.2节中，我们考察贴现率趋于零时最优财富过程的长期风险敏感增长率。在第5.3节中，我们讨论利用遍历BSDE构造前向效用偏好所面临的根本挑战，并说明如何在模型参数满足额外单调性条件的情况下进行构造。

下文中，我们假设 Φ 是一个 $\mathbb{G}$-可选的 $\mathbb{R}^d$ 值过程，具有 Jacod-Pham 分解（$\Phi^1,\ldots,\Phi^m$），并由以下 SDEs 描述：对于 $t\geq 0$,

$$d\Phi_t^0(0)=g^0(\Phi_t^0(0))dt+\kappa^0(0)dW_t,$$

并且对每个 $n=1,\ldots,m$、$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $t\geq\theta_n$,

$$\begin{cases} d\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})=g^n\left(\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\theta_{(n)},l_{(n)}\right)dt+\kappa^n(\theta_{(n)},l_{(n)})dW_t, \\ \Phi_{\theta_n}^n(\theta_{(n)},l_{(n)})=\Phi_{\theta_n^-}^{n-1}(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)})+\varphi^{n-1}\left(\Phi_{\theta_n^-}^{n-1}(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)})\right). \end{cases} \tag{40}$$

这里，$g^n(\cdot,\cdot,\cdot)$：$\mathbb{R}^d\times\Delta_n\times E^n\to\mathbb{R}^d$、$\kappa^n(\cdot,\cdot)$：$\Delta_n\times E^n\to\mathbb{R}^{d\times d}$、$\varphi^n$：$\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$均为可测函数。我们对漂移系数 g^n施加以下耗散条件。

假设 5.1。 存在 $C_g>0$，使得对任意 $n=0,\ldots,m$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 以及 $\phi_1,\phi_2\in\mathbb{R}^d$,

$$\left(g^n(\phi_1,\theta_{(n)},l_{(n)})-g^n(\phi_2,\theta_{(n)},l_{(n)})\right)'(\phi_1-\phi_2)\leq -C_g|\phi_1-\phi_2|^2. \tag{41}$$

注 5.1。 g^n 上的耗散条件 (41) 蕴含以下指数遍历性：对任意 $n=0,\ldots,m$、$\phi_1,\phi_2\in\mathbb{R}^d$、$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$和$t\geq\theta_n$,

$$\left|\Phi_t^{n,\phi_1}(\theta_{(n)},l_{(n)})-\Phi_t^{n,\phi_2}(\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2\leq e^{-2C_g(t-\theta_n)}|\phi_1-\phi_2|^2, \tag{42}$$

其中 $\Phi^{n,\ \phi}_{\theta_n}(\theta_{(n)},\ l_{(n)})=\phi\in\mathbb{R}^d$的方程 (40) 的解。 □

对于任意 $t \geq T_n$，我们假设市场参数具有如下马尔可夫表示：

$$\mu_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}) = \hat{\mu}^n\left(\Phi_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})\right),\ \sigma_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}) = \hat{\sigma}^n(\Phi_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})),$$
$$\alpha_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}) = \hat{\alpha}^n(\Phi_t^n(T_{(n)}, L_{(n)})),\ \beta_t^n(T_{(n)}, L_{(n)}, l) = \hat{\beta}^n\left(\Phi_{t^-}^n(T_{(n)}, L_{(n)}), l\right), \tag{43}$$

其中，对于 $n = 0, \ldots, m$，$\hat{}\mu^n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$，$\hat{}\sigma^n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{m\times d}$，使得对于任意 $\phi \in \mathbb{R}^d$，$\hat{}\sigma^n(\phi)$ 都是满秩矩阵；$\hat{}\alpha^n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 由 $\hat{}\alpha^n(\cdot) = \hat{}\sigma^n(\cdot)'(\hat{}\sigma^n(\cdot)\hat{}\sigma^n(\cdot)')^{-1}\hat{}\mu^n(\cdot)$ 给出，且满足 $\hat{}\sigma^n(\cdot)\hat{}\alpha^n(\cdot) = \hat{}\mu^n(\cdot)$；对于 $n = 0, \ldots, m-1$，$\hat{}\beta^n\colon \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^m$。所有这些可测函数都是确定性的。请注意，在此设定中，模型参数（β^n 除外）仅通过随机因子 Φ 依赖于索引 $(\theta_{(n)}, l_{(n)})$。

在本节中，我们假设假设 2.2 成立。我们还引入以下有界性和利普希茨假设：

假设 5.2。对于任意 $n = 0$，1，……，m，

1. $\hat{}\sigma^n(\phi)$ 是满秩矩阵，且存在 $\sigma_{\min} > 0$ 使得 $|\hat{}\sigma^n(\phi)'x| \geq \sigma_{\min}|x|$ 对所有 $\phi \in \mathbb{R}^d$ 和 $x \in \mathbb{R}^m$均成立；2. $\hat{}\mu^n(\cdot)$、$\hat{}\sigma^n(\cdot)$、$\hat{}\alpha^n(\cdot)$ 有界；3. $\hat{}\sigma^n(\cdot)$、$\hat{}\alpha^n(\cdot)$ 是 Lipschitz连续的，其利普希茨常数分别为 C_σ、C_α；4. $|\kappa^n(\cdot,\cdot)| = 1$；$\hat{}$ 5. 对于 $n = 0$、……、$m-1$，$\beta^n(\cdot,\cdot)$ 和 $\varphi^n(\cdot)$ 有界且一致 Lipschitz连续，其利普希茨常数分别为 C_β 和 C_φ：对于任意 ϕ_1、$\phi_2 \in \mathbb{R}^d$ 和$l \in E$，

$$|\hat{\beta}^n(\phi_1, l) - \hat{\beta}^n(\phi_2, l)| \leq C_\beta|\phi_1 - \phi_2|,\ |\varphi^n(\phi_1) - \varphi^n(\phi_2)| \leq C_\varphi|\phi_1 - \phi_2|.$$

注 5.2：为便于阐述，我们作出假设 $|\kappa^n(\cdot,\ \cdot)| = 1$，以简化后续界的表达式。该条件可以直接以类似方式放宽。□

5.1 无限时域倒向随机微分方程与马尔可夫解

在随机因子模型下，无限时域倒向随机微分方程（26）—（27）的驱动项可写为如下形式：对任意（π，y，z）$\in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$、（$\theta_{(m)}$，$l_{(m)}$）$\in \Delta_m \times E^m$以及 $t \geq \theta_m$，

$$f^m(t, \pi, z, \theta_{(m)}, l_{(m)}) = \hat{f}^m(\pi, z, \Phi_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})) := \hat{F}_1^m(\pi, z, \Phi_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})), \tag{44}$$

并且对于任意 $n = 0, \ldots, m-1$、$(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$以及 $t \geq \theta_n$，

$$\begin{aligned} f^n(t, \pi, y, z, \theta_{(n)}, l_{(n)}) &= \hat{f}^n(t, \pi, y, z, \Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})) \\ &:= \hat{F}_1^n(\pi, z, \Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})) + \hat{F}_2^n(t, \pi, y, \Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}), \theta_{(n)}, l_{(n)}), \end{aligned} \tag{45}$$

其中对于 $\phi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{F}_1^n(\pi, z, \phi) := \frac{\gamma}{2}\left|\hat{\sigma}^n(\phi)'\pi - \left(z + \frac{\hat{\alpha}^n(\phi)}{\gamma}\right)\right|^2 - \hat{\alpha}^n(\phi)'z - \frac{|\hat{\alpha}^n(\phi)|^2}{2\gamma},$$
$$\hat{F}_2^n(t, \pi, y, \phi, \theta_{(n)}, l_{(n)}) := \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l))-y-\pi'\hat{\beta}^n(\phi,l))}\lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl).$$

根据假设 2.2、5.2 以及定理 4.1，很明显，带有驱动项 (44)-(45) 的倒向随机微分方程 (26)-(27) 存在唯一解 $(Y^n, Z^n)_{n=0}^m$，使得

$$(Y^n, Z^n) \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}) \times (\mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d)),$$

对于任意 $n = 0, \ldots, m$。此外，由下式定义的随机场 U

$$U_t(x) := \frac{-e^{-\gamma x}e^{\gamma(Y_t - \int_0^t \rho Y_s ds - Y_0)}}{\hat{\eta}_t},\ x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

其中，Y 和$\hat{}\eta$ 分别如 (25) 以及 (14) & (30) 所定义，是一种前向指数偏好。随机因子模型的遍历性使我们能够进一步以马尔可夫形式表示无限时域倒向随机微分方程的解，并具有更强的有界性，如下文所述。

我们首先给出 $\mathcal{S}(\Delta_n, E^n)$ 中解 (Y^n, Z^n) 的一个界。回顾命题 4.1，我们已经证明，对于任意 $n = 0, \ldots, m$，$|Y_t^n(\cdot, \cdot)| \leq K_Y/\rho$。在下述定理 5.1 中，我们利用漂移项 g^n 的耗散条件，给出 $\mathcal{S}(\Delta_n, E^n)$ 中 Z^n 的一个关于 $\rho > 0$ 一致的界。为此，我们引入以下假设，用于推导倒向随机微分方程驱动项关于随机因子的局部利普希茨连续性。

假设 5.3。对于 $n = 0, \ldots, m$，$\Pi_n \subseteq \mathbb{R}^m$ 是紧集。特别地，存在 $C_\Pi > 0$，使得对任意 $\pi \in \cup_{n=0}^m \Pi_n$，都有 $|\pi| \leq C_\Pi$。

在假设 5.2 和假设 5.3 下，容易验证存在$C_\phi > 0$，使得对任意 $n = 0, \ldots, m$，$\pi \in \Pi_n$和 $z, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|\hat{F}_1^n(\pi, z, \phi_1) - \hat{F}_1^n(\pi, z, \phi_2)\right| \leq C_\phi(1 + |z|)|\phi_1 - \phi_2|. \tag{46}$$

事实上，利用$\hat{}\alpha^n$,$\hat{}\sigma^n$的有界性和一致Lipschitz性质，以及 $|\pi| \leq C_\Pi$这一事实，可得

$$\begin{aligned}&\left|\hat{F}_1^n(\pi, z, \phi_1) - \hat{F}_1^n(\pi, z, \phi_2)\right| \\ &\leq \left[\gamma\Big(C_\sigma C_\Pi + \tfrac{C_\alpha}{\gamma}\Big)\Big(C_\Pi K_\sigma + \tfrac{K_\alpha}{\gamma}\Big) + \tfrac{C_\alpha K_\alpha}{\gamma} + \Big(C_\sigma C_\Pi + \tfrac{C_\alpha}{\gamma} + C_\alpha\Big)|z|\right]|\phi_1 - \phi_2|,\end{aligned}$$

其中，$K_\alpha, K_\sigma > 0$分别是 $\hat{}\alpha^n$ 和 $\hat{}\sigma^n$, $n = 0, \ldots, m$的一致界。因此，我们可以选取 $C_\phi = C_\phi(C_\Pi)$如下

$$C_\phi := \max\left\{\gamma\left(C_\sigma C_\Pi + \frac{C_\alpha}{\gamma}\right)\left(C_\Pi K_\sigma + \frac{K_\alpha}{\gamma}\right) + \frac{C_\alpha K_\alpha}{\gamma}, C_\sigma C_\Pi + \frac{C_\alpha}{\gamma} + C_\alpha\right\}. \tag{47}$$

我们还对常数 C_ϕ 和 C_g作出如下假设。

假设 5.4。 常数 $C_g, C_\phi > 0$ 满足 $C_g - C_\phi > 0$，其中 C_ϕ 在式 (47) 中定义。

定理 5.1。 在假设 *5.1-5.4* 下，具有驱动项 (44)-(45) 的无限时域倒向随机微分方程(26)-(27)系统存在唯一的有界马尔可夫解。也就是说，对于任意 $n = 0, \ldots, m$，存在可测函数 y^n: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 和 z^n: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得对于任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq \theta_n$，

$$Y_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = y^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})) \quad and \quad Z_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = z^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})).$$

此外，对于任意 $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^d$，有

$$|y^n(\phi)| \leq \frac{K_Y}{\rho},\ |z^n(\phi)| \leq K_{Z^n},\ |y^n(\phi_1) - y^n(\phi_2)| \leq K_{Z^n}|\phi_1 - \phi_2|, \tag{48}$$

其中， $K_Y > 0$ 由命题 *4.1* 给出，且

$$K_{Z^n} := \frac{C_\phi(1 + C_\varphi)^{m-n}}{C_g - C_\phi} + C_\Pi C_\beta \sum_{j=0}^{m-n-1} (1 + C_\varphi)^j.$$

证明。 参见附录C.1。 □

注 5.3。 定理 5.1 的证明借鉴了文献 [30] 中状态转换模型下倒向随机微分方程多维比较定理的证明方法。然而，由于三个主要原因，该结果不能直接应用于我们的可违约市场情形。首先，本文考虑的倒向随机微分方程以单向方式关联： Y^n 依赖于 Y^{n+1}，但反之不然；而在状态转换模型中，倒向随机微分方程以闭环结构相互作用。其次，我们框架中的倒向随机微分方程采用了不同的索引方式，这使得建立解之间的一致有界性时还会产生额外差异。第三，违约情形下的倒向随机微分方程对受控跳跃幅度 $\pi' \hat{} \beta^n(\phi, l)$ 呈指数依赖。因此，不能像在机制切换情形下那样，仅依赖驱动项的二次距离结构。□

接下来，我们将证明相邻无限时域倒向随机微分方程的解之差存在一个关于 ρ 一致的单侧界。为此，我们需要以下假设，它使我们能够对 $F_2^n, n = 0, \ldots, m-1$中出现的指数项进行界定：

假设5.5。 存在 $D_g > 0$，使得对所有 $n = 1, \ldots, m$，

$$\sup_{\phi \in \mathbb{R}^d, (\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n} |g^n(\phi, \theta_{(n)}, l_{(n)}) - g^{n-1}(\phi, \theta_{(n-1)}, l_{(n-1)})| < D_g < \infty.$$

注 5.4。 与状态转换框架相比，过程 Y^n和 Y^{n-1} 定义在不同的指标集上（前者对应 $\Delta_n \times E^n$，后者对应 $\Delta_{n-1} \times E^{n-1}$）。因此，这些过程分别由在不同随机因子处取值的相应马尔可夫函数给出（前者为 $\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})$，后者为$\Phi_t^{n-1}(\theta_{(n-1)}, l_{(n-1)})$）。接着，利用假设5.5来控制由随机因子不同所导致的 Y^n 和 Y^{n-1} 之间的差异。举一类例子，若 $g^n(\phi, \theta_{(n)}, l_{(n)}) = g(\phi) + \bar{g}^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})$，其中 g: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 满足 (41)，且 $\bar{g}^n$: $\Delta_n \times E^n \to \mathbb{R}^d$ 有界，则假设5.5成立。□

命题 5.1。 假设假设 5.1–5.5成立。那么，对于任意 n =1、.....、 m,

$$Y_t^n\left((\theta_{(n-1)},t),(l_{(n-1)},l)\right)-Y_t^{n-1}\left(\theta_{(n-1)},l_{(n-1)}\right)\leq K_{\Delta Y^n} \tag{49}$$

对所有（$\theta_{(n-1)}$， $l_{(n-1)}$， l） $\in\Delta_{n-1}\times E^{n-1}\times E$、 $t\geq\theta_{n-1}$和 $\rho>0$，其中

$$K_{\Delta Y^n}:=\gamma e^{C_\Pi K_\beta}C_n-1+K_{Z^n}\left[2K_\varphi+\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{C_\Pi K_\beta}{2}}\sqrt{C_g^{-1}D_g^2+4}\right],$$

$\hat{}K_\varphi:=$ 最大值$_{n=0,\ .....,\ m-1}\|\varphi^n\|$, $K_\beta:=$ 最大值$_{n=0,\ .....,\ m-1}\|\beta^n\|$, 以及

$$C_m=\frac{\gamma}{2}(K_{Z^m})^2,\ C_n=\frac{\gamma}{2}(K_{Z^n})^2+\frac{1}{\gamma}e^{\gamma K_{\Delta Y^{n+1}}},\ n=0,\ldots,m-1.$$

证明。 见附录 C.2。 □

$\hat{}$ 根据命题 5.1，对于 $n=0,\ .....,\ m-1$，无限时域倒向随机微分方程的驱动项 F_2^n中的指数有一个与 ρ无关的上界常数，因此其指数项以及驱动项 F_2^n 本身关于 ρ也都有一致上界。利用这一对 ρ一致的估计，可以证明最优投资策略始终有界，因此在以下条件下自动满足假设 5.3:

假设 5.6。 存在 $C_\Pi\in(0,C_g)$，使得对于 $n=0,..,m$,

$$\sigma_{\min}C_\Pi\geq\frac{\sqrt{2}}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{2}K_{\Delta Y^{n+1}}}\mathbb{1}_{\{n\neq m\}}+\frac{2\|\hat{\alpha}^n\|}{\gamma}+2K_{Z^n},\ C_g\geq C_\phi, \tag{50}$$

其中，常数 $K_{Z^n},K_{\Delta Y^n}$,分别在定理 5.1 和命题 5.1 中定义，它们直接依赖于 C_Π，也通过式（47）中定义的 C_ϕ 依赖于 C_Π。

注 5.5。 注意， $K_{\Delta Y^n}$ 和 K_{Z^n} 通过 $1/$依赖于 C_Π；式（47）中的 C_g-C_ϕ、 $C_\Pi C_\beta$、$C_\Pi K_\beta$ 和 $C_\phi=C_\phi(C_\Pi)$ 是关于 C_Π的非递减函数。因此，当 C_g 较大、 C_β和 K_β较小时，可以满足假设 5.6。□

定理 5.2。 在假设 *5.1*、*5.2*、*5.4*、*5.5* 和 *5.6* 下，带有驱动项 (44)-(45)的无限时域倒向随机微分方程(26)-(27) 的马尔可夫解$(y^n(\cdot)\ z^n(\cdot))_{n=0}^m$ 满足估计式(48) 和(49)。此外，对于所有 $n=0,\ \ldots,m$，最优投资策略满足 $|\pi_t^{*n}(\theta_{(n)},l_{(n)})|\leq C_\Pi$； $\theta_{(n)})$ $\in\Delta_n\times E^n$、 $t\geq\theta_n$和 $\rho>0$，其中 C_Π 满足(50)。

证明。 参见附录 C.3。 □

备注 5.6。 根据定理 5.2 的证明中使用的归纳论证，只要 (50) 对 $n\geq k$ 成立（而非如定理要求的对每个 $n=0,\ldots,m$ 成立），估计式 (48) 和 (49) 对所有 $n=k,..,m$ 仍然成立，其中 $k\leq m$。

5.2 风险敏感增长率

本小节通过考察长期行为，并在贴现率 $\rho \to 0$ 时，提出一种风险敏感增长率。为此，我们将引入一个遍历BSDE，作为驱动项为 (44) 的无限时域BSDE (26) 在 $n = m$ 时的极限，并通过 $\rho \to 0$ 利用定理 5.1 的解 (y^m, z^m)。下文中，我们使用上标 ρ 来强调相关函数或过程对 ρ 的依赖。例如，我们将写作 $Y^{n,\rho}$，表示贴现率为 ρ 时的 Y^n。

固定 $\hat{\phi}_m \in \mathbb{R}^d$，并通过 $\bar{y}^{m,\rho}(\phi) := y^{m,\rho}(\phi) - y^{m,\rho}(\hat{\phi}_m)$ 定义 $\bar{y}^{m,\rho} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。根据定理 5.1，尤其是式 (48)，我们看到 $\bar{y}^{m,\rho}(\cdot)$ 关于 ρ 一致地满足以下线性增长和 Lipschitz条件：对任意 $\rho > 0$，以及 ϕ，ϕ_1，$\phi_2 \in \mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned} &|\bar{y}^{m,\rho}(\phi)| \le K_{Z^m}|\phi - \hat{\phi}_m| \le K_{Z^m}(|\phi| + |\hat{\phi}_m|), \\ &|\bar{y}^{m,\rho}(\phi_1) - \bar{y}^{m,\rho}(\phi_2)| \le K_{Z^m}|\phi_1 - \phi_2|. \end{aligned} \tag{51}$$

对于任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \ge \theta_m$，定义过程 $\bar{Y}^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) := Y^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) - y^{m,\rho}(\hat{\phi}_m) = \bar{y}^{m,\rho}(\Phi^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}))$。由式 (26) 可知，$\bar{Y}^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})$ 满足以下无限时域BSDE：

$$\begin{aligned} &d\bar{Y}^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \\ &= \Bigg(\rho y^{m,\rho}(\hat{\phi}_m) + \rho \bar{Y}^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) - \min_{\pi \in \Pi_m} \hat{f}^m\left(\pi, Z^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}), \Phi^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})\right) \\ &\quad + Z^{m,\rho}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})' dW_t, \end{aligned} \tag{52}$$

其中驱动项由式 (44) 给出。

根据 (48) 式，$|\bar{y}^{m,\rho}(\phi)| \le K_{Z^m}|\phi| + |y^{m,\rho}(\hat{\phi}_m)|$。并采用标准对角线论证，根据一致线性增长性质 (51)，存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，满足 $\rho_i \downarrow 0$，一个常数 $\varrho_m \in \mathbb{R}$，以及一个函数 $\bar{y}^m(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得对于稠密子集 $\mathbb{R}^d$ 中的 ϕ，

$$\lim_{i \to \infty} \rho_i y^{m,\rho_i}(\hat{\phi}_m) = \varrho_m, \ \lim_{i \to \infty} \bar{y}^{m,\rho_i}(\phi) = \bar{y}^m(\phi). \tag{53}$$

根据一致Lipschitz性质 (51)，收敛可以扩展到整个定义域 $\mathbb{R}^d$。这表明存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，$\rho_i \downarrow 0$，使得对于任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$，以及 $t \ge \theta_m$，

$$\lim_{i \to \infty} \bar{Y}^{m,\rho_i}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) = \bar{y}^m\left(\Phi^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})\right) =: \mathcal{Y}^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}).$$

同样，根据定理 5.1 中的 (48)，利用 $z^{m,\rho}$ 关于 ρ 的一致有界性，可以标准地证明存在一个函数 $\bar{z}^m(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得对于任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$，以及 $t \ge \theta_m$，

$$\lim_{i \to \infty} Z^{m,\rho_i}_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) = \bar{z}^m(\Phi^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})) =: \mathcal{Z}^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}).$$

由（52）可知，元组 $(\mathcal{Y}^m, \mathcal{Z}^m, \varrho_m)$ 因而是下列带指标的遍历型反向随机微分方程在 $n = m$ 处的解：对于 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \ge \theta_m$，

$$\begin{aligned} d\mathcal{Y}^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) = &\left(\varrho_m - \min_{\pi \in \Pi_m} \hat{f}^m\left(\pi, \mathcal{Z}^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}), \Phi^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})\right) \right) dt \\ &+ \mathcal{Z}^m_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})' dW_t, \end{aligned} \tag{54}$$

其中驱动项由（44）给出。下一小节将讨论遍历BSDE（54）解的唯一性。

遍历BSDE (54) 的解分量 ϱ_m 是风险敏感增长率。下面解释其经济含义。首先，我们有以下引理；通过李雅普诺夫型论证可知，该引理不仅对 $n = m$成立，也对任意 $n = 0, \ldots, m$成立。

引理 5.1. 假设假设 5.1、5.2 和 5.5 成立。那么，对任意 $c > 0$，存在 $K_c > 0$，使得对任意 $n = 0, \ldots, m$，$(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，且$t \geq \theta_n$,

$$\mathbb{E}\left[e^{c|\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})|}\right] \leq K_c, \ \mathbb{E}\left[e^{-c|\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})|}\right] \geq \frac{1}{K_c} > 0.$$

证明。 参见附录 C.4。 □

接下来，我们引入以下假设。

假设 5.7. 对任意 $t \geq 0$，存在可测函数 $h_t(\cdot, \cdot)$ $H_t(\cdot, \cdot) : \Delta_m \times E^m \to \mathbb{R}_+$（即，对任意 $t \geq 0$，$(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mapsto h_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})$ 和 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mapsto H_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})$ 都是 $\mathcal{B}(\Delta_m) \otimes \mathcal{B}(E^m)$-可测的），使得对任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$, $h_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \leq \eta_t(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \leq H_t(\theta_{(m)}, l_{(m)})$。此外，这些函数满足

$$\begin{aligned} &\sup_{T>0} \int_{\Delta_m \times E^m} H_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mathbb{1}_{\{T \geq \theta_m\}} d\theta_{(m)} \boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)}) < \infty, \\ &\inf_{T>0} \int_{\Delta_m \times E^m} h_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mathbb{1}_{\{T \geq \theta_m\}} d\theta_{(m)} \boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)}) > 0. \end{aligned} \tag{55}$$

假设 5.7 允许我们通过分别处理密度和指数效用的贡献，来估计涉及密度与指数效用的期望。具体而言，密度根据其给定的增长界 (55) 进行处理，而指数因子则由引理 5.1 单独估计。

命题 5.2. 假设假设 5.1、5.2、5.5 和 5.7 成立，并且对于 $n = m$，(50) 成立，或假设 5.3–5.4 均成立。则存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，满足 $\rho_i \to 0$，使得

$$\varrho_m = \lim_{T \to \infty} \lim_{i \to \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*, \rho_i} - X_{T_m}^{\pi^*, \rho_i}\right)} \middle| \mathbb{1}_{\{T \geq T_m\}} \right],$$

其中 X^{π^*, ρ_i} 表示最优财富过程，该过程采用最优投资策略 π^*；该策略通过无限时域倒向随机微分方程 (26)（驱动项为 (44)）的解 $(Y^{m, \rho_i}, Z^{m, \rho_i})$，依赖于贴现率 ρ_i。

证明。参见附录 C.5。 □

术语 $e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*, \rho_i} - X_{T_m}^{\pi^*, \rho_i}\right)}$ 表示从第 m次违约时刻 T_m 到期限 T之间财富增量的风险敏感指数变换。当期限 T 趋于无穷时，极限 ϱ_m 衡量了投资者财富在第 m次违约之后的渐近风险敏感（确定性等价）增长率，其中 $\rho_i \to 0$。它反映了违约事件对长期风险调整后绩效的影响。

5.3 利用遍历倒向随机微分方程构造前向业绩过程

在上一小节中，我们证明了当 $n=m$时，可由无限时域BSDE (26)得到相应遍历BSDE (54)的解，其驱动项由(44)给出。本节讨论 $n=0$，1，...，$m-1$的情形，并由此通过遍历BSDE系统构建具有多次违约的前向指数效用，其中包括 $n=0$，1，...，m。

当 $n=m$ 时，倒向随机微分方程 (26) 的驱动项 (44) 不依赖于下一次违约事件之后倒向随机微分方程的解，因为在这种情况下所有违约事件均已发生。因此，根据 (48) 和 (51)，可以采用对角线论证构造序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，其中 $\rho_i \to 0$，以建立 $\bar{y}^{m,\rho_i}$ 相对于固定参考点的收敛性。其中，$\hat{\phi}_m \in \mathbb{R}^d$ 仅作为 $n=m$ 时方程 (26) 的固定参考点，而不作为 $n=0$ 1，.....，$m-1$ 时其他方程 (27) 的固定参考点。

为了讨论遍历倒向随机微分方程系统，包括 $(\phi)=0$ 1，...，m，可以固定其中 $n=0$，1，.....，m，$\rho>0$，且 $\phi \in \mathbb{R}^d$。$y^{n,\rho}$ 关于 ρ 的一致利普希茨连续性和线性增长性质由 $\bar{y}^{n,\rho}$ 继承，因此可以应用对角线论证，对每个 $n=0$，1，.....，m，得到子列收敛。然而，对于 $n=0$，1，.....，$m-1$，相应的过程 $\bar{Y}^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}) := \bar{y}^{n,\rho}(\Phi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)}))$，对于 $(\theta_{(n)},l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 且 $t \geq \theta_n$，将满足：

$$
\begin{aligned}
&d\bar{Y}^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}) \\
&= \Bigg(\rho y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n) + \rho\bar{Y}^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}) - \min_{\pi\in\Pi_n}\Bigg\{\hat{F}^n_1\left(\pi, Z^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)}), \Phi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})\right) \\
&\quad + \frac{e^{\gamma(y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n))}}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(\bar{Y}^{n+1,\rho}_t((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l))-\bar{Y}^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)})-\pi'\hat{\beta}^n(\Phi^n_{t-}(\theta_{(n)},l_{(n)}),l)\right)} \\
&\quad \lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\Bigg\}\Bigg)dt + Z^{n,\rho}_t(\theta_{(n)},l_{(n)})'dW_t;
\end{aligned}
\tag{56}
$$

本文中，尽管根据命题 5.1，$y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1}) - y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n)$ 关于 ρ 一致有上界，但由于缺少关于 ρ 的一致下界，该项可能趋于负无穷，从而导致项 $e^{\gamma(y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n))}$ 退化为零，当 $\rho \to 0$ 时便是如此。在这种情况下，所得的遍历倒向随机微分方程系统，对于 $n=0$，1，...，m，其解在相邻违约时间区间之间不会相互耦合，因此无法构造一致的前向绩效过程。

于是，可以通过固定一个与指标 $n=0$，1，...，m 无关的公共参考点 $\hat{\phi}_0 \in \mathbb{R}^d$ 来尝试构造解。接着，考虑扰动 $\bar{y}^{n,\rho}(\phi) := y^{n,\rho}(\phi) - y^{0,\rho}(\hat{\phi}_0)$，其中 $n=0$，1，...，m，$\rho>0$，且 $\phi \in \mathbb{R}^d$。尽管 $y^{n,\rho}$ 的关于 ρ 一致的利普希茨连续性可由 $\bar{y}^{n,\rho}$ 继承，但它不满足关于 ρ 一致的线性增长性质；事实上，命题 5.1 仅能推出 $y^{n,\rho}(\phi+\varphi^{n-1}(\phi)) - y^{n-1,\rho}(\phi)$ 的上界，其中 $n=1$，...，m，$\rho>0$，且 $\phi \in \mathbb{R}^d$，但缺少 $y^{n,\rho}$ 与 $y^{n-1,\rho}$ 之间连续差值关于 ρ 一致的双侧界。因此，实际上无法调用对角线论证来建立所需的子列收敛。

这些观察表明，有必要为差值 $y^{n+1,\,\rho}-y^{n,\,\rho}$ 建立关于 ρ 一致的下界，其中 $n=0,\,1,\,\ldots,\,m-1$。与 [30], 的状态转换情形不同，由于此处倒向随机微分方程系统中的单向依赖性，倒向随机微分方程的对称性不复存在，这使得无法使用 [30] 中的方法来建立这样的下界；另见命题 5.1。因此，下文将提出一种前向绩效过程的构造方法，并对违约区间内的模型参数施加额外的单调性条件，以解决这一结构性问题。

假设 5.8。 对于任意 $n=0,\ldots,m-1$ 和 $\phi\in\mathbb{R}^d$，我们要求 $\hat{\pi}^n(\phi)\in\Pi_n$，其中 $\hat{\pi}^n(\phi)=\hat{\sigma}^n(\phi)[\hat{\sigma}^n(\phi)'\hat{\sigma}^n(\phi)]^{-1}\hat{\alpha}^n(\phi)/\gamma$。此外，对于任意 $\phi_1,\phi_2\in\mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned}\frac{|\hat{\alpha}^n(\phi_1)|^2}{2\gamma}\geq\frac{|\hat{\alpha}^{n+1}(\phi_2)|^2}{2\gamma}+\frac{\gamma(K_{Z^n})^2}{2}+|\hat{\alpha}^n(\phi_1)-\hat{\alpha}^{n+1}(\phi_2)|K_{Z^n}\\+(K_{Z^n}+K_{Z^{n+1}})|\hat{\alpha}^{n+1}(\phi_2)|.\end{aligned}\tag{57}$$

注 5.7。 根据 (91)，当C_g 和 C_β 分别足够大和足够小时，常数 K_{Z^n} 和 $K_{Z^{n+1}}$ 可以任意小。在这种情况下，(57)可视为关于风险溢价的单调关系。□

命题 5.3。 假设假设 5.1、5.2、5.5 和 5.8 成立，且假设 5.6 或假设 5.3–5.4 均成立。那么，存在一个非负序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，$\rho_i\to 0$，使得对于参考点 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_n)_{n=0}^m$，

$$\lim_{i\to\infty}e^{\gamma(y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n))}>0,$$

对所有 $n=0$、……、$m-1$。

证明。 参见附录 C.6。 □

利用命题 5.3 中确立的统一下界，我们通过扰动方法构造一个具有公共参考点的遍历倒向随机微分方程系统，如下所示。给定 $\hat{\phi}_0\in\mathbb{R}^d$，我们定义 $\bar{y}^{n,\,\rho}(\phi):=y^{n,\,\rho}(\phi)-y^{0,\,\rho}(\hat{\phi}_0)$，其中 $n=0,\,1,\ldots\ldots,\,m$、$\rho>0$ 和 $\phi\in\mathbb{R}^d$。显然，$\bar{y}^{n,\,\rho}$ 关于 ρ 是一致全局 Lipschitz 的：对于任意 $n=0$、1、……、m、ϕ_1、$\phi_2\in\mathbb{R}^d$ 和 $\rho>0$,

$$|\bar{y}^{n,\rho}(\phi_1)-\bar{y}^{n,\rho}(\phi_2)|\leq K_{Z^n}|\phi_1-\phi_2|.$$

此外，存在 $C>0$ 和一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$、$\rho_i\to 0$，使得对于任意 $n=0$、……、m、$i\in\mathbb{N}$ 和 $\phi\in\mathbb{R}^d$,

$$|\bar{y}^{n,\rho_i}(\phi)|\leq C(1+|\phi|).\tag{58}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 为了说明这一点，固定 $\boldsymbol{\phi}:=(\phi_n)_{n=0}^m$，并利用命题 5.3，对于任意 $C>0$，存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，$\rho_i\to 0$，使得对于任意 $i\in\mathbb{N}$ 和 $n=0,\ldots,m-1$,

$$y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n)\geq -C.$$

此外，利用命题 5.1,

$$\begin{aligned}y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n)&=y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))\\&\quad+y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n)\end{aligned}$$

$$\leq K_{Z^{n+1}}|\hat{\phi}_{n+1}-(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))|+K_{\Delta Y^{n+1}}.$$

因此，对于给定的序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$，任意 $n=0,\ldots,m$ 和 $\phi\in\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}|\bar{y}^{n,\phi}(\phi)| &= \left|y^{n,\rho_i}(\phi)-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n)+\sum_{j=1}^{n}\left[y^{j,\rho_i}(\hat{\phi}_j)-y^{j-1,\rho_i}(\hat{\phi}_{j-1})\right]\right| \\ &\leq K_{Z^n}|\phi-\hat{\phi}_n|+\sum_{j=1}^{n}\left|y^{j,\rho_i}(\hat{\phi}_j)-y^{j-1,\rho_i}(\hat{\phi}_{j-1})\right| \\ &\leq C(1+|\phi|),\end{aligned}$$

对于某个独立于 i 的 $C>0$ 。

采用与命题 5.3 的证明中构造 $n=m$ 时遍历BSDE (54) 的解，以及构造 $n=0$，1，……，$m-1$ 时遍历倒向随机微分方程的解相同的论证，我们可以得出：存在 $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $(\rho_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $\rho_{i_k}\to 0$，一个常数 $\varrho\in\mathbb{R}$，函数 $\bar{y}^n(\cdot):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$（$n=0$，……，$m$），以及函数 $\bar{z}^n(\cdot):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$（$n=0$，……，$m$），使得对于任意 $n=0$，……，m、$\phi\in\mathbb{R}^d$,

$$\lim_{k\to\infty}\rho_{i_k}y^{0,\rho_{i_k}}(\hat{\phi}_0)=\varrho\in\mathbb{R},\ \lim_{k\to\infty}\bar{y}^{n,\rho_{i_k}}(\phi)=\bar{y}^n(\phi),\ \lim_{k\to\infty}z^{n,\rho_{i_k}}(\phi)=\bar{z}^n(\phi),$$

并且 $\bar{y}^n$ 是Lipschitz连续的，且满足线性增长条件。此外，对于 $n=0$，……，m，$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，以及 $t\geq\theta_n$，记 $\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}):=\bar{y}^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))$，以及 $\mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}):=\bar{z}^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))$，它们是以下遍历倒向随机微分方程的解：在 $n=m$ 处，对于 $(\theta_{(m)},\ l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$，且 $t\geq\theta_m$,

$$\begin{aligned}d\mathcal{Y}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}) &= \left(\varrho-\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right)dt \\ &\quad+\mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'dW_t,\end{aligned}\tag{59}$$

其中驱动项由式（44）给出；对于 $n=0$，1，……，$m-1$，$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，以及$t\geq\theta_n$,

$$\begin{aligned}d\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}) &= \Bigg(\varrho-\min_{\pi\in\Pi_n}\Bigg\{\hat{F}_1^n\left(\pi,\mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right) \\ &\quad+\frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(\mathcal{Y}_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l))-\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\pi'\hat{\beta}^n(\Phi_{t-}^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),l)\right)} \\ &\quad\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\Bigg\}\Bigg)dt+\mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})'dW_t,\end{aligned}\tag{60}$$

其中驱动项由式（45）给出。

遍历BSDE系统（59）—（60）存在如下所示的唯一解。

定理 5.3。假设假设 *5.1*、*5.2*、*5.5* 和 *5.8* 成立，且假设 *5.6* 或假设 *5.3–5.4* 均成立。那么，遍历*BSDE*系统 (59)-(60) 存在唯一的马尔可夫解

$$\left((\mathcal{Y}^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\mathcal{Z}^n(\theta_{(n)},l_{(n)}))_{n=0}^m,\varrho\right)=\left((\bar{y}^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})),\bar{z}^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})))_{n=0}^m,\varrho\right),$$

使得每个 $n=0,\ldots,m$ 和 $\phi_n\in\mathbb{R}^d$, $|\bar{y}^n(\phi_n)|\le C(1+|\phi_n|)$ 以及 $|\bar{z}^n(\phi_n)|\le C$均对应某个 $C>0$，且函数 $\bar{y}^n(\cdot)$ 在相差一个加法常数的意义下唯一。

证明。 见附录 C.7。 □

备注 5.8。 由于遍历BSDE (59) 与系统的其余部分相互解耦，在假设 5.1、5.2、5.5 以及针对 $n=m$ 的条件 (50) 或假设 5.3–5.4 下，其解（在 $\mathcal{Y}^m$ 分量上相差一个加法常数）的唯一性得以保证。□

备注 5.9。 由解的唯一性，(54) 和 (59) 中的遍历常数相同；即 $\varrho_m=\varrho_\circ$。□

利用遍历倒向随机微分方程 (59)-(60)，我们可以构造一个随机场 $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_t(x))_{x\in\mathbb{R},t\ge0}$，其定义如下：

$$\mathcal{U}_t(x)=\sum_{n=0}^{m}\mathcal{U}_t^n\left(x,T_{(n)},L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}}+\mathcal{U}_t^m\left(x,T_{(m)},L_{(m)}\right)\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}},\tag{61}$$

其中，对于 $n=0,\ldots,m$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 以及 $t\ge\theta_n$，

$$\mathcal{U}_t^n\left(x,\theta_{(n)},l_{(n)}\right)=\frac{1}{\hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})}e^{-\gamma x}e^{\gamma\left(\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\mathcal{Y}_0-\varrho t\right)}.\tag{62}$$

按照第 4.2 节中的相同论证，可以直接验证，上述定义的随机场 $\mathcal{U}$ 是一个前向指数效用：

定理 5.4. 假设假设 *5.1*、*5.2*、*5.5* 和 *5.8* 成立，且假设 *5.6* 或假设 *5.3–5.4* 同时成立。则由(61)-(62) 定义的随机场$(\mathcal{U}_t(x))_{x\in\mathbb{R},t\ge0}$ 是在因子模型(40)-(43)下对应(12)的前向指数效用，其可容许策略集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\Bigg\{&\pi=(\pi^n)_{n=0}^m:\pi^n\in\mathcal{P}_{\mathbb{F}}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}^m),\ \pi_t^n(\cdot,\cdot)\in\Pi_n,\\&\int_{\theta_n}^{\cdot}\hat{\sigma}^n(\Phi_s^n(\theta_{(n)},l_{(n)}))'\pi_s^n(\theta_{(n)},l_{(n)})dW_s\ \textit{is an }\mathbb{F}\textit{-BMO martingale}\\&\textit{for any }(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n,\ n=0,\ldots,m\Bigg\}.\end{aligned}$$

最优投资策略 $\pi^*=(\pi^{n*}(\cdot,\cdot))$ 在 $n=m$ 时，对$(\theta_{(m)},l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$, $t\ge\theta_m$,由下式给出

$$\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})=\operatorname*{arg\,min}_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right);$$

对于 $n=0$、1、.....、$m-1$、$(\theta_{(n)}$、$l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$、$t\ge\theta_n$,

$$\begin{aligned}\pi_t^{*n}(\theta_{(n)},l_{(n)})=\operatorname*{arg\,min}_{\pi\in\Pi_n}\Bigg\{&\hat{F}_1^n\left(\pi,\mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),\Phi_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)\\&+\frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(\mathcal{Y}_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l))-\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)},l_{(n)})-\pi'\hat{\beta}^n(\Phi_{t-}^n(\theta_{(n)},l_{(n)}),l)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\Bigg\}.\end{aligned}$$

同样，在下文的命题 5.4 中，遍历常数 ϱ 可解释为最优投资策略下财富过程的风险敏感增长率，其中前向绩效过程是通过遍历 BS- DEs (59)-(60) 构造的。该结果可通过与命题 5.2 类似的论证得出，因此省略证明。

命题 5.4。 假设假设 5.1、5.2、5.5、5.7 和 5.8 成立，且假设 5.6 或假设 5.3–5.4 均成立。那么，

$$\varrho = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*} - X_{T_m}^{\pi^*}\right)} \middle| \mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}} \right],$$

其中， X^{π^*} 是采用由式（61）给出的前向指数效用时，在最优投资策略 π^* 下的财富过程。

6 总结

本文采用 Jacod-Pham 分解，通过一系列带指标的 $\mathbb{F}$-可选无限时域倒向随机微分方程，刻画指数前向偏好。通过将截断论证与倒向随机微分方程的比较原理相结合，我们证明了这些倒向随机微分方程的解存在且唯一，并建立了其一致有界性，同时验证了前向绩效过程所需的（超）鞅性质。该框架还得出了与所提出偏好相对应的最优投资策略。

我们还将分析推广到随机因子模型。在该因子模型下，我们建立了无限时域倒向随机微分方程解的一系列一致估计，其中包括对不同违约区间和指标下解分量偏差的上界估计。我们指出，在连续差值缺乏一致下界时，利用遍历倒向随机微分方程构造前向指数效用所面临的结构性挑战，并提出一种可能解决这一问题的单调性条件。在这一条件及所得估计的基础上，我们证明无限时域倒向随机微分方程系统收敛到遍历BSDE系统。未来研究可进一步探讨，是否存在其他技术能够彻底克服这一单向依赖挑战。

参考文献

[1] Aksamit, A., and Monique, J. 从金融角度看滤过扩张。Springer 国际出版公司，2017年。[2] Angoshtari, B. 完备市场中的可预测前向绩效过程。《概率、不确定性与定量风险》*8*，2（2023年），141–176。[3] Angoshtari, B., and Duan, S. 秩依赖的可预测前向绩效过程。《概率、不确定性与定量风险》*9*，2（2024年），181–218。[4] Angoshtari, B., Zariphopoulou, T., and Zhou, X. Y. 可预测前向绩效过程：二项情形。*SIAM* 控制与优化杂志 *58*，1（2020年），327–347。

[5] Anthropelos, M. 前瞻指数型绩效：定价与最优风险分担。SIAM金融数学杂志 5，1（2014年），626–655。[6] Anthropelos, M., Blontzou, E., and Zariphopoulou, T. 随机变化市场与演变时域中的时间一致养老基金管理。预印本。[7] Anthropelos, M., Geng, T., and Zariphopoulou, T. 基金管理竞争与前瞻相对绩效准则。SIAM金融数学杂志 13，4（2022年），1271–1301。[8] Avanesyan, L., Shkolnikov, M., and Sircar, R. 随机因子模型中一类前向绩效过程的构造及Widder定理的推广。《金融与随机学》24，4（2020年），981–1011。[9] Benes, V. E. 一类随机决策问题中基于指定信息的最优策略的存在性。SIAM 控制与优化杂志 8（1970年），179–188。[10] Bernard, C., and Kwak, M. 养老基金热门投资策略的动态偏好。斯堪的纳维亚精算杂志 2016，5（2016年），398–419。[11] Bo, L., and Capponi, A. 传染风险下信用衍生品投资组合的最优投资。《数学金融》26，4（2016年），785–834。[12] Bo, L., Capponi, A., and Zhou, C. 随机综合因子半鞅市场中的幂型前瞻绩效。《运筹学研究》48，1（2023年），288–312。[13] Bo, L., Liao, H., and Yu, X. 违约传染与状态转换下的风险敏感型投资组合优化。SIAM 控制与优化杂志 57，1（2019年），366–401。[14] Capponi, A., Olafsson, S., and Zariphopoulou, T. 个性化机器人投顾：通过客户互动提升投资绩效。《管理科学》68，4（2022年），2485–2512。[15] Chong, W. F. 超越经典范式的股权挂钩型人寿保险合同定价与对冲：等价前瞻偏好原理。保险：数学与经济学 88（2019年），93–107。[16] Chong, W. F., Hu, Y., Liang, G., and Zariphopoulou, T. 前瞻性熵风险度量的遍历BSDE方法：表示与大期限行为。《金融与随机学》23，1（2019年），239–273。[17] Choulli, T., and Ma, J. HARA前瞻效用及其最优投资组合的显式描述。概率论及其应用 61，1（2017年），57–93。[18] Colaneri, K., Cretarola, A., and Salterini, B. 前向偏好下状态转换市场模型中的最优投资与比例再保险。数学 9，14（2021年）。[19] Colaneri, K., Cretarola, A., and Salterini, B. 指数型前瞻偏好下的最优投资与再保险。数学与金融经济学 19，1（2025年），1–37。

[20] Confortola, F., and Briand, P. 随机终止时间下的二次反向随机微分方程与无限维椭圆型偏微分方程。《电子概率期刊》13, none (2008), 1529 – 1561.
[21] Crépey, S., and Song, S. 交易对手风险反向随机微分方程。《随机过程及其应用》125, 8 (2015), 3023–3052.[22] Debussche, A., Hu, Y., and Tessitore, G. 弱耗散假设下的遍历反向随机微分方程。《随机过程及其应用》121, 3 (2011), 407–426.[23] El Karoui, N., Hillairet, C., and Mrad, M. 投资与消费的一致效用：前向／后向随机偏微分方程视角。《随机学》90, 6 (2018), 927–954.[24] El Karoui, N., Hillairet, C., and Mrad, M. 可违约环境中的双重揭示效用：关于消费的新视角。《概率、不确定性与定量风险》9, 1 (2024), 13–34.[25] El Karoui, N., and Mrad, M. 两个可解随机微分方程与非线性效用随机偏微分方程之间的精确联系。SIAM金融数学杂志4, 1 (2013), 697–736.[26] El Karoui, N., Peng, S., and Quenez, M. C. 金融领域的倒向随机微分方程。《数学金融》7, 1 (1997), 1–71.[27] He, X. D., Strub, M. S., and Zariphopoulou, T. 前向秩依赖绩效准则：概率扭曲下的时间一致投资。《数学金融》31, 2 (2021), 683–721.[28] Henderson, V., and Liang, G. 多维指数效用无差异定价模型及其在交易对手风险中的应用。SIAM 控制与优化杂志54, 2 (2016), 690–717.[29] Hillairet, C., Kaakaï, S., and Mrad, M. 具有最低保证和可持续性约束的时间一致养老金政策。《概率、不确定性与定量风险》9, 1 (2024), 35–64.[30] Hu, Y., Liang, G., and Tang, S. 制度转换前向绩效过程中出现的遍历反向随机微分方程组。SIAM 控制与优化杂志58, 4 (2020), 2503–2534.[31] Jacod, J. 《滤过的初始扩大、假设 (h') 与 Girsanov 定理》。载于《滤过扩张：示例与应用：巴黎第六大学1982/83年随机微积分研讨会》。Springer, 1985, 第15–35页。[32] Jiao, Y., Kharroubi, I., and Pham, H. 多重违约风险下的最优投资：反向随机微分方程分解方法。《应用概率年刊》23, 2 (2013), 455 – 491.[33] Jiao, Y., and Pham, H. 含交易对手风险的最优投资：违约密度模型方法。《金融与随机学》15 (2011), 725–753.[34] Källblad, S. Black逆投资问题与含消费的前向准则。SIAM金融数学杂志11, 2 (2020), 494–525.[35] Källblad, S., Obłój, J., and Zariphopoulou, T. 模型不确定性下的动态一致投资：稳健前向准则。《金融与随机学》22, 4 (2018), 879–918.

[36] Kharroubi, I., and Lim, T. 滤过的渐进扩张与带跳跃的倒向随机微分方程。《理论概率杂志》27, 3 (2014), 683–724.[37] Leung, T., Sircar, R., and Zariphopoulou, T. 美式期权的前向无差异估值。《随机学》84, 5–6 (2012), 741–770.[38] Li, J., Li, W., and Liang, G. 随机因子模型中齐次稳健前向投资表现过程的博弈论方法。SIAM金融数学杂志12, 3 (2021), 867–897.
[39] Liang, G., Strub, M. S., and Wang, Y. 可预测前向表现过程：低频评估及其在人机交互中的应用。《数学金融》33, 4 (2023), 1248–1286.[40] Liang, G., and Zariphopoulou, T. 通过遍历和无限时域反向随机微分方程表示随机因子模型中的齐次前向表现过程。SIAM金融数学杂志8, 1 (2017), 344–372.
[41] Musiela, M., Sokolova, E., and Zariphopoulou, T. 不完备二项模型中的前向指数无差异估值。载于《数学金融中的高级建模：献给 Ernst Eberlein 的纪念文集》(2016)，Springer，第277–302页。[42] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 随机因子模型中后向与前向动态指数效用下的投资与估值。载于《数学金融进展》，《应用数值调和分析》。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，2007年，第303–334页。[43] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 前向指数表现准则下的最优资产配置。载于《马尔可夫过程及相关主题：献给 Thomas G. Kurtz 的纪念文集》。俄亥俄州比奇伍德：IMS，数理统计学会，2008年，第285–300页。[44] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 动态投资表现准则下的投资组合选择。《定量金融》9, 2 (2009), 161–170.[45] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 时空单调表现准则下的投资组合选择。SIAM金融数学杂志1, 1 (2010), 326–365.[46] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 随机偏微分方程与投资组合选择。载于《当代定量金融》。Springer，柏林，2010年，第195–216页。[47] Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 时间单调表现准则下的初始投资选择与最优未来配置。《理论与应用金融国际期刊》14, 1 (2011), 61–81.[48] Nadtochiy, S., and Zariphopoulou, T. 一类具有非零波动率的齐次前向投资表现过程。载于《金融启发》。Springer，Cham，2014年，第475–504页。[49] Ng, K. T. H., and Chong, W. F. 前向效用偏好下固定缴费养老金计划的最优投资。《保险：数学与经济学》114 (2024), 192–211.

[50] Pham, H. 滤过渐进扩张下的随机控制及其在多重违约风险管理中的应用。《随机过程及其应用》*120*, 9 (2010), 1795–1820.[51] Shkolnikov, M., Sircar, R., and Zariphopoulou, T. 不完备市场中前向绩效过程及其适定性不良的 HJB 方程的渐近分析。*SIAM*金融数学杂志 *7*, 1 (2016), 588–618.[52] Strub, M. S., and Zhou, X. Y. 可预测前向效用过程的 Arrow-Pratt风险容忍度度量的演化。《金融与随机学》*25* (2021年, 331–358.[53] Zitkovic, G. 自生成与指数型前向绩效的对偶刻画。《应用概率年刊》*19*, 6 (2009), 2176–2210.

附录 A 第3节证明

本附录包含第3节中各项陈述的证明。

A.1 引理 3.1 的证明

情形 $n = m$ 显然：对不等式 (17) 左侧关于 $\mathcal{F}_{\theta_m}$ 取条件期望，并使用 (16) 即可。

下面我们将对 $n = 1, \dots, m-1$ 进行归纳证明，说明式（17）成立。对于$n = m-1$, 给定任意 $(\theta_{(m-2)}, l_{(m-2)}) \in \Delta_{m-2} \times E^{m-2}$ 和 $s \geq t \geq \theta_{m-2}$，利用条件期望的塔式性质，并回忆 $\hat{\eta}^m(\cdot,\cdot) = \eta(\cdot,\cdot)$，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s M_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}), (l_{(m-2)}, l_{m-1})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}), (l_{(m-2)}, l_{m-1})\right) d\theta_{m-1}\lambda_{m-1}(l_{(m-2)}, dl_{m-1})\Big|\mathcal{F}_t\Bigg] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s \Bigg\{\int_E \int_{\theta_{m-1}}^s M_s^m\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}, \theta_m), (l_{(m-2)}, l_{m-1}, l_m)\right) \\
&\quad \cdot \eta_s((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}, \theta_m), (l_{(m-2)}, l_{m-1}, l_m)) d\theta_m \lambda_m(l_{(m-1)}, dl_m)\Bigg\} \\
&\quad d\theta_{m-1}\lambda_{m-1}(l_{(m-2)}, dl_{m-1})\Big|\mathcal{F}_t\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s \Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[M_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}), (l_{(m-2)}, l_{m-1})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}), (l_{(m-2)}, l_{m-1})\right) \\
&\quad + \int_E \int_{\theta_{m-1}}^s \mathbb{E}\Bigg[M_s^m\left((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}, \theta_m), (l_{(m-2)}, l_{m-1}, l_m)\right) \\
&\quad \cdot \eta_s((\theta_{(m-2)}, \theta_{m-1}, \theta_m), (l_{(m-2)}, l_{m-1}, l_m))\Big|\mathcal{F}_{\theta_m}\Bigg] d\theta_m \lambda_m(l_{(m-1)}, dl_m)\Big|\mathcal{F}_{\theta_{m-1}}\Bigg] \\
&\quad d\theta_{m-1}\lambda_{m-1}(l_{(m-2)}, dl_{m-1})\Bigg\}\Big|\mathcal{F}_t\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_t^s\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[M_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1}),(l_{(m-2)},l_{m-1})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^{m-1}\left((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1}),(l_{(m-2)},l_{m-1})\right)\\
&\quad+\int_E\int_{\theta_{m-1}}^s M_{\theta_m}^m\left((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1},\theta_m),(l_{(m-2)},l_{m-1},l_m)\right)\\
&\quad\cdot\eta_{\theta_m}((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1},\theta_m),(l_{(m-2)},l_{m-1},l_m))d\theta_m\lambda_m(l_{(m-1)},dl_m)\big|\mathcal{F}_{\theta_{m-1}}\Bigg]\\
&\quad d\theta_{m-1}\lambda_{m-1}(l_{(m-2)},dl_{m-1})\Bigg\}\big|\mathcal{F}_t\Bigg]\\
&\leq \mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_t^s M_{\theta_{m-1}}^{m-1}\left((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1}),(l_{(m-2)},l_{m-1})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_{\theta_{m-1}}^{m-1}\left((\theta_{(m-2)},\theta_{m-1}),(l_{(m-2)},l_{m-1})\right)d\theta_{m-1}\lambda_{m-1}(l_{(m-2)},dl_{m-1})\big|\mathcal{F}_t\Bigg],
\end{aligned}
$$

其中，最后两个不等式分别由带有 $n=m-1$的式（16）和式（15）推出。一般而言，假设对于带有 $n\leq m-2$ 的 $n+1$，式（17）成立。于是，利用条件期望的塔式性质，我们有：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_t^s\Bigg\{\sum_{j=n+1}^m\int_{E^{j-n}}\int_{\theta_n}^s\cdots\int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n-1)},\theta_{(n,j)}),(l_{(n-1)},l_{(n,j)})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^j((\theta_{(n-1)},\theta_{(n,j)}),(l_{(n-1)},l_{(n,j)}))d\theta_j\cdots d\theta_{n+1}\prod_{i=n}^{j-1}\lambda_{i+1}(l_{(i)},dl_{i+1})\Bigg\}\\
&\quad d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Bigg]\\
=&\ \mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_t^s\Bigg\{\int_E\int_{\theta_n}^s\Bigg(M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{n+1})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{n+1})\right)\\
&\quad+\sum_{j=n+2}^m\int_{E^{j-(n+1)}}\int_{\theta_{n+1}}^s\cdots\int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n)},\theta_{(n+1,j)}),(l_{(n)},l_{(n+1,j)})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^j((\theta_{(n)},\theta_{(n+1,j)}),(l_{(n)},l_{(n+1,j)}))d\theta_j\cdots d\theta_{n+2}\prod_{i=n+1}^{j-1}\lambda_{i+1}(l_{(i)},dl_{i+1})\Bigg)\\
&\quad d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})\Bigg\}d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Bigg]\\
=&\ \mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_t^s\mathbb{E}\Bigg[\int_E\int_{\theta_n}^s\Bigg(M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{n+1})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{n+1})\right)\\
&\quad+\sum_{j=n+2}^m\int_{E^{j-(n+1)}}\int_{\theta_{n+1}}^s\cdots\int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n)},\theta_{(n+1,j)}),(l_{(n)},l_{(n+1,j)})\right)\\
&\quad\cdot\hat{\eta}_s^j((\theta_{(n)},\theta_{(n+1,j)}),(l_{(n)},l_{(n+1,j)}))d\theta_j\cdots d\theta_{n+2}\prod_{i=n+1}^{j-1}\lambda_{i+1}(l_{(i)},dl_{i+1})\Bigg)\big|\mathcal{F}_{\theta_{n+1}}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Big]\\
\le\ &\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s\Big\{\int_E\int_{\theta_n}^s M^{n+1}_{\theta_{n+1}}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{(n+1)})\right)\\
&\cdot\hat{\eta}^{n+1}_{\theta_{n+1}}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{(n+1)})\right)d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})\Big\}d\theta_n\lambda_n(l_{(n)},dl_{n+1})\big|\mathcal{F}_t\Big],
\end{aligned}
$$

其中，最后一个不等式由第 $n+1$ 步的归纳假设得出。利用这一点，对于任意 $n\le m-2$、$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 以及任意 $s\ge t\ge\theta_{n-1}$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s M^n_s\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\hat{\eta}^n_s\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\\
&d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Big]\\
&+\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s\Big\{\sum_{j=n+1}^m\int_{E^{j-n}}\int_{\theta_n}^s\cdots\int_{\theta_{j-1}}^s M^j_s\left((\theta_{(n-1)},\theta_{(n,j)}),(l_{(n-1)},l_{(n,j)})\right)\\
&\cdot\hat{\eta}^j_s((\theta_{(n-1)},\theta_{(n,j)}),(l_{(n-1)},l_{(n,j)}))d\theta_j\cdots d\theta_{n+1}\prod_{i=n}^{j-1}\lambda_{i+1}(l_{(i)},dl_{i+1})\Big\}\\
&d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Big]\\
\le\ &\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s M^n_s\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\hat{\eta}^n_s\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\\
&d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Big]\\
&+\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s\Big\{\int_E\int_{\theta_n}^s M^{n+1}_{\theta_{n+1}}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{(n+1)})\right)\\
&\cdot\hat{\eta}^{n+1}_{\theta_{n+1}}\left((\theta_{(n)},\theta_{n+1}),(l_{(n)},l_{(n+1)})\right)d\theta_{n+1}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl_{n+1})\Big\}\\
&d\theta_n\lambda_n(l_{(n)},dl_{n+1})\big|\mathcal{F}_t\Big]\\
\le\ &\mathbb{E}\Big[\int_E\int_t^s M^n_{\theta_n}\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\hat{\eta}^n_{\theta_n}\left((\theta_{(n-1)},\theta_n),(l_{(n-1)},l_n)\right)\\
&d\theta_n\lambda_n(l_{(n-1)},dl_n)\big|\mathcal{F}_t\Big],
\end{aligned}
$$

其中，最后一行由式 (15) 得出。因此，我们得到式 (17)。

根据上述计算可知，当式 (16) 以及任意 $n=0$，……，$m-1$ 对应的式 (15) 中等号成立时，这些不等式也取等号。证明至此完成。□

A.2 引理 3.2 的证明

首先，根据对所有$n=0$、……、$m-1$均成立的不等式 (15) 和 (16)，证明 M 是一个 $\mathbb{G}$-上鞅。将后续计算中的不等式替换为等式，即可证明鞅性质。

对于任意 $0 \le t \le s$，有

$$\mathbb{E}[M_s|\mathcal{G}_t] = \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[M_s \mathbb{1}_{\{T_n \le t < T_{n+1}\}}|\mathcal{G}_t\right] + \mathbb{E}[M_s \mathbb{1}_{\{t \ge T_m\}}|\mathcal{G}_t]. \tag{63}$$

注意到 $\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}T_{(m)}$ 和 $\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}L_{(m)}$ 是 $\mathcal{G}_t$-可测的，(63) 的最后一项可计算如下:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_s \mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}|\mathcal{G}_t] &= \mathbb{E}[M_s^m(T_{(m)}, L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}|\mathcal{G}_t] \\
&= \mathbb{E}\left[M_s^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\ge \theta_m\}}|\mathcal{G}_t\right]\Big|_{\theta_{(m)}=T_{(m)}, l_{(m)}=L_{(m)}} \\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}\mathbb{E}\left[M_s^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})\eta_s(\theta_{(m)}, l_{(m)})|\mathcal{F}_t\right]\Big|_{\theta_{(m)}=T_{(m)}, l_{(m)}=L_{(m)}}}{\eta_t(T_{(m)}, L_{(m)})} \qquad (64) \\
&\le \frac{\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}}{\eta_t(T_{(m)}, L_{(m)})}\left(M_t^m(T_{(m)}, L_{(m)})\eta_t(T_{(m)}, L_{(m)})\right) \\
&= M_t^m(T_{(m)}, L_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\ge T_m\}}, \qquad (65)
\end{aligned}$$

其中，(64) 由 [1], 中的引理 5.24 得出，倒数第二行则由 (16) 得出。

继续进行，对于任意 $n = 0$、.....、$m-1$、$(\theta_{(m)},\ l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \ge 0$，定义

$$\hat{M}_t^n\left(\theta_{(m)}, l_{(m)}\right) := \sum_{j=n}^{m-1} M_t^j\left(\theta_{(j)}, l_{(j)}\right)\mathbb{1}_{\{\theta_j \le t < \theta_{j+1}\}} + M_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})\mathbb{1}_{\{t\ge\theta_m\}},$$

其中 $\hat{M}_t^0(\cdot,\ \cdot) = M_t$。利用从 $\mathcal{G}_t$ 到 $\mathcal{F}_t$ 的过滤切换公式（见 [1]中的引理 2.9），并注意到 $\mathbb{1}_{\{T_n\le t\}}T_{(n)}$ 和 $\mathbb{1}_{\{T_n\le t\}}L_{(n)}$ 是 $\mathcal{G}_t$-可测的，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[M_s \mathbb{1}_{\{T_n \le t < T_{n+1}\}}\big|\mathcal{G}_t\right] \\
&= \Bigg[\mathbb{1}_{\{\theta_n \le t < T_{n+1}\}}\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right)\mathbb{1}_{\{T_{n+1}>t\}}\big|\mathcal{F}_t\right] \\
&\quad \times\left(\int_{E^{m-n}}\int_t^\infty\int_{\theta_{n+1}}^\infty\cdots\int_{\theta_{m-1}}^\infty \eta_t\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,m)})\right)\right. \\
&\quad \left.d\theta_m\cdots d\theta_{n+1}\prod_{j=n+1}^m \lambda_j(l_{(j-1)}, dl_j)\right)^{-1}\Bigg]_{\theta_{(n)}=T_{(n)}, l_{(n)}=L_{(n)}} \\
&= \Bigg[\frac{\mathbb{1}_{\{\theta_n \le t < T_{n+1}\}}}{\hat{\eta}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})} \\
&\quad \times\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right)\mathbb{1}_{\{T_{n+1}>t\}}\big|\mathcal{F}_t\right]\Bigg]_{\theta_{(n)}=T_{(n)}, l_{(n)}=L_{(n)}},
\end{aligned} \tag{66}$$

其中 $T_{(n,m)} := (T_n, \dots, T_m)$ 和 $L_{(n,m)} := (L_n, \dots, L_m)$。

对于 $s \geq t \geq \theta_n$，考虑：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{T_{n+1}>t\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
=\ &\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t\geq\theta_n\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&- \mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t\geq T_{n+1}\}} \middle| \mathcal{F}_t\right]. \qquad (67)
\end{aligned}$$

我们将用相对于式 (14) 中生存密度函数的积分来表示条件期望 (67)。为此，对于任意 $n < j < m$、$(\theta_{(n)},\ l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$ 和 $s \geq t \geq \theta_n$，考虑

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[M_s^j\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,j)})\right) \mathbb{1}_{\{T_j\leq s<T_{j+1}\}} \mathbb{1}_{\{t\geq T_{n+1}\}} \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
=\ &\int_{E^{m-n}\times\{\theta_n\leq\theta_{n+1}\leq\cdots\leq\theta_m<\infty\}} M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \mathbb{1}_{\{\theta_j\leq s<\theta_{j+1}\}} \\
&\cdot \mathbb{1}_{\{t\geq\theta_{n+1}\}} \eta_s\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,m)})\right) d\theta_m \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^{m} \lambda_i(l_{(i-1)}, dl_i) \\
=\ &\int_{E^{j-n}} \int_{\theta_n}^{t} \int_{\theta_{n+1}}^{s} \cdots \int_{\theta_{j-1}}^{s} M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\cdot \left\{ \int_{E^{m-j}} \int_{s}^{\infty} \int_{\theta_{j+1}}^{\infty} \cdots \int_{\theta_{m-1}}^{\infty} \eta_s\left(\theta_{(m)}, l_{(m)}\right) d\theta_m \cdots d\theta_{j+2} d\theta_{j+1} \prod_{i=j+1}^{m} \lambda_i(l_{i-1}, dl_i) \right\} \\
&\cdot d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^{j} \lambda_i(l_{i-1}, dl_i) \\
=\ &\int_{E^{j-n}} \int_{\theta_n}^{t} \int_{\theta_{n+1}}^{s} \cdots \int_{\theta_{j-1}}^{s} M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\cdot \hat{\eta}_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^{j} \lambda_i(l_{i-1}, dl_i), \qquad (68)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等号由式（14）中生存密度函数的定义可得。利用式（68）和条件期望的塔式性质，可以计算式（67）右端的第二项：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t\geq T_{n+1}\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
=\ &\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t\geq T_{n+1}\}} \middle| \mathcal{F}_s\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
=\ &\mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_{\theta_n}^{t} M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\cdot \hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&+ \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{j=n+2}^{m} \int_{E^{j-n}} \int_{\theta_n}^{t} \int_{\theta_{n+1}}^{s} \cdots \int_{\theta_{j-1}}^{s} M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\cdot \hat{\eta}_s^j((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)}))\Bigg) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^{j} \lambda_i(l_{(i-1)}, dl_i) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg]. \qquad (69)
\end{aligned}$$

同样，按照式（68）的推导过程并利用塔式性质，可以计算式（67）的第一项：对于 $s \geq t \geq \theta_n$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t \geq \theta_n\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{t \geq \theta_n\}} \middle| \mathcal{F}_s\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[M_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) + \int_E \int_{\theta_n}^s M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{j=n+2}^m \int_{E^{j-n}} \int_{\theta_n}^s \int_{\theta_{n+1}}^s \cdots \int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right)\Bigg) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^j \lambda_i(l_{(i-1)}, dl_i) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg]. \quad (70)
\end{aligned}
$$

结合式 (67)、(69) 和 (70)，对于 $s \geq t \geq \theta_n$ 且 $n = 0, \ldots, m-1$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\hat{M}_s^n\left((\theta_{(n)}, T_{(n+1,m)}), (l_{(n)}, L_{(n+1,m)})\right) \mathbb{1}_{\{T_{n+1} > t\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[M_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) \hat{\eta}_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right) + \int_E \int_t^s M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{j=n+2}^m \int_{E^{j-n}} \int_t^s \int_{\theta_{n+1}}^s \cdots \int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right)\Bigg) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^j \lambda_j(l_{(i-1)}, dl_i) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg]. \quad (71)
\end{aligned}
$$

由式 (15) 和引理 3.1，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s \Bigg\{M_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \hat{\eta}_s^{n+1}\left((\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\quad \cdot d\theta_{n+1} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{j=n+2}^m \int_{E^{j-n}} \int_t^s \int_{\theta_{n+1}}^s \cdots \int_{\theta_{j-1}}^s M_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) \\
&\quad \cdot \hat{\eta}_s^j\left((\theta_{(n)}, \theta_{(n+1,j)}), (l_{(n)}, l_{(n+1,j)})\right) d\theta_j \cdots d\theta_{n+1} \prod_{i=n+1}^j \lambda_i(l_{(i-1)}, dl_i)\Bigg\} \middle| \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&\leq \mathbb{E}\Bigg[\int_E \int_t^s M_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \hat{\eta}_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right) \\
&\quad d\theta_{n+1} d\lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1}) \middle| \mathcal{F}_t\Bigg]. \quad (72)
\end{aligned}
$$

结合 (66)、(71) 和 (72)，并利用假设 (15) 成立，可得

$$
\mathbb{E}\left[M_s \mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} \middle| \mathcal{G}_t\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\frac{\mathbb{1}_{\{\theta_n \leq t < T_{n+1}\}}}{\hat{\eta}_t^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right)}\left\{\mathbb{E}\Big[M_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right)\hat{\eta}_s^n\left(\theta_{(n)}, l_{(n)}\right)\right.\right.\\
&\quad + \int_E \int_t^s M_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right)\hat{\eta}_{\theta_{n+1}}^{n+1}\left(\theta_{(n)}, \theta_{n+1}), (l_{(n)}, l_{n+1})\right)\\
&\quad \left.\left. d\theta_{n+1}d\lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl_{n+1})\big|\mathcal{F}_t\Big]\right\}\right]_{\theta_{(n)}=T_{(n)}, l_{(n)}=L_{(n)}}\\
&\leq M_t^n\left(T_{(n)}, L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}.
\end{aligned}
$$

因此，对于任意 $0 \leq t \leq s$，有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_s|\mathcal{G}_t] &= \sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{E}\left[M_s\mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}|\mathcal{G}_t\right] + \mathbb{E}[M_s\mathbb{1}_{\{t \geq T_m\}}|\mathcal{G}_t]\\
&\leq \sum_{n=0}^{m-1} M_t^n\left(T_{(n)}, L_{(n)}\right)\mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}} + M_t^m\left(T_{(m)}, L_{(m)}\right)\mathbb{1}_{\{t \geq T_m\}}\\
&= M_t.
\end{aligned}
$$

因此，$(M_t)_{t\geq 0}$ 是一个 $\mathbb{G}$-上鞅。 □

附录B 第4节的证明

本附录包含第4节中各项陈述的证明。

B.1 定理 4.1 的证明

定理 4.1 可由下文的命题 B.1 和命题 B.2 合并证明。我们首先考虑带索引方程 $Y^m(\cdot,\cdot)$，该方程刻画最后一次违约时刻之后的 Y。

命题 B.1. 在假设2.1-2.2下，带索引的倒向随机微分方程 (26) 存在唯一解 $(Y^m(\cdot,\cdot)\ Z^m(\cdot,\cdot))$，使得 $Y^m \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n;\ \mathbb{R})$ 且 $Z^m \in \mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n;\ \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_n, E^n;\ \mathbb{R}^d)$。

证明。 我们将验证，(26) 的驱动项在 [20] 中满足假设 A1，其中 $\theta_{(m)} \in \Delta_m$ 和 $l_{(m)} \in E^m$ 任意。为方便记号起见，在不引起混淆的情况下，对于相关过程和系数对 $\theta_{(m)}$ 和 $l_{(m)}$ 的依赖关系将不再显式写出。

对于任意 $z \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \geq \theta_m$，考虑映射 $\pi \mapsto f^m(t,\ \pi,\ z)$，该映射关于 π 严格凸，并且当 $|\pi| \to \infty$ 时是强制的，这意味着 $f^m(t,\ \pi,\ z) \to +\infty$。在这些条件下，且由于 Π_m 是闭且凸的，存在一个唯一极小值点

$$
\pi^{m*}(t,z) := \operatorname*{arg\,min}_{\pi\in\Pi_m} f^m(t,\pi,z) = \operatorname*{arg\,min}_{\pi\in\Pi_m}\left|(\sigma_t^m)'\pi - \left(z + \frac{\alpha_t^m}{\gamma}\right)\right|^2,
$$

这对应于投影到 Π_m 上的马哈拉诺比斯投影。然后，对于任意 $p \in \Pi_m$，

我们有

$$\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^m)'\pi^{m*}(t,z)-\left(z+\frac{\alpha_t^m}{\gamma}\right)\right|^2-(\alpha_t^m)'z-\frac{|\alpha_t^m|^2}{2\gamma}=\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z)$$
$$\leq\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^m)'p-\left(z+\frac{\alpha_t^m}{\gamma}\right)\right|^2-(\alpha_t^m)'z-\frac{|\alpha_t^m|^2}{2\gamma}. \tag{73}$$

由假设 2.1 可知，(73) 意味着存在 $C>0$，使得

$$|(\sigma_t^m)'\pi^{m,*}(t,z)|\leq C(|z|+1). \tag{74}$$

对于任意 $z\in\mathbb{R}^d$，均成立。因此，对于任意 $z_1,\ z_2\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\geq\theta_m$，有

$$\begin{aligned}
&\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_1)\right)-\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_2)\right)\\
=&\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_2)-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_1)\\
\leq& f^m(t,\pi^{m*}(t,z_1),z_2)-f^m(t,\pi^{m*}(t,z_1),z_1)\\
\leq& C|z_1-z_2|\left(1+|z_1|+|z_2|+|(\sigma_t^m)'\pi^{m*}(t,z_1)|\right)+C|z_1-z_2|\\
\leq& C(1+|z_1|+|z_2|)|z_1-z_2|,
\end{aligned}$$

其中最后一行用到了 (74)，且 $C>0$ 是一个与 $z_1,\ z_2,\ t,\ \theta_{(m)},\ l_{(m)}$ 无关的常数，该常数可能随行而变化。由对称性，我们还可以证明存在 $C>0$，使得

$$\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_2)\right)-\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_1)\right)\leq C(1+|z_1|+|z_2|)|z_1-z_2|,$$

对于任意 $z_1,\ z_2\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\geq\theta_m$，均成立。因此，我们可以推出

$$\left|\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_1)\right)-\left(\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z_2)\right)\right|\leq C(1+|z_1|+|z_2|)|z_1-z_2|,$$

这验证了 [20]的假设 A1 (i)。

接下来，对于任意 $y_1,\ y_2,\ \mathbb{R}、\ z\in\mathbb{R}^d$和 $t\geq\theta_m$,

$$(y_1-y_2)\left[-\left(\rho y_1-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z)\right)+\left(\rho y_2-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z)\right)\right]=-\rho(y_1-y_2)^2,$$

这验证了单调性条件（ [20]的假设 A1 (ii)）。

最后，我们验证驱动项是连续的，并满足二次增长条件；参见 [20]中的定义 3.1。显然,

$$(y,z)\mapsto\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z)$$

对任意 $t\geq\theta_m$ 均连续。另一方面，对于任意 $(y,\ z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$，由 (74) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\rho y-\min_{\pi\in\Pi_m}f^m(t,\pi,z)\right|\\
\leq&\rho|y|+\frac{\gamma}{2}|z|^2+|(\sigma_t^m)'\pi^{m*}(t,z)|\left(\gamma|z|+|\alpha_t^m|\right)+\frac{\gamma|(\sigma_t^m)'\pi^{m*}(t,z)|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\leq \rho|y| + C|z|^2 + C|z|(1+|z|) + C(1+|z|)^2$$
$$\leq C(1+|y|+|z|^2).$$

由于上述估计中出现的常数 $C > 0$ 对 $\Delta_m \times E^m$ 一致，得益于假设 2.1，根据 [20] 的定理 3.3，我们可以得出，带指标的无限时域倒向随机微分方程 (26) 存在唯一解 (Y^m, Z^m)，其中 $Y^m \in \mathcal{S}(\Delta_m, E^m; \mathbb{R})$ 且 $Z^m \in \mathcal{M}^2(\Delta_m, E^m; \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_m, E^m; \mathbb{R}^d)$。□

接下来，我们将归纳证明，在（27）中定义的 $Y^n(\cdot,\cdot)$ 的带指标倒向随机微分方程，对所有 $n = 0, \ldots, m-1$ 都存在唯一解。

命题 B.2。假设假设 2.1–2.2 成立。对于 $n = 0, \ldots, m$，假设带指标倒向随机微分方程（27）存在唯一解 (Y^{n+1}, Z^{n+1})，且满足$Y^{n+1} \in \mathcal{S}(\Delta_{n+1}, E^{n+1}; \mathbb{R})$ 和 $Z^{n+1} \in \mathcal{M}^2(\Delta_{n+1}, E^{n+1}; \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_{n+1}, E^{n+1}; \mathbb{R}^d)$。那么，该方程存在唯一解 (Y^n, Z^n)，满足 $Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R})$ 和 $Z^n \in \mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d)$。

证明。我们将通过比较原理和截断构造解 (Y^n, Z^n)。为方便记号，我们仍省略对 $\theta_{(n)}$ 和 $l_{(n)}$ 的依赖。首先将 (Y^n, Z^n) 的带指标倒向随机微分方程写为

$$\begin{aligned} dY^n_t = \Bigg(& \rho Y^n_t - \min_{\pi \in \Pi_n} \left\{ \frac{\gamma}{2} \left| (\sigma^n_t)'\pi - \left(Z^n_t + \frac{\alpha^n_t}{\gamma} \right) \right|^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma} \int_E e^{\gamma\left(Y^{n+1}_t((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - Y^n_t - \pi'\beta^n_t(l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl) \right\} \Bigg) dt \\ & + \left((\alpha^n_t)' Z^n_t + \frac{|\alpha^n_t|^2}{2\gamma} \right) dt + Z^n_t dW_t. \end{aligned} \tag{75}$$

由于存在项 $e^{-\gamma Y^n_t}$，尚不清楚是否存在一个关于 $y \in \mathbb{R}$ 一致的 $C > 0$，使得 (75) 中的驱动项满足 [20] 中的假设 A1 (i)。我们不直接处理该项，而是采用截断论证，将指数替换为一个有界过程。这促使我们考虑以下（带指标的）无限时域后向随机微分方程：对于 $t \geq \theta_n$,

$$d\underline{Y}^n_t = \left(\rho \underline{Y}^n_t + (\alpha^n_t)' \underline{Z}^n_t + \frac{|\alpha^n_t|^2}{2\gamma} \right) dt + (\underline{Z}^n_t)' dW_t. \tag{76}$$

倒向随机微分方程 (76) 是线性的，因此满足 [20] 中的假设 A.1。由其中的定理 3.3 和假设 2.1 可推知，$Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R})$，且 $Z^n \in \mathcal{M}^2(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^d)$。事实上，通过测度变换可以证明，对于任意 $\tau \geq \theta_n$，存在一个测度 $\mathbb{Q}^\tau \sim \mathbb{P}$，使得对于任意 $t \in [\theta_n, \tau]$,

$$\underline{Y}^n_t = -\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_\tau} \left[\int_t^\tau e^{-\rho(s-t)} \frac{|\alpha^n_s|^2}{2\gamma} ds \middle| \mathcal{G}_t \right].$$

特别地，对于任意的 $(\theta_{(n)}, l_{(n)})$ 和 $t \geq \theta_{(n)}$,

$$\underline{Y}^n_t \geq -\frac{\|\alpha^n\|^2_{\mathcal{S}(\Delta_n, E^n; \mathbb{R}^m)}}{2\rho\gamma} \ \mathbb{P}\text{-a.s.}. \tag{77}$$

接下来，我们考虑以下带索引的无限时域后向随机微分方程，它是（75）的截断版本：

$$\begin{aligned} d\tilde{Y}_t^n = &\left(\rho\tilde{Y}_t^n - \min_{\pi\in\Pi_n}\left\{\frac{\gamma}{2}\left[(\sigma_t^n)'\pi - \left(\tilde{Z}_t^n + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right]^2\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - \tilde{Y}_t^n\vee\underline{Y}_t^n - \pi'\beta_t^n(l)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\right\}\right)dt \\ &+ \left((\alpha_t^n)'\tilde{Z}_t^n + \frac{|\alpha_t^n|^2}{2\gamma}\right)dt + \tilde{Z}_t^n dW_t \\ = &\left(\rho\tilde{Y}_t^n - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,\tilde{Y}_t^n\vee\underline{Y}_t^n,\tilde{Z}^n)\right)dt + \tilde{Z}_t^n dW_t. \end{aligned} \tag{78}$$

如果我们能够证明（78）存在唯一解，使得 $Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n,\ E^n;\mathbb{R})$，那么利用（76）和（78）上的 BSDE比较原理[4]，便可以得出结论 $Y_t^n \geq Y_t^n$。于是，方程（78）化简为（27），因此（Y^n，Z^n）是后者的一个解。

基于上述讨论，证明的剩余部分将用于证明（78）的解存在唯一性，其中我们将验证假设 A.1 和定义 3.1 在 [20] 中成立。给定过程 Y^{n+1} 和 Y^n，对于所有（$\theta_{(n)}$，$l_{(n)}$）$\in \Delta_n \times E^n$，我们有$\mathbb{P}$-a.s.，（t，y，z_1，z_2）$\in [\theta_n,\infty) \times \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned} &\left(\rho y - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,y\vee\underline{Y}_t^n,z_1)\right) - \left(\rho y - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,y\vee\underline{Y}_t^n,z_2)\right) \\ \leq\ & \left(\rho y - f^n\left(t,\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1),y\vee\underline{Y}_t^n,z_1\right)\right) - \left(\rho y - f^n\left(t,\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1),y\vee\underline{Y}_t^n,z_2\right)\right) \\ \leq\ & \frac{\gamma}{2}\left[\left|(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1) - \left(z_2 + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2\right. \\ &\left. - \left|(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1) - \left(z_1 + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2\right] + (\alpha_t^n)'(z_2 - z_1) \\ =\ & \frac{\gamma}{2}(z_1 - z_2)'\left[2(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1) - \left(z_1 + z_2 + \frac{2\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right] + (\alpha_t^n)'(z_2 - z_1) \\ \leq\ & C|z_1 - z_2|\left(1 + |z_1| + |z_2| + |(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z_1)|\right) + C|z_1 - z_2|, \end{aligned} \tag{79}$$

其中，对任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$t \geq \theta_n$ 和 $(y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$，

$$\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z) := \arg\min_{\pi\in\Pi_n} f^n\left(t,\pi,y\vee\underline{Y}_t^n,z\right).$$

同样，由于 Π_n 的几何性质，以及映射 $\pi \mapsto f^n(t,\pi,y\vee Y_t^n,z)$ 的凸性和强制性，极小值唯一存在。

我们声称存在 $C>0$，使得对于所有 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$(t,y,z) \in [\theta_n,\infty) \times \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$，均有 $\mathbb{P}$-几乎必然成立，

$$|(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z)| \leq C(1+|z|). \tag{80}$$

事实上，对于任意 $p \in \Pi_n$，我们有

$$f^n\left(t,\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z),y\vee\underline{Y}_t^n,z\right) \leq f^n\left(t,p,y\vee\underline{Y}_t^n,z\right) \leq F_1^n(t,p,z) + F_2^n(t,p,\underline{Y}_t^n).$$

[4]这里所说的倒向随机微分方程的比较原理，是指对终端数据为 0、时间有限的截断方程应用比较原理，然后令 $T\to\infty$ 趋于极限。

利用这一点以及 Y^n 和 Y^{n+1} 的一致有界性，我们可推出存在正常数 $C>0$，使得对于任意 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$(t,y,z) \in [\theta_n, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$，均有 $\mathbb{P}$-几乎处处成立，

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^n)'p - \left(z + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2 + C \\
\geq\ &\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^n)'\tilde{\pi}^{n*}(t,y,z) - \left(z + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2 \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - \tilde{Y}_t^n \vee \underline{Y}_t^n - \tilde{\pi}^{n*}(t,y,z)'\beta_t^n(l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl). \qquad (81)
\end{aligned}$$

由于 (81) 右端的第二个加项非负，因此可得 (80)。

因此，将 (80) 代入 (79)，可知 (79) 的左端有如下上界：

$$C(1+|z_1|+|z_2|)|z_1 - z_2|.$$

交换 (79) 中的减法顺序，并用 $\tilde{\pi}^{n*}(t,\ y,\ z_2)$ 替代$\tilde{\pi}^{n*}(t,\ y,\ z_1)$，可证明 $\mathbb{P}$-几乎处处，对所有 $(\theta_{(n)},\ l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$(t,\ y,\ z_1,\ z_2) \in [\theta_n, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\rho y - \min_{\pi \in \Pi_n} f^n\left(t, \pi, y \vee \underline{Y}_t^n, z_1\right)\right) - \left(\rho y - \min_{\pi \in \Pi_n} f^n\left(t, \pi, y \vee \underline{Y}_t^n, z_2\right)\right)\right| \qquad (82) \\
&\leq C|z_1 - z_2|(1 + |z_1| + |z_2|),
\end{aligned}$$

由此验证了 [20] 的假设 A.1 (i)。

接下来，我们验证驱动项满足单调性条件。对于任意 $(\theta_{(n)},\ l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，$(t,\ y_1,\ y_2,\ z) \in [\theta_n, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$，且 $\mathbb{P}$-几乎处处，

$$\begin{aligned}
&(y_1 - y_2)\left[-\left(\rho y_1 - \min_{\pi \in \Pi_n} f^n(t, \pi, y_1 \vee \underline{Y}_t^n, z)\right) + \left(\rho y_2 - \min_{\pi \in \Pi_n} f^n(t, \pi, y_2 \vee \underline{Y}_t^n, z)\right)\right] \\
=\ &-\rho(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)\left[\min_{\pi \in \Pi_n}\left\{\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^n)'\pi - \left(z + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2\right.\right. \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y_1 \vee \underline{Y}_t^n - \pi'\beta_t^n(l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl)\Bigg\} \\
&- \min_{\pi \in \Pi_n}\left\{\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^n)'\pi - \left(z + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y_2 \vee \underline{Y}_t^n - \pi'\beta_t^n(l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl)\right\}\right] \\
\leq\ &-\rho(y_1 - y_2)^2,
\end{aligned}$$

由于映射

$$\begin{aligned}
y \mapsto \min_{\pi \in \Pi_n}\Bigg\{&\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma_t^n)'\pi - \left(z + \frac{\alpha_t^n}{\gamma}\right)\right|^2 \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y \vee \underline{Y}_t^n - \pi'\beta_t^n(l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl)\Bigg\}
\end{aligned}$$

是非递增的。因此，驱动项满足 [20]的假设 A.1 (ii)。

为完成证明，我们验证驱动项满足二次增长条件。对于任意的 $(\theta_{(n)},\ l_{(n)})$ $\in \Delta_n \times E^n$、$(t,\ y,\ z) \in [\theta_n,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$，以及 $\mathbb{P}$-几乎处处，利用 (81)，可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\rho y - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,y\vee \underline{Y}^n_t, z)\right| \\
&= \left|\rho y + (\alpha^n_t)'z + \frac{|\alpha^n_t|^2}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma}\int_E \lambda_{n+1}(l_{(n)},dl) - \min_{\pi\in\Pi_n}\left\{\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma^n_t)'\pi - \left(z+\frac{\alpha^n_t}{\gamma}\right)\right|^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y^{n+1}_t((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y\vee\underline{Y}^n_t - \pi'\beta^n_t(l)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\right\}\right| \\
&\le C(1+|y|+|z|) + \min_{\pi\in\Pi_n}\left\{\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma^n_t)'\pi - \left(z+\frac{\alpha^n_t}{\gamma}\right)\right|^2\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y^{n+1}_t((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y\vee\underline{Y}^n_t - \pi'\beta^n_t(l)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\right\} \\
&\le C(1+|y|+|z|) + \frac{\gamma}{2}\left|(\sigma^n_t)'p - \left(z+\frac{\alpha^n_t}{\gamma}\right)\right|^2 + C \\
&\le C(1+|y|+|z|+|z|^2).
\end{aligned}
$$

因此，驱动项满足二次增长条件。根据~ ~ -[20], 的定理 3.3，我们得出 (78) 存在唯一解 $(Y^n,\ Z^n)$，使得 $Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n,\ E^n;\mathbb{R})$ 且 $\tilde{Z}^n \in \mathcal{M}^2(\Delta_n,\ E^n;\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^2_{\rm loc}(\Delta_n,\ E^n;\mathbb{R}^d)$。

ˆ ˆ 为证明唯一性，设 (Y^n,Z^n) 和 (Y^n,Z^n) 是带指标 BSDE (27) 的两个解，且 $Y^n,\ ˆ Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n,E^n;\mathbb{R})$ 和 $\tilde{Z}^n,\ ˆZ^n \in \mathcal{M}^2(\Delta_n,E^n;\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{L}^2_{\rm loc}(\Delta_n,E^n;\ \mathbb{R}^d)$。再设 $\delta Y^n := Y^n - ˆY^n$ 和 $\delta Z^n := Z^n - ˆZ^n$。按照 (82) 的推导，并利用 $Y^n, Y^n \in \mathcal{S}(\Delta_n,E^n;\ \mathbb{R})$ 这一事实，存在 $C>0$，使得对于任意 $(\theta_{(n)},l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$, $t\ge\theta_n$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立，

$$
\left|\min_{\pi\in\Pi_n} f^n\left(t,\pi,Y^n_t,Z^n_t\right) - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n\left(t,\pi,Y^n_t,\hat{Z}^n_t\right)\right| \le C|\delta Z^n_t|(1+|Z^n_t|+|\hat{Z}^n_t|). \quad (83)
$$

另一方面，利用以下事实

$$
\begin{aligned}
y \mapsto \min_{\pi\in\Pi_n}&\left\{\frac{\gamma}{2}\left|(\sigma^n_t)'\pi - \left(z+\frac{\alpha^n_t}{\gamma}\right)\right|^2\right. \\
&\left. + \frac{1}{\gamma}\int_E e^{\gamma\left(Y^{n+1}_t((\theta_{(n)},t),(l_{(n)},l)) - y - \pi'\beta^n_t(l)\right)}\lambda_{n+1}(l_{(n)},dl)\right\}
\end{aligned}
$$

是非递增的，我们有 $\mathbb{P}$-几乎必然地，对任意 $(\theta_{(n)},l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$, $t\ge\theta_n$,

$$
\begin{aligned}
&\delta Y^n_t\left[-\left(\rho Y^n_t - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,\underline{Y}^n_t,\hat{Z}^n_t)\right) + \left(\rho\hat{Y}^n_t - \min_{\pi\in\Pi_n} f^n(t,\pi,\hat{Y}^n_t,\hat{Z}^n_t)\right)\right] \\
&\le -\rho|\delta Y^n_t|^2.
\end{aligned} \quad (84)
$$

利用（83）和（84），并结合与引理 3.4 中类似的论证，我们得出，对于所有（$\theta_{(n)},\ l_{(n)}$）$\in \Delta_n \times E^n$、$t\ge\theta_n$、$Y^n_t = Y^n_t$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立。 □

B.2 命题 4.1 的证明

注意，由（77）可知，我们已经证明了 $Y_t^n \geq -K_Y/\rho$。因此，下面只需推导一个上界。

为此，我们采用与定理 4.1 证明中类似的截断论证。定义函数 $h_Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$h_Y(y) = \max\left\{-\frac{K_Y}{\rho}, \min\left\{y, \frac{K_Y}{\rho}\right\}\right\}.$$

考虑方程 (26)-(27) 的以下截断版本：令 $(Y^m, Z^m) = (Y^m, Z^m)$，且对于 $n = m-1, \ldots, 0$，

$$d\hat{Y}_t^n = \left(\rho \hat{Y}_t^n - \min_{\pi \in \Pi_n} f^n\left(t, \pi, h_Y(\hat{Y}_t^n), \hat{Z}_t^n\right)\right) dt + (\hat{Z}_t^n)' dW_t, \tag{85}$$

为方便记号，我们省略了指标对变量的依赖关系。注意，f^n 取决于非截断方程 (27) 的解 Y^{n+1}。按照命题 B.1-B.2 的证明，显然系统 (85) 有唯一解。

我们将证明，对于所有 $n = 0, \ldots, m$，都有 $|Y_t^n| \leq K_Y/\rho$，因此截断系统 (85) 的解满足方程 (27)。为此，我们引入以下递归定义的常微分方程：

$$\bar{Y}_t^m = \int_t^\infty \left(-\rho \bar{Y}_s^m + \|F_1^m(\cdot, 0, 0)\|_{\mathcal{S}(\Delta_m, E^m; \mathbb{R})}\right) ds = \int_t^\infty -\rho \bar{Y}_s^m ds,$$

且对于 $n = 0, \ldots, m-1$，

$$\begin{aligned}\bar{Y}_t^n &= \int_t^\infty \left(-\rho \bar{Y}_s^n + \frac{e^{\gamma\left(\bar{Y}_s^{n+1} - h_Y(\bar{Y}_s^n)\right)}}{\gamma} + \max_{0 \leq n \leq m} \|F_1^n(\cdot, 0, 0)\|_{\mathcal{S}(\Delta_m, E^m; \mathbb{R})}\right) ds \\ &= \int_t^\infty \left(-\rho \bar{Y}_s^n + \frac{e^{\gamma\left(\bar{Y}_s^{n+1} - h_Y(\bar{Y}_s^n)\right)}}{\gamma}\right) ds.\end{aligned}$$

根据 BSDE比较原理，显然，对于所有 $t \geq 0$，$Y_t^m = Y_t^m \leq Y_t^m \leq \bar{Y}_t^{m-1}$。利用 $Y_t^m \leq \bar{Y}_t^m$ 这一事实，我们还得到 $\hat{Y}_t^{m-1} \leq \bar{Y}_t^{m-1}$，这同样是由比较原理得出的。此外，对于 $t \geq 0$，有 $|Y_t^m| \leq K_Y/\rho$。因此，$h_Y(Y_t^m) = Y_t^m$ 且

$$\begin{aligned}\bar{Y}_t^{m-1} &= \frac{1}{\gamma} \int_t^\infty e^{-\rho(s-t) + \gamma(\bar{Y}_t^m - h_Y(\bar{Y}_t^{m-1}))} ds \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_t^\infty e^{-\rho(s-t) + \gamma(\bar{Y}_t^m - h_Y(\bar{Y}_t^m))} ds \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} ds \leq \frac{K_Y}{\rho}.\end{aligned}$$

因此，$\hat{Y}_t^{m-1} \leq \bar{Y}_t^{m-1} \leq K_Y/\rho$，从而 $|\hat{Y}_t^{m-1}| \leq K_Y/\rho$。这意味着 $h_Y(\hat{Y}_t^{m-1}) = \hat{Y}_t^{m-1}$，因此 $\hat{Y}_t^{m-1} = Y_t^{m-1}$。□

同样，对于 $n < m-1$，我们可以归纳证明 $|\hat{Y}_t^n| \leq K_Y/\rho$ 并且 $\hat{Y}_t^n = Y_t^n$。证明至此完成。

附录 C 第5节的证明

本附录包含第5节中各项陈述的证明。

C.1 定理 5.1 的证明

下文中，我们固定 $n = 0,\ldots,m$ 和 $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$。为方便记号，若不会引起混淆，我们将省略过程对 $(\theta_{(n)}, l_{(n)})$ 的依赖。例如，对于任意 $\theta_n \le \theta \le t$，我们将 Y_t^n 记作 $Y_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})$，并将 $Y_t^{n+1}(\theta, l)$ 记作 $Y_t^{n+1}((\theta_{(n)}, \theta), (l_{(n)}, l))$。

我们的证明基于一种结合了倒向随机微分方程修正比较原理的截断论证。与现有结果的主要区别在于，$m+1$ 倒向随机微分方程定义在不同的参数指标上。步骤 1：截断方程

我们首先引入以下截断方程：

$$dY_t^m = \left(\rho Y_t^m - \min_{\pi \in \Pi_m} \hat{f}^m\left(\pi, h_Z^m(Z_t^m), \Phi_t^m\right)\right) dt + (Z_t^m)' dW_t, \tag{86}$$

且对于 $n = 0, \ldots, m-1$,

$$dY_t^n = \left(\rho Y_t^n - \min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n\left(t, \pi, Y_t^n, h_Z^n(Z_t^n), \Phi_t^n; Y^{n+1}\right)\right) dt + (Z_t^n)' dW_t, \tag{87}$$

这里，我们仍将截断倒向随机微分方程的解记为 Y^n。为强调驱动项 $\hat{} f^n$ 实际上取决于 Y^{n+1} 的截断版本，对于 $n = 0, \ldots, m-1$，我们采用如下记号：

$$\begin{aligned} \hat{f}^n(t, \pi, y, z, \phi; Y^{n+1}) &:= \hat{F}_1^n(\pi, z, \phi) + \hat{F}_2^n(t, \pi, y, \phi; Y^{n+1}), \\ \hat{F}_2^n(t, \pi, y, \phi; Y^{n+1}) &:= \frac{1}{\gamma} \int_E e^{\gamma\left(Y_t^{n+1}((\theta_{(n)}, t), (l_{(n)}, l)) - y - \pi' \hat{\beta}^n(\phi, l)\right)} \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl). \end{aligned} \tag{88}$$

此外，$h_Z^n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 由下式给出：

$$h_Z^n(z) = \frac{z}{|z|} \min\left\{K_{Z^n}, |z|\right\} \mathbb{1}_{\{z \neq 0\}}.$$

对于 $n < m$，令 $s \in [\theta_{(n)}, \theta_{(n+1)})$。对于任意 $\phi \in \mathbb{R}^d$、$p \ge n$ 和 $t \ge s$，我们将满足条件 $\Phi^{n,s}_{s}{}^{(n,s,\phi)}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \phi$ 的随机微分方程 $\Phi^p(\theta_{(p)}, l_{(p)})$ 的解记为 $\Phi^{p,(n,s,\phi)}$。显然，对于 $t \ge \theta_p$，有 $\Phi^{p,(n,s,\phi)}_t = \Phi^{p,(p,\theta_p,\Phi^{p,(n,s,\phi)}_{\theta_p})}_t$。我们还记 $\Phi^{n,s\,\phi}_t = \Phi^{n,(n,s,\phi)}_t$。对于任意 $0 \le n \le p$，我们将满足 Φ^p 替换为 $\Phi^{p,(n,s,\phi)}$ 的截断方程 (87) 的解记为 $(Y^{p,(n,s,\phi)}, Z^{p,(n,s,\phi)})$。类似地，我们记 $(Y^{n,s,\phi}, Z^{n,s,\phi}) = (Y^{n,(n,s,\phi)}, Z^{n,(n,s,\phi)})$。

固定 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^d$，对于任意 $n \le p$, $\theta_n \le s \le \theta_p \le t$，我们定义

$$\delta Y^{p,(n,s,\phi_1,\phi_2)}_t := Y^{p,(n,s,\phi_1)}_t - Y^{p,(n,s,\phi_2)}_t \text{ 以及 } \delta Z^{p,(n,s,\phi_1,\phi_2)}_t := Z^{p,(n,s,\phi_1)}_t - Z^{p,(n,s,\phi_2)}_t.$$

我们还用 $(\delta Y^{n,s,\phi_1,\phi_2}, \delta Z^{n,s,\phi_1,\phi_2})$ 表示 $(\delta Y^{n,(n,s,\phi_1,\phi_2)}, \delta Z^{n,(n,s,\phi_1,\phi_2)})$。For

对任意 $\theta_n \le s \le t$，我们有

$$
\begin{aligned}
d\delta Y_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} = \Big[& \rho \delta Y_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} - \min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n \left(t, \pi, Y_t^{n,s,\phi_1}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_1}; Y^{n+1,(n,s,\phi_1)} \right) \\
& + \min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n \left(t, \pi, Y_t^{n,s,\phi_2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}; Y^{n+1,(n,s,\phi_2)} \right) \Big] dt \\
& + (\delta Z_t^{n,s,\phi_1,\phi_2})' dW_t.
\end{aligned} \tag{89}
$$

另请考虑以下常微分方程：对于 $0 \le s \le t$,

$$
\begin{aligned}
\delta \bar{Y}_t^{n,s} = \int_t^\infty \Big[& - \rho \delta \bar{Y}_u^{n,s} + \Big(\frac{C_\phi C_g (1 + C_\varphi)^{m-n}}{C_g - C_\phi} \\
& + C_\Pi C_\beta (C_g + \rho) \sum_{j=0}^{m-n-1} (1 + C_\varphi)^j \Big) e^{-C_g(u-s)} |\phi_1 - \phi_2| \Big] du.
\end{aligned}
$$

我们将证明，对于任意 $n = 0, \dots, m$、$\theta_n \le s \le t$ 和 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$
\left| \delta Y_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} \right| \le \delta \bar{Y}_t^{n,s} = \left[\frac{C_\phi C_g (1 + C_\varphi)^{m-n}}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} + C_\Pi C_\beta \sum_{j=0}^{m-n-1} (1 + C_\varphi)^j \right] e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2|. \tag{90}
$$

步骤 2：驱动项分析

接下来，我们分析方程 (89) 的驱动项。对于任意 $n \le m$、$\theta_n \le s \le t$、$i = 1,2$, 令

$$
\hat{\pi}_t^{n,i} = \arg\min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n \left(t, \pi, Y_t^{n,s,\phi_i}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_i}), \Phi_t^{n,s,\phi_i}; Y^{n+1,(n,s,\phi_i)} \right).
$$

考虑

$$
\begin{aligned}
& \min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n \left(t, \pi, Y_t^{n,s,\phi_1}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_1}; Y^{n+1,(n,s,\phi_1)} \right) \\
& - \min_{\pi \in \Pi_n} \hat{f}^n \left(t, \pi, Y_t^{n,s,\phi_2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}; Y^{n+1,(n,s,\phi_2)} \right) \\
\le & \hat{F}_1^n(\hat{\pi}^{n,1}_t, h_Z^n(Z^{n,s,\phi_1}_t), \Phi^{n,s,\phi_1}_t) - \hat{F}_1^n(\hat{\pi}^{n,2}_t, h_Z^n(Z^{n,s,\phi_2}_t), \Phi^{n,s,\phi_2}_t) \\
& + \hat{F}_2^n(t, \hat{\pi}^{n,2}_t, Y^{n,s,\phi_1}_t, \Phi^{n,s,\phi_1}_t; Y^{n+1,(n,s,\phi_1)}) - \hat{F}_2^n(t, \hat{\pi}^{n,2}_t, Y^{n,s,\phi_2}_t, \Phi^{n,s,\phi_2}_t; Y^{n+1,(n,s,\phi_2)}) \\
= & \tilde{F}_1^n(t, \delta Z^{n,s,\phi_1,\phi_2}_t) + \hat{F}_2^n(t, \hat{\pi}^{n,2}_t, Y^{n,s,\phi_1}_t, \Phi^{n,s,\phi_1}_t; Y^{n+1,(n,s,\phi_1)}) \\
& - \hat{F}_2^n(t, \hat{\pi}_t^{n,2}, Y_t^{n,s,\phi_2}, \Phi_t^{n,s,\phi_2}; Y^{n+1,(n,s,\phi_2)}),
\end{aligned} \tag{91}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_1^n(t,z) := & \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_1}) - \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}) \\
& + \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(z + Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}) - \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}).
\end{aligned}
$$

考虑（91）右端的第一项。由（46）、（42）和假设 5.4，对于 $t \ge \theta_n$，我们有

$$
\begin{aligned}
|\tilde{F}_1^n(t,0)| & \le C_\phi (1 + |h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1})|) \left| \Phi_t^{n,s,\phi_1} - \Phi_t^{n,s,\phi_2} \right| \\
& \le C_\phi e^{-C_g(t-s)} (1 + |h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1})|) |\phi_1 - \phi_2|
\end{aligned}
$$

$$\leq C_g K_{Z^n} e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2|. \tag{92}$$

事实上，容易验证，当 $C_g > C_\phi$ 时，$(C_g - C_\phi)K_{Z^n} > C_\phi$，因此 $C_\phi(1 + K_{Z^n})$ $\leq C_g K_{Z^n}$。另一方面，利用 $\hat{\pi}^n$的有界性，$_t{}^2$, $h_Z^n(Z^n, {}_t{}^{s\,\phi_i,})$, $i = 1, 2$ 的有界性，容易验证存在 $C > 0$，使得

$$\left|\hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}) - \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2})\right| \leq C \left|\delta Z_t^{n,s,\phi_1,\phi_2}\right|. \tag{93}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_1^n(t, \delta Z_t^{n,s,\phi_1,\phi_2}) \\
&\leq |\tilde{F}_1^n(t,0)| + \left|\hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_1}), \Phi_t^{n,s,\phi_2}) - \hat{F}_1^n(\hat{\pi}_t^{n,2}, h_Z^n(Z_t^{n,s,\phi_2}), \Phi_t^{n,s,\phi_2})\right| \\
&\leq C_g K_{Z^n} e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2| + C \left|\delta Z_t^{n,s,\phi_1,\phi_2}\right|.
\end{aligned}$$

接下来，我们考虑（91）右侧剩余的各项。根据中值定理以及 Y^n、Y^{n+1}、$\hat{\pi}^n$、$_2$ 的有界性，存在 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\hat{F}_2^n\Big(t, \hat{\pi}_t^{n,2}, Y_t^{n,s,\phi_1}, \Phi_t^{n,s,\phi_1}; Y^{n+1,(n,s,\phi_1)}\Big) \\
&\quad - \hat{F}_2^n\Big(t, \hat{\pi}_t^{n,2}, Y_t^{n,s,\phi_2}, \Phi_t^{n,s,\phi_2}; Y^{n+1,(n,s,\phi_2)}\Big) \\
&= \frac{1}{\gamma}\int_E \Bigg(e^{\gamma\left(Y_t^{n+1,(n,s,\phi_1)}(t,l) - Y_t^{n,s,\phi_1} - (\hat{\pi}_t^{n,2})'\hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_1}, l)\right)} \\
&\qquad - e^{\gamma\left(Y_t^{n+1,(n,s,\phi_2)}(t,l) - Y_t^{n,s,\phi_2} - (\hat{\pi}_t^{n,2})'\hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_2}, l)\right)} \Bigg) \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl) \\
&\leq C \int_E \Big(\delta Y_t^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(t,l) - \delta Y_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} \\
&\qquad - (\hat{\pi}_t^{n,2})'\Big(\hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_1}, l) - \hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_2}, l)\Big)\Big) \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl) \\
&\leq C \Bigg\{ \left|\delta Y_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} - \delta \bar{Y}_t^{n,s}\right| \\
&\quad + \int_E \Big(\delta Y_t^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(t,l) - \delta \bar{Y}_t^{n,s} \\
&\qquad - (\hat{\pi}_t^{n,2})'\Big(\hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_1}, l) - \hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_2}, l)\Big)\Big)_+ \lambda_{n+1}(l_{(n)}, dl) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{94}$$

步骤3：比较原理

在此步骤中，我们调整引理2.2的证明，以证明（90）。令G^n、$_t{}^{s\,\phi_1\,\phi_2}$、：$= \delta Y^n$、$_t{}^{s\,\phi_1\,\phi_2} - \delta \bar{Y}^n$、$_t{}^s$，并且对任意 $t \geq \theta$ 和 $l \in E$，令

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_t^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(\theta, l) &:= \delta Y_t^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(\theta, l) \\
&\quad - (\hat{\pi}_t^{n,2})'\left(\hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_1}, l) - \hat{\beta}^n(\Phi_{t^-}^{n,s,\phi_2}, l)\right) - \delta \bar{Y}_t^{n,s}.
\end{aligned}$$

对过程 $(G^n, {}_t{}^{s\,\phi_1\,\phi_2,,})_+^2 = (G^n, {}_t{}^{s\,\phi_1\,\phi_2,,})^2 \mathbb{1}_{\{G_t^{n,s,\phi_1,\phi_2} \geq 0\}}$应用伊藤引理，利用式（91）—（94）和H¨older不等式，对于任意 $\theta_n \leq s \leq t$，

$(G_t^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+^2$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ \Bigg[\min_{\pi\in\Pi_n} \hat{f}^n\Big(t,\pi,Y_u^{n,s,\phi_1},h_Z^n(Z_u^{n,s,\phi_1}),\Phi_u^{n,s,\phi_1};\, Y^{n+1,(n,s,\phi_1)}\Big) \\
&\quad - \min_{\pi\in\Pi_n} \hat{f}^n\Big(t,\pi,Y_u^{n,s,\phi_2},h_Z^n(Z_u^{n,s,\phi_2}),\Phi_u^{n,s,\phi_2};\, Y^{n+1,(n,s,\phi_2)}\Big) - \rho G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2} \\
&\quad - \left(\frac{C_\phi C_g (1+C_\varphi)^{m-n}}{C_g - C_\phi} + C_\Pi C_\beta (C_g+\rho) \sum_{j=0}^{m-n-1} (1+C_\varphi)^j \right) e^{-C_g(u-s)} |\phi_1-\phi_2| \Bigg] du \\
&\quad - \int_t^\infty |\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}|^2 \, \mathbb{1}_{\{G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}\geq 0\}} \, du - \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ (\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})' \, dW_u \\
&\leq \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ \Big[\tilde{F}_1^n(u,\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}) \\
&\quad + \hat{F}_2^n\Big(u,\hat{\pi}_u^{n,2},Y_u^{n,s,\phi_1},\Phi_u^{n,s,\phi_1};\, Y^{n+1,(n,s,\phi_1)}\Big) \\
&\quad - \hat{F}_2^n\Big(u,\hat{\pi}_u^{n,2},Y_u^{n,s,\phi_2},\Phi_u^{n,s,\phi_2};\, Y^{n+1,(n,s,\phi_2)}\Big) \\
&\quad - \rho G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2} - C_g K_{Z^n} e^{-C_g(u-s)} |\phi_1-\phi_2| \Big] du \\
&\quad - \int_t^\infty |\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}|^2 \, \mathbb{1}_{\{G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}\geq 0\}} \, du - \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ (\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})' \, dW_u \\
&\leq \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ \Bigg[C\,|\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}| + C\Bigg(\int_E \big(\tilde{G}_u^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(u,l)\big)_+ \lambda_{n+1}(l_{(n)},dl) \\
&\qquad\qquad + G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2} \Bigg) - \rho G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2} \Bigg] du \\
&\quad - \int_t^\infty |\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}|^2 \, \mathbb{1}_{\{G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}\geq 0\}} \, du - \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ (\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})' \, dW_u \\
&\leq - \int_t^\infty \mathbb{1}_{\{G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}\geq 0\}} \Big(|\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}| - C G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2} \Big)^2 du \\
&\quad + \int_t^\infty \left[C(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})^2 + \left(\int_E \big(\tilde{G}_u^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}(u,l)\big)_+ \lambda_{n+1}(l_{(n)},dl) \right)^2 \right] du \\
&\quad - \int_t^\infty 2(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})_+ (\delta Z_u^{n,s,\phi_1,\phi_2})' \, dW_u.
\end{aligned}
$$

其中常数 $C>0$ 会随行而变。注意，在倒数第二个不等式中，我们使用了以下事实：对于任意 $x\in\mathbb{R}$，$(x)_+|x| = (x)_+ x$。因此，存在 $C>0$，使得对于任意 $t\geq s$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|(G_t^{n,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_+|^2 \right] \\
&\leq C\int_t^\infty \Bigg(\mathbb{E}\left[|(G_u^{n,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(n)},l_{(n)}))_+|^2 \right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sup_{l\in E} |(\tilde{G}_u^{n+1,(n,s,\phi_1,\phi_2)}((\theta_{(n)},u),(l_{(n)},l)))_+|^2 \right] \Bigg) du. \qquad (95)
\end{aligned}
$$

同样，对于 $n=m$，存在 $C>0$，使得对任意 $t\geq s$,

$$
\mathbb{E}\left[|(G_t^{m,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(m)},l_{(m)}))_+|^2 \right] \leq C\int_t^\infty \mathbb{E}\left[|(G_u^{m,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(m)},l_{(m)}))_+|^2 \right] du. \qquad (96)
$$

利用估计式 (95) 和 (96)，我们可以递归地得到 $\delta Y^{n,\ s,\ \phi_1,\ \phi_2}$ 的上界如下。对于 $n=m$，将 Gr¨onwall 不等式应用于 (96)，可推得对任意 $(\theta_{(m)},\ l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \geq s \geq \theta_m$，$G^{m,\ s\ \phi_1\ \phi_2,\ ,}_{\ t}(\theta_{(m)},\ l_{(m)}) = 0$，因此

$$\delta Y_t^{m,s}(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \leq \delta \bar{Y}_t^{m,s} = \frac{C_\phi C_g e^{-C_g(t-s)}}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} |\phi_1 - \phi_2|. \tag{97}$$

对于 $n = m-1$ 97 $\theta_{(m-1)}\ l_{(m-1)}\ l\ \in$，利用已建立的界 $\Delta_{m-1} \times E^{m-1} \times E$ $\theta_{m-1} \leq s \leq t$ ()，对于任意 (，，) 和，我们有，

$$\begin{aligned}
&\delta Y_t^{m,(m-1,s,\phi_1,\phi_2)}((\theta_{(m-1)}, t), (l_{(m-1)}, l)) \\
&- (\hat{\pi}_t^{m-1,2})' \left(\hat{\beta}^{m-1}(\Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_1}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}, l) - \hat{\beta}^{m-1}(\Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}, l) \right) \\
\leq\ & \delta Y_t^{m,t,\Phi_t^{m,(m-1,s,\phi_1)},\Phi_t^{m,(m-1,s,\phi_2)}}((\theta_{(m-1)}, t), (l_{(m-1)}, l)) \\
&+ C_\Pi C_\beta \left| \Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_1}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}) - \Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}) \right| \\
\leq\ & \frac{C_\phi C_g}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} \Big| \Phi_t^{m,(m-1,s,\phi_1)}((\theta_{(m-1)}, t), (l_{(m-1)}, l)) \\
&- \Phi_t^{m,(m-1,s,\phi_2)}((\theta_{(m-1)}, t), (l_{(m-1)}, l)) \Big| + C_\Pi C_\beta e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2| \\
\leq\ & \frac{C_\phi C_g}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} \left(\left| \Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_1}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}) - \Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)})) \right| \right. \\
&\left. + \left| \varphi^m \left(\Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_1}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}) \right) - \varphi^m \left(\Phi_{t^-}^{m-1,s,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)})) \right) \right| \right) \\
&+ C_\Pi C_\beta e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2| \\
\leq\ & \left[\frac{C_\phi C_g (1 + C_\varphi)}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} + C_\Pi C_\beta \right] |\phi_1 - \phi_2| e^{-C_g(t-s)} = \delta \bar{Y}_t^{m-1,s}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$(\tilde{G}_t^{m,(m-1,s,\phi_1,\phi_2)}((\theta_{(m-1)}, t), (l_{(m-1)}, l)))_+ = 0$$

对于任意（$\theta_{(m-1)},\ l_{(m-1)},\ l$）$\in \Delta_{m-1} \times E^{m-1} \times E$, $t \geq s \geq \theta_{m-1}$。因此，对于 $n = m-1$，不等式（95）可化为

$$\mathbb{E}\left[|(G_t^{m-1,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}))_+|^2 \right] \leq C \int_t^\infty \mathbb{E}\left[|(G_u^{m-1,s,\phi_1,\phi_2}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}))_+|^2 \right] du.$$

由 Gr¨onwall 不等式，我们得到以下界

$$\delta Y_t^{m-1,s}(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}) \leq \delta \bar{Y}_t^{m-1,s} = \left[\frac{C_\phi C_g (1 + C_\varphi)}{(C_g - C_\phi)(C_g + \rho)} + C_\Pi C_\beta \right] e^{-C_g(t-s)} |\phi_1 - \phi_2|, \tag{98}$$

对任意（$\theta_{(m-1)},\ l_{(m-1)}$）$\in \Delta_{m-1} \times E^{m-1}$ 和 $t \geq s \geq \theta_{m-1}$。通过归纳应用上述论证，我们有 $\delta Y^{n,\ t\ }{}^{s}$（$\theta_{(n)},\ l_{(n)}$）$\leq \delta \bar{Y}^{n,\ t\ }{}^{s}$ 对任意 $n = 0, \ldots, m$，（$\theta_{(n)},\ l_{(n)}$）$\in \Delta_n \times E^n$ 和 $t \geq s \geq \theta_n$。由对称性可得（90）。

步骤 4： Z^n的马尔可夫解及界：

解分量 $Y^{n,s,\phi}$ 具有马尔可夫表示，这是 [26] 中定理 4.1 的推论；另见 [40, 30]。因此，对于任意$n = 0, \ldots\ldots, m$, $(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，以及 $t \geq \theta_n$，我们可以写成 $Y^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = y^n(\Phi^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)}))$。利普希茨性质 (48) 由 (90) 以及以下观察可得

$$|y^n(\phi_1) - y^n(\phi_2)| = \left|\delta Y^{n,\theta_n,\phi_1,\phi_2}_{\theta_n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right|.$$

此外，存在一个可测函数 $z^n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 使得 $Z^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = z^n(\Phi^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)}))$。根据 [26], 的推论 4.1，我们有

$$(\kappa^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}))' \nabla_\phi y^n(\Phi^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}), l_{(n)}) = z^n(\Phi^{n,\theta_n,\phi}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)})).$$

由于 $|\kappa^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})| = 1$，我们得到界 (48)。由此可见，截断方程 (87) 和 (86) 分别化为带有驱动项 (45) 和 (44) 的 (27) 和 (26)。证明至此完成。□

C.2 命题 5.1 的证明

我们将递归地证明这些估计。定义

$$\Delta Y^m_t((\theta_{(m-1)}, \theta), (l_{(m-1)}, l)) := Y^m_t((\theta_{(m-1)}, \theta), (l_{(m-1)}, l)) - Y^{m-1}_t\left(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}\right),$$
$$\Delta Z^m_t((\theta_{(m-1)}, \theta), (l_{(m-1)}, l)) := Z^m_t((\theta_{(m-1)}, \theta), (l_{(m-1)}, l)) - Z^{m-1}_t\left(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)}\right),$$

对任意 $((\theta_{(m-1)}, \theta), (l_{(m-1)}, l)) \in \Delta_m \times E^m$ 和 $t \geq \theta$。为方便记号，在余下的证明中，我们将省略写出 $(\theta_{(m-1)}, l_{(m-1)})$ 对此的依赖关系。

由 Itˆo 引理，对于任意 $t \leq \tau$,

$$\begin{aligned}\Delta Y^m_t(\theta, l) = \Delta Y^m_\tau(\theta, l) + \int_t^\tau \Bigg(&- \rho \Delta Y^m_u(\theta, l) + \min_{\pi \in \Pi_m} \hat{F}^m_1\left(\pi, Z^m_u(\theta, l), \Phi^m_u(\theta, l)\right) \\ &- \min_{\pi \in \Pi_{m-1}} \left\{\hat{F}^{m-1}_1\left(\pi, Z^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right) + \hat{F}^{m-1}_2\left(u, \pi, Y^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right)\right\} \Bigg) du \\ &- \int_t^\infty \Delta Z^m_u(\theta, l) dW_u. \end{aligned} \tag{99}$$

对于任意 $u \geq t \geq \theta$，令

$$\pi^{m-1}_u := \arg\min_{\pi \in \Pi_{m-1}} \left\{\hat{F}^{m-1}_1\left(\pi, Z^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right) + \hat{F}^{m-1}_2\left(u, \pi, Y^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right)\right\}.$$

根据假设 5.2–5.3 和定理 5.1，存在 $C_{m,1}$,$C_{m,2}$,$C_{m,3} > 0$ inde - 与 ρ 无关，使得

$$\begin{aligned} &\min_{\pi \in \Pi_m} \hat{F}^m_1\left(\pi, Z^m_u(\theta, l), \Phi^m_u(\theta, l)\right) \\ &- \min_{\pi \in \Pi_{m-1}} \left\{\hat{F}^{m-1}_1\left(\pi, Z^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right) + \hat{F}^{m-1}_2\left(u, \pi, Y^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right)\right\} \\ \leq\ &\hat{F}^m_1\left(0, Z^m_u(\theta, l), \Phi^m_u(\theta, l)\right) \\ &- \hat{F}^{m-1}_1\left(\pi^{m-1}_u, Z^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right) - \hat{F}^{m-1}_2\left(u, \pi^{m-1}_u, Y^{m-1}_u, \Phi^{m-1}_u\right) \\ \leq\ &C_{m,1} - C_{m,2} \int_E e^{\gamma\left(Y^m_u(u,l') - Y^{m-1}_u\right)} \lambda_m(dl') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_{m,1} - C_{m,2} \int_E \left[1 + \gamma \left(Y_u^m(u,l') - Y_u^{m-1}\right)\right] \lambda_m(dl') \\
&= C_{m,1} - C_{m,2} - \gamma C_{m,2} \left(\Delta Y_u^m(\theta,l) + \underline{\int_E \left(Y_u^m(u,l') - Y_u^m(\theta,l)\right) \lambda_m(dl')} \right) \\
&\leq C_{m,1} - C_{m,2} + \gamma C_{m,2} \left[-\Delta Y_u^m(\theta,l) + C_{m,3} \int_E \left|\Phi_u^m(u,l') - \Phi_u^m(\theta,l)\right| \lambda_m(dl') \right].
\end{aligned} \tag{100}
$$

具体而言，我们有

$$
C_{m,1} = \frac{\gamma}{2}(K_Z^m)^2,\ C_{m,2} = \frac{1}{\gamma} e^{-C_\Pi K_\beta},\ C_{m,3} = K_Z^m.
$$

注意，底层项是由于指标不匹配而需要界定的额外项。结合（99）—（100），我们得到

$$
\begin{aligned}
\Delta Y_t^m(\theta,l) \leq \Delta Y_\tau^m(\theta,l) + \int_t^\tau \Big(& C_{m,1} - C_{m,2} + \gamma C_{m,2} C_{m,3} \int_E \left|\Phi_u^m(u,l') - \Phi_u^m(\theta,l)\right| \lambda_m(dl') \\
& - (\rho + \gamma C_{m,2}) \Delta Y_u^m(\theta,l) \Big) du - \int_t^\tau \Delta Z_u^m(\theta,l) dW_u.
\end{aligned}
$$

根据BSDE比较原理，对于任意 $((\theta_{(m-1)},\theta),(l_{(m-1)},l)) \in \Delta_m \times E^m$ 以及 $\theta \leq t \leq \tau$，我们有

$$
\Delta Y_t^m(\theta,l) \leq \Delta \bar{Y}_t^m(\theta,l),
$$

其中后者是以下倒向随机微分方程的解:

$$
\begin{aligned}
\Delta \bar{Y}_t^m(\theta,l) = \Delta \bar{Y}_\tau^m(\theta,l) + \int_t^\tau \Big(& C_{m,1} - C_{m,2} + \gamma C_{m,2} C_{m,3} \int_E \left|\Phi_u^m(u,l') - \Phi_u^m(\theta,l)\right| \lambda_m(dl') \\
& - (\rho + \gamma C_{m,2}) \Delta \bar{Y}_u^m(\theta,l) \Big) du - \int_t^\tau \Delta \bar{Z}_u^m(\theta,l) dW_u.
\end{aligned} \tag{101}
$$

显然，倒向随机微分方程（101）存在唯一解。求解该方程可得

$$
\begin{aligned}
\Delta \bar{Y}_t^m(\theta,l) = & e^{-(\rho+\gamma C_{m,2})(\tau-t)} \mathbb{E}\left[\Delta Y_\tau^m(\theta,l) | \mathcal{F}_t\right] \\
& + \int_t^\tau e^{-(\rho+\gamma C_{m,2})(u-t)} \Big(C_{m,1} - C_{m,2} \\
& + \gamma C_{m,2} C_{m,3} \int_E \mathbb{E}\left[\left|\Phi_u^m(u,l') - \Phi_u^m(\theta,l)\right| \mid \mathcal{F}_t\right] \Big) \lambda_m(dl') du.
\end{aligned}
$$

令 $\tau \to \infty$ 趋于极限，我们得到

$$
\begin{aligned}
& Y_t^m(\theta,l) - Y_t^{m-1} \\
\leq & \frac{C_{m,1} - C_{m,2}}{C_{m,2}} + \gamma C_{m,2} C_{m,3} \int_t^\infty e^{-\gamma C_{m,2}(u-t)} \int_E \mathbb{E}\left[\left|\Phi_u^m(u,l') - \Phi_u^m(\theta,l)\right| \left|\mathcal{F}_t\right.\right] \lambda_m(dl') du.
\end{aligned} \tag{102}
$$

接下来，我们在（102）中取 $\theta = t$，使得

$$
Y_t^m(t,l) - Y_t^{m-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{C_{m,1}-C_{m,2}}{C_{m,2}} + \gamma C_{m,2}C_{m,3}\int_t^\infty e^{-\gamma C_{m,2}(u-t)}\int_E \mathbb{E}\left[\left|\Phi_u^m(u,l')-\Phi_u^m(t,l)\right| \mid \mathcal{F}_t\right]\lambda_m(dl')du \\
&= \frac{C_{m,1}-C_{m,2}}{C_{m,2}} + \gamma C_{m,2}C_{m,3}\int_t^\infty e^{-\gamma C_{m,2}(u-t)} \\
&\quad \cdot \int_E \mathbb{E}\left[\left|\Phi_u^{m-1}+\varphi^{m-1}(\Phi_u^{m-1})-\Phi_u^m(t,l)\right| \mid \mathcal{F}_t\right]\lambda_m(dl')du. \qquad (103)
\end{aligned}
$$

对 $|\Phi_s^{m-1}-\Phi_s^m(t,\ l)|^2$ 应用伊藤引理，并注意到 $\Phi_t^{m-1}(t,\ l)-\Phi_t^{m-1}=\varphi^{m-1}(\Phi_t^{m-1})$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|\Phi_u^m(t,l)-\Phi_u^{m-1}|^2|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\left|\Phi_t^m(t,l)-\Phi_t^{m-1}\right|^2 + \int_t^u \Big(2\left(\Phi_s^m(t,l)-\Phi_s^{m-1}\right)'\left(g^{m-1}(\Phi_s^m(t,l))-g^{m-1}(\Phi_s^{m-1})\right) \\
&\quad + 2\left(\Phi_s^m(t,l)-\Phi_s^{m-1}\right)'\left(g^m(\Phi_s^m(t,l),t,l)-g^{m-1}(\Phi_s^m(t,l))\right) \\
&\quad + |\kappa^{m-1}-\kappa^m(t,l)|^2\Big)ds \mid \mathcal{F}_t\Bigg] \\
&\le \mathbb{E}\Bigg[\left|\varphi^{m-1}(\Phi_t^{m-1})\right|^2 + \int_t^u \Big(C_g^{-1}\left|g^m(\Phi_s^m(t,l),t,l)-g^{m-1}(\Phi_s^{m-1}(t,l))\right|^2 \\
&\quad + |\kappa^{m-1}-\kappa^m(t,l)|^2\Big)ds \mid \mathcal{F}_t\Bigg],
\end{aligned}
$$

其中最后一行由 (41) 和杨氏不等式得出。由格朗沃尔不等式以及 φ^{m-1} 和 g^m 的有界性（$(\cdot,t,l)$ $-g^{m-1}$（$\cdot$），对任意 $u\ge t\ge 0$,

$$
\mathbb{E}[|\Phi_u^m(t,l)-\Phi_u^{m-1}|^2|\mathcal{F}_t] \le K_\varphi^2 + (C_g^{-1}D_g^2+4)(u-t).
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\Phi_u^m(u,l')-\Phi_u^m(t,l)\right| \mid \mathcal{F}_t\right] &\le \mathbb{E}[|\varphi^{m-1}(\Phi_u^{m-1})| \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[|\Phi_u^m(t,l)-\Phi_u^{m-1}||\mathcal{F}_t] \\
&\le K_\varphi + \sqrt{K_\varphi^2 + (C_g^{-1}D_g^2+4)(u-t)} \\
&\le 2K_\varphi + \sqrt{(C_g^{-1}D_g^2+4)(u-t)}. \qquad (104)
\end{aligned}
$$

因此，将 (104) 代入 (103)，对任意 $\rho>0$ 以及所有 $((\theta_{(m-1)},\theta),(l_{(m-1)},l))\in\Delta_m\times E^m$，可得 $Y_t^m(t,l)-Y_t^{m-1}\le K_m$。汇总上述常数，我们推出 $n=m$ 的 (49)。

利用 $n=m$ 的一致有界性 (49)，我们可以重复上述论证，得到 $n=m-1$ 的有界性。其余情形可通过归纳法得出，细节从略。□

C.3 定理 5.2 的证明

我们通过归纳法证明该结论。设 C_Π 为方程 (50) 的解，对于$n=0$、.....、m，设 $(Y^{n,\ C_\Pi},\ Z^{n,\ C_\Pi})$ 为以下无限时域倒向随机微分方程的解:

$$
dY_t^{n,C_\Pi} = \left(\rho Y_t^{n,C_\Pi} - \min_{\pi\in\Pi_n,|\pi|\le C_\Pi}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})\right)dt + (Z_t^{n,C_\Pi})'dW_t,
$$

ˆ其中，驱动项 f^n 采用了定理 5.1 的证明中的约定，并且ˆ $f^m(t,\pi,y_1,z,\phi;\ y_2)$ $=\hat{}f^m(t,\pi,z,\phi)$，其中 Y^{n+1} 是在不存在约束 $|\pi|\le C_\Pi$ 的情况下，与驱动项 (45) 对应的、指标为 $n+1$ 的无限时域倒向随机微分方程 (27) 的解。根据归纳假设 $(Y^{n+1,C_\Pi},Z^{n+1,C_\Pi})=(Y^{n+1},Z^{n+1})$，$n=0,\ .....,\ m-1$，显然上式存在唯一解 $(Y^{n,C_\Pi},Z^{n,C_\Pi})$。我们断言 $(Y^{n,C_\Pi},Z^{n,C_\Pi})=(Y^n,Z^n)$。

为此，考虑另一个倒向随机微分方程:

$$d\tilde{Y}_t^n=\left(\rho\tilde{Y}_t^n-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})\right)dt+(\tilde{Z}_t^n)'dW_t,$$

由于 Y^{n,C_Π},Y^{n+1} 有界，且驱动项显然满足 [20]的假设 A1 (i)-(ii)，因此该方程存在唯一解。

根据估计式 (48)、(49)、归纳假设，并沿用 (39) 的推导过程，极小值点

$$\pi_t^{n,C_\Pi}:=\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})=\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1,C_\Pi})$$

满足

$$\begin{aligned}|\pi_t^{n,C_\Pi}|&\le\frac{1}{\sigma_{\min}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{2}K_{\Delta Y^{n+1}}}\mathbb{1}_{\{n\neq m\}}+2\left|Z_t^{n,C_\Pi}-\frac{\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)}{\gamma}\right|\right)\\&\le\frac{1}{\sigma_{\min}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{2}K_{\Delta Y^{n+1}}}\mathbb{1}_{\{n\neq m\}}+\frac{2\|\hat{\alpha}^n\|}{\gamma}+2K_{Z^n}\right)\le C_\Pi,\end{aligned}$$

由于 $Y^{n+1,\ C_\Pi}(t,l)-Y^{n,\ C_\Pi}\le K_{\Delta Y^{n+1}}$，这归功于命题 5.1。因此,

$$\begin{aligned}d\tilde{Y}_t^n&=\left(\rho\tilde{Y}_t^n-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})\right)dt+(\tilde{Z}_t^n)'dW_t\\&=\left(\rho\tilde{Y}_t^n-\min_{\pi\in\Pi_n,|\pi|\le C_\Pi}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})\right)dt+(\tilde{Z}_t^n)'dW_t\end{aligned}$$

根据关于 $(Y^{n,C_\Pi},Z^{n,C_\Pi})$ 的方程解的唯一性，我们有 $(Y^{n,C_\Pi},Z^{n,C_\Pi})=(\tilde{Y}^n,\tilde{Z}^n)$。因此，$(Y^{n,C_\Pi},Z^{n,C_\Pi})$ 满足

$$dY_t^{n,C_\Pi}=\left(\rho Y_t^{n,C_\Pi}-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n(t,\pi,Y_t^{n,C_\Pi},Z_t^{n,C_\Pi},\Phi_t^n;Y^{n+1})\right)dt+(Z_t^{n,C_\Pi})'dW_t.$$

最后，根据非截断反向随机微分方程（$Y^n,\ Z^n$）解的唯一性，我们得到 $\pi^{n,\ C_\Pi}_{\cdot,\ t}=\pi_t^{*n}$、（$Y^n,\ Z^n$）$=$（$Y^{n,\ C_\Pi},\ Z^{n,\ C_\Pi}$），以及 $|\pi_t^{*n}|\le C_\Pi$。注意，上述论证对 $n=m$ 仍然成立，因此证明完成。□

C.4 引理 5.1 的证明

我们首先证明，存在 $C_1>0,C_2\ge0$，使得对于任意 $n=0,\dots,m-1$，$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $\phi\in\mathbb{R}^d$,

$$\left(g^n(\phi,\theta_{(n)},l_{(n)})\right)'\phi\le-C_1|\phi|^2+C_2.\tag{105}$$

利用假设5.5，对于任意 $n=0,\dots,m$ 和 $(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$，我们有，

$$\left|g^n(0,\theta_{(n)},l_{(n)})\right|\le\sum_{k=1}^{m}\left|g^k(0,\theta_{(k)},l_{(k)})-g^{k-1}(0,\theta_{(k-1)},l_{(k-1)})\right|+|g^0(0,0)|=:C_0.$$

利用这一点、假设 5.1 和杨氏不等式，对于任意 $\phi\in\mathbb{R}^d$, $n=0$、……、m以及 $(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$,

$$\begin{aligned}g^n(\phi,\theta_{(n)},l_{(n)})'\phi&\le-C_g|\phi|^2+g^n(0,\theta_{(n)},l_{(n)})'\phi\\&\le-C_g|\phi|^2+\frac{C_g}{2}|\phi|^2+\frac{1}{2C_g}\left|g^n(0,\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2\\&\le-\frac{C_g}{2}|\phi|^2+\frac{C_0}{2C_g},\end{aligned}$$

因此，取 $C_1:=\frac{C_g}{2}$ 和 $C_2:=\frac{C_0}{2C_g}$，即可得到式 (105)。

对于 $\varepsilon>0$，我们定义过程 $P_t^\varepsilon:=e^{\varepsilon|\Phi_t^m|^2}$, $t\ge\theta_m$。我们声称存在 $C_\varepsilon>0$，使得对于任意 $(\theta_{(m)},\ l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$ 和 $t\ge\theta_m$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\varepsilon|\Phi_t^m|^2}\right]\le C_\varepsilon<\infty\tag{106}$$

只要 $\varepsilon>0$ 足够小。于是，由初等不等式 $c|\Phi_t^m|\le\varepsilon|\Phi_t^m|^2+c^2/(4\varepsilon)$ 可得上界。

接下来证明式 (106)。对 P_t^ε 应用伊藤引理，得到

$$dP_t^\varepsilon=P_t^\varepsilon\Big(2\varepsilon(\Phi_t^m)'g^m(\Phi_t^m)+\varepsilon+2\varepsilon^2|\Phi_t^m|^2\Big)\,dt+2\varepsilon\,P_t^\varepsilon(\Phi_t^m)'\kappa^m dW_t.\tag{107}$$

对式 (107) 取条件期望并利用式 (105)，对于任意 $t\ge\theta_m$,[5]，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[P_t^\varepsilon\big|\mathcal{F}_{\theta_m}\big]\\&=P_{\theta_m}^\varepsilon+\mathbb{E}\left[\int_{\theta_m}^t P_s^\varepsilon\Big(2\varepsilon(\Phi_s^m)'g^m(\Phi_s^m)+\varepsilon+2\varepsilon^2|\Phi_s^m|^2\Big)\,ds\,\middle|\,\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\\&\le P_{\theta_m}^\varepsilon+\mathbb{E}\left[\int_{\theta_m}^t P_s^\varepsilon\Big(-2\varepsilon(C_1-\varepsilon)|\Phi_s^m|^2+\varepsilon(2C_2+1)\Big)\,ds\,\middle|\,\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\\&\le P_{\theta_m}^\varepsilon+\mathbb{E}\left[\int_{\theta_m}^t\Big(-2(C_1-\varepsilon)(P_s^\varepsilon-1)+\varepsilon(2C_2+1)P_s^\varepsilon\Big)\,ds\middle|\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\\&=P_{\theta_m}^\varepsilon+\int_{\theta_m}^t\Big(-[2(C_1-\varepsilon)-\varepsilon(2C_2+1)]\,\mathbb{E}\left[P_s^\varepsilon|\mathcal{F}_{\theta_m}\right]+2(C_1-\varepsilon)\Big)ds\end{aligned}$$

其中我们对 $x\ge0$ 使用了不等式 $xe^{\varepsilon x}\ge\frac{1}{\varepsilon}(e^{\varepsilon x}-1)$。

通过选取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $c_\varepsilon:=2(C_1-\varepsilon)-\varepsilon(2C_2+1)>0$，根据 Gr¨onwall 不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\big[P_t^\varepsilon\,\big|\,\mathcal{F}_{\theta_m}\big]\le e^{-c_\varepsilon(t-\theta_m)}P_{\theta_m}^\varepsilon+\frac{2(C_1-\varepsilon)}{c_\varepsilon}\left(1-e^{-c_\varepsilon(t-\theta_m)}\right)$$

[5]这一事实 $\mathbb{E}[\int_{\theta_m}^t P_s^\varepsilon(\Phi_s^m)'\kappa^m\,dW_s\,|\,\mathcal{F}_{\theta_m}]=0$ 可由被积函数的平方可积性推出，而该性质成立是因为 $\mathbb{E}[\int_{\theta_m}^t(P_s^{2\varepsilon}+|\Phi_s^m|^2)\,ds]<\infty$。后者可通过同样的耗散性论证和 Gr¨onwall 型论证，结合标准的局部化方法得到证明。

$$\leq e^{-c_\varepsilon(t-\theta_m)}e^{\varepsilon|\Phi^m_{\theta_m}|^2}+\frac{2(C_1-\varepsilon)}{c_\varepsilon}.$$

对 $e^{\varepsilon|\Phi^n_{\theta_n}|^2}$ 上的 $n=m-1,\ldots,0$ 递归地重复这一论证，并利用 φ^n 的有界性，可得 $n\leq m$ 的式 (106)。

最后，下界可直接由詹森不等式得到：对于任意$n=0$、.....、 m、$(\theta_{(n)},\ l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$和 $t\geq\theta_n$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-c|\Phi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})|}\right]\geq\left(\mathbb{E}\left[e^{c|\Phi^n_t(\theta_{(n)},l_{(n)})|}\right]\right)^{-1}\geq\frac{1}{K_c}.$$

□

C.5 命题 5.2 的证明

我们取序列$(\rho_i)_{i=1}^\infty$，如收敛式 (53) 中所指定。由于

$$\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\,\middle|\,\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]}{\mathbb{P}(T\geq T_m)},$$

且 $T_m<\infty$ 几乎必然成立，因此只需研究期望

$$\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right],$$

它可以写成

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i,m}(T_{(m)},L_{(m)})-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i,m}(T_{(m)},L_{(m)})\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_{\Delta_m\times E^m}e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i,m}(\theta_{(m)},l_{(m)})-X_{\theta_m}^{\pi^*,\rho_i,m}(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)}\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\,\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}\,d\theta_{(m)}\,\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\right].
\end{aligned}$$

由 (11)，我们有

$$\begin{aligned}
&e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i,m}(\theta_{(m)},l_{(m)})-X_{\theta_m}^{\pi^*,\rho_i,m}(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)}\\
&=\exp\left(\gamma\int_{\theta_m}^T\left[\frac{\gamma}{2}\left|\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'\hat\sigma^m(\Phi^m_t(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right|^2\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'(\hat\sigma^m\hat\alpha^m)(\Phi^m_t(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right]dt\right)\\
&\quad\cdot\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(-\int_{\theta_m}^{\cdot}\gamma\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'\hat\sigma^m(\Phi^m_t(\theta_{(m)},l_{(m)}))dW_t\right)\\
&=e^{\int_{\theta_m}^T\mathcal{L}(\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi^m_t(\theta_{(m)},l_{(m)}))dt}\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(-\int_{\theta_m}^{\cdot}\gamma\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'\hat\sigma^m(\Phi^m_t(\theta_{(m)},l_{(m)}))dW_t\right),
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}:\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 由下式给出

$$\mathcal{L}(\pi,\phi):=\frac{\gamma^2}{2}|\pi'\hat\sigma^m(\phi)|^2-\gamma\pi'\hat\sigma^m(\phi)\hat\alpha^m(\phi).$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m}\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}e^{\int_{\theta_m}^T\mathcal{L}(\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))dt}\\
&\quad\cdot\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(-\int_{\theta_m}^{\cdot}\gamma\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'\hat{\sigma}^m(\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))dW_t\right)d\theta_{(m)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg].
\end{aligned}\tag{108}$$

接下来，我们考虑以下期望:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(Y_T^{\rho_i}-Y_{T_m}^{\rho_i}-\int_{T_m}^T\rho_iY_s^{\rho_i}\,ds\right)}\mathcal{E}_{T_m,T}\left(\gamma\int_{T_m}^{\cdot}\left((Z_t^{\rho_i})'-(\pi_t^*)'\sigma_t\right)dW_t\right)\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m}\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}e^{-\gamma\left(Y_T^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})-Y_{\theta_m}^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})-\rho_i\int_{T_m}^TY_s^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)}\\
&\quad\cdot\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(\gamma\int_{\theta_m}^{\cdot}\left(Z_t^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})'-[(\pi_t^{*m})'\hat{\sigma}^m](\theta_{(m)},l_{(m)})\right)dW_t\right)d\theta_{(m)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg].
\end{aligned}\tag{109}$$

利用 (26)，不难验证

$$\begin{aligned}
&e^{-\gamma\left(Y_T^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})-Y_{\theta_m}^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})-\rho_i\int_{T_m}^TY_s^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})ds\right)}\\
&\quad\cdot\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(\gamma\int_{\theta_m}^{\cdot}\left(Z_t^{m,\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})'-[(\pi_t^{*m})'\hat{\sigma}^m](\theta_{(m)},l_{(m)})\right)dW_t\right)\\
=\ &e^{\int_{\theta_m}^T\mathcal{L}(\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))dt}\\
&\quad\cdot\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(-\int_{\theta_m}^{\cdot}\gamma\pi_t^{*m}(\theta_{(m)},l_{(m)})'\hat{\sigma}^m(\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))dW_t\right).
\end{aligned}\tag{110}$$

结合 (108)–(110)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i}-X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(Y_T^{\rho_i}-Y_{T_m}^{\rho_i}-\rho_i\int_{T_m}^TY_s^{\rho_i}ds\right)}\mathcal{E}_{T_m,T}\left(\gamma\int_{T_m}^{\cdot}\left((Z_t^{\rho_i})'-(\pi_t^*)'\sigma_t\right)dW_t\right)\mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m}\psi_T^{\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)})\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})e^{-\gamma\left(\bar{y}^{m,\rho_i}(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))-\bar{y}^{m,\rho_i}(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)}\\
&\quad\cdot e^{\gamma\int_{T_m}^T\rho_iy^{m,\rho_i}(\Phi_s^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))}\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}d\theta_{(m)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg],
\end{aligned}$$

其中 $\bar{y}^{m,\rho}(\phi):=y^{m,\rho}(\phi)-y^{m,\rho}(\hat{\phi}_m)$，$\phi\in\mathbb{R}^d$，以及

$$\psi_T^{\rho_i}(\theta_{(m)},l_{(m)}):=\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(\gamma\int_{\theta_m}^{\cdot}\left(z_t^{m,\rho_i}(\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))'-[(\pi_t^{*m})'\hat{\sigma}^m](\theta_{(m)},l_{(m)})\right)dW_t\right)$$

由于 π^* 有界且可容许，因此它是一个一致可积鞅。

利用 $\bar{y}^{m,\rho}$ 关于 ρ 一致的线性增长性质 (51)、 $\Phi_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})$ 的一致可积性（引理 5.1）、收敛关系 $\bar{y}^{m,\rho_i}(\cdot) \to \bar{y}^m(\cdot)$, $\hat{}\,\hat{}\,\rho_i y^{m,\rho_i}(\Phi_t^m) = \rho_i(y^{m,\rho_i}(\Phi_t^m) - \bar{y}^m(\phi_m)) + \rho_i \bar{y}^m(\phi_m) \to \varrho_m$, $z^{m,\rho_i}(\cdot) \to \bar{z}^m(\cdot)$，以及一致有界性 (48)，由维塔利收敛可得,

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(X_T^{\pi^*,\rho_i} - X_{T_m}^{\pi^*,\rho_i}\right)} \mathbb{1}_{\{T\geq T_m\}}\right] \\
&= e^{\gamma\varrho_m(T-T_m)} \mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m} \psi_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \\
&\quad \cdot \eta_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}} d\theta_{(m)} \boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg],
\end{aligned} \tag{111}$$

其中

$$\psi_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) := \mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(\gamma \int_{\theta_m}^{\cdot} \left(\mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})' - [(\pi_t^{*m})'\hat{\sigma}^m](\theta_{(m)}, l_{(m)})\right) dW_t\right),$$

and

$$\pi_t^{m*} := \arg\min_{\pi\in\Pi_m} \hat{f}^m\left(\pi, \mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)}), \Phi_t^m(\theta_{(m)}, l_{(m)})\right).$$

由 $\mathcal{Z}^m$ 和 π_t^{m*} 的有界性可知， ψ_T 是一致可积鞅。

接下来我们证明，存在 $0 < c < C < \infty$，使得对于任意 $T > 0$,

$$\begin{aligned}
c <& \mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m} \psi_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \eta_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \\
&\cdot \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}} d\theta_{(m)} \boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg] < C.
\end{aligned} \tag{112}$$

为此，我们通过下式定义测度 $\mathbb{Q}^\psi$

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^\psi}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_{\theta_m}} = \psi_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}).$$

由 $\mathcal{Y}_T^m$ 的马尔可夫表示 $\theta_{(m)}$， $l_{(m)}$ 的线性增长性质以及 Φ^m 的遍历性条件，存在与 T 无关的 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C} e^{-C|\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})|} &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\psi}\left[e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \middle| \mathcal{F}_{\theta_m}\right] \\
&\leq C e^{C|\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})|}
\end{aligned} \tag{113}$$

对于任意 $(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \in \Delta_m \times E^m$；见 [30] 中的命题 B.1。根据引理 5.1，存在与 T 无关的 $K > 0$，使得

$$0 < K^{-1} \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\psi}\left[e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \middle| \mathcal{F}_{\theta_m}\right]\right] \leq K. \tag{114}$$

利用这一点以及 η的上界，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\psi_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \eta_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\theta_m}\right] \\
&\leq \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}} H_T(\theta_{(m)}, l_{(m)}) \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\psi}\left[e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})) - \bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)} \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}} \middle| \mathcal{F}_{\theta_m}\right]\right]
\end{aligned}$$

$$\leq K\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}H_T(\theta_{(m)},\ l_{(m)})。 \tag{115}$$

由 (55)，我们得到 (112) 中的上界。

同样，由 (114) 以及 η 的下界，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\psi_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}\middle|\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\right]\\
&\geq \mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}h_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\psi}\left[e^{-\gamma\left(\bar{y}^m(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\bar{y}^m(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)}))\right)}\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}\middle|\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\right]\\
&\geq K^{-1}\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}h_T(\theta_{(m)},l_{(m)}).
\end{aligned}$$

(112) 中的下界由 (55) 得出。

最后，由 (112)，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\mathbb{E}\Bigg[\int_{\Delta_m\times E^m}\psi_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\eta_T(\theta_{(m)},l_{(m)})e^{-\gamma\left(\mathcal{Y}_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\mathcal{Y}_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)}\\
&\cdot\mathbb{1}_{\{T\geq\theta_m\}}d\theta_{(m)}\boldsymbol{\lambda}(dl_{(m)})\Bigg]=0.
\end{aligned}$$

利用这一点和 (111)，我们便得到了结果。 □

C.6 命题 5.3 的证明

ˆ 考虑扰动后的函数 $\bar{y}^{n,\ \rho}(\phi)\ =y^{n,\ \rho}(\phi)\ -y^{n,\ \rho}(\phi_n)$，$n=0,\ldots,m$，$\phi\in\mathbb{R}^d$，以及满足 (56) 的相应过程 $\bar{Y}^{n,\ \rho}_{\cdot,\ t}(\theta_{(n)},\ l_{(n)}):=\bar{y}^{n,\ \rho}(\Phi_t^n(\theta_{(n)},\ l_{(n)}))$。根据定理 5.1，函数 $\bar{y}^{n,\ \rho}$ 满足关于 ρ 一致的线性增长和利普希茨性质：对于任意 ϕ，ϕ_1，$\phi_2\in\mathbb{R}^d$ 和 $\rho>0$，

$$|\bar{y}^{n,\rho}(\phi)|\leq K_{Z^n}|\phi-\hat{\phi}_n|\leq K_{Z^n}(|\phi|+|\hat{\phi}_n|),\ |\bar{y}^{n,\rho}(\phi_1)-\bar{y}^{n,\rho}(\phi_2)|\leq K_{Z^n}|\phi_1-\phi_2|. \tag{116}$$

另一方面，根据定理 5.1 和命题 5.1，对于任意 $n=0,\ldots,m-1$ 和 $\rho>0$，有：

$$\begin{aligned}
e^{y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n)}&=e^{y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))+y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))-y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n)}\\
&\leq e^{K_{Z^{n+1}}(1+|\hat{\phi}_{n+1}|+(1+K_\varphi)|\hat{\phi}_n|)+K_{\Delta Y^{n+1}}}.
\end{aligned}$$

ˆ 利用 (116)、$\rho|y^{n,\ \rho}(\phi_n)|\leq K_Y$ 以及标准对角线论证，存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^\infty$，其中 $\rho_i\downarrow 0$，使得对于 $\mathbb{R}^d$ 的稠密子集中的 ϕ，

$$\lim_{i\to\infty}\rho_i y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n)=\varrho_n\in\mathbb{R},\ \lim_{i\to\infty}\bar{y}^{n,\rho_i}(\phi)=\bar{y}^n(\phi), \tag{117}$$

对于任意 $n=0,\ldots,m$，以及

$$\lim_{i\to\infty}e^{\gamma(y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n))}=\delta_n\in\left[0,e^{\gamma K_{Z^{n+1}}(1+|\hat{\phi}_{n+1}|+(1+K_\varphi)|\hat{\phi}_n|)+\gamma K_{\Delta Y^{n+1}}}\right] \tag{118}$$

对于 $n=0,\ldots,m-1$。由一致Lipschitz性质 (116)，收敛性可以扩展到整个定义域 $\mathbb{R}^d$。此外，对于任意 $\rho>0$ 和 $n=0,\ldots,m-1$，利用 (116) 和 (49)，

$$\rho\left(y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n)\right)\leq\rho\big(y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_{n+1})-y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_n+\varphi^n(\hat{\phi}_n))$$

$$
\begin{aligned}
&+ y^{n+1,\rho}(\hat{\phi}_n + \varphi^n(\hat{\phi}_n)) - y^{n,\rho}(\hat{\phi}_n)\big) \\
&\le C\rho(1 + |\hat{\phi}_n| + |\hat{\phi}_{n+1}|) + \rho K_{\Delta Y^{n+1}} \to 0
\end{aligned}
$$

当 $\rho \to 0$ 时。因此，我们有 $\varrho_{n+1} - \varrho_n \le 0$。收敛性 (117) 表明存在一个序列 $(\rho_i)_{i=1}^{\infty}$, $\rho_i \downarrow 0$，使得

$$
\lim_{i\to\infty} \bar{Y}_t^{n,\rho_i}(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \bar{y}^n\left(\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right).
$$

同样地，利用 Z^n、$^{\rho}$ 在 ρ 中的一致有界性（见定理 5.1），可以按标准方法证明存在一个函数序列 $\bar{z}^n$：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$、$n = 0$、……、$m$，使得 $\lim_{i\to\infty} Z^{n,\rho_i}_t(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \bar{z}^n(\Phi_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}))$。于是，元组 $\left(\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})\ \mathcal{Z}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)})\ \varrho_n, \delta_n\right)_{n=0}^m$ 是以下遍历倒向随机微分方程系统的解：对于 $n = 0$、……、$m-1$，$(\theta_{(n)}, l_{(n)}) \in \Delta_n \times E^n$，以及 $t \ge \theta_n$，

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \Bigg(&\varrho_{n+1} - \min_{\pi\in\Pi_n}\Bigg\{\hat{F}_1^n(\pi, \mathcal{Z}_t^n, \Phi_t^n) \\
&+ \frac{\delta_n}{\gamma}\int_E e^{\gamma(\mathcal{Y}_t^{n+1}(t,l) - \mathcal{Y}_t^n - \pi'\hat{\beta}^n(\Phi_{t-}^n, l))}\Bigg\}\lambda_{n+1}(dl)\Bigg)dt + (\mathcal{Z}_t^n)' dW_t,
\end{aligned}
$$

其中我们约定 $\delta_m \equiv 0$，并为书写方便省略了指标 $(\theta_{(n)},\ l_{(n)})$ 对其依赖关系的书写。

固定 $n = 0, \ldots, m-1$，并反设 $\delta_n = 0$。那么，对于任意 $t \le \tau$，利用 $\varrho_{n+1} \le \varrho_n$ 这一事实，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_t^n(\theta_{(n)}, l_{(n)}) - \mathcal{Y}_t^{n+1}(\theta_{(n+1)}, l_{(n+1)}) \\
&= \mathcal{Y}_\tau^n - \mathcal{Y}_\tau^{n+1} + \int_t^\tau \Bigg(\varrho_{n+1} - \varrho_n + \min_{n\in\Pi_n}\hat{F}_1^n(\pi, \mathcal{Z}_s^n, \Phi_s^n) - \min_{\pi\in\Pi_{n+1}}\Bigg\{\hat{F}_1^{n+1}(\pi, \mathcal{Z}_s^{n+1}, \Phi_s^{n+1}) \\
&\quad + \frac{\delta_{n+1}}{\gamma}\int_E e^{\gamma(\mathcal{Y}_t^{n+2}(s,l) - \mathcal{Y}_s^{n+1} - \pi'\hat{\beta}^n(\Phi_{s-}^{n+1}, l))}\Bigg\}\lambda_{n+2}(dl)\Bigg)ds + \int_t^\tau \left(\mathcal{Z}_s^{n+1} - \mathcal{Z}_s^n\right)' dW_s \\
&\le \mathcal{Y}_\tau^n - \mathcal{Y}_\tau^{n+1} + \int_t^\tau \left(\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{F}_1^n(\pi, \mathcal{Z}_s^n, \Phi_s^n) - \min_{\pi\in\Pi_{n+1}}\hat{F}_1^{n+1}(\pi, \mathcal{Z}_s^{n+1}, \Phi_s^{n+1})\right)ds \\
&\quad + \int_t^\tau \left(\mathcal{Z}_s^{n+1} - \mathcal{Z}_s^n\right)' dW_s.
\end{aligned}
$$

利用假设 5.8,

$$
\begin{aligned}
&\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{F}_1^n(\pi, \mathcal{Z}_t^n, \Phi_t^n) - \min_{\pi\in\Pi_{n+1}}\hat{F}_1^{n+1}(\pi, \mathcal{Z}_t^{n+1}, \Phi_t^{n+1}) \\
&\le \min_{\pi\in\Pi_n}\Bigg\{\frac{\gamma}{2}\left|\hat{\sigma}^n(\Phi_s^n)\pi - \left(\mathcal{Z}_t^n + \frac{\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)}{\gamma}\right)^2\right| - \hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)'\mathcal{Z}_t^n \\
&\quad - \frac{|\hat{\alpha}^n(\Phi_t^{n+1})|^2}{2\gamma}\Bigg\} - \min_{\pi\in\Pi_{n+1}}\Bigg\{\frac{\gamma}{2}\left|\hat{\sigma}^{n+1}(\Phi_s^{n+1})\pi - \left(\mathcal{Z}_t^{n+1} + \frac{\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})}{\gamma}\right)^2\right| \\
&\quad - \hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})'\mathcal{Z}_t^{n+1} - \frac{|\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})|^2}{2\gamma}\Bigg\} \\
&\le \frac{\gamma}{2}|\mathcal{Z}_t^n|^2 - \hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)'\mathcal{Z}_t^n - \frac{|\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)|^2}{2\gamma} + \hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})'\mathcal{Z}_t^{n+1} + \frac{|\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})|^2}{2\gamma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\frac{|\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)|^2}{2\gamma} + \frac{|\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma(K_{Z^n})^2}{2} + \hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})'(\mathcal{Z}_t^{n+1} - \mathcal{Z}_t^n) \\
&\quad - \left(\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n) - \hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})\right)' \mathcal{Z}_t^n \\
&\leq -\frac{|\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n)|^2}{2\gamma} + \frac{|\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma(K_{Z^n})^2}{2} + |\hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})||\mathcal{Z}_t^{n+1} - \mathcal{Z}_t^n| \\
&\quad + \left|\hat{\alpha}^n(\Phi_t^n) - \hat{\alpha}^{n+1}(\Phi_t^{n+1})\right| K_{Z^n} \\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式由式 (57) 得出。因此，我们有

$$
\mathcal{Y}_t^n - \mathcal{Y}_t^{n+1} \leq \mathcal{Y}_\tau^n - \mathcal{Y}_\tau^{n+1} + \int_t^\tau \left(\mathcal{Z}_s^{n+1} - \mathcal{Z}_s^n\right)' dW_s.
$$

特别地，取 $t = \theta_n$, $\Phi_{\theta_n}^n((\theta_{(n)}, l_{(n)}) = \hat{}\phi_n$，使得 $\Phi_{\theta_n}^{n+1}((\theta_{(n)}, \theta_n),(l_{(n)}, l)) = \tilde{}\hat{} \hat{}\phi_{n+1} := \phi_n + \varphi^n(\phi_n)$，并且

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}^n(\hat{\phi}_n) - \bar{y}^{n+1}\left(\tilde{\phi}_{n+1}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\bar{y}^n\left(\Phi_\tau^{n,\theta_n,\hat{\phi}_n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right) - \bar{y}^{n+1}\left(\Phi_\tau^{n+1,\theta_n,\tilde{\phi}_{n+1}}((\theta_{(n)}, \theta_n), (l_{(n)}, l))\right) | \mathcal{F}_{\theta_n}\right].
\end{aligned}
$$

由 $\bar{y}^n$ 和 $\bar{y}^{n+1}$ (116) 关于 ρ 的一致线性增长性质、 Φ^n, Φ^{n+1} 的一致可积性（见引理 5.1），以及当 $\rho_i \to 0$ 时 $\bar{y}^{n,\rho_i}(\cdot) \to \bar{y}^n(\cdot)$ 的收敛可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得对于任意 $\tau \geq \theta_n$ 和 $i \geq N$,

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n) - \bar{y}^{n+1,\rho_i}\left(\tilde{\phi}_{n+1}\right) \\
&\leq \varepsilon + \mathbb{E}\left[\bar{y}^{n,\rho_i}\left(\Phi_\tau^{n,\theta_n,\hat{\phi}_n}(\theta_{(n)}, l_{(n)})\right) - \bar{y}^{n+1,\rho_i}\left(\Phi_\tau^{n+1,\theta_n,\tilde{\phi}_{n+1}}((\theta_{(n)}, \theta_n), (l_{(n)}, l))\right) | \mathcal{F}_{\theta_n}\right],
\end{aligned}
$$

这在 $i \geq N$ 时成立，依据的是 Vitali收敛定理。此外，由支配收敛定理以及 $Y^{n,\rho}$, $Y^{n+1,\rho}$ 在无穷远处的极限为零，令 $\tau \to \infty$ 趋于极限可得,

$$
\bar{y}^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n) - \bar{y}^{n+1,\rho_i}\left(\tilde{\phi}_{n+1}\right) \leq \varepsilon + y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1}) - y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n).
$$

因此，每当 $i \geq N$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\geq y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n) - y^{n+1,\rho_i}\left(\tilde{\phi}_{n+1}\right) \\
&\geq y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n) - y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1}) - \left|y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1}) - y^{n+1,\rho_i}(\tilde{\phi}_{n+1})\right| \\
&\geq y^{n,\rho_i}(\hat{\phi}_n) - y^{n+1,\rho_i}(\hat{\phi}_{n+1}) - C(1 + |\hat{\phi}_{n+1}| + |\hat{\phi}_n|),
\end{aligned}
$$

其中 $C > 0$与 ρ_i相互独立。这与假设 $\delta_n = 0$相矛盾，因此我们推得 $\delta_n > 0$。通过迭代论证，并提取 $(\rho_i)_{i=1}^\infty$的子序列，即可完成证明。□

[6]这直接由贴现率为 ρ 的 Gr¨onwall 不等式得出，这要归功于驱动项的有界性。

C.7 定理 5.3 的证明

上述讨论已证明解的存在性。接下来，我们只考虑解的唯一性，并将通过递归方式加以证明。

对于 $n=0,\dots,m$，设 $(\mathcal{Y}^n,1,\mathcal{Z}^n,1,\varrho_1)_{n=0}^m$ 和 $(\mathcal{Y}^n,2,\mathcal{Z}^n,2,\varrho_2)_{n=0}^m$ 是遍历BSDE系统(59)-(60)的两个解。定义 $\delta\mathcal{Y}:=\mathcal{Y}^n,^1-\mathcal{Y}^n,^2$, $\delta\mathcal{Z}:=\mathcal{Z}^n,^1-\mathcal{Z}^n,^2$，以及 $\delta\varrho:=\varrho_1-\varrho_2$。对于任意 $(\theta_{(m)},l_{(m)})\in\Delta_m\times E^m$ 和 $t\geq\theta_m$,

$$\begin{aligned}d\delta\mathcal{Y}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})=&\left(\delta\varrho-\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^{m,1}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right.\\&\left.+\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^{m,2}(\theta_{(m)},l_{(m)}),\Phi_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right)dt\\&+\delta\mathcal{Z}_t^m(\theta_{(m)},l_{(m)})'dW_t\end{aligned}$$

为方便记号，在余下的证明中，我们将省略 $(\theta_{(m)},\ l_{(m)})$ 对于.....的依赖关系。

容易证明，存在 $C>0$，使得对于任意$z_1,\ z_2,\ \phi\in\mathbb{R}^d$,

$$\left|\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,z_1,\phi\right)-\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,z_2,\phi\right)\right|\leq C(1+|z_1|+|z_2|)|z_1-z_2|.\tag{119}$$

利用这一点以及 $\mathcal{Z}^m,^i$, $i=1,\ 2$ 的有界性，对于任意 $T>\theta_m$，我们定义测度 $\mathbb{Q}^{\xi^m}$ 为

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\xi^m}}{d\mathbb{P}}=\mathcal{E}_{\theta_m,T}\left(\int_{\theta_m}^{\cdot}\xi_s^m ds\right),$$

其中

$$\xi_t^m:=\frac{\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^{m,1},\Phi_t^m\right)-\min_{\pi\in\Pi_m}\hat{f}^m\left(\pi,\mathcal{Z}_t^{m,2},\Phi_t^m\right)}{\delta\mathcal{Z}_t^m}\mathbb{1}_{\{\delta\mathcal{Z}_t^m\neq0\}}.$$

因此，对于任意 $T>\theta_m$，我们有

$$\delta\varrho=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^m}}\left[\delta\mathcal{Y}_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\delta\mathcal{Y}_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\mid\mathcal{F}_{\theta_m}\right]}{T-\theta_m}.$$

令 $\bar{}\mathbf{y}_i(\cdot),\ i=1,\ 2$ 为 $(\mathcal{Y}^n,^i)_{n=0}^m$ 的马尔可夫表示，其中对于$\phi\in\mathbb{R}^d$, $\bar{}\mathbf{y}_i(\phi)=(\bar{y}_i^{n-1}(\phi_{n-1}))_{n=1}^{m+1}$。此外，我们可以假设，对于所有 $n=0,\ \dots,\ m,\ \bar{y}_1^n(0)=\bar{y}_2^n(0)$。利用 $\Phi^m(\theta_{(m)},\ l_{(m)})$ 的遍历性、增长性质 (58) 以及 [30], 的命题 B.1，存在 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^m}}\left[\delta\mathcal{Y}_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})-\delta\mathcal{Y}_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\mid\mathcal{F}_{\theta_m}\right]\\=&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^m}}\left[\left(\bar{y}_1^m\left(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)-\bar{y}_2^m\left(\Phi_T^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right)\right.\\&\left.-\left(\bar{y}_1^m\left(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)-\bar{y}_2^m\left(\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right)\right]\\\leq&C\left(1+|\Phi_{\theta_m}^m(\theta_{(m)},l_{(m)})|\right).\end{aligned}$$

因此，通过令 $T\to\infty$ 趋于极限，我们得到 $\delta\varrho=0$。

为了证明 $\mathcal{Y}^{m,\ 1}=\mathcal{Y}^{m,\ 2}$ 以及 $\mathcal{Z}^{m,\ 1}=\mathcal{Z}^{m,\ 2}$，只需证明 $\mathcal{Y}^{m,\ {}^{1}}_{\theta_m}(\theta_{(m)},\ l_{(m)})$ $=\mathcal{Y}^{m,\ {}^{2}}_{\theta_m}(\theta_{(m)},\ l_{(m)})$。证明的其余部分随后由 [22] 中的定理 3.11 得出。注意，对于任意 $T>\theta_m$，(58) 和 [30] 中的命题 B.1 蕴含存在 $C,\ K_\phi>0$，使得

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{Y}^m_{\theta_m}&=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^m}}\left[\bar{y}^m_1\left(\Phi^m_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)-\bar{y}^m_2\left(\Phi^m_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)\right]\\&=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^m}}\left[\left(\bar{y}^m_1\left(\Phi^m_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)-\bar{y}^m_1(0)\right)-\left(\bar{y}^m_2\left(\Phi^m_T(\theta_{(m)},l_{(m)})\right)-\bar{y}^m_2(0)\right)\right]\\&\le C\left(1+\left|\Phi^m_{\theta_m}(\theta_{(m)},l_{(m)})\right|^2\right)e^{-K_\phi(T-\theta_m)}.\end{aligned}$$

通过取极限 $T\to\infty$，我们推出 $\delta\mathcal{Y}^m(\cdot,\cdot)\equiv 0$。这也意味着 $\bar{y}^m_1(\cdot)=\bar{y}^m_2(\cdot)$。

对于 $n=0,\ldots,m-1$、$(\theta_{(n)},l_{(n)})\in\Delta_n\times E^n$ 和 $t\ge\theta_n$，只需证明 $\mathcal{Y}^{n,\ {}^{1}}_{\cdot\wedge\theta_n}(\theta_{(n)},$ $l_{(n)})=\mathcal{Y}^{n,\ {}^{2}}_{\cdot\wedge\theta_n}(\theta_{(n)},l_{(n)})$，因为我们已经证明了 $\varrho_1=\varrho_2$。根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}d\delta\mathcal{Y}^n_t=&\Bigg[-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,1}_t,\mathcal{Z}^{n,1}_t,\Phi^n_t\right)\\&+\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,2}_t,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)\Bigg]dt+(\delta\mathcal{Z}^n_t)'dW_t,\end{aligned}$$

这里我们再次省略了 $(\theta_{(n)},l_{(n)})$ 对应关系的写法。利用归纳假设，并按照 (83) 的推导过程，存在 $C>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\left|\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,1}_t,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,2}_t,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)\right|\\\le&\, C|\delta\mathcal{Z}^n_t|(1+|\mathcal{Z}^{n,1}_t|+|\mathcal{Z}^{n,2}_t|).\end{aligned}$$

ˆ 另一方面，映射 $y\mapsto f^n(t,\pi,y,z,\phi)$ 是非递增的。因此，

$$\delta\mathcal{Y}^n_t\left[\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,1}_t,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Y}^{n,2}_t,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)\right]\le 0.$$

利用这些结果，根据 [20]中的引理 3.4 和 [30], 中的命题 B.1，对于任意 $T>\theta_n$ ，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{Y}^n_{\theta_n}&=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\xi^n}}\left[\left(\bar{y}^n_1\left(\Phi^n_T(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)-\bar{y}^n_1(0)\right)-\left(\bar{y}^n_2\left(\Phi^n_T(\theta_{(n)},l_{(n)})\right)-\bar{y}^n_2(0)\right)\right]\\&\le C\left(1+\left|\Phi^n_{\theta_n}(\theta_{(n)},l_{(n)})\right|^2\right)e^{-K_\phi(T-\theta_n)},\end{aligned}$$

其中测度 $\mathbb{Q}^{\xi^n}$ 定义为

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}^{\xi^n}}{d\mathbb{P}}&:=\mathcal{E}_{\theta_n,T}\left(\int_{\theta_n}^{\cdot}\xi^n_s ds\right),\\\xi^n_t&:=\frac{\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Z}^{n,1}_t,\Phi^n_t\right)-\min_{\pi\in\Pi_n}\hat{f}^n\left(t,\pi,\mathcal{Z}^{n,2}_t,\Phi^n_t\right)}{\delta\mathcal{Z}^n_t}\mathbb{1}_{\{\delta\mathcal{Z}^n_t\neq 0\}}.\end{aligned}$$

然后令 $T\to\infty$趋于极限即可得到该结果。 □