具有对称性的施瓦茨映射

A.García-Velo[1] 和 A. Ibort[2][1)]马德里卡洛斯三世大学数学系，*Avda. de la Universidad 30，28911* 莱加内斯，马德里，西班牙。[2)]数学科学研究所（西班牙国家研究委员会 - 马德里自治大学 - 马德里卡洛斯三世大学 - 马德里康普顿斯大学）数学科学研究所和马德里卡洛斯三世大学数学系，*Avda. de la Universidad 30，28911* 莱加内斯，马德里，西班牙。

（*电子邮箱：albertoi@math.uc3m.es）

（*电子邮箱：alfonsog@fis.uc3m.es）

（日期：2026年1月6日）

量子力学系统的对称性理论被用于研究量子信息理论中若干相关映射类别的结构和性质：CPTP、正偏转置和 Schwarz 映射。首先，我们推导出等变映射 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 在 C^*-代数之间须满足的一般结构。随后，我们系统地研究在自然酉群作用下等变的保单位、保厄米性映射。Schwarz 映射满足 Kadison不等式 $\Phi(X^*X) \geq \Phi(X)^*\Phi(X)$，构成正映射与完全正映射之间的中间类别。我们完整分类了 $U(n)$-等变的 $M_n(\mathbb{C})$ 上的映射，并确定了其中哪些是完全正映射和 Schwarz 映射。随后，我们对较弱的 $DU(n)$-等变性（对角酉对称性）以及张量积对称性 $U(n_1) \otimes U(n_2)$ 得到了部分分类。在每种情况下，我们都用显式代数不等式描述了映射满足 Φ Schwarz 条件或完全正条件的参数区域，并展示了这些区域的几何形状。最后，我们进一步证明，$U(n)$-等变族满足正偏转置 $\iff$ 纠缠破坏，而 $DU(2)$、对称的 $DU(3)$、$U(2) \otimes U(2)$ 和 $U(2) \otimes U(3)$ 族则通过直接的对称性论证满足正偏转置[2]猜想。这些结果揭示了群对称性如何控制非完全正映射的结构，并提供了正偏转置[2]性质成立的新型具体实例。

arXiv:2601.02282v1 [quant-ph] 5 Jan 2026

I. 引言

量子信息理论的迅速发展，使我们对对称性所起作用的理解逐渐落后。事实上，由于信息具有物理性[44], ，物理背景中存在的对称性会体现在信息系统的性质和特征上。对称性在量子信息理论的诸多领域都显示出价值，包括量子克隆[42], 、可编程器件[25], 以及香农理论[24,32,40,62], 的量子扩展等应用。

信息信道理论（包括经典和量子信息信道理论），即关于不同类别的线性映射 $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 在C^*-代数之间的理论，是一个内容丰富且仍有许多未解决问题的领域。事实上，量子信道的参数化与分类是量子信息理论中的核心问题，尤其是那些在群作用下具有对称性的量子信道。对称性在这一语境中的作用仍在逐步阐明，尤其是在操作任务[6], 资源理论[26],以及动力过程[9]的结构分析方面。

具有对称性的量子信道研究由 Scutaru[55] 开创，并由 Holevo[30,31]进一步发展。如果存在对称性，量子信道的描述可以显著简化（例如，参见近期研究[3,4,19,45–47,51,54,56,57,61] 及其中的参考文献）。例如，对称性有助于使与量子纠缠[4,18,19,51,56,57,61]相关的各种问题变得易于处理。

正映射和完全正映射理论虽然在特定情形下已相当成熟，但仍不完善。关于其结构[48], 极端性质[13], 以及它们与对称性的关系等关键问题，仍在积极研究中。在无限维情形下，这些挑战还因额外的技术细节而更加复杂，因此，开发基于对称性的工具不仅优雅，而且必不可少。

在本文中，我们将探讨所有具有某种对称性的信息信道必须满足的一般形式。在确立对称映射的一般结构结果后，我们将其应用于研究对称性与 Schwarz 映射、量子信道及正偏转置[2] 猜想之间的相互作用，以此展示这些结果的用途。Schwarz 映射定义了一类正映射，但通常并非完全正映射；这类映射满足所谓的 Kadison不等式[12,14,39],（见第 II 节 A）。Schwarz 映射提供了一类重要的纠缠见证[20], ，但事实证明，要刻画它们极为困难[7,8,15–17]。我们将彻底阐明在完整酉群 $U(n)$ 下不变的映射的结构和性质，并表明即使在这一简单情形下，也存在一类并非完全正的 Schwarz 映射。此外

除此之外，还将探讨 我们知道，$U(n)$-等变的正偏转置映射是纠缠破坏的（更多详情见第 II B 节）.

当对称群较小时，对具有该对称性的量子信道进行分类和刻画会变得愈发困难。我们将给出若干结果，描述$U(n_1) \otimes U(n_2)$ 和 $DU(n)$-等变量子信道的结构性质。这两类映射在量子信息理论中都很重要，因为它们包含若干相关的量子信道，例如去极化信道、转置去极化信道、振幅阻尼信道、Schur 乘子等[58]。对角酉信道受到广泛关注[47,56,57] ，因为它们满足正偏转置（PPT）[2] 猜想[58]。文献[8,16]分析并完整确定了$DU(2)$ 不变量子信道的正性、完全正性和施瓦茨性质。本文将继续这方面的研究，探讨 Schwarz $DU(n)$-等变量子信道的结构性质，并对一类$DU(3)$-等变量子信道给出完整分类。此外，还将为这一情形提供正偏转置（PPT）[2] 猜想的直接证明。最后，我们将讨论乘积对称性$U(n_1) \otimes U(n_2)$。同样，我们将分析低维$n_1 = 2$、$n_2 = 2,3$ 情形下 Schwarz、完全正和正偏转置（PPT）[2]猜想的结构。

本文安排如下：第 II 节将介绍本文所用量子信道理论的基本概念和记号。随后，第 III 节将简要回顾群表示理论，它将作为描述量子系统中对称性的自然语言。第 IV 节将确立刻画具有对称性的映射的主定理，并在第 V 节详细讨论若干相关实例。具体而言，我们将完整描述$U(n)$-等变量子信道，并讨论$DU(n)$-等变和$U(n_1) \otimes U(n_2)$-等变量子信道。接着，我们将重点研究等变Schwarz映射理论。作为这项工作的成果，我们将给出$U(n)$-等变Schwarz映射的完整分类，见定理 V.1，并由此提供首批在任何维数下都非完全正的Schwarz映射实例。第 V B、V C 节还将给出$U(n_1) \otimes U(n_2)$和$DU(n)$等变映射的部分结果，以及针对若干情形的PPT[2]猜想的直接证明。

具有对称性的施瓦茨映射

II. 量子信道分析

A. 正映射、施瓦茨映射与完全正映射

人们提出了许多思路和方法来理解量子信道，例如 Stinespring结构定理，或 CPTP 映射的 Choi-Kraus形式。下文将用到的一项相关结果是 Choi-Jamiolkowski同构。它在有限维代数 $\mathscr{A},\mathscr{B}$[13] 上的线性映射 $\Phi\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 与算子 $C_\Phi=\sum_{i,j}E_{ij}\otimes\Phi(E_{ij})\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 之间建立了同构。算子 E_{ij} 构成 $\mathscr{A}$ 的典范基，而 C_Φ 称为 Φ 的 Choi矩阵。Choi定理表明，线性映射 Φ 是完全正（CP）的，当且仅当其 Choi矩阵 C_Φ 是半正定的[13]。类似地，Φ 是正的，当且仅当 C_Φ 是块正的，即对所有 $v\in\mathbb{C}^n$、$w\in\mathbb{C}^m$，均有 $\langle v\otimes w, C_\Phi v\otimes w\rangle\geq 0$。显然，若 Φ 是完全正的，则它也是正的。因此，完全正映射集合 CP 是正映射集合 P 的真子集：$CP\subset P$。

现在我们引入与本文相关的正映射类。若一个幺正线性映射满足 Kadison不等式，则称其为施瓦茨映射：

$$\Phi(X^\dagger X)\geq\Phi(X)^\dagger\Phi(X),\quad\forall X\in\mathscr{A}. \tag{1}$$

为便于后续使用，我们记

$$M_\Phi(X)\equiv\Phi(X^\dagger X)-\Phi(X)^\dagger\Phi(X). \tag{2}$$

事实证明，施瓦茨映射这一性质介于正与完全正[5,15,48,60]之间。也就是说，$CP\subset S\subset P$，其中 S 表示施瓦茨映射的集合，且所有包含关系均为严格包含。Choi[14]给出了第一个非完全正的施瓦茨映射示例。有趣的是，Kadison不等式对正规算子[12,14]成立。正如引言所述，施瓦茨不等式的一些应用示例涉及量子马尔可夫演化[7], 的刻画、开放量子系统[1,2], 的渐近动力学，以及单调性结果[17,23,33]的证明。

B. 纠缠破坏信道：正偏转置^2 猜想

判定一个量子态是否纠缠是一个 NP困难问题。Horodecki定理[27](定理 2)指出，双体量子态 $\rho\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 是可分的，当且仅当 $\mathrm{id}_{\mathscr{A}}\otimes$

$\Phi(\rho) \geq 0$ 对于所有正映射 Φ均成立。典型的正但非完全正映射是转置映射 T[49]。通过将这一概念推广到更多子系统，也得到了类似的判据[28]。因此，正但非完全正映射被认为是纠缠检测的有力工具[20]。

现代纠缠研究将纠缠视为一种资源。我们可以创建并消耗关联，以更高效地完成信息任务[11]。要利用这种资源，就需要使用量子信道作用于承载纠缠的状态，例如模拟将这些状态从一点传输到另一点，或模拟完成特定任务所需的相互作用。

这方面的一个开放问题是研究纠缠破坏（EB）量子信道。顾名思义，纠缠破坏量子信道是指满足以下条件的量子信道 Φ：对于每个$k \in \mathbb{N}$和 $\rho \in M_k(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{A}$[35]，$\mathrm{id}_k \otimes \Phi(\rho)$ 均为可分态。量子信道 Φ 是纠缠破坏量子信道，当且仅当其 Choi矩阵C_Φ是可分的[35]。因此，这仍然是一个 NP困难问题。对纠缠破坏量子信道的研究催生了正偏转置[2]猜想[52]。若量子信道 Φ 满足$T \circ \Phi \geq 0$，则称其为正偏转置（PPT）量子信道。该猜想指出，两个正偏转置量子信道串行复合所得的量子信道总是纠缠破坏的。也就是说，如果 Φ是正偏转置量子信道，那么 $\Phi \circ \Phi \equiv \Phi^2$ 就是纠缠破坏量子信道。

其主要推论之一是，如果该猜想成立，那么任何PPT纠缠态（即具有正偏转置的状态 $T \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{B}}(\rho) \geq 0$）都不能在量子网络[10]中用作量子资源。这里转化为了刻画纠缠破坏信道的困难。对于受限于某些条件的信道，PPT[2]猜想已得到证明，例如低Kraus秩信道、近似去极化信道、高斯信道、对角酉等变信道和随机信道[22,34,41,43,53,57]。此外，对于维数为2和 3[21]的系统，该猜想也成立。

III. 表示论基础

本节将介绍对称性的基本要素，以及支撑对称性的群表示理论（例如参见[36] 及其中的参考文献）。

A. 群、群作用与对称性

我们将只考虑有限群或紧群。为确定符号，先回顾一下，群是一个集合G，其上定义了一个复合律 $\circ$：$G \times G \to G$，并满足以下三个性质。i）结合律：对所有$g, g', g'' \in G$，复合满足$g \circ (g' \circ g'') = (g \circ g') \circ g''$。ii）单位元：存在

一个元素 $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$，使得对所有 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，都有 $\mathrm{e} \circ \mathrm{g} = \mathrm{g} \circ \mathrm{e} = \mathrm{g}$。最后，iii）逆元：对所有 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，存在一个元素 $\mathrm{g}^{-1} \in \mathrm{G}$，使得 $\mathrm{g} \circ \mathrm{g}^{-1} = \mathrm{g}^{-1} \circ \mathrm{g} = \mathrm{e}$。如果群的复合律满足交换律，也就是说，对所有 $\mathrm{g}, \mathrm{g}' \in \mathrm{G}$，都有 $\mathrm{g} \circ \mathrm{g}' = \mathrm{g}' \circ \mathrm{g}$，则称该群为阿贝尔群。

但它与对称性的概念有何关系？考虑一个物理系统，它在数学上由某个支撑空间或载体空间V来描述。例如，在经典通信的语境中，载体空间可以只是一个对象集合，如字母表。不过，通常还会为其赋予额外的结构，例如拓扑结构或代数结构。在本文所考虑的应用中V 是一个拓扑向量空间，具体而言，可以是希尔伯特空间或C^*-代数。

对称群G 将在载体空间V上实现。为此，我们定义G 在V上的作用，它是一个映射：

$$\begin{aligned} \Psi\colon G \times V &\to V \\ (g, v) &\to \Psi(g, v) \equiv \Psi_g(v), \end{aligned} \tag{3}$$

满足： $\Psi_e(v) = v$ 且 $\Psi_{g \circ g'}(v) = \Psi_g \circ \Psi_{g'}(v)$，对所有$v \in V$和$g \in G$均成立。此外，若群$G$ 带有拓扑，则要求映射 $\Psi_v\colon G \to V$, $\psi_v(g) := \psi_g(v)$ 连续。换言之，群G 通过变换 Ψ_g 在载体空间V 上实现（注意，这些映射 Ψ_g 都是双射）。

如果V 具有任何值得关注的额外结构，我们就要求 Ψ 保持这种结构。例如，由于假设V 是一个线性空间，我们定义 Ψ_g 为线性的。从这个意义上说，“对称性”就是保持V上的某种结构。给定V 上的结构S，其“对称群”是一个作用于V 的群G，且其作用保持这种结构。

例 *III.1.* 设 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上所有有界算子构成的 C^*-代数。那么，酉群 $U(\mathscr{H})$ 的作用由映射 $\Psi_U(X) = UXU^\dagger$给出，对所有 $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 和 $U \in U(\mathscr{H})$ 均成立。注意，$\Psi_{\mathrm{id}_V}(X) = X$，且 $\Psi_{UV}(X) = U(VXV\dagger)U\dagger = \Psi_U \circ \Psi_V(X)$。此外，该作用是线性且连续的（$\mathscr{B}(\mathscr{H})$采用例如强拓扑）。

我们可以考虑 *Frobenius*内积 $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr} X^\dagger Y$，它定义在 *Hilbert-Schmidt*算子 $\mathscr{L}^2(\mathscr{H})$ 的空间上，而该空间由此成为希尔伯特空间。同样，酉映射保持这一特定结构，因为对于所有 $U \in U(n)$，都有 $\langle \Psi_U(X)\ \Psi_U(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$。这意味着表示 Ψ 成为酉群 $U(\mathscr{H})$ 的酉表示，其支撑空间为希尔伯特空间 $\mathscr{L}^2(\mathscr{H})$。如果 $\mathscr{H}$是有限维的，那么两种情况便一致，因为

有界算子在 $\mathscr{H}$ 上的 C^*-代数可以与 $n \times n$ 矩阵的 C^*-代数 $M_n(\mathbb{C})$ 等同；后者本身是一个配有 *Frobenius* 内积的希尔伯特空间。

B. 群的线性酉表示

群通过线性变换在线性空间上的作用称为该群的线性表示。对它的研究和分析为理解抽象群如何在物理定律所定义的具体空间中体现出来提供了强有力的工具。

因此，将 G 表示到线性向量空间 V 中，不过是将 G 的元素与其上的线性同构群的元素建立对应关系；这个群称为 V 的一般线性群，记作 $GL(V)$。如果线性空间 V 是有限维的，$\dim V = n$，那么 $GL(V)$ 与由维数为 n 的可逆方阵组成的群 $GL(n)$ 同构。形式上，一个表示记作三元组（G, V, μ）：

$$\mu : G \to GL(V), \qquad g \mapsto \mu(g) \equiv \mu_g : V \to V, \tag{4}$$

且 μ 是一个群同态。这意味着，对于所有的 $g, g' \in G$，有 $\mu_{g \circ g'} = \mu_g \circ \mu_{g'}$；并且对于所有的 $v \in V$，映射 $g \in G \mapsto \mu(g)v \in V$ 是连续的。由于 μ 是一个群同态，它将群的结构转换到 V 中。此外，我们立即得到，对于所有 $g \in G$，有 $\mu_e = \mathrm{id}_V$ and $\mu_{g^{-1}} = \mu_g^{-1}$。线性空间 V 称为该表示的支撑空间，我们称该表示的维数为 V 的维数：$\dim \mu := \dim V$。

如果 V 具有额外的结构，例如希尔伯特空间结构，那么表示应当保留这种结构。因此，如果 V 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，我们要求线性表示 μ 满足：对于所有 $g \in G$，$\mu(g)$ 都是酉映射。因此，$\mu : G \to U(\mathscr{H}) \subset GL(\mathscr{H})$，其中 $U(\mathscr{H})$ 表示空间 $\mathscr{H}$ 上的酉变换群。我们将这种线性表示称为酉表示。

如果 V 是一个 C^*-代数 $\mathscr{A}$，我们应要求表示 μ 保持 $\mathscr{A}$ 的代数结构，即对于所有 X、$Y \in \mathscr{A}$ 以及 $g \in G$，有 $\mu_g(XY) = \mu_g(X)\mu_g Y$、$\mu_g(X^*) = [\mu_g(X)]^*$。这些条件意味着，$\mu(g)$ 是 C^*-代数 $\mathscr{A}$ 的一个 $*$-自同构，并且表示 μ 是一个群同态 $\mu : G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{A})$。群在一个 C^*-代数 $\mathscr{A}$ 上的表示也称为 $\mathscr{A}$ 上的动力系统。

C. 等价表示

我们面临的问题是：给定一个群G，存在多少种不同的表示。为了回答这个问题，我们必须确定两个给定的表示何时具有相同的结构性质。我们称同一个群G的两个表示（V μ）和（W ν）等价，并记为 $\mu \sim \nu$，如果存在一个同构 $\phi: V \to W$，使得 $\phi \circ \mu_g = \nu_g \circ \phi$对于所有$g \in G$均成立。

这个定义满足等价关系的性质，因此，G的所有表示构成的族可以分解为表示的等价类 $[\mu] = \{\nu \mid \mu \sim \nu\}$。我们关注的不是单个表示的性质，而是同一等价类中各表示的性质。

如果我们考虑希尔伯特空间上紧群的线性表示，不难看出，V μ上的每个G的线性表示都等价于G的一个酉表示。因此，对于紧群，我们只需研究酉表示。这对量子力学尤为重要，因为支撑空间将是一个希尔伯特空间。

相反，如果我们研究C^*代数，就应采用不同的分析方法。当然，在有限维情形下，也就是 $\dim \mathscr{A} < \infty$，可以证明 $\mathscr{A}$是矩阵代数$M^{n_k}(\mathbb{C})$、$n1$，.....，$n_r \in \mathbb{N}$的有限直和，此时我们便处于前述情形。本文所讨论的量子信道将始终定义在有限维空间上；不过，无限维背景将在别处讨论。

D. 不可约表示与舒尔引理

鉴于同一等价类中的所有表示都具有相似的性质，我们可以问自己：有哪些最简单的表示可供我们使用？为了找到它们，我们将任意表示分解为无法进一步约化的更简单的块。在此论证中，我们只考虑群G 在希尔伯特空间$\mathscr{H}$上的酉表示。

考虑被 μ 左不变的闭子空间 $W \subset V$，即对于所有$w \in W$和$g \in G$，都有 $\mu_g w \in W$；我们称它们为G-不变子空间。若存在一个非平凡的闭G-不变子空间$W \subset V$，即它既不同于 $\{0\}$，也不同于V，则称该表示为可约。否则，称其为不可约。该群的不可约酉表示的等价类构成的族

$\widehat{G}$群G 将记作G。

对于每个有限维酉表示 μ，都存在V 的唯一分解，使其成为有限个G-不变子空间W_i 的直和，并且每个子空间W_i都支撑G的唯一不可约表示 μ_i：

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r, \qquad \mu = \mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_r. \tag{5}$$

具有这一性质的表示 μ 称为完全可约，因此有限维酉表示总是完全可约的。对于无限维表示和非紧群，情况不一定如此，并且会变得复杂得多（关于这一主题的总体讨论，请参见[37] (第 8 章)）。

给定两个表示 $(G,W1,\mu_1)$ 和 $(G,W2,\mu_2)$，它们的直和是另一个线性表示 $(G,W_1 \oplus W2,\mu_1 \oplus \mu_2)$。线性向量空间的直和按通常方式定义。若 $w1,_2 \in W^{1,2}$，则对所有 $g \in G$，都有 $[\mu_1 \oplus \mu_2](g)(w_1 \oplus w_2) = \mu_1(g)(w_1) \oplus \mu_2(g)(w_2)$。两个表示在空间 $W_1 \otimes W_2$ 上的张量积 $\mu_1 \otimes \mu_2$ 构造也是如此。

在分解 (5) 中出现的 G 的某些不可约表示 μ_i 可能彼此等价。在这种情况下，我们可以将分解 (5) 改写为：

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathbb{C}^{n_\alpha} \otimes W^{(\alpha)}, \qquad \mu = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathbb{I}_{n_\alpha} \otimes \mu^{(\alpha)}, \tag{6}$$

其中，$\alpha \in \widehat{G}$ 标记不可约表示的等价类，μ 的代表元为$\mu^{(\alpha)}$。另请注意，$\mathbb{C}^{n_\alpha} \otimes W^{(\alpha)} \cong W^{(\alpha)} \oplus \cdots \oplus W^{(\alpha)}$，且$\mathbb{I}_{n_\alpha} \otimes \mu^{(\alpha)} \cong \mu^{(\alpha)} \oplus \cdots \oplus \mu^{(\alpha)}$，其中该和重复 $n\alpha$ 次。因此，我们对 (5) 中的各项重新排序，得到一个同构空间。

最后，我们陈述关于交织两个给定表示的线性映射的主要结果：

引理 III.1 (舒尔引理)。设 (G,V_1,μ_1) 和 (G,V_2,μ_2) 是两个有限维不可约表示，并设 ϕ：$V_1 \to V_2$ 是一个满足 $\phi \circ \mu_1(g) = \mu_2(g) \circ \phi$ 的连续线性映射，对所有 $g \in G$ 均成立。则：

1. 若 $V_1 \ncong V_2,$，则 $\phi = 0$。
2. 若 $V_1 = V_2,$，则 $\phi = \lambda$ 恒等映射$_V$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$。

同样，舒尔引理还有一个无限维版本，但本文中不需要用到它。

IV. 具有对称性的量子信道

在绕道研究了对称性如何在抽象希尔伯特空间和C^*-代数中表示之后，我们现在将其应用于研究量子信道的结构。映射 $\Phi: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的对称性，其中 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 要么是希尔伯特空间，要么是C^*-代数，体现在单位矩阵

$$\Phi \circ \mu_g = \nu_h \circ \Phi, \qquad \forall g \in G,\, h \in H, \tag{7}$$

满足上述条件，其中 μ 和 ν 分别是两个原则上不同的群G 和 H的表示。在此背景下，如果该映射满足相应条件，我们称其为 (G,H)-等变、 μ-等变，或者在$G = H$时简称为G-等变。一个有用的观察是，该映射为 (G,H)-等变，当且仅当其 Choi矩阵是 $(\mu_G \otimes \bar{\nu}_G)$-不变的。由此，我们现在可以陈述具有对称性的量子信道的主要结构定理。

定理 IV.1 (信道分解)。 设 G 是一个紧群，且 Φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是一个 G-等变映射，其中 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 G 的有限维表示。那么存在唯一的分解（除重新排序外）：

$$\Phi = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathscr{C}_\alpha \otimes \mathrm{id}_\alpha,$$

其中 $\alpha \in \widehat{G}$ 为 G 的不可约表示的索引，n_α 为其重数，而 $\mathscr{C}_\alpha$ 为约化信道分量。

证明。 紧群的任何不可约表示都是有限维的[36]。此外，由于彼得–外尔定理， $\widehat{G}$ 的不可约表示空间是可数的[36]。由于我们假设 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{B}$ 都是有限维的，它们可以分解为$\mathscr{A} = \bigoplus_i \mathscr{A}_i$和$\mathscr{B} = \bigoplus_j \mathscr{B}_j$。

那么，任意线性映射 Φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$都可以表示为$\Phi = \bigoplus_{i,j} \Phi_{ij}$。线性映射$\Phi_{ij}$:$\mathscr{A}_i \to \mathscr{B}_j$ 的定义是：将X_i（$X = \bigoplus_i X_i$的第i个分量）映射到Y_j（$Y = \Phi(X)$的第j个分量），即$Y_j = \Phi_{ij}(X_i)$，它属于 $\mathscr{B}_j$。

由（6）可知，由于G 是紧群， $\mathscr{A}$和 $\mathscr{B}$ 分解为

$$\mathscr{A} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{A}_i \equiv \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}^{n_\alpha} \otimes V_\alpha, \qquad \mathscr{B} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathscr{B}_j \equiv \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}^{n'_\alpha} \otimes W_\alpha,$$

分别表示V_α和W_α的重数n_α和n'_α。

现在需要考虑这样的假设： Φ 是G-等变的。对于G的两个表示（$\mathscr{A},\mu$）和（$\mathscr{B},\nu$），则 $\Phi\circ\mu_g(X) = \nu_g\circ\Phi(X)$，这意味着约化信道分量具有等变性：

$$\Phi_{ij}\circ\mu_g^{(i)} = \nu_g^{(j)}\circ\Phi_{ij}\,.$$

最后，根据舒尔引理（引理 III.1）， Φ_{ij}在此分解下是分块对角的。若 $\mu_i\sim\nu_j$($\mathscr{A}_i\cong\mathscr{B}_j$)，则 $\Phi_{ij}=\lambda\mathrm{id}_i$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$；否则，$\Phi_{ij}=0$。因此，重新排列各项可得：

$$\Phi=\bigoplus_{\alpha\in\widehat{G}}\mathscr{C}_\alpha\otimes\mathrm{id}_\alpha\,,\qquad \mathscr{C}_\alpha:\mathbb{C}^{n_\alpha}\to\mathbb{C}^{n'_\beta}\,. \tag{8}$$

□

引理 IV.1 (量子信道的复合：G-等变)。 设 Φ: $\mathscr{A}\to\mathscr{A}'$ 和 Ψ: $\mathscr{A}'\to\mathscr{A}''$ 是有限维 C^*-代数之间的两个线性映射。设这两个映射均为 G-等变，分别具有分解 $\Phi=\bigoplus_{\alpha\in\hat{}G}\mathscr{C}_\alpha^\Phi\otimes\mathrm{id}\alpha$ 和 $\Psi=\bigoplus_{\alpha\in\hat{}G}\mathscr{C}_\alpha^\Psi\otimes\mathrm{id}\alpha$。那么复合映射 $\Psi\circ\Phi$ 是 G-等变的，且可表示为

$$\Psi\circ\Phi=\bigoplus_{\alpha\in\widehat{G}}\left(\mathscr{C}_\alpha^\Psi\circ\mathscr{C}_\alpha^\Phi\right)\otimes\mathrm{id}_\alpha\,.$$

若 Γ_α^Φ和 Γ_α^Ψ是分别表示映射 $\mathscr{C}_\alpha^\Phi$和 $\mathscr{C}_\alpha^\Psi$的矩阵，则 $\mathscr{C}_\alpha^\Phi\circ\mathscr{C}_\alpha^\Psi\cong\Gamma_\alpha^\Phi\Gamma_\alpha^\Psi$就是矩阵的通常乘积。

证明。设$X\in\mathscr{A}$，则可将其写作$X=X_1\oplus\cdots\oplus X_r\cong\bigoplus_\alpha v_x^{(\alpha)}\otimes X\alpha$，其中$X_\alpha\in W\alpha$且$v_x^\alpha\in\mathbb{C}^{n_\alpha}$。于是，根据定理 IV.1，映射 Φ 在每一项中独立作用

$$\Phi(X)=\bigoplus_\alpha\mathscr{C}_\alpha^\Phi\left(v_x^{(\alpha)}\right)\otimes X_\alpha\,.$$

输出 $\Phi(X)\in\mathscr{A}'$，其中 $\mathscr{C}_\alpha^\Phi\left(v_x^{(\alpha)}\right)\in\mathbb{C}^{n'_\alpha}$。现在，如果我们作用以

Ψ,

$$(\Psi\circ\Phi)(X)=\bigoplus_\alpha\left(\mathscr{C}_\alpha^\Psi\circ\mathscr{C}_\alpha^\Phi\right)\left(v_x^{(\alpha)}\right)\otimes X_\alpha\,.$$

由于 $\mathscr{C}_\alpha^\Phi$和 $\mathscr{C}_\alpha^\Psi$是线性向量空间之间的线性映射，给定这些空间的标准正交基后，我们可以建立等价关系 $\mathscr{C}_\alpha^\Phi\cong\Gamma_\alpha^\Phi$和 $\mathscr{C}_\alpha^\Psi\cong\Gamma_\alpha^\Psi$，其中 $\Gamma_\alpha^\Phi\in\mathbb{C}^{n_\alpha\times n'_\alpha}$和 $\Gamma_\alpha^\Psi\in\mathbb{C}^{n'_\alpha\times n''_\alpha}$。因此，映射的复合就表示通常的矩阵乘法$\mathscr{C}_\alpha^\Psi\circ\mathscr{C}_\alpha^\Phi\cong\Gamma_\alpha^{(\Psi\circ\Phi)}=\Gamma_\alpha^\Psi\Gamma_\alpha^\Phi$。

□

推论 IV.1.1。 设 Φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是两个有限维 C^*-代数之间的线性映射。若 Φ 是 G-等变的，则

$$\Phi^k = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{G}} \mathscr{C}_\alpha^k \otimes \mathrm{i}d_\alpha ,$$

并且它由 $|\widehat{G}|$ 矩阵 $\Gamma_\alpha^k \in \mathbb{C}^{n_\alpha \times n'_\alpha}$ 参数化。

此外，通过分析 G-等变信道的容量，我们可以完善先前关于结构的结果。

定理 IV.2 (容量分解**)**。 设 Φ: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是两个有限维 C^*-代数之间的线性映射。若 Φ 是 G-等变的，则经典容量可表示为：

$$C(\Phi) = \max_\alpha \{ n_\alpha C_\alpha(\Phi) \} ,$$

其中 $C\alpha(\Phi)$ 是约化信道 $C\alpha$ 的容量。

证明。 设 $\{p_k, \rho_k\}$ 是任意一个达到 Holevo 容量的系综分解。Holevo 信息为[29]:

$$\chi(\{p_k,\rho_k\}) = S\left(\left[\sum_k p_k \Phi(\rho_k)\right]\right) - \sum_k p_k S[\Phi(\rho_k)] .$$

根据定理 IV.1，每一项 $\Phi(\rho_k)$ 都可分解为 $\Phi(\rho_k) = \oplus_i c_i \rho^{(i)}{}_k$，其中 $\rho^{(i)}{}_k \in \mathscr{A}_i$。由于冯·诺依曼熵对直和具有可加性，

$$S[\Phi(\rho_k)] = S\left[\bigoplus_i c_i \rho_k^{(i)}\right] = \sum_i S\left[c_i \rho_k^{(i)}\right] = \sum_\alpha n_\alpha S\left(\Phi\left[\rho_k^{(\alpha)}\right]\right) .$$

于是，Holevo 信息变为

$$\chi\left(\{p_k,\rho_k\}\right) = \sum_\alpha n_\alpha \Phi_i\left(\left\{p_k, \rho_k^{(\alpha)}\right\}\right) .$$

记 $\chi\left(\left\{p_k, \rho^{(\alpha)}{}_k\right\}\right) \equiv \chi_\alpha$，则可分别对每个$\alpha$进行最大化，最终结果可通过定义以下内容得到

$$C_\alpha(\mathscr{C}) = \max_{\left\{p_k,\, \rho_k^{(\alpha)}\right\}} \chi_\alpha . \tag{9}$$

□

V. 等变完全正映射与 Schwarz 映射

本节将前文的结果应用于一些特定情形。我们选择分析关于不同目标群[50]等变的量子映射的结构。为简单起见，我们假设系统由有限维C^*代数$\mathscr{A} \cong \mathscr{B} \cong M_n(\mathbb{C})$定义，且 Φ: $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是一个线性映射。

A. 酉等变性

可以考虑的最自然、但也最受限制的对称性之一，是完全酉对称性。阶为$U(n)$的酉群n是集合$U(n) = \{U \in GL(n) \mid UU^\dagger = U\dagger U = \mathbb{I}_n\}$。$U(n)$在$M_n(\mathbb{C})$上的自然表示由共轭作用定义：

$$\mu : U(n) \to GL(M_n(\mathbb{C})), \qquad U \mapsto \mu_U(\cdot) = U \cdot U^\dagger .$$

此外，$M_n(\mathbb{C})$的任意自同构 β 都是内自同构，也就是说，存在$U \in U(n)$使得$\beta(X) = UXU^\dagger$。由此可知，对于任意 $*$-表示 μ: $U(n) \to \mathrm{Aut}\ [M_n(\mathbb{C})]$，都存在一族酉算子$U_g$，使得 $\mu_g(X) = U_g X U_g^\dagger$。不过，算子$U_g$不必构成$G$ 的酉表示；但是，如果G 是我们所讨论的酉群$U(n)$，则确实如此。

命题 V.1 ($U(n)$-等变映射)。 设 Φ:$M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是一个线性 $U(n)$-等变映射。那么，

$$\Phi(X) = \frac{\sigma - \lambda}{n} \operatorname{tr} X\ \mathbb{I}_n + \lambda X ,$$

对所有 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 以及 $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$,

证明。 显然，子空间 $W_D \equiv \mathbb{C}\mathbb{I}_n := \{c\,\mathbb{I}_n \mid c \in \mathbb{C}\}$ 是 $U(n)$-不变的。此外，W_D是不可约的，因为 $\mu_U(c\,\mathbb{I}_n) = c\,\mathbb{I}_n$。不可约表示 $\mu_D = \mu\,|_{W_D}$是平凡表示，因为 $\dim\ \mathbb{C}\mathbb{I}_n = 1$，且对所有 $U \in U(n)$ 都有 $\mu_U = 1$。

由于 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 关于 Frobenius内积构成一个希尔伯特空间，且 U(n) 在其上有酉表示，因此我们可以考虑正交不变子空间：$\mathrm{W}_D^\perp = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \langle \mathrm{Y}, \mathrm{X} \rangle = 0, \mathrm{Y} \in \mathrm{W}_D\}$，它由无迹矩阵 $\mathrm{W}^\perp\mathrm{D} \equiv \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} \mathrm{X} = 0\}$组成。通过让 μ 作用于典范基的元素，可以很容易地证明 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 是不可约的。μ 在不可约表示中的分解为

$$M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}\mathbb{I}_n \oplus \mathfrak{s}l_n(\mathbb{C}), \quad \mu \cong \mu_D \oplus \mu_D^\perp , \tag{10}$$

且 $\dim \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1$。根据定理 IV.1， Φ 可分解为

$$\Phi = \sigma \,\mathrm{id}_D + \lambda \,\mathrm{id}_{D^\perp}, \qquad \sigma, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

为了理解其对一般矩阵 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 的作用，我们需要将 X 分解为单位矩阵的倍数与无迹部分。

$$X = \frac{\operatorname{tr} X}{n}\mathbb{I}_n + \left(X - \frac{\operatorname{tr} X}{n}\mathbb{I}_n\right), \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

对 X 作用 Φ，结论便随之得出。 □

因此，任意 $U(n)$-不变映射的参数化只需要 2 个复参数 λ, σ，其中 $n > 1$。接下来，我们对映射 Φ施加进一步条件。

引理 V.1 (保单位 $U(n)$-等变量子信道)**.** 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是 $U(n)$-等变的。那么 Φ 是保单位的，当且仅当 $\sigma = 1$，即

$$\Phi(X) = \frac{1-\lambda}{n} \operatorname{tr} X \, \mathbb{I}_n + \lambda X, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}). \tag{12}$$

证明。 Φ 是保单位的，当 $\Phi(\mathbb{I}_n) = \sigma \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n$，而这当且仅当 $\sigma = 1$。 □

注意，如果 $n = 1$，那么对于 $\sigma \in \mathbb{C}$， $\Phi(X) = \sigma X$。因此，根据引理 V.1，该映射是保单位的，当且仅当 Φ 是单位矩阵。恒等映射是正的、满足 Schwarz 条件且完全正；因此问题是平凡的。下文中，除非另有说明，我们均假设 $n > 1$。

引理 V.2 (保持厄米性 $U(n)$-等变映射)。 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是 $U(n)$-等变的。那么，Φ保持厄米性，当且仅当 $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$。

证明。 Φ保持厄米性，当 $\Phi\left(X^\dagger\right) = \Phi(X)^\dagger$时。那么

$$\Phi\left(X^\dagger\right) - \Phi(X)^\dagger = \frac{(\sigma - \bar{\sigma}) - (\lambda - \bar{\lambda})}{n} \operatorname{tr} X^\dagger \mathbb{I}_n + (\lambda - \bar{\lambda}) X^\dagger = 0,$$

这对所有 X都成立，当且仅当 $\lambda - \lambda = 0$且 $(\sigma - \bar{\sigma}) - (\lambda - \lambda) = \sigma - \bar{\sigma} = 0$，也就是说，$\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$。 □

现在我们可以完整刻画 $U(n)$-等变Schwarz映射 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$。

定理 V.1 (Schwarz $U(n)$-等变映射)。 令 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为 $U(n)$-等变保单位映射。则 Φ 是 *Schwarz* 映射，当且仅当 $\lambda \in \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$。

证明。为得到必要条件，我们将该映射作用于标准基中的元素 $X = E^{ij}$，其中标准基属于 $M_n(\mathbb{C})$。然后，检验 $M_\Phi(X)$ 的半正定性。

- 若 $i \neq j$: $\Phi(X) = \lambda E_{ij}$, $\Phi(X)\dagger = \bar{\lambda} E_{ji}$ 且 $\Phi\left(X\dagger X\right) = \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_n + \lambda E_{jj}$。那么，

$$M_\Phi(E_{ij}) = \Phi\left(E_{ij}^\dagger E_{ij}\right) - \Phi(E_{ij})^\dagger \Phi(E_{ij}) = \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_n + (\lambda - |\lambda|^2)E_{jj} \geq 0.$$

矩阵 $M_\Phi(E^{ij})$ 是对角矩阵，因此其特征值为 $\frac{1-\lambda}{n}$，重数为 $n-1$；以及 $\frac{1-\lambda}{n} + (\lambda - |\lambda|^2)$，重数为 1。注意，根据定义 $M_\Phi(E^{ij}) \geq 0$ 要求 $M_\Phi(E^{ij})$ 为厄米矩阵。这等价于 $\lambda \in \mathbb{R}$，而该方程可转写为：

$$M_\Phi(E_{ij}) = \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_n + \lambda(1-\lambda)E_{jj} \geq 0.$$

那么，$M_\Phi(E^{ij}) \geq 0$ 当且仅当特征值为正时成立，即 $\frac{1-\lambda}{n} \geq 0$，且 $1-\lambda n + \lambda(1-\lambda) \geq 0$，或者等价地 $\lambda \in \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$。

- 若 $i = j$: $\Phi(X) = \Phi(X\dagger X) = \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_n + \lambda E_{jj}$，且 $\Phi(X)\dagger = \frac{1-\bar{\lambda}}{n}\mathbb{I}_n + \bar{\lambda} E_{jj}$。那么，

$$M_\Phi(E_{ij}) = \frac{1-\lambda}{n}\left(1 - \frac{1-\bar{\lambda}}{n}\right)\mathbb{I}_n + \left[\lambda - \frac{\lambda(1-\bar{\lambda}) + \bar{\lambda}(1-\lambda)}{n} - |\lambda|^2\right]E_{jj} \geq 0.$$

同样，$M_\Phi(E^{ij}) \geq 0$ 要求 $M_\Phi(E^{ij}) = M_\Phi(E^{ij})^\dagger$，这意味着 $\lambda \in \mathbb{R}$。化简方程并检验正性后，我们得到

$$M_\Phi(E_{ij}) = \frac{1-\lambda}{n}\left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right)\mathbb{I}_n - \lambda(1-\lambda)\left(1 - \frac{2}{n}\right)E_{jj} \geq 0.$$

矩阵 $M_\Phi(E^{ij})$ 再次为对角矩阵，从而得到条件 $\frac{1-\lambda}{n}\left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right) \geq 0$ 和 $\frac{1-\lambda}{n}\left(1 - \frac{1-\lambda}{n}\right) + \lambda\frac{1-\lambda}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \geq 0$。这意味着 $\lambda \in \left[-\frac{1}{n-1}, 1\right]$。

两个区间的交集表明，如果 Φ 是 Schwarz，那么 $\lambda \in \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$。

为得到充分条件，我们将 $\Phi(X^\dagger X)$ 和 $\Phi(X)^\dagger\Phi(X)$ 表示为 X 和 $X_\perp \equiv X - \mathrm{tr}X_n\,\mathbb{I}_n$ 的函数。经过一些代数运算可得

$$M_\Phi(X) = (1-\lambda)\left[\left(\frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\mathrm{tr}\,X|^2}{n^2}\right)\mathbb{I}_n + \lambda X_\perp^\dagger X_\perp\right],$$

其中，$||X||_F^2 = \langle X, X\rangle = \mathrm{tr}\,X^\dagger X$ 是 Frobenius 范数，而 $||X|| = \sigma_1(X)$ 是 X 的最大奇异值，即谱范数。

具有对称性的施瓦茨映射

由于 $1-\lambda \geq 0$，因此$M_\Phi(X)$ 为正，当且仅当矩阵 $\left(\frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\operatorname{tr} X^2|^2}{n^2}\right)\mathbb{I}_n + \lambda_n X\dagger \perp X_\perp$为正。

接着，我们将半正定厄米矩阵 $X_\perp^\dagger X_\perp$ 的对角化定义为 $V_\perp D^2 V_\perp$，其中 $V_\perp$ 是某个酉矩阵，且 $D = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$。注意，如果 $A \geq 0$，那么对于所有 $V \in U(n)$，都有 $VAV\dagger \geq 0$。因此，通过 $V_\perp^\dagger$ 进行共轭，待对角化的矩阵可简化为：

$$\left(\frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\operatorname{tr} X|^2}{n^2}\right)\mathbb{I}_n + \lambda D^2 .$$

该矩阵是对角矩阵，其第*i</style}* 个特征值为 $\frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\operatorname{tr} X|^2}{n^2} + \lambda\sigma_i^2$。最后，施加条件 $\lambda \geq -\frac{1}{n}$：

$$\frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\operatorname{tr} X|^2}{n} + \lambda\sigma_i^2 \geq \frac{||X||_F^2}{n} - \frac{|\operatorname{tr} X|^2}{n^2} - \frac{\sigma_1^2}{n} \geq \frac{||X||^2 - \sigma_1^2}{n} \geq 0 ,$$

其中我们用到了范数不等式：$||X|| \leq ||X||_F \leq \sqrt{n}||X||$，以及正交关系$||X||_F^2 = ||X_\perp||_F^2 + \frac{|\operatorname{tr} X|^2}{n^2}$；对所有 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 均成立。 □

定理 V.2 (完全正 $U(n)$-等变映射)。 设 Φ 是一个 $U(n)$-等变保单位映射。那么，当且仅当 $\lambda \in \left[-\frac{1}{n^2-1}, 1\right]$时， Φ 是完全正的。

证明。为证明这一点，我们使用与 Φ关联的 Choi矩阵C_Φ，即 $C_\Phi = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij})$.

首先注意，根据定理 V.1，如果 $i \neq j$，那么 $\Phi(E_{ij}) = \lambda E_{ij}$。而如果 $i = j$，那么$\Phi(E_{jj}) = \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_n + \lambda E_{jj}$。据此，我们可以显式计算 Choi矩阵

$$\begin{aligned} C_\Phi &= \sum_i E_{ii} \otimes \left(\frac{1+\lambda}{n}\mathbb{I}_n + \lambda E_{ii}\right) + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \lambda E_{ij} \\ &= \lambda \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij} + \frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_{n^2} . \end{aligned} \tag{13}$$

该矩阵不是对角矩阵，不过，如果 v是第一项$A := \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}$的特征值，那么$C_\Phi$的特征值由 $\lambda v + \frac{1-\lambda}{n}$给出。

为了计算A的特征值，考察它对典范基 $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^n$的作用会很有帮助。$M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C})$。不难证明，$Ae_k \otimes e_l = \delta_{kl}\sum_i e_i \otimes e_i$。我们定义

$$v = \sum_k e_k \otimes e_k , \tag{14}$$

并进行检查：

$$Av = \sum_{i,j,k} \delta_{jk} e_i \otimes e_i = nv . \tag{15}$$

因此，A 的特征值为 n，重数为 1；0 的重数为 n^2-1。为此，注意到

$$A(e_i\otimes e_j)=0,\qquad \forall i\neq j, \tag{16}$$

and

$$Aw=0,\quad \forall w\in \operatorname{span}\{e_i\otimes e_i \mid i=1,\dots,n\},\ \text{such that } \langle w,v\rangle=0. \tag{17}$$

因此，0 是 C_Φ 的特征值，重数为 $(n^2-n)+(n-1)=n^2-1$。

C_Φ 的正性因此转化为 $1-\lambda_n\geq 0$ 以及 $n\lambda+1-\lambda_n\geq 0$。然后，$\Phi$ 是 CP 当且仅当 $\lambda\in\left[-\frac{1}{n^2-1},\ 1\right]$。 □

在此结果之后，我们确定了一类 $U(n)$-等变映射，其中有些是 S 映射但不是 CP 映射。这些映射位于范围 $\lambda\in\left[-\frac{1}{n},-\frac{1}{n^2-1}\right)$ 内，对所有维数 $n\geq 2$ 均成立。这一族映射在 PPT[2] 猜想和纠缠见证方面颇为有趣（见下方图 1）。

命题 V.2（正偏转置 $\Longleftrightarrow$ 纠缠破坏，适用于 $U(n)$ 等变量子信道）。设 $\Phi:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 是 $U(n)$ 等变且保单位的。那么 Φ 是正偏转置的，当且仅当它是纠缠破坏的（EB）。此外，Φ 是正偏转置且纠缠破坏的，当且仅当 $\lambda\in\left[-\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n+1}\right]$。

证明。我们先证明第二个结论。由等式 (13) 和 (15)–(17)，Choi矩阵C_Φ是各向同性态

$$C_\Phi=\frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_{n^2}+\lambda\, v^\dagger v.$$

部分转置得到 $(\mathrm{id}\otimes T)(C_\Phi)=\frac{1-\lambda}{n}\mathbb{I}_{n^2}+\lambda F$，其中 F 是交换映射。由于F在对称子空间上的特征值为 $+1$，在反对称子空间上的特征值为 -1，正偏转置等价于$1-\lambda n\pm\lambda\geq 0$，即 $\lambda\in\left[-\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n+1}\right]$。

对于第一个陈述，各向同性态的可分性（因此 Φ 的纠缠破坏）当且仅当保真度满足 $\mathscr{F}=v^\dagger\rho v\leq 1$。这里 $\mathscr{F}=(1-\lambda)/n^2+\lambda$，由此得到相同的区间。因此，对于 Φ 和 $\lambda\in\left[-\frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n+1}\right]$，正偏转置 $\Longleftrightarrow$ 纠缠破坏。 □

B. 对角酉等变性

与过于严格的酉等变性不同，可以放宽条件，仅考虑对角酉等变性。n 阶对角酉群定义为 $DU(n)\cong U(1)\times\cdots\times U(1)\subset U(n)$，并且是$U(n)$的极大对角环面。其元素参数化为$U(\varphi_1,\dots,\varphi_n)=\mathrm{diag}\{e^{i\varphi_1},\dots,e^{i\varphi_n}\}$，其中 $\varphi_j\in[0,2\pi)$，$j=1,\dots,n$。我们还记 $u_j:=e^{i\varphi_j}$。

具有对称性的施瓦茨映射

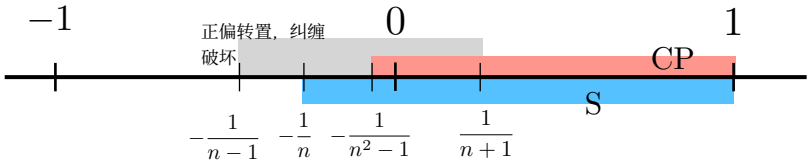

图 1. 表示（保单位）$U(n)$-等变完全正映射（红色）、（保单位）$U(n)$-等变Schwarz映射（蓝色）以及$U(n)$-等变正偏转置映射（灰色）区域的示意图，其中正偏转置映射等价于纠缠破坏映射。

群$DU(n)$是阿贝尔群，其所有不可约表示均为一维。$DU(n)$的不可约表示由其特征标定义

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{k}}: DU(n) &\to U(1)\\ U(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) &\to \chi_{\mathbf{k}}[U(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)] = e^{i(k_1\varphi_1+\cdots+k_n\varphi_n)} = \prod_{j=1}^{n} u_j^{k_j},\end{aligned}$$

其中$\mathbf{k}=(k1,\ \ldots\ldots,\ k_n)\in\mathbb{Z}^n$以及$DU(n)\cong\mathbb{Z}^n$。群$DU(n)$作为$U(n)$的子群作用于$M_n(\mathbb{C})$上，即 $\mu_U(X)=UXU^\dagger$，其中$U\equiv U(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_n)\in DU(n)$。

定理 V.3 ($DU(n)$-等变映射)。 设 Φ为一个线性 $DU(n)$-等变映射。则，

$$[\Phi(X)]_{ij}=\begin{cases}\lambda_{ij}X_{ij} & if\ i\neq j,\\ \sum_k c_{ki}X_{kk} & if\ i=j.\end{cases}$$

证明。容易看出，对于所有 $X\in M_n(\mathbb{C})$ 以及 $U\equiv U(\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_n)$，有 $[\mu_U(X)]_{ij}=u_i^{-}u_jX_{ij}$。于是，每个一维子空间 $W_{ij}=\mathrm{span}\{E_{ij}\}$都是 DU(n)-不变的： $\mu_U(E_{ij})=u_i^{-}u_jE_{ij}$。此外，$\dim W_{jk}=1$，因此表示 $\mu^{(ij)}U=u_i^{-}u_j$ 都是不可约的。

- 若 $i\neq j$，不可约表示 $\mu_{(ij)}$是特征 $\chi_{\mathbf{k}_{ij}}$，其向量为

$$\mathbf{k}_{ij}=(0,\ldots,0,\overset{(i)}{1},0,\ldots,0,\overset{(j)}{-1},0,\ldots,0).$$

那么，不可约表示 $\mu^{(ij)}$和 $\mu^{(kl)}$（其中 $i\neq j$，且 $k\neq l$）等价，当且仅当 $i=k$ 且 $j=l$。

- 此外，若$i=j$，则得到不可约表示 $\mu_{(ii)}=1$，其特征标由向量$\mathbf{k}_{ii}=(0,\ldots,0)$给出，并且所有表示 $\mu_{(ii)}, i=1,\ldots,n$ 都是等价的。

全空间 $M_n(\mathbb{C})$ 分解为以下一维不可约子空间之和：

$$M_n(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{ij} W_{ij}, \qquad \mu \cong \bigoplus_{ij} \mu^{(ij)}; \tag{18}$$

并且由于　定理 IV.1，任意线性 $DU(n)$ 等变映射 Φ 都可分解为：

$$\Phi = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} \, \mathrm{id}_{W_{ij}} + \mathscr{C} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \tag{19}$$

其中，对于所有i,j，$\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$；且 $\mathscr{C}$: $W_0 \to W_0$ 是线性映射，其中 W_0 是由矩阵 E_{ii}, $i = 1,\ldots,n$ 生成的 $M_n(\mathbb{C})$ 的 n 维子空间。因此，$\mathscr{C}(E_{ii}) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} E_{kk}$。

然后，将由 (19) 给出的 Φ 应用于 X，即可得到所需公式。 □

与 $U(n)$ 等变映射不同，$DU(n)$ 等变映射由 $n(n-1)\ 2 \quad {}^{+}n^2 = n(3n-1)$ 个复参数参数化。

———

引理 V.3 (保单位 $DU(n)$-等变量子信道)。 设 Φ 是 $DU(n)$-等变量子信道。当且仅当对所有 $i = 1,\ldots,n$，Φ 满足 $\sum j \, c_i j = 1$ 时，Φ 是保单位的。

证明。 注意到 $\mathbb{I}_n = \sum_i E_{ii}$，因此 $\Phi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ 等价于对所有 i，$\sum_j c_{ij} = 1$。 □

这意味着，如果 Φ 是一个 DU$DU(n)$-等变映射，那么，由其典范分解 (19) 定义的算子 $\mathscr{C}$ 所对应的矩阵是一个随机矩阵。

引理 V.4 (保持厄米性 $DU(n)$-等变映射)。 设 Φ 是 $DU(n)$-等变映射。$^{-}$当且仅当对所有 $i,j = 1,\ldots,n$，Φ 满足 $\lambda_i j = \lambda ji$ 和 $c_i j \in \mathbb{R}$ 时，Φ 保持厄米性。

证明。 对于所有 $X \in M_n(\mathbb{C})$ 以及所有 $i,j = 1,\ldots,n$，若 Φ 满足 $[\Phi(X^{\dagger})]_{ij} = [\Phi(X)^{\dagger}]_{ij}$，则 Φ保持厄米性。

- 若 $i \neq j$，则 $\lambda i j \, \bar{X} ji = \bar{\lambda} ji \, \bar{X} ji \; \forall i,j \iff \lambda i j = \bar{\lambda} ji \; \forall i,j$。
- 若 $i = j$，则 $\sum_j c_{ij} X_{jj} = \sum_j \bar{c}_{ij} \bar{X}_{jj} \; \forall i,\ j$。由于这对所有 X 都成立，因此当且仅当 $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$，$c_{ij} \in \mathbb{R}$，$\forall i,\ j$ 时，它才成立。

□

定理 V.4 (Schwarz $DU(n)$-等变映射)。 设 Φ 是一个 $DU(n)$-等变的保单位且保持厄米性的映射。如果 Φ 是 $Schwarz$ 映射，则对所有 i、j，都满足：

$$c_{kj} \in [0,1], \quad k \neq j, \qquad c_{jj} \geq |\lambda_{ij}|^2 .$$

证明。令 $X = E^{ij}$。

- 若 i $\neq$j，$\Phi(X\dagger X) = \Phi(E\,j\,j) = \Sigma k\,ck\,jEkk$ 且 $\Phi(X)\dagger\,\Phi(X) = |\lambda i\,j|^2 E\,j\,j$。则 $M_\Phi(X) = \Sigma k(ck\,j - \delta i\,j|\lambda i\,j|^2)Ekk$。该矩阵是对角矩阵，其特征值为 k $\neq$j 时的 ck j；以及 k =j 时的 c j j $-|\lambda i\,j|^2$。因此，当且仅当 k $\neq$j 时 ck j ≥ 0；且 k =j 时 c j j $\geq |\lambda i\,j|^2 \geq 0$，$M_\Phi(X) \geq 0$。

- 若 i =j，则 $\Phi(X)\dagger\,\Phi(X) = \Sigma k\,c^2k\,jEkk$，因此 $M_\Phi(X) = \Sigma k\,cki(1 - cki)Ekk$。该矩阵是对角矩阵，其特征值为 cki(1 – cki)。由于 cki ≥ 0，因此当且仅当 $1 - cki \geq 0$ 时，$M_\Phi(X) \geq 0$。

□

可以证明，系数还满足更多条件。例如，采用定理 V.4 中对 $X = E_{ij} + E_{ik}$ 所用的相同技巧，可以得到如下条件：

$$\left(c_{jj} + c_{jk} - |\lambda_{ij}|^2\right)\left(c_{jk} + c_{kk} - |\lambda_{ik}|^2\right) \geq |\lambda_{jk} + \lambda_{ji}\lambda_{ik}|^2 . \tag{20}$$

我们不采用这种方法逐一列出由此形式推导出的所有条件，而是专注于$DU(n)$ 等变映射的特定族，并给出明确的充分施瓦茨条件。但在此之前，我们将给出$DU(n)$-等变映射为CP的充要条件。

定理 V.5 (完全正 $DU(n)$-等变映射)。 设 Φ 是一个 $DU(n)$-等变酉-˜保持映射。那么，当且仅当对所有 $i \neq j$ 和 $C_\Phi \geq 0$，其中˜$C_\Phi \in M_n(\mathbb{C})$ 具有如下形式时， Φ 才是完全正的

$$\tilde{C}_\Phi = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}E_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \lambda_{ij}E_{ij} \geq 0 .$$

证明。 为证明这一点，我们使用 Choi矩阵。当$i \neq j$时， $\Phi(E^{ij}) = \lambda_{ij}E^{ij}$；而当$i = j$时，$\Phi(E_{ii}) = \sum_j c_{ij}E_j$。因此，可以将 Choi矩阵写成

$$\begin{aligned} C_\Phi &= \sum_i E_{ii} \otimes \left(\sum_j c_{ij}E_{jj}\right) + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} E_{ij} \otimes \lambda_{ij}E_{ij} \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}E_{ii} \otimes E_{jj} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \lambda_{ij}E_{ij} \otimes E_{ij} . \end{aligned}$$

那么我们得到第一项，它是对角的；第二项则包含分散的项，不含对角元素。如果该映射保持厄米性，那么C_Φ 将是厄米的。

具有对称性的施瓦茨映射

该矩阵可按块对角化，其中有n^2-n个特征值等于c^{ij}，其中$i\neq j$，另外还有n个特征值来自$n\times n$块

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii}E_{ii}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\lambda_{ij}E_{ij}:=\tilde{C}_{\Phi}.$$

□

固定c_{ii}或 λ_{ij}的值，即可求得特征值的特例。

1. 量子比特：还原$DU(2)$ 分类

现在，我们将$DU(n)$-等变映射的一般形式专门化到$n=2$。将定理 V.3 应用于这一特例，得到

$$\Phi(X)=\begin{pmatrix} c_{11}X_{11}+c_{12}X_{22} & \lambda X_{12}\\ \bar{\lambda}X_{21} & c_{21}X_{11}+c_{22}X_{22}\end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中，映射为保单位且保持厄米性，这意味着 2×2 矩阵 $\Gamma=(c^{ij}),\bar{i},j\in\{1,2\}$ 为实数且随机： $\sum_i c^{ij}=1$ 以及 $\lambda_{12}=\lambda=\lambda_{21}$。这恰好与 Chru´sci´nski 关于对角酉矩阵（及正交矩阵）协变性的形式一致，见$M_2(\mathbb{C})$[8,16]。

命题 V.3. 设 $n=2$，因此 Φ 是上文由式 *(21)* 给出的 $DU(2)$-等变、保单位、保厄米性的映射。则：

- Φ 是 *Schwarz* 映射，当且仅当

$$0\leq c_{12},c_{21}\leq 1,\quad c_{11},c_{22}\geq|\lambda|^2; \tag{22}$$

其中 $c_{11}=1-c_{21}$, 且 $c_{22}=1-c_{12}$。

- Φ 是完全正映射，当且仅当，

$$c_{12},c_{21}\geq 0,\quad c_{11}c_{22}\geq|\lambda|^2. \tag{23}$$

证明。• 对于 Schwarz 映射，应用定理 V.4 可得到由上述四个标量不等式 (22) 给出的必要条件。

• 关于完全正性，定理 V.5 给出了适用条件，因此只需满足条件 (23)。具体而言，计算 Choi矩阵可得

$$C_\Phi = \begin{pmatrix} c_{11} & \lambda \\ \bar{\lambda} & c_{22} \end{pmatrix} \oplus \mathrm{diag}\,(c_{12}, c_{21})\,,$$

其正性给出了所述条件 (23)。

□

因此，所提出的一般框架精确地重现了文献[8,16]中的量子比特分类。Schwarz 但非完全正区域对应于开条带 $|\lambda|^2 < c_{11}$,c_{12},，但 $c_{11}c_{22} < |\lambda|^2$。

2. 量子三能级系统：对称的 $DU(3)$ 族

对于 $n = 3$，一般参数空间很大（9 个实参数 c^{ij} 和 3 个复参数λ_{ij}），因此我们将讨论范围限制在置换对称子类:

$$\lambda_{ij} = \lambda\ (i \neq j)\,, \quad \Gamma = p\mathbb{I}_3 + \frac{1-p}{2}(1_3 - \mathbb{I}_3)\,, \tag{24}$$

其中 1_3是所有元素均为 1 的 3×3矩阵。 Γ的每一列都有一个对角元p，且非对角元相等（$1-p$）/2。因此，参数 $p \in [0,1]$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$完全确定了该映射。将这些条件代入定理 V.3，得到

$$[\Phi(X)]_{ij} = \begin{cases} \lambda X_{ij} & \text{if } i \neq j, \\ pX_{ii} + \frac{1-p}{2}(X_{jj} + X_{kk}) & \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\,. \end{cases} \tag{25}$$

这类映射仍然是DU(3)-等变、保单位且保厄米性的。

命题 V.4 (对称 $DU(3)$ 族：精确的 Schwarz 区域和完全正区域)。 考虑由式 *(25)* 给出的置换对称、$DU(3)$-等变、保单位且保厄米性的映射。那么:

1. Φ 是 *Schwarz* 映射，当且仅当

$$0 \le p \le 1, \quad |\lambda|^2 \le \frac{1}{2}\min\{p, 1-p\}\,, \tag{26}$$

或者等价地，$p \geq 2|\lambda|^2$和 $1-p \geq 2|\lambda|^2$。

具有对称性的施瓦茨映射

2. Φ 是完全正的，当且仅当

$$|\lambda| \le \min\{p, 1-p\}$$

因此，完全正区域严格包含于施瓦茨区域。

证明。固定一列 j，并取 $\mathrm{X} = \alpha \mathrm{E}_i\mathrm{j} + \beta \mathrm{E}_k\mathrm{j}$，其中 $\mathrm{i} \neq \mathrm{k} \neq \mathrm{j}$。则 $\mathrm{X}^\dagger\mathrm{X} = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\mathrm{E}\,\mathrm{j}\,\mathrm{j}$，且 $\Phi(\mathrm{X}) = \lambda\alpha \mathrm{E}_i\mathrm{j} + \lambda\beta \mathrm{E}_k\mathrm{j}$。因此，$\mathrm{M}_\Phi(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{X}^\dagger\mathrm{X}) - \Phi(\mathrm{X})^\dagger\Phi(\mathrm{X})$ 的对角线为

$$\begin{aligned}
(j,j) &: \; p(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - |\lambda|^2|\alpha+\beta|^2, \\
(i,i) &: \; \frac{1-p}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - |\lambda|^2|\alpha|^2, \\
(k,k) &: \; \frac{1-p}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) - |\lambda|^2|\beta|^2.
\end{aligned}$$

对于所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$M_\Phi(X)$ 的正性等价于这些元素在所有相位取值下均非负。利用 $|\alpha+\beta|^2 \le 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$，我们得到以下紧界

$$p \ge 2|\lambda|^2, \qquad \frac{1-p}{2} \ge |\lambda|^2,$$

如定理所示。这些条件既充分又必要：分别在 $\alpha = \beta$ 和 $\beta = 0$（或 $\alpha = 0$）处取等号。由对称性可知，对行叠加也成立相同条件。在维数 3 的情形下，这些检验穷尽了所有非对角项支撑（每列或每行恰好包含两个非对角元素），因此，这些不等式对于满足 Schwarz性质既必要又充分。

CP判据由 Choi矩阵的 2×2 块的正性（定理 V.5）得出，这给出 $p\ 1-p \ge |\lambda|$。比较这两个区域可得，CP 的条件为 $|\lambda| \le \min\{p\ 1-p\}$，而 Schwarz 的条件为 $|\lambda|^2 \le \frac{1}{2}$ $\min\{p\ 1-p\}$。 □

因此，相当一部分 $DU(3)$-等变映射是 Schwarz 映射，但不是 CP 映射。

3. $DU(2)$ 与对称 $DU(3)$ 族的正偏转置[2]猜想

现在，我们将把前面的结果应用于 DU (2) 和 DU(3)-等变映射的情形，以直接评估 PPT[2] 猜想。在此之前，我们先建立一个关于这些映射参数“平方运算”的一般结果。

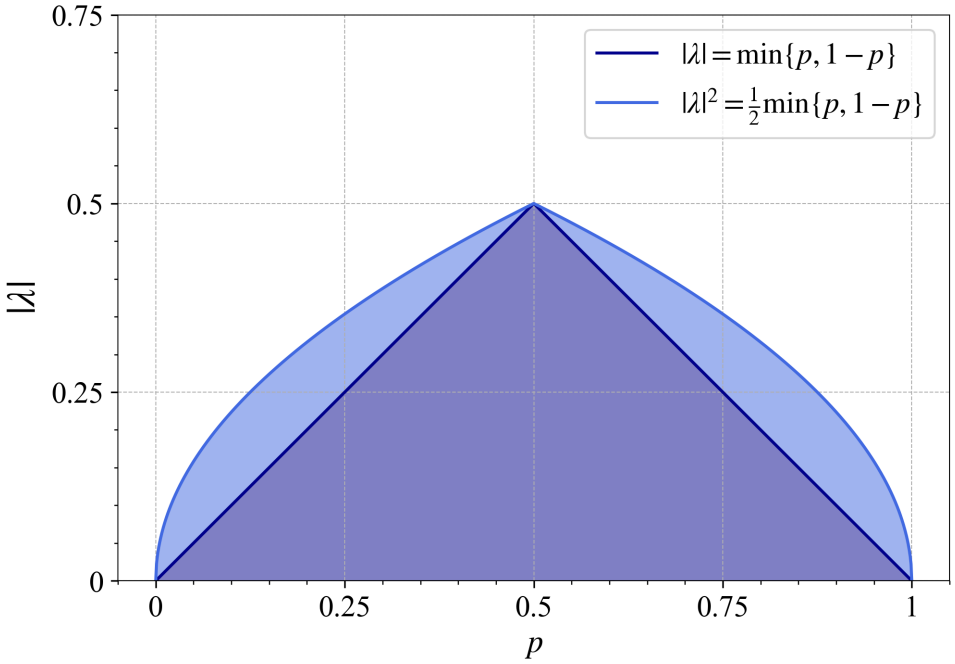

图 2. 对称的 $DU(3)$ 族。浅色：施瓦茨区域 $|\lambda| \le \sqrt{\frac{1}{2}\min\{p\ 1-p\}}$。深色：完全正区域$|\lambda| \le \min\{p\ 1-p\}$。

引理 V.5 （DU(n)-等变性下的复合律）。 设 Φ、Ψ： $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是 $DU(n)$-等变、保单位且保厄米性的映射，并且

$$[\Phi(X)]_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}^{\Phi} X_{ij}, & i \neq j, \\ \sum_k c_{kj}^{\Phi} X_{kk}, & i = j, \end{cases} \qquad [\Psi(X)]_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}^{\Psi} X_{ij}, & i \neq j, \\ \sum_k c_{kj}^{\Psi} X_{kk}, & i = j, \end{cases}$$

其中 $\lambda^{\Phi}ij = \lambda^{\Phi}ji$、$\overline{\lambda^{\Psi}ij} = \lambda^{\Psi}ji$ 以及 $\Gamma^{\Phi} = (c^{\Phi}_{k}j)$、$\Gamma^{\Psi} = (c^{\Psi}_{k}j)$ 均为列随机矩阵。则 $\Phi\circ\Psi$ 是 $DU(n)$- 等变的，并且

$$\lambda_{ij}^{\Phi\circ\Psi} = \lambda_{ij}^{\Phi}\lambda_{ij}^{\Psi}\ (i \neq j), \qquad C^{\Phi\circ\Psi} = C^{\Phi}C^{\Psi}.$$

特别地， Φ^k 具有参数 $\left((\lambda_{ij})^k、(C)^k\right)$。

证明。 直接应用引理 IV.1 即可。特别地：

- For $i \neq j$, $\Psi(E_{ij}) = \lambda_{ij}^{\Psi} E_{ij}$ and then $\Phi(\Psi(E_{ij})) = \lambda_{ij}^{\Psi}\lambda_{ij}^{\Phi} E_{ij}$.
- For $i = j$, $\Psi(E_{jj}) = \sum_k c_{kj}^{\Psi} E_{kk}$ and $\Phi(\Psi(E_{jj})) = \sum_k c_{kj}^{\Psi}\sum_\ell c_{\ell k}^{\Phi} E_{\ell\ell} = \sum_\ell (C^{\Phi}C^{\Psi})_{\ell j} E_{\ell\ell}$.

列随机性在矩阵乘法下保持不变，因此幺正性也保持不变。厄米性保持和$DU(n)$-等变性在复合运算下保持稳定。 □

推论 V.5.1（平方律）。 对于任意 $DU(n)$-等变、保单位且保厄米性的量子信道 Φ，

$$\Phi^2: \quad \lambda \longmapsto \lambda^2,$$

在 $DU(n)$中对非对角项逐项作用，而经典混合部分在 $DU(n)$ 情形下按 $C \mapsto C^2$ 演化。

现在，我们可以证明关于对角酉等变映射的正偏转置[2] 猜想的陈述。

命题 V.5（正偏转置[2]对角酉对称性下： $DU(2)$与 $DU(3)$切片）。 考虑一个 $DU(n)$-等变、保单位且保厄米性的量子信道，其标准形由定理 *(V.3)* 给出。那么：

1. $DU(2)$ 量子比特。若 Φ 是正偏转置的，则 Φ^2 是纠缠破坏的。

2. 对称 $DU(3)$ 族。在双参数子类 $\lambda_{ij} = \lambda$（$i \neq j$）和 $C = pI + (1-p)\mathbf{1}$（$\mathbf{1} - I$）中，若 $p \in [0,1]$，且 Φ 是正偏转置的，则 Φ^2 是纠缠破坏的。

证明。分块正部分转置检验。对于$DU(n)$，$(T \otimes \mathrm{id})(C_\Phi)$可分解为 2×2 个块 $\begin{pmatrix} c_{ii} & \lambda_{ij}\lambda_{ji} \\ c_{jj} & \end{pmatrix}$

（以及对角部分），因此，对于所有$i \neq j$，若$c_{ij} \geq 0$且$c_{ii}c_{jj} \geq |\lambda_{ij}|^2$，则可推出正偏转置。

复合规则。该类在复合下封闭，且 $\Phi: (\lambda_{ij}, C) \mapsto \Phi^2: (\lambda^2_{ij}, C^2)$.

纠缠破坏判据（对角占优）。根据第 5.2 节，我们有如下充分的纠缠破坏性检验：对于每一列j（或每一行i），$c_{jj} \geq \sum_{i \neq j} |\lambda_{ij}|^2$（或$c_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |\lambda_{ij}|^2$）。

(a) DU(2)。设 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 和 $\lambda = \lambda_{12}$。正偏转置意味着 $c_{12}, c_{21} \geq 0$ 和 $c_{11}c_{22} \geq |\lambda|^2$。平方运算后： $\lambda \mapsto \lambda^2$， $C \mapsto C^2$，其中 $(C^2)_{11} \geq c_{11}^2, (C^2)_{22} \geq c_{22}^2$。因此 $(C^2)_{11} \geq c_{11}^2 \geq |\lambda|^2 \geq |\lambda^2|^2$，对指标 22 也同样成立，所以对于 Φ^2，纠缠破坏不等式成立。

(b) 对称 DU(3)。正偏转置条件简化为 $|\lambda| \leq \min\{p, 1-p\}$。平方运算一次后， $|\lambda| \mapsto |\lambda|^2$ and $p \mapsto p' := (C^2)_{jj} = p^2 + \frac{1}{2}(1-p)^2$。现在，纠缠破坏性检验要求 $p' \geq 2|\lambda|^4$（每列有两个非对角项），这一条件成立，因为 $|\lambda|^4 \leq \min\{p^2, (1-p)^2\}$，并且对于 $p \in [0,1]$，我们有 $2\min\{p^2, (1-p)^2\} \leq p^2 + (1-p)^2 \leq p^2 + \frac{1}{2}(1-p)^2 = p'$，只要 $\min\{p, 1-p\} \leq \frac{1}{2}$，而正偏转置界 $|\lambda| \leq \min\{p, 1-p\} \leq \frac{1}{2}$保证了这一点。因此，对于 Φ^2，纠缠破坏不等式成立。

– □

C. 乘积酉等变性

施加关于酉群的等变性时，我们得到两个复参数。放宽对称性条件后，由于可用的映射更多，参数的数量也随之增加。因此，在最后这一节中，我们选择了一种颇具研究价值的中间情形，即群 $U(n_1)\times U(n_2)$，其中 $n_1+n_2=n$。每个 $U\in U(n_1)\times U(n_2)$ 都具有形式 (U_1,U_2)，其中 $U_{1,2}\in U(n_{1,2})$。这种情形对应于一个复合系统，其中每个子系统都具有 $U(n)$ 对称性。

那么很容易验证，表示 $\mu_1\otimes\mu_2$ 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 上的$G_1\times G_2$的不可约表示，当且仅当 μ_1是G_1在$\mathscr{H}_1$ 上的不可约表示，且 μ_2 是G_2 在 $\mathscr{H}_2$[36]上的不可约表示。然后，利用不可约表示在$U(n)$作用下的分解 (10)，$U(n_1)\times U(n_2)$在 $M_{n_1}(\mathbb{C})\otimes M_{n_2}(\mathbb{C})$上的张量积表示的不可约表示为：

$$\begin{aligned} M_{n_1}(\mathbb{C})\otimes M_{n_2}(\mathbb{C}) &\cong [\mathbb{C}\mathbb{I}_{n_1}\oplus\mathfrak{s}l_{n_1}]\otimes[\mathbb{C}\mathbb{I}_{n_2}\oplus\mathfrak{s}l_{n_2}] \\ &\cong [\mathbb{C}(\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathbb{I}_{n_2})]\oplus[\mathbb{C}\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathfrak{s}l_{n_2}]\oplus \\ &\quad\oplus[\mathfrak{s}l_{n_1}\otimes\mathbb{C}\mathbb{I}_{n_2}]\oplus[\mathfrak{s}l_{n_1}\otimes\mathfrak{s}l_{n_2}]. \end{aligned} \tag{27}$$

我们将式 (27)右侧的各项记为$W_{00},W_{01},W_{10},W_{11},$，其维数分别为 1、$n_2^2-1$、$n_1^2-1$和$(n_1^2-1)(n_2^2-1)$。只要$n_1\neq n_2$，它们就两两不等价。要将任意$X\in M_{n_1}(\mathbb{C})\otimes M_{n_2}(\mathbb{C})$写成该分解中的形式，首先将其分解为 $\sum_i A_i\otimes B_i$。现在，将每一项写成无迹部分与单位矩阵部分的倍数，

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\mathrm{tr}A_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}+\left(A_i-\frac{\mathrm{tr}A_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}\right):=\frac{\mathrm{tr}A_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}+A_i^{\perp}, \\ B_i &= \frac{\mathrm{tr}B_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}+\left(B_i-\frac{\mathrm{tr}B_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}\right):=\frac{\mathrm{tr}B_i}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}+B_i^{\perp}. \end{aligned}$$

最后进行运算，得到 $X=X_{00}+X_{01}+X_{10}+X_{11}$，其中：

$$X_{00} = \frac{\sum_i \mathrm{tr}\,A_i\,\mathrm{tr}\,B_i}{n_1n_2}\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathbb{I}_{n_2}\in W_{00}. \tag{28}$$

$$X_{01} = \frac{1}{n_1}\mathbb{I}_{n_1}\otimes\sum_i \mathrm{tr}\,(A_i)B_i^{\perp}\in W_{01}. \tag{29}$$

$$X_{10} = \sum_i \mathrm{tr}\,(B_i)A_i^{\perp}\otimes\frac{1}{n_2}\mathbb{I}_{n_2}\in W_{10}. \tag{30}$$

$$X_{11} = \sum_i A_i^{\perp}\otimes B_i^{\perp}\in W_{11}. \tag{31}$$

定理 V.6 ($U(n_1)\times U(n_2)$-等变映射)。 设 Φ是一个线性 $U(n_1)\times U(n_2)$等变映射。那么，$\Phi(X)=\sum_{a,b=0}^{1}\lambda_{ab}X_{ab}$，其中 X_{ab} 如公式（*28–31*）所示。

证明。 对 (27) 中给出的分解应用舒尔引理（引理 III.1）。 □

因此，我们有四个参数 λ_{00}，λ_{01}，λ_{10}，λ_{11}，比酉情形多两个。

引理 V.6 （保单位的 $U(n_1)\times U(n_2)$等变量子信道）。 设 Φ是 $U(n_1)\times U(n_2)$等变的。当且仅当 $\lambda_{00}=1$时，它是保单位的。

证明。

$$\Phi(\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathbb{I}_{n_2})=\lambda_{00}\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathbb{I}_{n_2}=\mathbb{I}_{n_1}\otimes\mathbb{I}_{n_2}\iff\lambda_{00}=1\,.$$

□

引理 V.7 （保持厄米性的 $U(n_1)\times U(n_2)$等变映射）。 设 Φ是 $U(n_1)\times U(n_2)$等变的。当且仅当 $\lambda_{ij}\in\mathbb{R}$对所有 i、$j=0$，1时，它保持厄米性。

证明。

$$\Phi\left(X^{\dagger}\right)-\Phi(X)^{\dagger}=\sum_{i,j=0}^{1}\left(\lambda_{ij}-\bar{\lambda}_{ij}\right)X_{ij}^{\dagger}=0$$
$$\iff\lambda_{ij}=\bar{\lambda}_{ij},\quad\forall i,j\iff\lambda_{ij}\in\mathbb{R},\quad\forall i,j\,.$$

这里用到了这些子空间的正交性。 □

接下来的两个定理中，我们将通过探究该映射如何作用于典范基而获益。为此，我们记：

$$\begin{aligned}a&\equiv\frac{1-\lambda_{01}-\lambda_{10}+\lambda_{11}}{n_1n_2},\quad b\equiv\frac{\lambda_{01}-\lambda_{11}}{n_1},\\ c&\equiv\frac{\lambda_{10}-\lambda_{11}}{n_2},\quad d\equiv\lambda_{11}\,.\end{aligned}\tag{32}$$

令 $\{E_{ij}\}$ 和 $\{F_{kl}\}$ 分别为 $M_{n_1}(\mathbb{C})$ 和 $M_{n_2}(\mathbb{C})$ 的典范基。那么我们得到：

1. $i\neq j$，$j\neq l$：$\Phi(E_{ij}\otimes F_{kl})=dE_{ij}\otimes F_{kl}$。

2. $i=j$，$j\neq l$：$\Phi(E_{ii}\otimes F_{kl})=b\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{kl}+dE_{ij}\otimes F_{kl}$。

3. $i\neq j$，$j=l$：$\Phi(E_{ij}\otimes F_{kk})=cE_{ij}\otimes\mathbb{I}_{n_2}+dE_{ij}\otimes F_{kl}$。

4. $i=j,\ j=l$: $\Phi(E_{ij}\otimes F_{kk})=a\mathbb{I}_{n_1n_2}+b\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{kk}+cE_{ii}\otimes\mathbb{I}_{n_2}+dE_{ii}\otimes F_{kk}$.

首先，我们将考虑 Schwarz 映射的必要条件。为此，我们在$X=E_{ij}\otimes F_{kl}$处进行求值。

1. i $\neq$j, j $\neq$l: $M_\Phi=a\mathbb{I}_{n_1n_2}+b\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{ll}+cE_{jj}\otimes\mathbb{I}_{n_2}+dE_{jj}\otimes F_{ll}$。该算子是对角的。为计算其特征值，我们考虑它在典范基下的作用。$M_\Phi e_p\otimes e_q=ae_p\otimes e_q+\delta_{ql}be_p\otimes e_l+\delta_{pj}ce_j\otimes e_q+\delta_{pj}\delta_{ql}d(1-d)e_j\otimes e_l$。于是，条件为：

$$a\geq 0,\quad a+c\geq 0,\quad a+b\geq 0,\quad a+b+c+d(1-d)\geq 0. \tag{33}$$

对于其余情形，我们采用类似的步骤。

2. $i=j,\ j\neq l$: $M_\Phi=a\mathbb{I}_{n_1n_2}+b(1-b)\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{ll}+cE_{jj}\otimes\mathbb{I}_{n_2}+d(1-2b-d)E_{jj}\otimes F_{ll}$。新的非平凡条件为：

$$a+b(1-b)\geq 0,\quad a+b(1-b)+c+d(1-2b-d)\geq 0. \tag{34}$$

3. $i\neq j, j=l$: $M_\Phi=a\mathbb{I}_{n_1n_2}+b\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{ll}+c(1-c)E_{jj}\otimes\mathbb{I}_{n_2}+d(1-2c-d)E_{jj}\otimes F_{ll}$。新的非平凡条件为：

$$a+c(1-c)\geq 0\quad a+b+c(1-c)+d(1-2c-d)\geq 0. \tag{35}$$

4. $i=j, j=l$: $\Phi(X\dagger X)=\Phi(X)$，那么 $M_\Phi=\Phi(X)(1-\Phi(X))$ 的特征值为 $\nu(1-\nu)$，其中 ν 是 $\Phi(X)$ 的特征值。新的条件为：

$$\begin{aligned} a(1-a)\geq 0,&\qquad (a+c)[1-(a+c)]\geq 0, \\ (a+b)[1-(a+b)]\geq 0,&\qquad (a+b+c+d)[1-(a+b+c+d)]\geq 0. \end{aligned} \tag{36}$$

定理 V.7 (Schwarz $U(n_1)\times U(n_2)$-等变映射)。 设 Φ 是一个 $U(n_1)\times U(n_2)$-等变保单位映射。若 Φ 是 *Schwarz*，则满足条件 *(33-36)*。

现在我们计算 Choi矩阵。为此，我们根据上文使用的相同四个条件，将和式 $\sum_{i,j,k,l}E_{ij}\otimes F_{kl}\otimes\Phi(E_{ij}\otimes F_{kl})$ 分解为四项。化简后可得：

$$\begin{aligned} C_\Phi \;=\; & a\mathbb{I}_{(n_1n_2)^2}+b\sum_{k,l}(\mathbb{I}_{n_1}\otimes F_{kl})^{\otimes 2}+c\sum_{i,j}(E_{ij}\otimes\mathbb{I}_{n_2})^{\otimes 2} \\ & +\; d\sum_{i,j,k,l}(E_{ij}\otimes F_{kl})^{\otimes 2}. \end{aligned} \tag{37}$$

我们没有其特征值的精确表达式，但可以计算小维数情形下的精确值（n_1, n_2）$=$ $(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$。

引理 V.8。 对于 $n_1 = 23$；$n_2 = 23$，保单位、保持厄米性的 $U(n_1) \otimes U(n_2)$-等变映射的 *Choi*矩阵 C_Φ 的特征值为：

$$\frac{1}{n_1 n_2}[1 + (n_2^2-1)\lambda_{01} + (n_1^2-1)\lambda_{10} + (n_1^2-1)(n_2^2-1)\lambda_{11}], \tag{38}$$

重数为 *1*。

$$\frac{1}{n_1 n_2}[1 + (n_2^2-1)\lambda_{01} - \lambda_{10} - (n_2^2-1)\lambda_{11}], \tag{39}$$

重数为 $n_1^2 - 1$。

$$\frac{1}{n_1 n_2}[1 - \lambda_{01} + (n_1^2-1)\lambda_{10} - (n_1^2-1)\lambda_{11}], \tag{40}$$

重数为 $n_2^2 - 1$。

$$\frac{1}{n_1 n_2}[1 - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11}], \tag{41}$$

重数为 $(n_1^2-1)(n_2^2-1)$。

在接下来的段落中，我们总结$n_1 = 2$、$n_2 = 2,3$ 的主要结果。

命题 V.6 (张量酉等变性：$(n_1, n_2) = (2, 2)$)。 设 Φ是一个 $U(2) \otimes U(2)$-等变、保单位且保厄米性的映射。那么：

1. Φ 当且仅当以下四个线性不等式成立时，它是完全正的 *：*

$$1 + 3\lambda_{01} + 3\lambda_{10} + 9\lambda_{11} \geq 0, \tag{42}$$

$$1 + 3\lambda_{01} - \lambda_{10} - 3\lambda_{11} \geq 0, \tag{43}$$

$$1 - \lambda_{01} + 3\lambda_{10} - 3\lambda_{11} \geq 0, \tag{44}$$

$$1 - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11} \geq 0. \tag{45}$$

2. 如果 Φ 是 *Schwarz*，则由（*33-36*）得到的以下特化约束成立：

$$\begin{aligned}
1 - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11} &\geq 0, \qquad \lambda_{01}^2 - 2\lambda_{01}\lambda_{11} - \lambda_{01} + \lambda_{10} + \lambda_{11}^2 + \lambda_{11} - 1 \leq 0,\\
1 - \lambda_{01} + \lambda_{10} - \lambda_{11} &\geq 0, \qquad \lambda_{01}^2 + 2\lambda_{01}\lambda_{11} - \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11}^2 - \lambda_{11} - 1 \leq 0,\\
1 + \lambda_{01} - \lambda_{10} - \lambda_{11} &\geq 0, \qquad \lambda_{10}^2 - 2\lambda_{10}\lambda_{11} - \lambda_{10} + \lambda_{01} + \lambda_{11}^2 + \lambda_{11} - 1 \leq 0,\\
1 + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \lambda_{11} - 4\lambda_{11}^2 &\geq 0, \qquad \lambda_{10}^2 + 2\lambda_{10}\lambda_{11} - \lambda_{10} - \lambda_{01} + \lambda_{11}^2 - \lambda_{11} - 1 \leq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{01} + \lambda_{10} - \lambda_{11} &\in [-3, 1], \qquad \lambda_{01} - \lambda_{10} + \lambda_{11} \in [-3, 1],\\
\lambda_{01} + \lambda_{10} + \lambda_{11} &\in [-1, 3], \qquad -\lambda_{01} + \lambda_{10} + \lambda_{11} \in [-1, 3].
\end{aligned}$$

证明。 完全正部分通过对引理 V.8 中给出的四个 Choi 特征值族施加非负性条件，并取（n_1^2-1，n_2^2-1，n_1n_2）=（3，3，4）而得到。Schwarz 蕴含是必要不等式（33-36）的（2，2）特化形式。

□

命题 V.7 (张量酉等变性：$(n_1,n_2)=(2,3)$)。 设 Φ 是一个 $U(2)\otimes U(3)$ 等变、保单位且保厄米性的映射。那么：

1. Φ 是完全正的，当且仅当以下四个线性不等式成立：

$$\begin{aligned} 1+8\lambda_{01}+3\lambda_{10}+24\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1+8\lambda_{01}-\lambda_{10}-8\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1-\lambda_{01}+3\lambda_{10}-3\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1-\lambda_{01}-\lambda_{10}+\lambda_{11} &\geq 0. \end{aligned}$$

2. 若 Φ 是 *Schwarz* 映射，则以下由（*33-36*）特化得到的约束成立：

$$\begin{aligned} 1-\lambda_{01}-\lambda_{10}+\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1-\lambda_{01}+\lambda_{10}-\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1+2\lambda_{01}-\lambda_{10}-2\lambda_{11} &\geq 0,\\ 1+2\lambda_{01}+\lambda_{10}+2\lambda_{11}-6\lambda_{11}^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{01}^2-2\lambda_{01}\lambda_{11}-\lambda_{01}+\lambda_{10}+\lambda_{11}^2+\lambda_{11}-1 &\leq 0\\ \lambda_{10}^2-\tfrac{2}{3}\lambda_{10}\lambda_{11}-\lambda_{10}+\tfrac{2}{3}\lambda_{01}+\tfrac{1}{3}\lambda_{11}^2+\tfrac{2}{3}\lambda_{11}-\tfrac{1}{3} &\leq 0, \end{aligned}$$

以及按（*34-35*）得到的符号反射对应项和取值范围约束

$$\begin{aligned} \lambda_{01}+\lambda_{10}-\lambda_{11} &\in[-5,1], & \lambda_{01}-\lambda_{10}+\lambda_{11} &\in[-5,1],\\ 2\lambda_{01}+\lambda_{10}+2\lambda_{11} &\in[-1,5], & -2\lambda_{01}+\lambda_{10}+2\lambda_{11} &\in[-1,5]. \end{aligned}$$

证明。 完全正的部分是将（n_1^2-1，n_2^2-1，n_1n_2）=（3，8，6）代入引理 V.8 中列出的四个 Choi 特征值族得到的。Schwarz 蕴含是（33-36）的（2，3）特化形式。

□

推论 V.7.1 （U（2）$\otimes U$（2））**的几何）**。 在参数空间（$\lambda_{01},\lambda_{10},\lambda_{11}$）$\in\mathbb{R}^3$ 中，$\lambda_{00}=1$:

具有对称性的施瓦茨映射

1. 完全正区域。 完全正映射的集合是非空、闭且凸的多面体:

$$\mathsf{CP}_{2,2} \;=\; \bigcap_{k=1}^{4} \{\, \langle \alpha^{(k)}, \lambda \rangle \geq -1 \,\},$$

其中 $\lambda = (\lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11})$，四个法向量为

$$\alpha^{(1)} = (3,3,9), \quad \alpha^{(2)} = (3,-1,-3), \quad \alpha^{(3)} = (-1,3,-3), \quad \alpha^{(4)} = (-1,-1,1),$$

对应于命题 *V.6* 中的四个线性不等式。因此，完全正^{2,2} 是一个凸多面锥（经原点约束平移后），具有四个支撑平面。（所有约束均来自四个 Choi 特征值族。）

2. 施瓦茨包络。施瓦茨可行集 $\mathsf{S}^{2,2}$ 是一个严格更大的闭凸集，包含完全正^{2,2}。除三个完全正支撑平面（命题 *V.6* 中的前三个线性不等式）外，其中一个边界分量是以下二次曲面

$$1 + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \lambda_{11} - 4\lambda_{11}^2 = 0,$$

其内法向量沿曲面变化。（*S-quad*）和（*S-rng*）中的附加二次界和区间界刻画了曲面并限制了该集合；特别是，（*S-quad*）给出了非平面的支撑曲面，表明$\mathsf{S}^{2,2}$ 不是多面体。（所有不等式均为（2，2）对（33-36）的特化）

推论 V.7.2（几何：U（2）$\otimes U$（3））。 在参数空间 $(\lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11}) \in \mathbb{R}^3$ 中，满足 $\lambda_{00} = 1$:

1. 完全正区域。 完全正集是闭凸多面体

$$\mathsf{CP}_{2,3} \;=\; \bigcap_{k=1}^{4} \{\, \langle \beta^{(k)}, \lambda \rangle \geq -1 \,\},$$

with

$$\beta^{(1)} = (8,3,24), \quad \beta^{(2)} = (8,-1,-8), \quad \beta^{(3)} = (-1,3,-3), \quad \beta^{(4)} = (-1,-1,1),$$

恰好是命题 *V.7*（当且仅当为完全正）中的四个半空间。因此 完全正^{2,3} 是一个多面体，其四个面由 *Choi* 特征值族确定。

2. 施瓦茨包络。 施瓦茨可行集 $S^{2,3}$ 严格包含完全正^{2,3}，其边界由三个线性面（*(S-lin* ^{2,3}*)* 中前三个线性不等式）以及一个二次面构成

$$1+2\lambda_{01}+\lambda_{10}+2\lambda_{11}-6\lambda_{11}^{2}=0,$$

以及由 *(S-quad*^{2,3}*)* 和区间约束 *(S-rng*^{2,3}*)* 产生的其他二次封盖。因此$S^{2,3}$ 是非多面体；当 $n_1 \neq n_2$ 时，其弯曲边界源于非平凡的施瓦茨条件 *(33-36)*。

备注 V.1 (可视化与极端结构)。 对于 $(2,2)$ 和 $(2,3)$，完全正区域是四个半空间的交集（经过仿射缩放后，在 $(\lambda_{01},\lambda_{10},\lambda_{11})$ 空间中呈类四面体多面体）。施瓦茨区域是对该区域的凸扩张，其在 λ_{11} 中沿二次曲面形成一个显著的曲面，并伴有使边界偏离完全正面的二次收紧。特别地，曲面上的任何点都不能由单个线性 *Choi* 不等式暴露出来，这证明在这些对称类中 $S \supsetneq$ 完全正。(所有面和边界均可通过将 (18)-(21) 特化，并结合定理5.14之后给出的 Choi 谱得出。)

注 V.2. 我们的结果表明，因此我们猜想，*Choi*矩阵 C_Φ 的特征值由式 *(38)–(41)* 给出。

与对角酉等变映射的情形一样，我们可以探讨低维下乘积酉对称性的正偏转置[2] 猜想。

引理 V.9 (关于 $U(n_1)\otimes U(n_2)$ 等变性的复合律)。 设 Φ,Ψ 是 $U(n_1)\otimes U(n_2)$-等变、保单位、保厄米性，并且在同型分解上按对角方式作用的映射：

$$M_{n_1}(\mathbb{C})\otimes M_{n_2}(\mathbb{C})=W_{00}\oplus W_{01}\oplus W_{10}\oplus W_{11}$$

其参数为实数 $\lambda_{\alpha\beta}^{\Phi},\lambda_{\alpha\beta}^{\Psi}(\alpha,\beta=0,1)$ 和 $\lambda_{00}^{\Phi}=\lambda_{00}^{\Psi}=1$。记 $P_{\alpha\beta}$ 为投影到 $W_{\alpha\beta}$ 上的等变投影算子，则有

$$\Phi=\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha\beta}^{\Phi}P_{\alpha\beta}\,,\quad \Psi=\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha\beta}^{\Psi}P_{\alpha\beta}\,.$$

那么 $\Phi\circ\Psi=\sum_{\alpha,\beta}(\lambda_{\alpha\beta}^{\Phi}\lambda_{\alpha\beta}^{\Psi})P_{\alpha\beta}$，即

$$\lambda_{\alpha\beta}^{\Phi\circ\Psi}=\lambda_{\alpha\beta}^{\Phi}\lambda_{\alpha\beta}^{\Psi}\quad(\alpha,\beta=0,1)\,.$$

特别地， Φ^k 以参数 $(\lambda_{\alpha\beta})^k$作用。

证明。 直接应用引理 IV.1 即得。但特别地，等变性意味着在每个等型分量上具有Schur型对角作用；$P^{\alpha\beta}$ 是与两个映射都可交换的正交幂等元。因此， $\Phi\circ\Psi$ 在每个分块上按标量之积作用，从而得到所述公式和幂律。

□

推论 V.7.3（平方律）。 对于任意 U （n_1） $\otimes U$（n_2）-等变的保单位、保厄米性通道 Φ，

$$\Phi^2 \colon \lambda \longmapsto \lambda^2,$$

在 U （n_1） $\otimes U$ （n_2）中每个同型分量系数。

定理 *V.8*（低维下乘积酉对称性的正偏转置[2]）。设 Φ 是作用于 $M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{n_2}(\mathbb{C})$ 上的 $U(n_1) \otimes U(n_2)$-等变、保单位、保厄米性通道，在同型分量和 $W_{00} \oplus W_{01} \oplus W_{10} \oplus W_{11}$ 上按对角方式作用，其参数为 $\lambda_{00} = 1$ 和 $\lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11} \in \mathbb{R}$。对于 $(n_1, n_2) = (2, 2), (2, 3)$，若 Φ 是正偏转置的，则 Φ^2 是纠缠破坏的。

证明。 (i) PPT平面。在这两种情况下，Choi矩阵均按四个等型分量分块对角化。其部分转置保持该分解，并在反对称扇区上改变符号，因此，PPT等价于命题 V.6 和 V.7 中列出的四个线性半空间约束（即其中用于完全正的同一组平面，此处作为PPT平面）。

(ii) 复合。等变性意味着 Φ^2 以平方后的参数作用：$(\lambda_{01},\ \lambda_{10},\ \lambda_{11}) \mapsto (\lambda_{01}^2,\ \lambda_{10}^2,\ \lambda_{11}^2)$。

(iii) 一次平方运算后成为纠缠破坏映射。命题 V.6-V.7 中专门针对纠缠破坏充分条件的 Schwarz界包含一个二次“弯曲”面，其形式为 $\alpha_0 + \alpha_1\lambda_{01} + \alpha_2\lambda_{10} + \alpha_3\lambda_{11} - \beta\,\lambda_{11}^2 \geq 0$（以及对称的对应面）。由于PPT区域已满足四个经过原点的线性界，将 λ 替换为 λ^2 会使每个PPT点严格向原点移动，并越过这些二次纠缠破坏面。等价地，将 $(\lambda_{01}^2,\ \lambda_{10}^2,\ \lambda_{11}^2)$ 代入命题 V.6-V.7 中框出的纠缠破坏不等式后，每个不等式都变得严格更容易满足，因此它们对 Φ^2成立。因此 Φ^2是纠缠破坏映射。

□

VI. 结论

我们确定了关于任意紧群的等变映射的结构与参数化。基于此，我们详细分类了受对称性约束的保单位、保厄米性 Schwarz 映射。对于完整酉群 $U(n)$，这一分类是

完备的，并表明这些量子信道构成一个单参数族，在单位矩阵与完全退极化信道之间插值。在这一类中，正偏转置 $\iff$ 纠缠破坏，从而直接、清晰地证明了正偏转置[2] 猜想。

对于对角酉子群$DU(n)$，我们基于主子式推导出一系列代数条件，在低维情形下可得出施瓦茨判据的充要条件。特别是，对$DU(2)$的完整描述以及一个对称的$DU(3)$族，展示了正偏转置映射如何在平方运算后变为纠缠破坏映射。张量积对称性$U(2)\otimes U(2)$和$U(2)\otimes U(3)$也表现出相同行为：复合会使对称性参数平方，从而迫使映射进入纠缠破坏区域。

总而言之，这些结果证明，关于对称量子信道的一般结构定理可用于确定信息信道的描述，并简化某些问题的求解。事实上，我们展示了这些结果能够提供明确的、基于对称性的机制，解释为何某些具有特定结构的量子信道满足正偏转置条件[2]。它们还给出了精确实例，其中正性、施瓦茨性质与完全正性之间的界限均可得到完整刻画。我们预期，这些结合表示论、矩阵分析与信道几何的技术能够自然地推广到无限维情形，以及量子信息理论中其他涉及对称性与纠缠的猜想。

致谢

A.I. 感谢西班牙经济与竞争力部通过 Severo Ochoa研发卓越中心计划（SEV-2015/0554）、西班牙经济与竞争力部研究项目 PID2024-160539NB-I00，以及马德里自治区项目 TEC-2024/COM-84 QUITEMAD-CM 提供的资助。

参考文献

[1]D. Amato、P. Facchi、A. Konderak。《量子信道的渐近行为》。《物理学杂志 *A*：数学与理论》，**56**(26):265304 (2023)。[2]D. Amato、P. Facchi、A. Konderak。《量子动力学中的无退相干代数》，2024。[3]M. A. Nuwairan。《$SU(2)$ 不可约协变信道的极端点》。《国际数学杂志》，**25**(06):1450048 (2014)。

[4]I. Bardet、B. Collins、G. Sapra。《等变映射的刻画及其在纠缠检测中的应用》。《亨利·庞加莱年刊》，21(10):3385–3406 (2020)。[5]R. Bhatia。《正定矩阵》。普林斯顿应用数学丛书。普林斯顿大学出版社，2007。[6]S. D. Bartlett、T. Rudolph、R. W. Spekkens。《参考系、超选择规则与量子信息》。《现代物理评论》，79:555–609 (2007)。[7]D. Chru´ci´nski。《耗散生成元、可分动力学映射与Kadison-Schwarz不等式》。《物理评论 A》，100:052120 (2019)。[8]D. Chru´ci´nski、B. Bhattacharya。《具有对角酉对称性和正交对称性的一类Schwarz量子比特映射》。《物理学杂志 A：数学与理论》，57(39):395202 (2024)。[9]G. Chiribella、G. M. D’Ariano、P. Perinotti。《量子电路架构》。《物理评论快报》，101:060401 (2008)。[10]M. Christandl、R. Ferrara。《私有态、量子数据隐藏与完美保密的交换》。《物理评论快报》，119:220506 (2017)。[11]E. Chitambar、G. Gour。《量子资源理论》。《现代物理评论》，91:025001 (2019)。[12]Man-Duen Choi。《C*-代数上正线性映射的Schwarz不等式》。《伊利诺伊数学杂志》，18, 12 (1974)。[13]Man-Duen Choi。《复矩阵上的完全正线性映射》。《线性代数及其应用》，10 (3):285–290 (1975)。[14]Man-Duen Choi。《C*-代数上正线性映射的一些不等式》。《算子理论杂志》，4 (2):271–285 (1980)。[15]D. Chru´sci´nski。《马尔可夫区域之外的动力学映射》。《物理学报告》，992:1–85 (2022)。马尔可夫区域之外的动力学映射。[16]D. Chru´sci´nski。《$M_2(\mathbb{C})$中的协变Schwarz映射》。《物理学杂志：会议系列》，2912(1):012020 (2024)。[17]E. Carlen、A. Möller-Hermes。《通过迹不等式刻画Schwarz映射》。《数学物理快报》，113:17 (2023)。[18]M. Christandl、A. Möller-Hermes、M. M. Wolf。《复合映射何时会成为纠缠破坏映射？》。《亨利·庞加莱年刊》，20:2295–2322 (2019)。[19]B. Collins、H. Osaka、G. Sapra。《关于一类从$M_n(\mathbb{C})$到$M_2(\mathbb{C})$的线性映射》。《线性代数及其应用》，555:398–411 (2018)。[20]D. Chru´sci´nski、G. Sarbicki。《纠缠见证：构造、分析与分类》。

《物理学杂志 A：数学与理论》, 47 (48):483001 (2014).[21]Lin Chen, Yu Yang, Wai-Shing Tang. n ＝ 3 的正部分转置平方猜想. 《物理评论 A》, 99:012337 (2019).[22] B. Collins, Zhi Yin, Ping Zhong. 对于某些独立态类别， PPT 平方猜想通常成立. 《物理学杂志 A：数学与理论》, 51(42):425301 (2018).[23]E. A. Carlen, H. Zhang. Epstein 凹性定理的单调性版本及相关不等式. 《线性代数及其应用》, 654:289–310 (2022).[24]N. Datta, A. S. Holevo, Y. Suhov. 转置去极化信道的可加性. 《国际量子信息杂志》, 04(01):85–98 (2006).[25]M. Gschwendtner, A. Bluhm, A. Winter. 协变量子信道的可编程性. Quantum, 5:488 (2021).[26]G. Gour, R. W Spekkens. 量子参考系的资源理论：操作与单调量. 《新物理学杂志》, 10(3):033023 (2008).[27]M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki. 混合态的可分性：必要且充分条件. 《物理快报 A》, 223(1):1–8 (1996).[28] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki. n 粒子混合态的可分性：以线性映射表述的必要且充分条件. 《物理快报 A》, 283(1):1–7 (2001).[29]A.S. Holevo. 量子通信信道数学理论中的问题. 数学物理报告, 12(2):273–278 (1977).[30]A.S. Holevo. 关于协变动力半群的一则注记. 数学物理报告, 32(2):211–216 (1993).[31]A. S. Holevo. 协变量子马尔可夫演化. 《数学物理学杂志》, 37(4):1812–1832, (1996).[32]A. S. Holevo. 可加性猜想与协变信道. 《国际量子信息杂志》, 03(01):41–47, (2005).[33]F. Hiai, D. Petz. 从拟熵到各种量子信息量. 《数理科学研究所出版物》, 48(3):525–542 (2012).[34]E. P. Hanson, C. Rouzé, D. S. França. 最终会破坏纠缠的马尔可夫动力学：结构与特征时间. 《亨利·庞加莱年刊》, 21(5):1517–1571 (2020).[35]M. Horodecki, P. W. Shor, and M. B. Ruskai. 纠缠破坏信道. 《数学物理评论》 , 15(06):629–641 (2003).

[36]A. Ibort, M. A. Rodriguez. 群、群胚及其表示导论. CRC出版社, Taylor & Francis集团, 2020.[37]A. A. Kirillov. 《表示理论要素》 . 数学科学基础丛书 .Springer 柏林、海德堡 , 2011.[38]A. Jamiolkowski. 保持算子迹与半正定性的线性变换. 数学物理报告, 3(4):275–278 (1972).[39]R. V. Kadison. 算子代数的广义 Schwarz不等式与代数不变量. 数学年刊, 56(3):494–503 (1952).[40]C. King. 量子去极化信道的容量. IEEE Trans. Inf. Theor., 49(1):221–229 (2003).[41]M. Kennedy, N. A. Manor, V. I. Paulsen. 正偏转置映射的复合. Quantum Info. Comput., 18(5-6):472–480 (2018).[42]M. Keyl, R. F. Werner. 纯态的最优克隆：单个克隆态的检验. 《数学物理学杂志》, 40(7):3283–3299 (1999).[43]L. Lami, V. Giovannetti. 纠缠破坏指标. 《数学物理学杂志》, 56(9):092201, 09 (2015).[44]R. Landauer. 信息是物理的. 《今日物理》, 45 (5), 23–29 (1991).[45]Hun Hee Lee, Sang-Gyun Youn. 具有量子群对称性的量子信道. Communications in Mathematical Physics, 389(3):1303–1329 (2022).[46]L. Memarzadeh, B. C. Sanders. 群协变极端信道与拟极端信道. Phys. Rev. Res., 4:033206 (2022).[47]M. Mozrzymas, M. Studziski, N. Datta. 有限群不可约协变量子信道的结构. 《数学物理学杂志》, 58(5):052204 (2017).[48] V. Paulsen. 《完全有界映射与算子代数》. 高等数学剑桥丛书. 剑桥大学出版社, 2003.[49] A. Peres. 密度矩阵的可分性判据. Phys. Rev. Lett., 77:1413–1415 (1996).[50]Sean Prudhoe. Cartan协变量子信道与 PPT^2 猜想，arXiv:2501.03959 (2025). https://arxiv.org/abs/2501.03959[51]Sang-Jun Park and Sang-Gyun Youn. 正交群对称性下的 k-正性与施密特数. 量子信息处理, 23(5):162 (2024).[52]M. B. Ruskai, M. Junge, D. Kribs, P. Hayden, A. Winte. 量子信息理论中的算子结构. 收录于班夫国际研究站研讨会, 2012.

[53]M. Rahaman、S. Jaques、V. I. Paulsen。最终成为纠缠破坏映射。《数学物理学杂志》，**59**(6):062201 (2018)。[54]K. Siudziska、D. Chru´sci´nski。相对于由Weyl算子生成的有限群不可约协变的量子信道。《数学物理学杂志》，**59**(3):033508 (2018)。[55]H. Scutaru。关于C^*-代数上的协变完全正线性映射的一些评述。数学物理报告，**16**(1):79–87 (1979)。[56]S. Singh、I. Nechita。量子理论中的对角酉对称性和正交对称性。*Quantum*，**5**:519 (2021)。[57]S. Singh、I. Nechita。量子理论中的对角酉对称性和正交对称性：II. 演化算子。《物理学杂志 *A*：数学与理论》，**55**(25):255302 (2022)。[58]S. Singh、I. Nechita。正偏转置[2]猜想对所有 Choi 型映射均成立。《亨利·庞加莱年刊》，**23**(9):3311–3329 (2022)。[59]W. F. Stinespring。C^*-代数上的正函数。美国数学会会刊，**6**(2):211–216 (1955)。[60]E. Störmer。算子代数的正线性映射。施普林格数学专著。Springer柏林、海德堡，2012。[61]K. G. H. Vollbrecht、R. F. Werner。对称性下的纠缠度量。《物理评论 *A*》，**64**:062307 (2001)。[62]R. F. Werner、A. S. Holevo。关于量子信道输出纯度可加性猜想的反例。《数学物理学杂志》，**43**(9):4353–4357 (2002)。