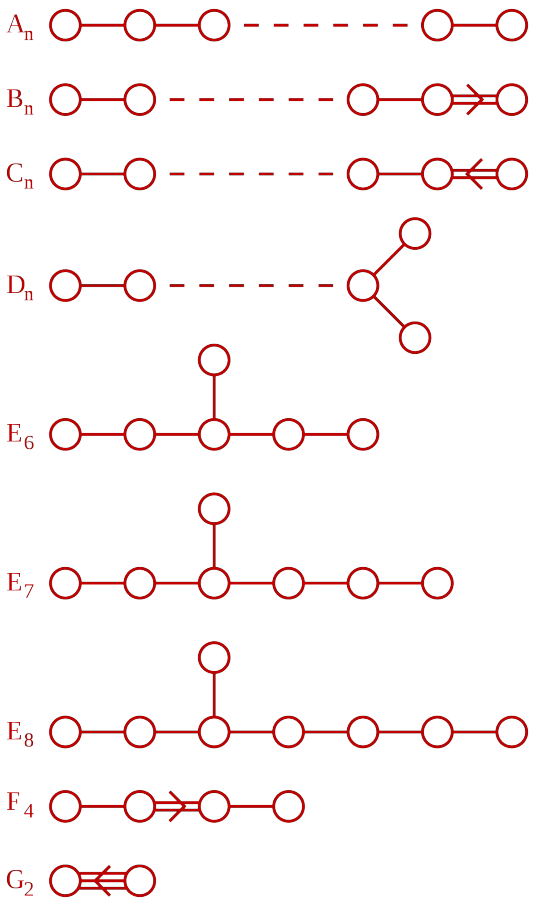
arXiv:2601.02290v1 [math.RT] 5 Jan 2026

考克斯特图与 Dynkin 图

John Baez 加州大学河滨分校数学系，改编自《本周发现》的“week62–week65”和“week182”

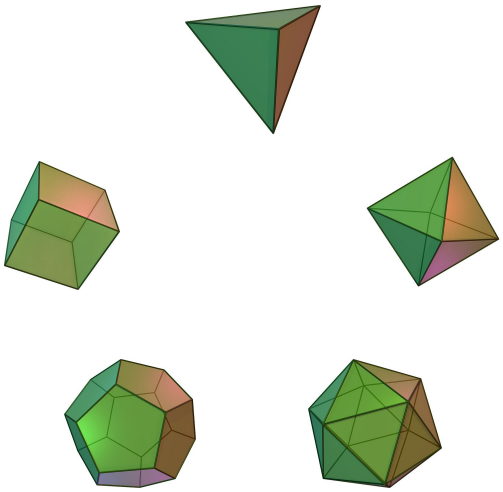


图片由 R. A. Nonenmacher 创作，知识共享署名—相同方式共享 4.0

我想介绍一个迷人的主题，它在数学和物理学中都极其重要：考克斯特图与 Dynkin 图。为了不让你们一直等下去，我已经在这份笔记的首页展示过 Dynkin 图了。考克斯特图稍有不同，但也很相似。

我将首先解释如何使用考克斯特图来分类“有限反射群”：也就是说，分类由反射生成的 $\mathbb{R}^n$ 线性变换有限群。然后我会解释 Dynkin 图如何对 $\mathbb{R}^n$ 中的格进行分类，其中有限反射群是这些格的对称性。接下来，我会解释我们如何使用 Dynkin 图来分类紧致单李群及其李代数——并介绍这些对象究竟是什么！最后，我会说明“不带箭头”的“单边”Dynkin 图如何用于分类具有 v 向量基且 $\|v\|^2 = 2$的整格、具有温和表示论的箭图，以及三维欧几里得空间中旋转群的有限子群。

简而言之，当你开始尝试对美丽而对称的事物进行分类时，考克斯特图与 Dynkin 图会在各种地方出现。事实上，我们将看到，柏拉图立体：



与考克斯特图和 Dynkin 图以两种不同的方式相关！

考克斯特图与有限反射群

那么，考克斯特图到底是什么？在尝试对“有限反射群”进行分类时，我们会得到这种图。假设我们处于 n 维欧几里得空间中。那么，对于任意非零向量 v，都存在一个反射，它将 v 变为 $-v$，并且不会改变与 v 正交的向量。我们称之为**关于 v** 的反射。有限反射群是欧几里得空间上一组有限的变换构成的有限群，其中每个元素都是这类反射的乘积。例如，正 n 边形的对称群就是一个有限反射群。如果你一时没看出来，可以试着证明一下，这会是个很有用的练习。

注意，如果我们进行两次反射，就会得到一次旋转。具体来说，假设我们有两个向量 v和 w，它们之间的夹角为 θ，并令 r 和 s分别表示关于 v 和 w的反射。那么， rs 就是旋转角为 2θ的一次旋转。画图检查一下吧！这意味着，如果 $\theta = \pi/m$，那么 $(rs)^n$ 就是旋转角为 2π的一次旋转，而这等同于完全没有旋转，因此 $(rs)^m = 1$。另一方面，如果 θ 不是 π的有理数倍，我们就永远不会有 $(rs)^n = 1$，所以 r 和 s 不可能同时属于某个有限反射群。

因此，如果 r 和 s 是有限反射群中的两个不同反射，我们必须有

$$r^2 = s^2 = 1$$

因为连续做两次反射会回到起点，但也

$$(rs)^m = 1$$

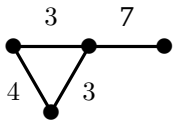
对于某些 $m = 2, 3, \ldots\ldots$。

利用这一点，我们可以看出，任何有限反射群都有一个由**考克斯特图**描述的表示。其思路是，群由关于向量的反射生成，这些向量彼此之间的夹角为 π/m，其中有各种各样的 $m = 2, 3, \ldots\ldots$选择。为了记录这些信息，我们为每个这样的向量画一个点。然后，假设两个向量之间的夹角为 π/m。如果 $m = 2$，这些反射必定可交换，我们就不在这两个点之间画线。否则，我们就在它们之间画一条线，并标上数字 m。

反过来，如果有人给我们一张考克斯特图，我们就能得到一个称为**考克斯特群**的群，with

- 每个点对应一个生成元 r，
- 每个生成元对应一个关系，
- 每对点之间没有连线的生成元对应一个关系 $(rs)^2 = 1$，
- 每对点之间由标有数字 m 的线相连的生成元对应一个关系 $(rs)^m = 1$。

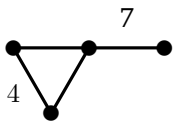
例如，考克斯特图



给出如下表示的考克斯特群

$$r^2 = s^2 = t^2 = u^2 = 1$$
$$(rs)^3 = (rt)^2 = (ru)^4 = (st)^7 = (su)^3 = (tu)^2 = 1$$

不过，在这个游戏中，很多边最后都会标上数字 3。通常遇到这种情况时，人们会省略这个标记。于是，我们把上面的图画成这样：

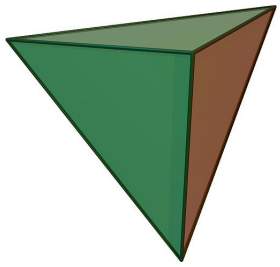


现在来讲几个重要定理。首先，事实证明，如果一个考克斯特群是有限的，它就是一个有限反射群！并非每个图都对应一个有限群。不过，我们可以对所有能产生有限群的考克斯特图进行分类！它们都有自己的名字，而且十分著名：堪称有限群论中的摇滚巨星。

首先是 A_n，它有一排 n 个点，像这样：

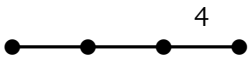


例如，等边三角形的对称群是考克斯特群 A_2。正四面体的对称群是 A_3。



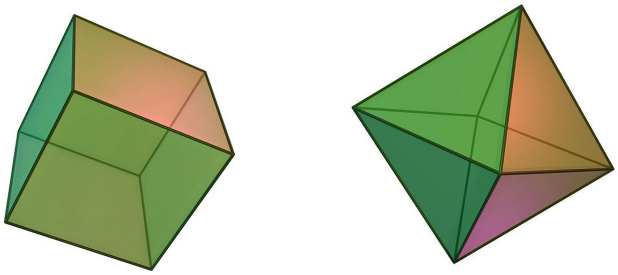
更一般地，A_n 是正 n 维单纯形的对称群——也就是对 $n+1$ 个顶点进行所有置换所构成的群。

接下来是 BC_n，它有 n 个点：

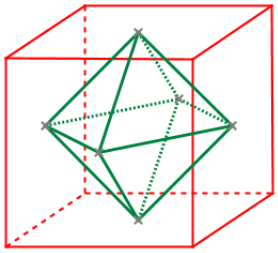


只有最后一条边标有数字 4。稍后我们会看到，BC_n 会衍生出两个 Dynkin 图，分别是 B_n 和 C_n；这也解释了它这个奇怪名称的由来。

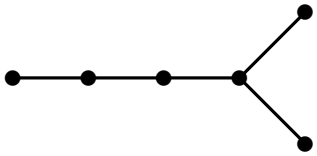
考克斯特群 BC_2 是正方形的对称群，而 BC_3 是立方体或其对偶体——正八面体的对称群。



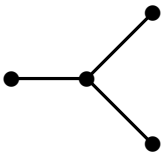
一般来说，BC_n 是一个 n维超立方体的对称群，或者是其对偶体的对称群；对偶体的顶点位于这个超立方体各面的中心。超立方体的对偶体可以称为“正超八面体”，但实际上它被称为**交叉多胞体**或**正交多胞体**。以下展示 $n=3$ 的对偶性如何体现：



下一个有限反射群的无限序列是D_n，其中有 n 个点排列成一行，并在末端分出支线。以下是D_6:

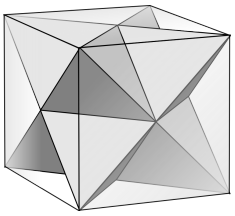


由于对于 $n < 4$，$\mathrm{D}_n \cong \mathrm{A}_n$，第一个真正令人兴奋的情形是 D_4:



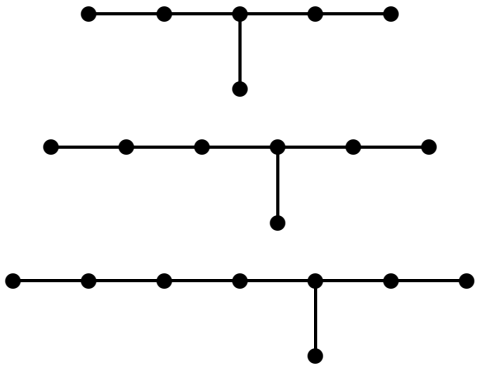
这个图表的对称性称为三**重性**，它催生了许多非凡的事物。

考克斯特群 D_n 是 n 维**半超立方体**的对称群。它的顶点是从超立方体中隔一个取一个选出来的：也就是说，取超立方体一半的顶点，且任意两个顶点都不相邻。当 $n = 3$ 时，这一点最容易看出来。下面是立方体中的两个半立方体:



它们只是正四面体！我们或许早该想到这一点，因为 $\mathrm{D}_3 \cong \mathrm{A}_3$。一个 4 维半超立方体的“顶上”和“底下”各有一个这样的四面体。

然后是 E_6, E_7，和 E_8:



有趣的是，这个数列并不会继续下去。因此，A_n、B_n和D_n 考克斯特图称为“经典”考克斯特图，而E系列则称为“例外”考克斯特图。

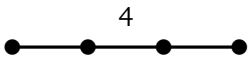
多胞体是多边形或多面体在更高维度上的推广。E_6,E_7和E_8 考克斯特群是一些极其精妙的多胞体的对称群:

- E_8 考克斯特群是一个八维多胞体的对称群，该多胞体有240个顶点，称为**E_8 根多胞体**。构造方法如下：取一个八维球体，并在其周围尽可能多地放置与之相切的等大小球体。这样的球共有240个。这些球体的中心就是E_8 根多胞体的顶点。

- E_7 考克斯特群是一个七维多胞体的对称群，该多胞体有126个顶点，称为**E_7 根多胞体**。构造方法如下：任选E_8 根多胞体的一个顶点。经过该顶点和多胞体中心作一条直线。与这条直线正交的七维空间中的顶点，就是E_7 根多胞体的顶点。

- E_6 考克斯特群是一个六维多胞体的对称群。这个多胞体有 72 个顶点，称为**E_6 根多胞体**。在 E_8 根多胞体中，任选位于某个包含该多胞体中心的平面内、构成正六边形的 6 个顶点。垂直于此平面的六维空间中的顶点，构成一个 E_7 根多胞体的顶点。

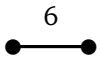
我们最终会给出这些多胞体更易于理解的描述。接下来是 F_4:



F_4 考克斯特群是一个四维多胞体的对称群。这个多胞体有 24 个顶点和 24 个八面体面，称为**24 胞体**。要构造一个 24 胞体，先画一个以原点为中心的四维超立方体。在每个面中心放置一个点，得到一个四维正交多胞体的顶点。接着将正交多胞体向外扩展，直到它的顶点与超立方体的顶点到原点的距离相等。然后，将超立方体和正交多胞体的顶点合在一起，便构成 24 胞体的顶点！

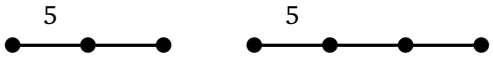
正则多胞体是柏拉图立体在高维空间中最显而易见的推广。在所有维度中，$n > 4$ 都只有三种正则多胞体：n-单纯形、n维超立方体和 n维正交多胞体。在四维中，还多出三种！其中一种是 24 胞体。我们很快就会见到另外两种。

然后是 G_2:

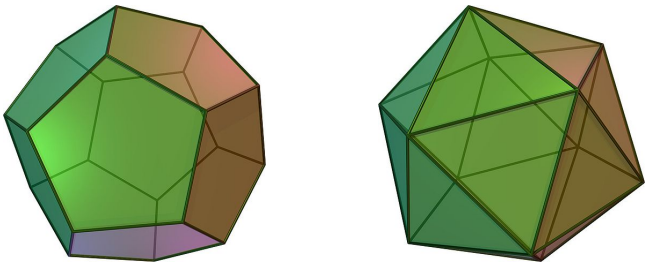


G_2 考克斯特群正是正六边形的对称群。正多边形有无穷多个；稍后我们会看到，为什么等边三角形（对称群为 A_2,）、正方形（对称群为 B_2 ）和六边形（对称群为 G_2 ）会被特别挑选出来。如果你曾尝试用正五边形或七边形铺地板，也许就能猜到原因！

此外还有 H_3 和 H_4:



H_3 是正十二面体或二十面体的对称群。

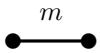


H_4 是其余两个四维正多胞体的对称群。它们可以被称为“超十二面体”和“超二十面体”，但实际上它们被称为 120 胞体和 600 胞体。

要研究这些对象，最快的方法是从一个正十二面体开始。它有 60 个旋转对称，因为你可以将选定的面旋转到 12 个面中的任意一个，并且每个面有 5 种旋转方式。这些旋转对称构成一个群 Γ，它是 SO(3) 的子群；SO(3) 是三维空间中所有旋转组成的群。从 SU(2) 到 SO(3) 存在一个 2 对 1 的映射，因此 SU(2) 中的两个元素会映射到 Γ 中的每个元素。这些 SU(2) 元素构成 SU(2) 的一个含 120 个元素的子群。但从几何上看，SU(2) 是四维空间中的一个球体：例如，它同构于单位四元数组成的群。因此，Γ 由四维空间中一个球体上的 120 个点组成.....而这些点正是**600胞体**的顶点。

600胞体有120个顶点和600个四面体面。如果我们在每个面的中心放置一个点，就得到对偶多胞体的顶点；它有600个顶点和120个四面体面。这称为**120胞体**。

最后，还有另一个非常简单的无穷级数，I_m:



由这个图得到的考克斯特群是正 m 边形的对称群。注意，

$$I_3 \cong A_2, \quad I_4 \cong B_2, \quad I_6 \cong G_2.$$

所以，这里唯一的新 考克斯特图是 $m = 5$ 和 $m \geq 7$ 对应的 I_m 。

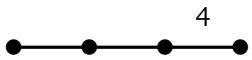
我们可以通过对已经见过的考克斯特图作不交并，得到其他有限反射群：它们只是已经见过的考克斯特群的直积。不过，我们给出有限反射群的连通考克斯特图列表到此结束！

我们来不重复地列出它们:

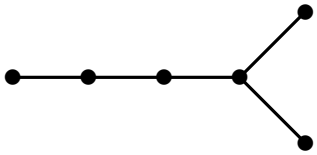
- A_n, $n > 0$



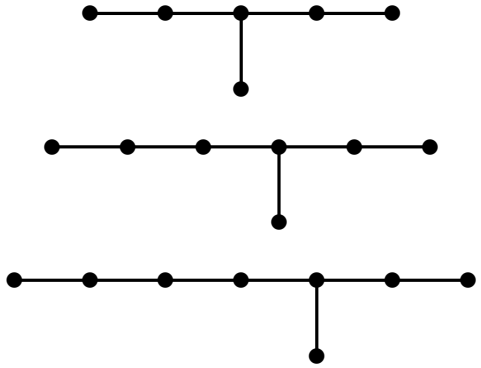
- BC_n, $n > 1$



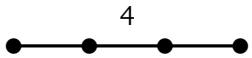
- D_n, $n > 3$



- E_6、E_7、E_8



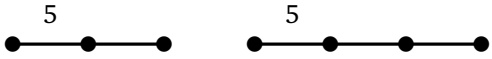
- F_4



- G_2



- H_4, H_5



- I_m

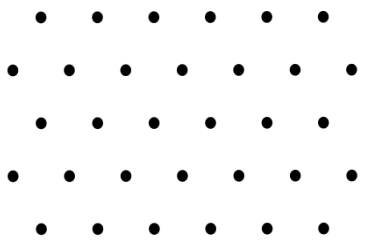


证明这些是唯一可能情形的过程，是一个相当繁复的归纳论证。详情请参见例如 Humphreys 所著的有限反射群与 *Coxeter* 群 。

请注意，柏拉图立体的对称群及其高维对应物都可以很好地纳入这一分类。稍后我们会看到柏拉图立体与这些图之间更为神秘的关系。但首先，我们需要介绍 Dynkin 图！当我们思考格时，就会遇到它们。

Dynkin 图与格

我们取 n 维欧几里得空间中的 n 个线性无关向量，并用整数系数形成它们的所有线性组合，就得到一个**格**。



有时，格具有有趣的对称群。 n 维中的每个格都有 $\mathbb{Z}^n$ ，作为平移对称，因此让我们关注固定原点的对称性：也就是说，将格映射到自身的旋转和反射的组合。为此，我们可以利用有限反射群的分类。

那么，假设我们有一个给出有限反射群的连通考克斯特图。如果我们的图有 n 个点，那么该群作用于 $\mathbb{R}^n$。在 $\mathbb{R}^n$ 中是否存在一个格，使得该群为其对称群？

如果存在这样的格，我们就说这个群满足**晶体学条件**。事实证明，满足这一条件的群只有

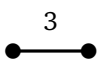
$$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4, \text{ and } \mathrm{G}_2!$$

换句话说，带有数字 $m = 5$ 或 $m \geq 7$ 标记边的考克斯特图都被排除在外。因此，我们找不到其对称性包含正五边形、正七边形或边数更多的正多边形的对称群的格。这对晶体和纯数学都有重大影响。

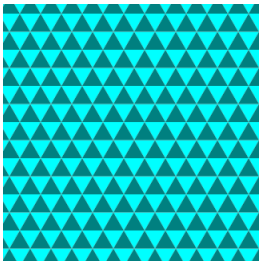
假设有一个有限反射群 Γ作用于 $\mathbb{R}^n$ ，且满足晶体学条件。怎样才能在 $\mathbb{R}^n$ 中构造一个以 Γ 为对称性的格呢？事实证明，我们总能通过取一些基向量的整数线性组合来实现，每个基向量对应考克斯特图中的一个点。生成 Γ的反射就是关于这些向量的反射。

要使这种方法奏效，如果两点之间的边标记为 m，那么这两个向量之间的夹角需要是 π/m 。不过请记住：在这里，未标记的边相当于标记为 3 的边，因此向量之间的夹角需要是 $\pi/3$ 。完全没有边则相当于标记为 2 的边，因此向量之间的夹角需要是 $\pi/2$，也就是说，两者互相垂直。

例如，取 A_2:



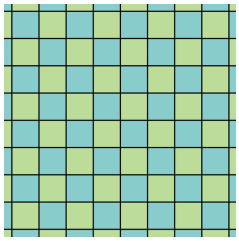
这里写出 3 是为了明确一些模式。要构造一个以该考克斯特群为对称群的格，取两个长度相同、彼此夹角为 $\pi/3$ 的向量。它们的整数线性组合构成了我们所需的格。这就是三**角形铺砌**的顶点所组成的格：



或者考虑 B_2：



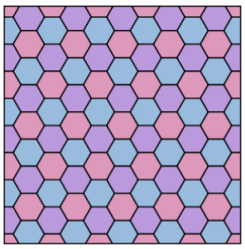
要得到一个以这个考克斯特群为对称性的格，我们可以使用两个彼此成 $\pi/4$ 角的向量。但它们的长度不能相等！其中一个必须是另一个的 $\sqrt{2}$ 倍长。然后，它们的整数线性组合就构成了我们想要的格。它是**正方形镶嵌**顶点构成的格：



类似地，对于 G_2：



要得到一个以这个考克斯特群作为对称性的格，我们可以使用两个彼此成 $\pi/6$角的向量。其中一个的长度必须是另一个的 $\sqrt{3}$ 倍。然后，它们的整数线性组合就构成了具有我们所需对称性的格。这就是**六边形铺砌**的顶点格：



不对，并不是这样！我只是想看看你有没有认真注意！六边形铺砌的顶点并不构成一个格。要得到一个格，你可以在每个六边形的中心再加入一个点，但这样得到的又是三角形铺砌了。事实上，G_2 格看起来与 A_2格完全一样，至少经过旋转和缩放后是如此。区别在于，现在我们考虑的是一个更大的对称群：A_2 给出等边三角形的对称群，而 G_2 给出正六边形的对称群，后者的大小是前者的两倍。

现在假设我们有一个连通的考克斯特图，它给出一个有限反射群 Γ。再假设它满足晶体学条件，因此所有边上的标记数字都是 $m = 3$、4 或 6。下面介绍如何构造一个称为**根格** 的格，使 Γ成为它的对称性。

假设我们的考克斯特图有 n 个点。于是我们可以选取一组向量基 v_1、.....、 $v_n \in \mathbb{R}^n$，图中的每个点对应一个向量，并满足以下性质：

(a) 如果两个点之间没有边相连，那么对应的向量之间的夹角为 $\pi - \pi/2$。(b) 如果两个点之间有一条标记为 $m = 3$ 的边，那么对应向量之间的夹角为 $\pi - \pi/3$，且长度相同。(c) 如果两个点之间有一条标记为 $m = 4$ 的边，那么对应向量之间的夹角为 $\pi - \pi/4$，且其中一个向量的长度是另一个的 $\sqrt{2}$ 倍。(d) 如果两个点之间有一条标记为 $m = 6$ 的边，那么对应向量之间的夹角为 $\pi - \pi/6$，且其中一个向量的长度是另一个的 $\sqrt{3}$ 倍。

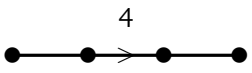
–

–

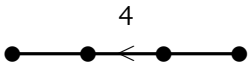
你可能会想知道，为什么我们选择彼此成 $\pi - \theta$ 角的向量，而你原本以为夹角应该是 θ。当然，如果向量 v和 w之间的夹角是 $\pi - \theta$，那么 v和 $-w$之间的夹角就是 θ。那么我们为什么选择使用上面的 $\pi - \theta$ 呢？这是大家都采用的约定。要理解为什么这个约定更好，需要深入研究“根系”，而我正试图在这里避开这一点。

上面的构造还缺少一个要素：当 $m = 4$或 6 时，我们需要确定哪个向量更长。为此，我们在边上画一个箭头，从较长向量所在的点指向较短向量所在的点。这些箭头足以确定一个格，而我们的考克斯特群在其上作为对称性群作用！——至少在旋转、反射和缩放意义下如此。

例如，在图 F_4 中，我们有两种选择：



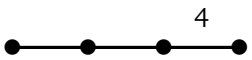
and



然而，在这种情况下，带箭头的结果图是同构的：把其中一个转过来，就能得到另一个。

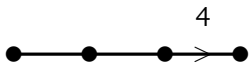
事实上，你可以验证，除了 BC_n with $n \geq 3$之外，对于每一种类型的考克斯特图，无论箭头指向何方，你得到的都是带箭头的同构图！因此，除这些情况外，对于具有该对称群的格，除旋转、反射和

缩放之外，只有<style id='3'>一个。但对于 BC_n with $n \geq 3$，则有两个。回想一下，图 BC_n 看起来是这样的，其中有n 个点：

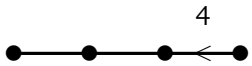


带有 n 个点。最后一条边上的两种箭头画法分别称为 B_n 和 C_n：

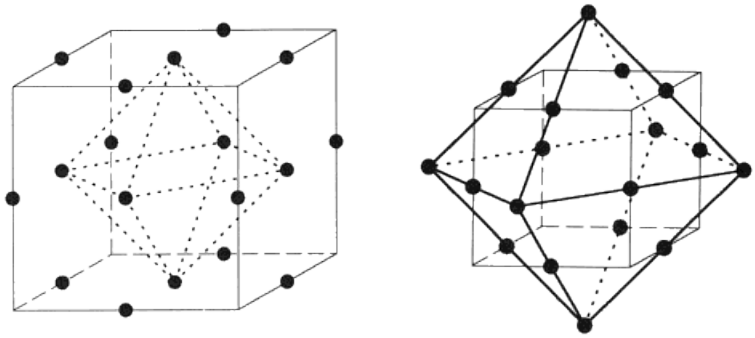
- B_n：



- C_n：



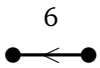
B_3 格中靠近原点的点位于一个立方体上，而 C_3 中的点则位于一个八面体上：



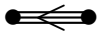
在更高维度中也是如此，对应的是超立方体和正交多胞体。人们还会用另一种图来描述这里的情况，即“Dynkin 图”。绘制这类图时，我们先给考克斯特图加上箭头，然后：

- 将任何标记为 4 的边替换为两条平行边；
- 将所有标记为 6 的边替换为三条平行边。

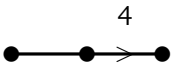
没错，我知道这听起来一开始很让人困惑！这只不过是用另一种方式来表示相同的信息。我想，人们喜欢这种方式，是因为可以不写任何数字就画出图来。让我举几个例子。我们熟悉的 G_2, ，上面带有一个箭头：



绘制成如下 Dynkin 图：



而我们的朋友 B_3:



绘制成如下 Dynkin 图:

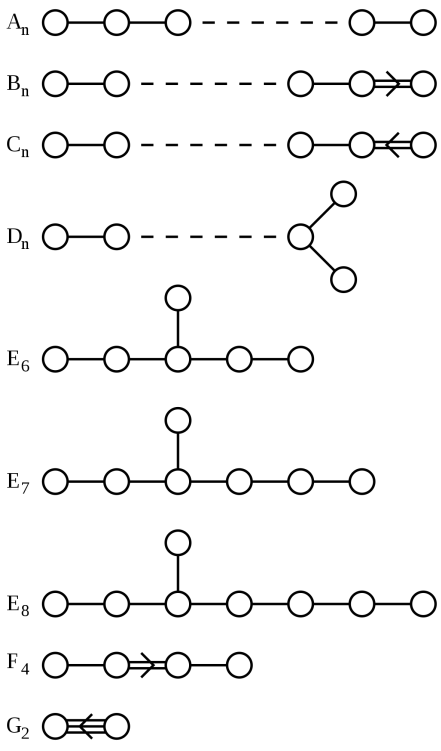


总之，任何带有 n 个点的 Dynkin 图都描述了一组向量基 v_1，……，$v_n \in \mathbb{R}^n$，满足:

1. 这些向量的整数线性组合构成一个格 $L \subset \mathbb{R}^n$
2. 关于这些向量的反射生成一个有限反射群 Γ
3. Γ在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用保持格 L不变。

通常会对这些向量进行归一化，使最短向量的 $v_i \cdot v_i = 2$为一定值，原因稍后便会明了。这将这些向量确定到旋转和反射为止。接着，我们称这些向量为 v_i **根**，并称格 L为一个**根格**。

如果 Γ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用是**不可分解的**，也就是说，我们无法将 $\mathbb{R}^n$ 分解为两个非平凡的子空间的直和，且这两个子空间都在 Γ的作用下保持不变，那么任何满足 1–3 的根的集合都来自一个连通的 Dynkin 图！下面是所有连通 Dynkin 图，由 R. A. Nonemacher 以更具艺术性的风格绘制。这些点被画成了大圆:



紧致单李代数

现在让我们转向李群理论。李群是最重要的"连续"对称群（相对于离散对称群而言）。例子包括以加法为群运算的实直线、模 2π加法的圆，以及所谓的"经典群"，其中包括：

- 由所有可逆的 $\mathbb{C}^N$ 线性变换组成的一般线性群 **一般线性群** GL($N, \mathbb{C}$)；换句话说，它由所有行列式非零的 $N \times N$ 复矩阵组成。
- 由所有行列式为 1 的 $\mathbb{C}^N$ 线性变换组成的特殊线性群 **特殊线性群** SL($N, \mathbb{C}$)。

- 由所有 $\mathbb{C}^N$ 酉线性变换组成的酉群 **酉群** U(N)。
- 由所有行列式为 1 的 $\mathbb{C}^N$ 酉线性变换组成的特殊酉群 **特殊酉群** SU(N)。

这些李群在物理学和数学中都极其重要。因此，令人欣喜的是，甚至带着几分迷人的讽刺意味：用于分类具有有限反射群作为对称性的、极其离散的格的同一批 Dynkin 图，也对一些最优美的李群——"单"李群——进行了分类。

关于半单李群，我们已经掌握了大量知识；凡是真正投身数学的人，最终都需要学习其中的一些内容。我在研究生阶段修过李群及其李代数的课程，但直到后来才真正体会到单李群之美。我觉得它们令人沮丧的一个原因是，对它们进行分类所涉及的工作过于代数化，而我更喜欢李群中偏几何的方面。这种代数方法淡化了李群本身，转而强调一种研究李群的工具，即李代数。

那么，基本思路是什么？让我概述一下研究生阶段两个学期的内容，告诉你有关李群和单李群分类的一些基本知识。如果讲得有些仓促、粗略，还请见谅：希望这样能让主要思想更清晰地从迷雾中显现出来。

李群既是群，也是一个流形，并且群运算（乘法和取逆）都是光滑函数。这样一来，我们就能在群中任意一点处构造切空间，而单位元处的切空间具有特殊作用。它称为**该群的李代数**。如果有任意一个李代数元素 x，我们可以对它取指数，得到群中的一个元素 exp(x)；而通过对李代数中的元素 x 和 y 取**李括号**，我们便能记录群的非交换性：

$$[x, y] = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\exp(sx)\exp(ty)\exp(-sx)\exp(-ty)\Big|_{s,t=0}$$

其中 s 和 t 是实数。注意，如果群是交换的，则 $[x, y] = 0$。这个括号运算满足一些公理，代数学家将任何满足这些公理的对象称为李代数。为了满足你的好奇心，**李代数** 是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配备了满足以下条件的括号运算

- 括号对第二个参数是线性的：

$$[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z] \qquad \text{for all } x, y, z \in \mathfrak{g},\ a, b \in \mathbb{R}$$

- 括号是反对称的：

$$[x, y] = -[y, x] \qquad \text{for all } x, y \in \mathfrak{g}$$

因此，它在第一个变量上也呈线性，

- 与任意元素 x 取括号，满足一种乘积法则

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \qquad \text{for all } x, y, z \in \mathfrak{g}$$

称为**雅可比恒等式**

我们的李代数都是有限维实向量空间。例如，可以取 $n \times n$实矩阵，并令 $[x, y] = xy - yx$。

我实际上不会用到这些公理，因为这并不是一门真正讲李代数的课程。但这些公理正是李代数如此美妙的原因之一。它们都与线性代数有关——李代数不过是一个满足若干公理、带有括号运算的向量空间——然而，我们几乎可以从李代数还原出任意李群。

为什么说“几乎”呢？首先，除非要求李群是连通的，否则我们做不到。原因在于，我们可以添加额外的连通分支，而不改变单位元处的切空间或其括号运算。例如，每个有限群都是一个李群，其李代数为$\{0\}$。其次，我们还必须提出更强一些的要求。原因是，连通李群的任意覆盖空间都是另一个具有相同李代数的连通李群。幸运的是，每个连通李群都有一个**万有覆盖**，它没有除自身以外的连通覆盖空间。这个万有覆盖既连通又单连通。

有了这些限制条件，我们就可以了：我们可以从李代数恢复一个连通且单连通的李群。更妙的是，每个有限维李代数都来自某个连通且单连通的李群！

这就把分类连通且单连通李群的问题，归结为线性代数中的一个问题。遗憾的是，这是一个极其困难的线性代数问题。除非我们只研究低维情形，否则似乎毫无希望。构造更大的李群或李代数的方式实在太多了。但如果我们只考虑紧李群，问题就会容易得多——所以我们就这么做。

紧李群的李代数称为**紧李代数**。这并不是说李代数本身字面意义上是紧的：它是一个向量空间。但紧李代数有很多优良性质。事实证明，我们可以通过逐分量定义运算来对李代数取直和，而紧李代数总是一个“阿贝尔”李代数与一个“半单”李代数的直和。正如我们将看到的，在某种意义上，它们处于两个相反的极端。

要理解这一点，不妨想想李代数 $\mathfrak{g}$ 的“Killing 型”。对于任意 $x \in \mathfrak{g}$，都有一个作用在 $\mathfrak{g}$ 上的线性算子，它由与 x 取括号给出。它通常称为 ad_x：$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，因此

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

Killing 型 是定义在 $\mathfrak{g}$ 上的双线性形式，定义为

$$B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)).$$

根据迹的循环性质，

$$B(x, y) = B(y, x).$$

这太棒了：这有点像免费获得一个内积！不过请继续关注：事情要比这稍微微妙一些。

这里是我提到的两类李代数：

- 如果 $[x, y] = 0$ 对所有 x 和 y都成立，那么这个李代数就是**阿贝尔**李代数。
- 如果 Killing 型是非退化的，那么这个李代数就是**半单**李代数：如果 $\langle x, y\rangle = 0$ 对所有 y 都成立，那么$x = 0$。

注意，阿贝尔李代数的 Killing 型为零，这与非退化恰好处于两个极端。半单李代数的 Killing 型并不完全是内积——它不必是正定的。不过，对于**紧半单李代数**，它已经非常接近内积了——也就是说，这种半单李代数是某个紧李群的李代数。具体而言，对于这样的李代数，Killing 型是负定的，因此

$$\langle x, y\rangle = -B(x, y)$$

是一个内积。

每个维数都有一个阿贝尔李代数，而且每个阿贝尔李代数都是某个**环面**的李代数；环面是有限多个圆的乘积。因此，所有艰巨的工作都在于理解半单李代数。李代数为半单的连通李群称为**半单李群**。

现在，让我们从一个紧致半单李群 G 开始，看看其中隐藏着怎样的 Dynkin 图。为此，我们将在欧几里得空间中构造一个格，并让一个有限反射群以对称性的形式作用于其上。在条件有利时，这将是一个根格，具体含义如上一节所述。

首先，在 G 中总有某个子群 T，它是一个不包含在任何更大环面中的环面。这样的子群称为 G 的 **极大环面** 。它基本上是唯一的：虽然有许多极大环面，但其中任意两个在 G 中都彼此共轭。因此，人们常常不太严谨地称它为“那个”极大环面。

用 Lie(T) 表示极大环面 T 的李代数。Lie(G) 上的内积限制为 Lie(T) 上的内积。因此，Lie(T) 与熟悉的 $\mathbb{R}^n$ 连同其通常的内积同构。此外，在 Lie(T) 中还有一个格 L，由所有满足 $\exp(2\pi x) = 1$ 的元素 x 组成。这称为 G 的 **整数格** 。

现在，你可能希望这就是构造所需根格的正确方法。遗憾的是，并非如此。 L 是一个非常有趣的格，但并不是我们想要的那个。幸运的是，它在对偶向量空间 Lie(T)*中产生了一个格，即

$$\{\ell \in \mathrm{Lie}(T)^* \mid \ell(v) \in \mathbb{Z} \text{ for all } v \in L\}.$$

这称为 L 的**对偶**，我将用 L^* 表示它。

对偶格 L^* 更适合我们的目的，但我们还没有完全解决问题。正如我之前提到的，连通李群的任何覆盖空间都是另一个具有相同李代数的连通李群。如果我们从某个紧半单李代数 $\mathfrak{g}$出发，就需要选对李群 G，使得 Lie(G) $= \mathfrak{g}$，才能确保 L^* 是根格。一个显而易见的猜测是让 G 单连通：这样就覆盖了所有其他具有李代数 $\mathfrak{g}$的连通李群。然而，如果这么做， L^* 就是 $\mathfrak{g}$的一个格，称为**权格**。它非常重要，但不是我们要找的。相反，我们应该选择 G，使其中心平凡：所有其他具有李代数 G的连通李群都被其覆盖。这样， L^* 就是我们要找的根格！

有限反射群如何参与其中？对于 G中的某些元素 g，如果我们用 g对T 取共轭，也就是构造所有满足 t 属于 T的元素 gtg^{-1} 组成的集合，我们会得到 T。换句话说， G 中的这些元素作为环面 T的对称性发挥作用。但 $g \in G$ 中的某些元素在T上作用平凡：对于所有 $t \in T$，它们都有 $gtg^{-1} = t$。因此，商群

$$W(G) = \frac{\{g \in G \,|\, gtg^{-1} \in T \text{ for all } t \in T\}}{\{g \in G \,|\, gtg^{-1} = t \text{ for all } t \in T\}}$$

作用于我们的极大环面 T 上。这个群 W(*G*) 称为 G 的 **魏尔群** 。（实际上，它也取决于我们对极大环面的选择；但将极大环面换成另一个极大环面，会得到一个同构的魏尔群，因此我们的记号忽略了对 T 的依赖。）

如果一个群作为某个事物的对称性起作用，那么它也会作为由该事物自然构造出来的一切对象的对称性起作用。因此， G 的魏尔群也作为 Lie(*T*)、整数格 L，以及位于 Lie(*T*)* 内的根格 L^* 的对称性起作用。由此我们得到一个格 L^*，可以把它看作位于 n 维欧几里得空间中，并且还有一个对称群 W(*G*)。

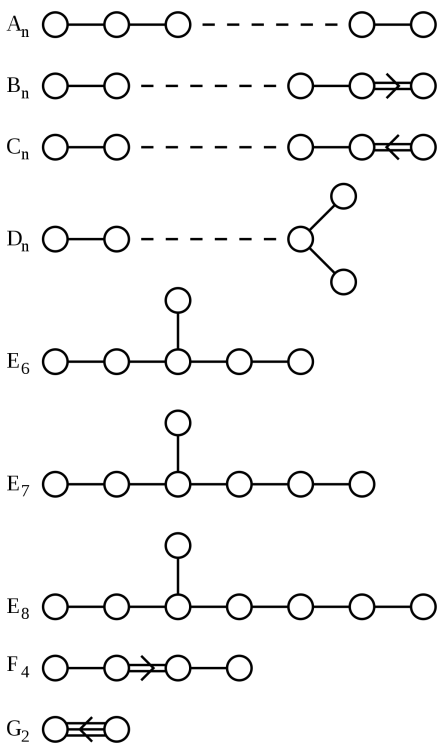
这部分稍微有些技术性，对此我深表歉意。不过，接下来我们将得到三个精彩的定理。首先， W(*G*) 实际上是一个有限反射群，作用于内积空间 Lie(*T*)*。其次， W(*G*) 由格 L^* 中某些向量所确定的反射生成。根据上一节学到的内容，这意味着根格 L^* 和这个有限反射群 W(*G*)，在同构意义下由某个 Dynkin 图确定。第三，事实证明， G 的李代数在同构意义下由根格 L^* 及作用于其上的这个有限反射群确定！

综合以上内容，我们得到以下四类对象之间的一一对应关系，每类对象都按相应的同构关系取等价类：

- Dynkin 图
- 紧半单李代数
- 连通单连通紧半单李群
- 中心平凡的连通半单李群。

真正深刻的对应关系存在于前两类对象之间。接着，对于每个紧半单李代数 $\mathfrak{g}$，都有若干个以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的连通李群 G 。它们全都是紧致且半单的，但有些是其他群的覆盖空间。一端是万有覆盖，它覆盖所有其他群：它是单连通的。另一端则是所谓的**伴随形式**，所有其他群都被 它覆盖：它的中心平凡。例如，SU(*N*) 是单连通的，但它有非平凡的中心，该中心由所有形如单位根 N 次方乘以单位矩阵的矩阵组成。若对这个中心取商，便得到伴随形式，它称为**射影特殊酉群** PSU(*N*)。

此外，事实证明，对紧半单李群取直积这一运算，对应于对它们的李代数取直和，而这又对应于对 Dynkin 图取不交并。因此，要得到其余一切结构的“构件”，我们只需关注连通Dynkin 图；这些图我们已经完全分类：



由连通Dynkin 图得到的紧半单李代数称为**紧单李代数**。但它们实际上是什么样的？人们已经弄清楚了。令人惊讶的是，那些构成无穷级数的李代数，都与实、复或四元数向量空间中的旋转有关。下面我就来为你快速介绍一下：

1. 保持 $\mathbb{R}^n$ 通常内积的实线性变换

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

构成一个紧李群，称为**正交群** O(n)。由行列式为 1 的变换组成的子群是一个紧李群，称为**特殊正交群** SO(n)。它的李代数称为 $\mathfrak{so}(n)$，由迹为零且等于自身负转置的实矩阵组成。当 $n \geq 3$时，它是一个紧致单李代数。当 $n = 1$ 或 2 时，它是什么？

2. 保持 $\mathbb{C}^n$ 通常内积的复线性变换

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i w_i$$

构成一个紧李群，称为**酉群** U(n)。由行列式为 1 的变换构成的子群是一个紧李群，称为**特殊酉群** SU(n)。

它的李代数称为 $\mathfrak{su}(n)$，由 $n \times n$ 迹为零且等于自身共轭转置相反数的复矩阵构成。当$n \geq 2$时，这是一个紧致单李代数。当 $n = 1$时，它是什么?

3. 保持 $\mathbb{H}^n$ 通常内积的四元数线性变换

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i w_i$$

构成一个李群，称为**四元数酉群** $\mathrm{Sp}(n)$。（按照 Dieudonné 对四元数行列式的定义，该群中的所有矩阵的行列式均为 1。）$\mathrm{Sp}(n)$ 的李代数称为 $\mathfrak{sp}(n)$，由迹为零且等于自身共轭转置负值的 $n \times n$ 四元数矩阵组成。当$n \geq 1$时，它是一个紧致单李代数。

第三项看起来很像前两项，但你可能不熟悉四元数 $\mathbb{H}$。现在我只想说，在 $\mathbb{R}$ 上有三种有限维结合代数，它们带有满足以下条件的范数

$$|ab| = |a||b|.$$

它们分别是实数 $\mathbb{R}$、复数 $\mathbb{C}$，以及最令人兴奋的**四元数**

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

其中乘法由 Hamilton 于 1843年10月16日 刻在墙上的方程确定：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

我们可以用以下方式定义四元数的共轭：

$$q = a + bi + cj + dk \implies \overline{q} = a - bi - cj - dk$$

然后范数为

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q}.$$

空间 $\mathbb{H}^n$ 的作用如同一个“ $\mathbb{H}$ 四元数向量空间”，尽管 $\mathbb{H}$ 不是域：我们可以用四元数从左侧或右侧乘向量，并称 $T\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ 是**四元数线性**的，当且仅当

$$T(vq) = T(v)q \qquad \text{for all } v \in \mathbb{H}^n, q \in \mathbb{H}.$$

按照这一约定，任意 $n \times n$ 四元数矩阵的左乘都给出一个四元数线性映射 $T\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$。四元数是一门迷人的学问，不过目前你只需了解这些。

现在，我们可以列出紧致单李代数的四个无穷级数：

- $\mathbf{A}_n$：这个 Dynkin 图对应紧致单李代数 $\mathfrak{su}(n+1)$。
- $\mathbf{B}_n$：这个 Dynkin 图对应紧致单李代数 $\mathfrak{so}(2n+1)$。
- $\mathbf{C}_n$：这个 Dynkin 图对应紧致单李代数 $\mathfrak{sp}(n)$。

- $\mathbf{D_n}$：这个 Dynkin 图对应紧致单李代数 $\mathfrak{so}(2n)$。

这些称为**经典**紧致单李代数，你很容易自己重新发现它们，也可能出于各种原因对它们感兴趣。SO($2n$) 和 SO($2n+1$) 竟然如此不同，这可能看起来很奇怪，但事实确实如此！例如，可以在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中放入 n 个正交平面，并在每个平面内旋转，从而得到 SO($2n$) 中一个只固定原点的元素。但在奇数维空间中会多出一个维度，因此任何旋转都必须固定某个非零向量。

其余五个紧致单李代数称为**例外**李代数，它们要神秘得多。它们直到 Killing 和 Cartan 等人弄清单李代数分类时才被发现。结果发现，它们全都与八元数有关！八元数 $\mathbb{O}$ 是 $\mathbb{R}$ 上唯一配备了满足以下条件的范数的有限维非结合代数

$$|ab| = |a||b|.$$

它们是自然界中令人惊叹的奇异产物，并由此衍生出许多其他奇妙事物。我对它们有些着迷，但这里就不多说了：更多内容请参阅参考资料。

以下是 5 个例外紧单李代数。用紧李群来描述它们最快捷。我将按维数而非字母顺序列出：

1. $\mathbf{G_2}$：这个 Dynkin 图对应一个 14 维的紧致单李代数，称为 $\mathfrak{g}_2$。八元数的自同构群是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{g}_2$。2. $\mathbf{F_4}$：这个 Dynkin 图对应一个 52 维的紧致单李代数，称为 $\mathfrak{f}_4$。八元数构成一个 16 维的射影平面，称为 $\mathbb{O}\mathrm{P}^2$。这是一个黎曼流形，其**等距变换群**——即保持黎曼度量的微分同胚群——是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{f}_4$。3. $\mathbf{E_6}$：这个 Dynkin 图对应一个 78 维的紧致单李代数，称为 $\mathfrak{f}_4$。八元数与复数作张量积，构成一个 32 维的射影平面，称为 $(\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathrm{P}^2$。这是一个黎曼流形，其等距变换群是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{e}_6$。4. $\mathbf{E_7}$：这个 Dynkin 图对应一个 133 维的紧致单李代数，称为 $\mathfrak{e}_7$。八元数与四元数作张量积，构成一个 64 维的黎曼流形，称为 $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\mathrm{P}^2$,，尽管严格来说它并不是射影平面。其等距变换群是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{e}_7$。5. $\mathbf{E_8}$：这个 Dynkin 图对应一个 248 维的紧致单李代数，称为 $\mathfrak{e}_8$。八元数与八元数作张量积，构成一个 128 维的黎曼流形，称为 $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathrm{P}^2$,，尽管严格来说它并不是射影平面。其等距变换群是一个紧李群，其李代数为 $\mathfrak{e}_8$。

一个令人遗憾的事实是，目前没有人知道如何在不先构造等距变换群，或不同时构造它们的情况下，直接研究黎曼流形 $(\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\mathrm{P}^2$ 和 $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathrm{P}^2$。因此，我们对 $\mathfrak{e}_7$ 和 $\mathfrak{e}_8$ 所作的解释虽然正确，却没有我们所希望的那么有用。对于 $\mathfrak{e}_8$ 而言，这尤其令人沮丧，因为它是单李代数中的“王者”，与数学中许多其他惊人的例外结构相联系。

我们已经列出了紧致单李代数，那么它们对应的李群呢？这是一个重要的主题，因为李代数归根结底只是研究李群的一种工具。不过

我们需要稍加注意，因为一个李代数可能对应多个彼此不同构的连通李群。请记住，对李群取覆盖空间并不会改变它的李代数。例如，Dynkin 图的巧合 $A_1 \cong B_1$ 意味着 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$，但李群 SU(2) 与 SO(3) 并不同构：SU(2) 是 SO(3) 的二重覆盖。

人们通常采取较为宽松的态度，把任意 李代数为紧单李代数的连通李群称为**紧致单李群**。尽管这样的群可能有非平凡的正规子群，因此按通常群论意义上的定义，它并不是单群，但人们仍然这样称呼它。例如，SU(N) 有一个 n 阶正规子群，即它的中心，其中包含那些等于单位矩阵乘以一个 N 次单位根的矩阵。然而，我们仍称它为紧致单李群。如果你对此不满意，也不必担心：任取一个紧致单李群，再用它的中心取商，就会得到另一个具有相同李代数的紧致单李群，而且它没有任何非平凡的正规子群。这就是所谓的“伴随形式”，我之前提到过。

有了这些术语，我们便得到以下四类对象之间的一一对应关系，每一类对象都按相应类型的同构关系取等价类：

- 连通 Dynkin 图
- 紧致单李代数
- 单连通紧致单李群
- 没有非平凡正规子群的紧致单李群。

在经典紧致单李群中，SU(n) 和 Sp(n) 是单连通的，而 SO(n) 不是：对于 $n \geq 3$（这正是这里唯一重要的情形），SO(n) 有一个称为 **旋量群** Spin(n) 的单连通二重覆盖。这个群在物理学和微分几何中都非常重要，因为它具有称为“旋量”的重要表示，而这些表示并不是 SO(n) 的表示。我已经相当详细地介绍过例外紧致单李群，但在这里我只提到，任何李代数为 $\mathfrak{g}_2$、$\mathfrak{f}_4$、$\mathfrak{e}_6$、$\mathfrak{e}_7$ 或 $\mathfrak{e}_8$ 的连通李群，都称为 G_2,F_4,E_6,E_7 或 E_8。这种命名缺乏创意，而且有些含糊，但事实就是如此。

单边邓肯图

我们已经看到，任何带有 n 个点的 Dynkin 图都描述了一组向量 v_1、.....、$v_n \in \mathbb{R}^n$，使得：

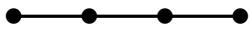
1. 这些向量的整数线性组合构成一个格 $L \subset \mathbb{R}^n$2. 关于这些向量的反射生成一个有限反射群 Γ

3. Γ在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用保持格 L不变。

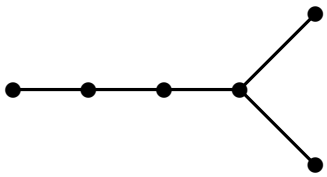
遗憾的是，我们并不总能让所有向量 v_i 的长度都相同。但我们已经看到，当这些向量彼此之间的夹角都是 $\pi/2$ 或 $\pi/3$ 时，就不会出现这个问题。当我们的 Dynkin 图是**单边的**时，情况正是如此：它的所有边都没有标记。

以下是所有连通单键戴肯图：

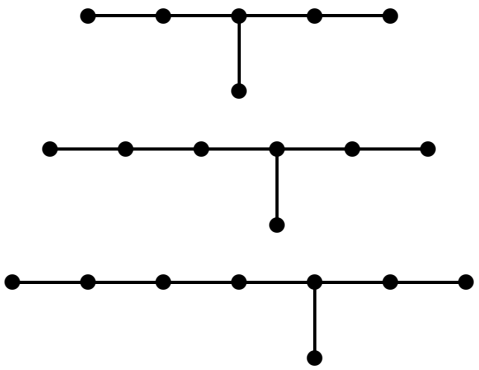
- An，它有 n这样的点：



• D_n，它有 n 个点，其中我们可以假设 $n > 3$，因为对于 $n = 1,2,3$，$\mathrm{D}_n \cong \mathrm{A}_n$：



• E_6、E_7和 E_8：



这些图在数学中无处不在。不过，在深入讨论之前，我应该更明确地描述相应的格，以便清楚地了解它们实际上有多简单。

那么，A,D 和 E 格是什么?

• **A_n**：我们可以将 A_n 格描述为所有满足下列条件的整数（$n+1$）元组（$x_1, \ldots, x_{n+1}$）的集合：

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0.$$

证明 A_2 是二维六角格是个有趣的练习；这种格可用于尽可能密集地堆放便士。类似地，A_3 给出了一种标准的炮弹堆放方式，它是三维空间中等大小球体的最密格点堆积。Hales 证明了一个难得多的事实：等大小球体的非格点堆积无法超过 A_3 格的堆积密度。

• **D_n**：我们可以将 D_n 格描述为所有满足以下条件的 n 个整数组成的元组（x_1，.....，x_n）的集合：

$$x_1 + \cdots + x_n \quad \text{is even.}$$

或者，如果你愿意，可以想象取一个 n 维棋盘格，将立方体交替涂成红色和黑色，然后取每个红色立方体的中心。在四维中，D_4给出的球体堆积比 A_4更密；事实上，它给出了可能的最密格点堆积。此外，D_5 给出了五维空间中最密的格点堆积。然而，在六维、七维和八维中，E_n 格给出了最密的格点堆积。事实上，Viasovska 证明，在八维空间中，没有任何由大小相同的球构成的非格点堆积，其密度能超过 E_8格!

• **E_6、E_7、E_8**：我们可以将 E_8 格描述为由满足以下条件的八元组 (x_1、.....、 x_8) 构成的集合： x_i 要么全都是整数，要么全都是整数加上 $1/2$ ，并且

$$x_1 + \cdots + x_8 \quad \text{is even.}$$

这个格中的每个点都有 240 个最近邻。例如，原点的最近邻长度为 $\sqrt{2}$，你可以验证它们一共有 240 个。

或者，如果你取 D_8 格，并用它来堆积彼此恰好相切的等大小球体，那么在剩余空间里刚好还能塞进另一个由等大小球体组成的 D_8 格，密度因此翻倍！这样做的话，你的球体就会以 E_8 格中的点为球心。

有了 E_8 之后，你就可以用下面的方法得到它的小伙伴 E_7 和 E_6 。要得到 E_7, ，只需取 E_8 中所有与一个长度为 $\sqrt{2}$ 的格向量垂直的向量。要得到 E_6,, 先在 E_8 中找一个由两个长度为 $\sqrt{2}$ 的向量生成的格 A_2 的副本，然后取 E_8 中所有与该副本 A_2中的所有向量都垂直的向量。

A、D 和 E Dynkin 图以一种神秘的方式出现在数学的许多领域。让我简要介绍其中最著名的三个。

首先，Witt 定理指出，A、D、E 格及其直和，是仅有的那些具有由向量 v with $\|v\|^2 = 2$构成的基的整格。这里，如果一个格中任意两个向量的点积都是整数，那么这个格就是**整的** 。事实上，任何具有由向量构成的基，且 $\|v\|^2$ 等于 1 或 2 的整格，都是若干个 A、D、E 格以及整数的直和；这里的整数被视为一维格。

其次，**箭图**就是一些点以及点之间的箭头。箭图的**表示** 是为每个点指定一个有限维复向量空间，并为每支箭头指定这些向量空间之间的一个线性映射。任何箭图 Q都有一个显然的表示范畴 Rep(Q)。Gabriel 对这些范畴 Rep(Q) 证明了一个惊人的结果。如果箭图 Q 的 Rep(Q) 只有有限多个**不可分解** 对象的同构类——也就是不能写成其他对象直和的对象——那么我们就称该箭图具有**有限表示型** 。结果证明，有限表示型的箭图恰好就是来自单边邓肯图的那些箭图！

实际上，要让这件事说得通，你需要把 Dynkin 图沿着边加上箭头，将它变成一个箭图。如果你有一个单边 Dynkin 图，那么无论箭头指向哪个方向，得到的都是有限表示型箭图。

第三，ADE 图与柏拉图立体的对称群之间存在一种很酷的联系，称为**McKay 对应**。下面介绍一种构造方式。首先，取一个柏拉图立体的旋转对称群（不包括反射），或者更一般地，取 SO(3) 的任意有限子群 G 。由于 SO(3) 的二重覆盖是 SU(2)，你可以得到 G 的一个二重覆盖 $\tilde{G}$，记作 $\tilde{G}$，它包含于 SU(2) 中。由于 $\tilde{G}$ 是有限群，它在复向量空间上的不可约表示只有有限多个（在同构意义下）。为每个不可约表示画一个点。其中一个来自 SU(2) 在 $\mathbb{C}^2$ 上的显然表示。当你将这个表示与任意另一个不可约表示 R 作张量积时，会得到若干不可约表示的直和。从 R 对应的点向另一个点画一条线；每当该点对应的不可约表示出现在这个直和中，就画一条线。你会得到什么？

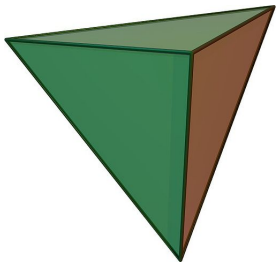
你会得到一个“仿射 Dynkin 图”，它类似于通常的 Dynkin 图，只是多了一个点 $\tilde{}$——这个点对应于 G的平凡表示。去掉这个额外的点，就会得到一个单纯连边 Dynkin 图！事实上，所有连通的单纯连边 Dynkin 图都可以这样得到！

对应关系如下：

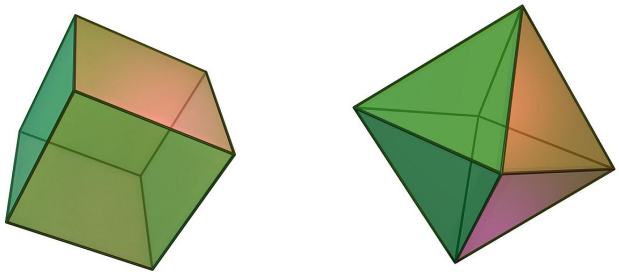
• $\mathbf{A_n}$：这对应于包含在 SO(n) 中的循环群，它由正 n边形的旋转对称构成；在这里，我们不允许将这个多边形翻转过来。

• $\mathbf{D_n}$：这对应于包含在 SO(n) 中的二面体群，它由正n边形的对称性构成；在这里，我们确实允许将这个多边形翻转过来。

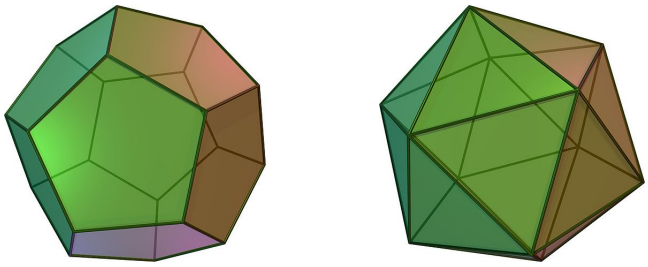
• $\mathbf{E_6}$：这对应于正四面体的旋转对称群。



• $\mathbf{E_7}$：这对应于正立方体（或正八面体）的旋转对称群。 n.



• $\mathbf{E_8}$：这对应于正十二面体（或正二十面体）的旋转对称群。



本文开头附近，我们看到柏拉图立体与考克斯特图之间的另一种关系，但那种关系还说得通。这一种简直就是黑魔法。

参考文献

我浏览过不少材料，但没有详细讲解。根据这些笔记，我在爱丁堡大学所作的讲座或许能有所帮助：

- John C. Baez，《数理物理中的本周发现》讲座，第 4–8 讲。

不过，仍有许多重要细节尚未提及！以下是一些进一步了解的途径。

若想温和地入门了解二维和三维中的对称群，并为研究更高维情形做有益的预热，请参阅：

- D. L. Johnson，《对称性》，施普林格，柏林，2001 年。

若要了解如何根据考克斯特图对有限反射群进行分类，请参阅：

- James E. Humphreys，《有限反射群与考克斯特群》，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。

若想了解它们作为多胞体对称群的表现，不妨读读这本百读不厌的书：

- Harold Scott Macdonald Coxeter，《正则多胞体》，多佛出版社，米尼奥拉，1974年。

若想获取关于格的大量信息，请参阅这本书：

- John Horton Conway 和 Neil James Alexander Sloane，《球堆积、格与群》，施普林格，柏林，2013年。

Gian-Carlo Rota 对这本书这样评价：“这是由最优秀的人撰写的、关于组合学最佳领域中最出色成果的最佳综述。对于那些对当今正在开展的最佳数学研究感兴趣的最优秀学生来说，这将是最好的读物。”第4章讨论了由 Dynkin 图导出的格。

关于紧李群的分类，请参阅：

- John Frank Adams，《李群讲义》，Benjamin，纽约，1969。

这很不错，因为它运用了拓扑学，并且对待非半单的紧李群与半单紧李群的方式大致相同。许多著作采用更偏代数的方法来分类半单李代数和／或李群。以下列出几本：

- Daniel Bump，《李群》，施普林格，柏林，2004。
- William Fulton 和 Joe Harris，《表示论——入门教程》，施普林格，柏林，1991。
- Sigurdur Helgason，微分几何、李群与对称空间，学术出版社，纽约，1979。
- James Humphreys，《李代数与表示论导论》，施普林格，柏林，2012。

这是一条有用的参考资料：

- Nicolas Bourbaki，《李群与李代数》，第*7–9*章，施普林格，柏林，1975 .

这类书籍通常从分类 $\mathbb{C}$ 上的半单李代数开始，然后证明每个半单李代数都是唯一紧致半单李代数的复化。每个这样的复李代数也是唯一连通且单连通的**复李群**的李代数，也就是说，它是复流形与全纯映射这一范畴中的一个群。因此，实际上存在六类事物之间的一一对应关系，其中每一类都按同构意义考虑：

- 连通邓肯图
- 紧单李代数
- 连通单连通紧单李群
- 中心平凡的连通紧单李群（或等价地，不含非平凡正规子群）
- 复单李代数
- 连通单连通复单李群。

本文中，我将连通性视为“单李群”定义的一部分；现在则明确说明这一点。

有关例外李群及其与八元数的关系，详见：

- John Frank Adams，《例外李群讲义》，Zafer Mahmud 和 Mamoru Mimura 编，芝加哥大学出版社，芝加哥，1996年。
- John C. Baez，《八元数》，《美国数学会通报》**39** (2002年)，145–205。勘误见《美国数学会通报》**42**(2005年)，213。
- Ichiro Yokota，例外李群。

有关考克斯特图与 Dynkin 图无处不在的现象，尤其是 ADE邓肯图，详见：

- M. Hazewinkel、W. Hesselink、D. Siermsa 和 F. D. Veldkamp，Coxeter–Dynkin 图的普遍性（ADE 问题导论），《*Niew. Arch. Wisk.*》**25** （1977），257–307。
- John McKay，ADE 理论快速入门。
- Vladimir I. Arnol'd，《当代数学问题》，载于《希尔伯特问题引出的数学发展》，F. E. Browder 编，《纯数学专题讨论会论文集》**28**，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1976 年。

Arnol'd 列举了许多重要的数学问题，承接了希尔伯特在世纪之交著名的问题清单。本书的第八问题是“ADE 分类的普遍性”。

Witt 在这篇论文中证明，所有由向量 v 和 $v \cdot v = 2$ 生成的整格都来自单纯连边 Dynkin 图：

- Ernst Witt，《Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe》，汉堡大学数学研讨会论文集 ¨**14** （1941），289–322。

应该还有更实用的现代参考资料！关于加布里埃尔定理（只有单纯连边 Dynkin 图才对应温和表示型的箭图）的证明，参见：

- William Crawley-Boevey，箭图表示讲义。

关于加布里埃尔定理的更多讨论，参见：

- Harm Derksen 和 Jerzy Weyman，箭图表示，《美国数学学会通报**52**（2005年），200–206。
- Idun Reiten，Dynkin 图与代数表示论，《美国数学学会通报》**44**（1977），546–558。
- Alistair Savage，有限维代数与箭图。

关于 McKay 对应，参见：

- John McKay，《图、奇点与有限群》，载于《纯数学专题讨论会论文集》第**37**卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，1980年，第183–186页。
- D. Ford 和 John McKay，《表示与 Coxeter 图》，载于《几何脉络：*Coxeter* 纪念文集》（1982年），施普林格，柏林，第549–554页。
- Pavel Etinghof 和 Mikhail Khovanov，张量范畴的表示与 Dynkin 图。
- Joris van Hoboken，柏拉图立体、二元多面体群、克莱因奇点与 A，D，E，硕士论文，阿姆斯特丹大学，2002年。
- Klaus Lamotke，《正多面体与孤立奇点》，Vieweg & Sohn，布伦瑞克，1986年。
- Peter Slodowy，《柏拉图立体、克莱因奇点与李群》，载于《代数几何》，施普林格，柏林，1983年，第102–138页。

如你所见，其中一些内容描述了 ADE 图与奇点理论之间的联系，而我在这里没有涉及这一点。

柏拉图立体的绿色图像由 Kjell Andr´e 创建，并由 DTR 转换为 SVG 文件。这些图像以 CC BY-SA 3.0 许可证发布在维基共享资源上。铺砌图像和 Dynkin 图的精美图像由 R.A. Nonemacher 创建，并以 CC BY-SA 4.0 许可证发布在维基共享资源上。其他图像要么由我自己创建，要么我无法查明其来源。