涨落流体力学的自下而上方法：随机晶格气体的粗粒化与Dean-Kawasaki方程

Soumyabrata Saha[1⋆]、SandeepJangid[1†]、Thibaut Arnoulx de Pirey[2‡]、Juliane U. Klamser[3◦]和Tridib Sadhu[1§]

1理论物理系，塔塔基础研究院，Homi Bhabha Road，孟买 400005，印度**2** 理论物理研究所，CEA 萨克雷和法国国家科学研究中心（UMR 3681），吉夫叙尔伊韦特，91190，法国**3** Charles Coulomb 实验室（L2C），蒙彼利埃大学和法国国家科学研究中心（UMR5221），蒙彼利埃 34095，法国

⋆ soumyabrata.saha@tifr.res.in， † sandeep.jangid@tifr.res.in， ‡ thibaut.arnoulxdepirey@ipht.fr，◦ juliane.klamser@umontpellier.fr, § tridib@theory.tifr.res.in

arXiv:2601.02319v1 [cond-mat.stat-mech] 5 Jan 2026

摘要

涨落流体力学以平滑变量为基础，为多体系统提供定量的大尺度描述，而微观细节仅通过少数输运系数体现。尽管这一框架在刻画宏观涨落和关联方面取得了巨大成功，但对于广泛类别的相互作用系统，如何从底层随机微观动力学中系统地推导出涨落流体力学，仍不清楚。针对具有梯度动力学和单一守恒密度的随机晶格气体模型，我们开发了一种基于路径积分的粗粒化过程，能够以可控的方式推导出涨落流体力学。我们的分析强调了局部平衡平均的关键作用，这超越了朴素的平均场型梯度展开。我们还通过对Dean–Kawasaki方程进行粗粒化，将这一方法推广至相互作用布朗粒子，揭示出迁移率与密度成正比，而扩散率则由热力学压力决定。

作者版权所有。本作品已投稿至 SciPost Physics。
许可信息将在发表时公布。出版信息将在发表时公布。

收稿日期 接受
日期 发表日期

目录

1 引言 **2**

2 晶格模型：排斥过程 4 2.1 对称简单双重排斥过程 4 2.2 对称简单多重排斥过程的推广 9 2.3 对称简单部分排斥过程 10

3 朗之万动力学：相互作用布朗粒子 11

4 涨落流体力学的数值验证 1 4
4.1 对称简单多重排斥过程 154.2 带有 WCA 相互作用的布朗气体 154.3 对称简单部分排斥过程 16

5 结论 18

A 关于粗粒化的更多细节 2 0

参考文献 23

1 引言

流体力学是在宏观尺度上对多粒子系统进行粗粒化描述的一种理论，它以少数慢自由度 [1–8], 而非热力学数量的微观变量为基础。这些慢变量与局域守恒定律相关，例如质量、动量和能量守恒定律；这些定律约束微观动力学，使其弛豫过程发生在较大的时空尺度上。流体力学描述通过经典偏微分方程来表达这些慢守恒变量的演化，这些方程由连续性方程与编码输运性质的本构关系结合而得。这种粗粒化描述无需明确涉及精确的微观细节，便能捕捉扩展多粒子系统在长距离、长时间尺度上的平均动力学。

然而，经典流体力学的确定性描述并未呈现全部情况，因为即使在大型系统中、经过很长时间，残余涨落依然存在。将快速自由度积分消去，对微观动力学进行粗粒化，会在慢守恒模上留下随机印记。尽管这些涨落通常远小于平均值，但在非平衡情形下 [9–12]，它们对于产生长程时空关联 [13–17], 、对扰动的非局域响应 [18], 、反常输运 [19,20], 、稀有事件现象 [21–23], 以及动力学相变 [12,24–26]发挥着尤为重要的作用。为将这些涨落纳入考量，必须扩展经典流体力学，使其包含一致的随机描述，由此产生了涨落流体力学。

经典流体力学的传统方法 [2,3] 已经展示了涨落流体力学的基础。最简单的途径 [11,27,28]是将局域守恒定律与唯象本构关系结合起来，例如描述扩散的菲克定律或描述热输运的傅里叶定律。更系统的推导来自动力学理论：从玻尔兹曼方程 [29, 30] 出发，通过受控展开提取宏观输运方程及其系数。投影算符方法 [31]则提供了另一种形式化框架，通过形式上将慢守恒模与快速的微观模分离开来。沿着这一思路的早期讨论 [2,13,32] 大多局限于经典流体力学附近的小幅典型涨落。

涨落流体力学通过在确定性守恒定律中加入乘性噪声项，扩展了这些早期描述；这些噪声项描述了缓慢守恒场围绕其平均行为发生的、甚至幅度较大的涨落。这些噪声项的结构由底层对称性和守恒定律决定，而其强度则由平衡响应函数决定。关于其起源，一种自然的理解视角来自介于两者之间的介观描述：将系统划分为足够大的单元，使其中包含许多

自由度，同时又足够小，从而可以忽略涨落。随后，单元之间交换的守恒量之流便成为随机变量。这就导出了随机守恒律，其确定性部分退化为经典流体力学，而含噪声的部分则刻画了在这一尺度上仍然存在的剩余涨落。

如此一来，涨落流体力学便在多粒子系统的微观模型与宏观尺度上观察到的涌现行为之间架起了桥梁。它不仅刻画了慢守恒模的平均输运定律，还为其涨落提供了自洽的统计描述，使其成为研究平衡与非平衡状态下各类系统的强大框架。这一描述构成了宏观涨落理论（MFT）的核心 [9–12, 28]；宏观涨落理论最初是为研究非平衡动力学的大偏差而提出的。

尽管过去几十年来相关研究取得了巨大进展，但从底层随机微观动力学出发，自底向上推导涨落流体力学仍在很大程度上不明朗 [33–36]。在这篇文章中，我们提出了一种系统的粗粒化方法，能够为扩展随机多粒子系统中慢守恒场的宏观演化，复现定量的涨落流体力学描述 [11, 12]。我们提出的粗粒化方法以 Physics toolbox 为基础，概念简单，适用于广泛的多粒子系统；更重要的是，它能对非典型涨落，尤其是大偏差，给出精确的定量预测。

在这篇文章中，我们聚焦于一类局部守恒单一物理量的扩散系统中最简单的情形。令 $\rho(x,t)$ 表示守恒量的粗粒化密度场。守恒性要求 ρ 满足连续性方程，其对应的流由确定性的扩散部分和随机部分组成。将这两部分贡献纳入考量，得到描述密度场演化的随机扩散方程

$$\partial_t \rho = \partial_x (D(\rho)\partial_x \rho) + \frac{1}{\sqrt{\ell}} \partial_x \left(\sqrt{\sigma(\rho)}\eta \right), \tag{1}$$

其中，两个输运系数——扩散率 $D(\rho)$和迁移率 $\sigma(\rho)$——编码了所有相关的微观细节 [11, 12, 28, 37]。参数 ℓ 表示粗粒化尺度，$\eta(x、t)$ 是均值为零的高斯白噪声，在空间和时间上均为单位强度的δ相关噪声。在表 1中，我们列出了一些著名相互作用粒子系统的输运系数，并将用我们的粗粒化方法对其进行再现。对于体相中的时间可逆动力学，这些输运系数通过涨落耗散关系 $2D(\rho) = \sigma(\rho) f''(\rho)$相关联，其中 $f(\rho)$ 是正则系综自由能密度 [11,37] (逆温度 β 被吸收在其定义中)。由此可见，式（1）等价于 Hohenberg–Halperin分类中的随机模型B [38],

$$\partial_t \rho = \partial_x \left(\frac{\sigma(\rho)}{2} \partial_x \frac{\mathrm{d} f(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + \frac{1}{\sqrt{\ell}} \partial_x \left(\sqrt{\sigma(\rho)}\eta \right). \tag{2}$$

注意，$f''(\rho) = \beta \rho^{-1} P'(\rho)$ 将输运系数与热力学压力$P(\rho)$联系起来；等价地，$f''(\rho) = \beta \rho^{-2} \kappa^{-1}$ 与等温压缩率 κ [2, 19, 20, 39]相关。

在这篇文章中，我们系统推导了适用于1的一类随机晶格气体和具有短程粒子间相互作用的过阻尼朗之万粒子的理论。对于后者，我们讨论的是对相关 Dean-Kawasaki方程 [40–42]进行粗粒化。我们的分析利用了 [43] 随机偏微分方程（1）的路径积分表示，该表示采用 Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis（MSRJD）形式 [44–47]。在这一表示中，从初始密度分布 $\rho(x,\ 0)$ 到最终密度分布 $\rho(x、T)$ 并遵循（1）的跃迁振幅为

$$\Pr(\rho(x,T)|\rho(x,0)) = \int_{\rho(x,0)}^{\rho(x,T)} [\mathcal{D}\widehat{\rho}][\mathcal{D}\rho] \exp\left\{ -\ell \int_0^T \mathrm{d}t \left[\int \mathrm{d}x \, (\widehat{\rho}\partial_t \rho) - H[\rho, \widehat{\rho}] \right] \right\}, \tag{3a}$$

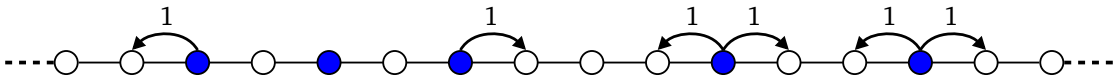


图 1：**SSDEP：** 对一维晶格上对称简单双重排斥过程（$M = 2$）动力学的示意图。实心圆表示被占据的格点，空心圆表示空格点。箭头表示允许的粒子跳跃，每次跳跃的速率均为 1。

其中，$\widehat{\rho}$ 是响应场，而有效哈密顿量

$$H[\rho,\widehat{\rho}] = \int \mathrm{d}x \left[\partial_x\widehat{\rho}\left(\frac{\sigma(\rho)}{2}\partial_x\widehat{\rho} - D(\rho)\partial_x\rho\right)\right]. \tag{3b}$$

式（3a）中的指数权重定义了“流体动力学作用量”。在写出式（3）时，我们遵循 Itô约定。

我们的粗粒化方法从微观动力学出发，推导出路径概率（3a）。这需要为微观变量 [21, 48] 构造类似的路径积分表示（另见 [35, 49, 50]），并在局域平衡测度下对相应的路径概率取平均；在该测度下，微观变量相对于平滑变化的平均场 $\rho(x,\ t)$处于局域平衡。对微观变量 [2] 进行这种局域平衡平均，是将粗粒化扩展到单纯梯度展开之外的关键步骤。

我们明确展示了该方法在一类排斥过程 [51–53] 中的应用。在这些过程中，粒子在扩展硬核或软排斥相互作用的约束下进行对称最近邻跳跃，并着重说明跃迁率的梯度结构所发挥的关键作用 [54]。我们还表明，同一种粗粒化方法也适用于相互作用布朗粒子系统；在微观尺度上，这类系统由 Dean-Kawasaki 方程 [41]描述。粗粒化揭示了 Dean-Kawasaki 方程中的粒子间相互作用如何在涨落流体力学描述中重整化扩散率。借此，我们得以推导出先前依据涨落耗散关系论证得到的涨落流体动力学方程 [19, 20, 39, 42] 。

本文的结构安排如下。在第 2 节，我们介绍晶格模型的粗粒化方法；随后在第 3 节，将该方法拓展至 Dean-Kawasaki 方程。在第 4节，我们针对特定模型动力学给出涨落流体力学的数值验证。附录讨论一般动力学，并强调底层梯度结构以及恰当的局部平衡平均的重要性。

2 晶格模型：排斥过程

2.1 对称简单双重排斥过程

我们考虑对称简单排斥过程（SSEP）的一种扩展，该扩展考虑了晶格上延展硬核粒子的排除体积效应，称为对称简单双重排斥过程（SSDEP）。在 SSDEP 中，与 SSEP 一样，粒子遵循位点排斥规则。此外，每个粒子还会阻止其紧邻的格点被占据。该过程的动力学是连续时间马尔可夫过程：粒子以速率 1 跳跃到右侧或左侧相邻格点，前提是目标格点及其最近邻格点均为空。动力学示意图见图 1。

微观模型	扩散率，$D(\rho)$	迁移率，$\sigma(\rho)$
零程过程	$g'(\rho)$	$2g(\rho)$
对称简单排斥过程	1	$2\rho(1-\rho)$
对称简单多重排斥过程	$\frac{1}{[1-(M-1)\rho]^2}$	$\frac{2\rho(1-M\rho)}{1-(M-1)\rho}$
对称简单部分排斥过程	N	$2\rho(N-\rho)$
对称简单吸引过程	K	$2\rho(K+\rho)$
Kipnis-Marchioro-Presutti 模型	1	$2\rho^2$
布朗硬杆	$\frac{1}{(1-a\rho)^2}$	2ρ
短程相互作用布朗粒子	$\beta\frac{\mathrm{d}P(\rho)}{\mathrm{d}\rho}$	2ρ

表 1：使用我们的粗粒化方法恢复的不同扩散输运模型的输运系数。对称简单多重 [51,55] 和部-分 [36, 53] 排斥过程是 SSEP 的范式模型的推广。分别设置$M=1$和$N=1$，即可将这些模型还原为 SSEP。另一方面，对称简单吸引过程 [56], 是 SSEP 的“吸引型”对应过程。零程过程 [57] 以及 Kipnis-Marchioro-Presutti 热传导模型 [58] 同样可以利用微观流的梯度结构和已知的局域平衡测度，显式推导出涨落流体动力学 [59, 60]。

我们用 $n_i(\tau)$表示时刻 τ第i个格点的占据数。根据位点排斥规则，若该格点被粒子占据，占据数为 1；若为空，则为 0。此外，我们用 $Y_i(\tau)$ 表示在从 τ 到 $\tau+\mathrm{d}\tau$的无穷小时间间隔内，穿过连接格点i与 $(i+1)$的键的净跃迁。对于所研究的模型，$Y_i(\tau)$ 取值为{±1、0}，其对应概率如下

$$Y_i(\tau)=\begin{cases} 1 & \text{with prob. } n_i(\tau)\big(1-n_{i+1}(\tau)\big)\big(1-n_{i+2}(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\ , \quad (4a)\\ -1 & \text{with prob. } n_{i+1}(\tau)\big(1-n_i(\tau)\big)\big(1-n_{i-1}(\tau)\big)\mathrm{d}\tau\ , \quad (4b)\\ 0 & \text{with prob. } 1-\big[n_i(\tau)\big(1-n_{i+1}(\tau)\big)\big(1-n_{i+2}(\tau)\big)\\ & \qquad +n_{i+1}(\tau)\big(1-n_i(\tau)\big)\big(1-n_{i-1}(\tau)\big)\big]\mathrm{d}\tau\ . \quad (4c)\end{cases}$$

Local 粒子守恒通过离散 co 将占据变量与跃迁变量联系起来

n- tinui 性方程

$$n_i(\tau+\mathrm{d}\tau)-n_i(\tau)=Y_{i-1}(\tau)-Y_i(\tau), \tag{5}$$

对所有格点i 和时间 τ均成立。

系统在时间 τ 的精确微观构型由占据变量集合 $\boldsymbol{n}(\tau)\equiv\{、\ldots、n_{i-1}(\tau)、n_i(\tau)、n_{i+1}(\tau)、\ldots\}$ 指定，而系统的演化则由跃迁变量序列 $\{、\ldots、Y_{i-1}(\tau)、Y_i(\tau)、Y_{i+1}(\tau)、\ldots\}$ 决定。我们将 $\tau=0$ 时的初始构型记为 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ini}}\equiv\boldsymbol{n}(0)$，将 $\tau=\mathcal{T}$ 时的最终构型记为 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{fin}}\equiv\boldsymbol{n}(\mathcal{T})$。按照 [21, 35, 48, 49]，我们得到决定系统微观演化的转移概率。它等于所有可能历史的概率之和，这些历史介于

$\boldsymbol{n}_{\rm ini}$ 与 $\boldsymbol{n}_{\rm fin}$ 之间，我们将其形式化地写成一个受约束路径积分

$$\Pr(\boldsymbol{n}_{\rm fin}|\boldsymbol{n}_{\rm ini}) = \int_{\boldsymbol{n}_{\rm ini}}^{\boldsymbol{n}_{\rm fin}} [\mathcal{D}n] \left\langle \prod_{k=0}^{M-1} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \delta_{n_i(k\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{d}\tau)-n_i(k\,\mathrm{d}\tau),\, Y_{i-1}(k\,\mathrm{d}\tau)-Y_i(k\,\mathrm{d}\tau)} \right\rangle_Y , \tag{6}$$

其中 $\delta_{a,b}$ 是克罗内克δ函数，$M\mathrm{d}\tau = \mathcal{T}$带有无穷小量 $\mathrm{d}\tau$，且路径积分测度

$$\int [\mathcal{D}n] \equiv \prod_{k=1}^{M-1} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n_i(k\,\mathrm{d}\tau)=0}^{1}$$

角括号 $\langle \ldots \rangle_Y$表示对持续时间$\mathcal{T}$内所有跃迁事件 $\{Y_i(\tau)\}$ 取平均。利用积分表示 $\delta_{a,b} = (2\pi\,\mathrm{i})^{-1} \int_{-\pi}^{\pi\mathrm{i}} \mathrm{i}\,\mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-z(a-b)}$（其中整数 a 和 b），我们写成

$$\Pr(\boldsymbol{n}_{\rm fin}|\boldsymbol{n}_{\rm ini}) = \int_{\boldsymbol{n}_{\rm ini}}^{\boldsymbol{n}_{\rm fin}} [\mathcal{D}\hat{n}][\mathcal{D}n]\, \mathrm{e}^{-\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{n}_i(k\,\mathrm{d}\tau)[n_i(k\,\mathrm{d}\tau+\mathrm{d}\tau)-n_i(k\,\mathrm{d}\tau)]} \left\langle \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{n}_i(k\,\mathrm{d}\tau)[Y_{i-1}(k\,\mathrm{d}\tau)-Y_i(k\,\mathrm{d}\tau)]} \right\rangle_Y , \tag{7}$$

其中 $\hat{n}$ 上的路径积分测度定义为

$$\int [\mathcal{D}\hat{n}] \equiv \prod_{k=0}^{M-1} \prod_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} \mathrm{d}\hat{n}_i(k\,\mathrm{d}\tau)$$

对于给定的一组占据变量，可以利用式（Y 中跃迁变量的概率精确计算其平均值4）。接下来，我们通过分部求和，对每个时间索引 k写出

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{n}_i \left(Y_{i-1} - Y_i\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\hat{n}_{i+1} - \hat{n}_i\right) Y_i \,. \tag{8}$$

利用（4），我们随后得到

$$\left\langle \mathrm{e}^{(\hat{n}_{i+1}-\hat{n}_i)Y_i} \right\rangle_{Y_i} \simeq \mathrm{e}^{\mathrm{d}\tau\left[\left(\mathrm{e}^{\hat{n}_{i+1}-\hat{n}_i}-1\right)n_i(1-n_{i+1})(1-n_{i+2})+\left(\mathrm{e}^{-\hat{n}_{i+1}+\hat{n}_i}-1\right)n_{i+1}(1-n_i)(1-n_{i-1})\right]}, \tag{9}$$

其中 $\simeq$ 表示 $\mathrm{d}\tau \to 0$ 极限下的最低阶项。利用路径积分（7）中的平均值结果，我们在 $\mathrm{d}\tau \to 0$ 极限下写为，

$$\Pr(\boldsymbol{n}_{\rm fin}|\boldsymbol{n}_{\rm ini}) = \int_{\boldsymbol{n}_{\rm ini}}^{\boldsymbol{n}_{\rm fin}} [\mathcal{D}\hat{n}][\mathcal{D}n]\, \mathrm{e}^{\mathcal{K}+\mathcal{H}}, \tag{10a}$$

其中

$$\mathcal{K} = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \mathrm{d}\tau\, \hat{n}_i(\tau) \frac{\mathrm{d}n_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}, \text{ and} \tag{10b}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \mathrm{d}\tau \Big[\left(\mathrm{e}^{\hat{n}_{i+1}(\tau)-\hat{n}_i(\tau)}-1\right) n_i(\tau) \left(1-n_{i+1}(\tau)\right) \left(1-n_{i+2}(\tau)\right) + \left(\mathrm{e}^{-\hat{n}_{i+1}(\tau)+\hat{n}_i(\tau)}-1\right) n_{i+1}(\tau) \left(1-n_i(\tau)\right) \left(1-n_{i-1}(\tau)\right) \Big]. \tag{10c}$$

我们提出一种系统的方法，从（10）中的微观传播子推导粗粒化密度场的流体力学路径概率（3）。假设局域平衡，以下步骤通过附录A 中对粗粒化密度场路径积分（3）的显式自下而上构造得以论证，最终结果也在第 4节与数值模拟进行了成功比较，并与表 1中的已知结果进行了对照。

我们将 $\ell \gg 1$ 表示为一个较大的流体力学尺度——相较于平衡态下的空间关联长度而言较大——并假设在 ℓ量级的长度尺度上，系统可由平滑变化的粗粒化密度场 $\rho(x、t)$描述。在 ℓ 的最低阶近似下，这意味着

$$\langle n_i(\tau)\rangle \simeq \rho\left(\frac{i}{\ell}, \frac{\tau}{\ell^2}\right), \tag{11}$$

其中，平均值 $\langle \ldots \rangle$ 现在表示在介观尺度上进行的空间或时间平均——该尺度远大于平衡动力学中微观自由度的关联长度或时间，但远小于由 ℓ给出的流体力学尺度。对于像 SSDEP 这样由扩散主导的动力学，粗粒化密度场在 ℓ^2 量级的时间尺度上发生变化是可以预期的。我们还假设，占据变量$n_i(\tau)$的局部统计——当在分别小于 ℓ 和 ℓ^2的长度和时间尺度上进行观测时——可以使用平均密度由粗粒化密度场的局部值 $\rho(x、t)$给出的平衡测度来近似。这就是局部平衡假设的本质 [2,3]。

为了完成涨落流体力学的构建，我们还要求共轭变量 $\widehat{n}_i$ 可直接由平滑变化的响应场近似为

$$\widehat{n}_i(\tau) \simeq \widehat{\rho}\left(\frac{i}{\ell}, \frac{\tau}{\ell^2}\right), \tag{12}$$

从而 $\widehat{n}_{i+1}(\tau) - \widehat{n}_i(\tau) \sim \ell^{-1}$ 并且可以对式（ $\widehat{n}_i$ （10）中涉及 $\rho(x,\ t)$ 的项进行梯度展开。需要强调的是，若直接将微观占据数展开为 $\rho(x,\ t)$ 的梯度，会因局域平衡测度中存在关联而导致错误结果。

接下来，我们将微观作用量的有效哈密顿量（10c）按响应场的梯度展开至二阶。为方便记号，我们定义

$$r_i^+(\tau) = n_i(\tau)\big(1-n_{i+1}(\tau)\big)\big(1-n_{i+2}(\tau)\big), \tag{13a}$$
$$r_i^-(\tau) = n_{i+1}(\tau)\big(1-n_i(\tau)\big)\big(1-n_{i-1}(\tau)\big), \tag{13b}$$

粒子从格点 i 跃迁至 $i+1$ 以及从格点 $i+1$ 跃迁至 i 的速率分别为。我们得到

$$\mathcal{H} \simeq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \mathrm{d}\tau \Bigg[\big(\widehat{n}_{i+1}(\tau)-\widehat{n}_i(\tau)\big)\big(r_i^+(\tau)-r_i^-(\tau)\big) + \frac{\big(\widehat{n}_{i+1}(\tau)-\widehat{n}_i(\tau)\big)^2}{2}\big(r_i^+(\tau)+r_i^-(\tau)\big)\Bigg]. \tag{14}$$

(14) 中的第一项现在可以用响应场的离散拉普拉斯算子来表示，因此两项在梯度展开中都为二阶。事实上，格点 i 与$i+1$ 之间的平均电流是一个离散梯度，如$r^+{}_i(\tau) - r^-{}_i(\tau) = h_i(\boldsymbol{n}(\tau)) - h_{i+1}(\boldsymbol{n}(\tau))$ 所示，其中

$$h_i(\boldsymbol{n}) = n_i + n_{i-1}n_{i+1} - n_{i-1}n_i n_{i+1}\,. \tag{15}$$

这使我们能够对（14）进行分部积分，并得到

$$\mathcal{H} \simeq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \mathrm{d}\tau \Big[\big(\widehat{n}_{i+1}(\tau) - 2\widehat{n}_i(\tau) + \widehat{n}_{i-1}(\tau)\big) h_i(\boldsymbol{n}(\tau)) + \frac{\big(\widehat{n}_{i+1}(\tau) - \widehat{n}_i(\tau)\big)^2}{2} \big(r_i^+(\tau) + r_i^-(\tau)\big) \Big]. \tag{16}$$

式（10）中的作用量现在可以直接用缓慢变化的响应场 $\widehat{\rho}$ 及其梯度表示，但引入粗粒化密度场则需要更加谨慎。在式（16）中，求和中的两项均按 ℓ^{-2}的尺度变化。此外，响应场产生的贡献在 ℓ量级的尺度上缓慢变化。因此，根据大数定律和局部平衡假设（见附录A），通过将微观占据数产生的贡献替换为其在局域平衡测度下的平均值，我们便可以得到关于 ℓ的一阶涨落流体力学作用量。对于重标度后的空间和时间坐标 $(i、\ \tau) \to (x、\ t) = \big(i/\ell,\ \tau/\ell^2\big)$因此，粗粒化密度场的转移概率为

$$\Pr(\rho(x,T)|\rho(x,0)) \simeq \int_{\rho(x,0)}^{\rho(x,T)} [\mathcal{D}\widehat{\rho}][\mathcal{D}\rho]\, \mathrm{e}^{-\ell \mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}]}, \tag{17a}$$

其中 $T = \mathcal{T}/\ell^2$，作用量根据式（10b）和式（16）表示为

$$\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}] = \int_0^T \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Big[\widehat{\rho}(x,t)\partial_t \langle n \rangle_{x,t} + \partial_x \widehat{\rho}(x,t) \partial_x \langle h \rangle_{x,t} - \frac{(\partial_x \widehat{\rho}(x,t))^2}{2} \Big(\big\langle r^+ \big\rangle_{x,t} + \big\langle r^- \big\rangle_{x,t} \Big) \Big]. \tag{17b}$$

这里，测度 $\langle \ldots \rangle_{x,\,t}$对应于平均密度为 $\rho(x,\ t)$时的平衡平均。与对称简单排斥过程不同，二点关联不会因子化 [55, 61]，对局域平衡测度取平均也比简单地用粗粒化密度场替换占据数更为复杂。事实上 [55, 61],

$$\langle n_i n_{i+2} \rangle_{x,t} = \frac{\rho(x,t)^2}{1-\rho(x,t)} \text{ and } \langle n_i n_{i+1} n_{i+2} \rangle_{x,t} = 0\,. \tag{18}$$

总之，我们由此得到

$$\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}] = \int_0^T \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\widehat{\rho}\partial_t \rho + \frac{1}{(1-\rho)^2} \partial_x \widehat{\rho} \partial_x \rho - \frac{\rho(1-2\rho)}{1-\rho} (\partial_x \widehat{\rho})^2 \right]. \tag{19}$$

相应的涨落流体动力学方程（1）可明确写为

$$\partial_t \rho = \partial_x \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} \partial_x \rho \right] + \frac{1}{\sqrt{\ell}} \partial_x \left[\sqrt{\frac{2\rho(1-2\rho)}{1-\rho}} \eta \right], \tag{20}$$

其中，η 是一个高斯噪声，其均值为 $\langle \eta(\mathrm{x},\mathrm{t}) \rangle = 0$，协方差为 $\big\langle \eta(\mathrm{x},\mathrm{t}) \eta(\mathrm{x}',\mathrm{t}') \big\rangle = \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}')\delta(\mathrm{t} - \mathrm{t}')$。式（20）中的 $\mathrm{D}(\rho)$ 和 $\sigma(\rho)$ 的表达式与文献 [55, 61–63]报道的数值一致。

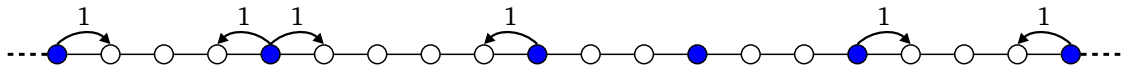


图2：**SSTEP：**对称简单三重排斥过程（$M = 3$）在一维晶格上的动力学示意图。实心圆表示被占据的格点，空心圆表示空格点。箭头表示允许的粒子跳跃，每次跳跃的速率均为 1。

2.2 对称简单多重排斥过程的推广

接下来，我们将涨落流体力学的推导推广到这样一种情形：体积排斥范围扩展至粒子所占格点周围的多个相邻格点 [51,52,55,61]。在该模型中，粒子同时占据其当前格点两侧各 (M − 1) 个相邻格点。我们将这一推广称为对称简单多重排斥过程（SSMEP）。系统在连续时间内演化，并遵守扩展硬核约束：位于第 i 个格点的粒子可以跳至第 (i+1)个格点，前提是格点 i + 1、i + 2、.....、i + M 均为空。同样，位于第 i 个格点的粒子可以跳至第 (i − 1)个格点，前提是格点 i − 1、i − 2、.....、i − M 均为空。图 2 示意了 M = 3 的情形（对称简单三重排斥过程）。

按照前文针对 SSDEP 概述的步骤，我们分别得到了粗粒化转移概率及相应的涨落流体动力学方程

$$\Pr(\rho(x,T)|\rho(x,0)) \simeq \int_{\rho(x,0)}^{\rho(x,T)} [\mathcal{D}\widehat{\rho}][\mathcal{D}\rho]\mathrm{e}^{-\ell\int_0^T \mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\widehat{\rho}\partial_t\rho+\frac{1}{[1-(M-1)\rho]^2}\partial_x\widehat{\rho}\,\partial_x\rho-\frac{\rho(1-M\rho)}{1-(M-1)\rho}(\partial_x\widehat{\rho})^2\right]}, \tag{21}$$

and

$$\partial_t\rho = \partial_x\left\{\frac{1}{[1-(M-1)\rho]^2}\partial_x\rho\right\} + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\partial_x\left[\sqrt{\frac{2\rho(1-M\rho)}{1-(M-1)\rho}}\eta\right]. \tag{22}$$

因此，SSMEP 的输运系数为：

$$D(\rho) = \frac{1}{[1-(M-1)\rho]^2} \text{ and } \sigma(\rho) = \frac{2\rho(1-M\rho)}{1-(M-1)\rho}. \tag{23}$$

代入$M = 1$，我们便得到 SSEP 的结果，对应于除了当前被占据的格点外没有其他排斥的情形；而$M = 2$ 则给出了 SSDEP 的结果。

下面我们梳理对称简单三重排斥过程（SSTEP）粗粒化中的关键步骤，该过程对应于 $M = 3$ 情形。对于 SSTEP，式（ $(i,\ i+1)$键上的右跳和左跳速率（13）改写为

$$r_i^+ = n_i(1-n_{i+1})(1-n_{i+2})(1-n_{i+3}) \tag{24a}$$
$$r_i^- = n_{i+1}(1-n_i)(1-n_{i-1})(1-n_{i-2}) \tag{24b}$$

这揭示了一种梯度结构： $(i,\ i+1)$键上的平均电流是一个离散梯度，这一点可通过写出$r^+{}_i - r^-{}_i = h_i(\boldsymbol{n}) - h_{i+1}(\boldsymbol{n})$得到

$$\begin{aligned} h_i(\boldsymbol{n}) = {} & n_i + n_{i-2}n_{i+1} + n_{i-1}n_{i+2} + n_{i-1}n_{i+1} - n_{i-2}n_{i-1}n_{i+1} - n_{i-1}n_in_{i+2} \\ & - n_{i-2}n_in_{i+1} - n_{i-1}n_{i+1}n_{i+2} - n_{i-1}n_in_{i+1} + n_{i-2}n_{i-1}n_in_{i+1} + n_{i-1}n_in_{i+1}n_{i+2}. \end{aligned} \tag{24c}$$

这种梯度结构使我们能够以类似于式（17b）的形式写出 SSTEP 的流体动力学作用量，其中 h 和 $r^\pm$ 分别由式（24c）和式（24）给出。为了计算局部

平衡 在（17b）中的平衡平均值计算中，我们使用已知的 SSTEP 局域平衡态 [55, 61] 用于 SST EP和 w ite

$$\langle h_i\rangle_{x,t} = \langle n_i\rangle_{x,t} + \langle n_{i-2}n_{i+1}\rangle_{x,t} + \langle n_{i-1}n_{i+2}\rangle_{x,t} = \frac{\rho(x,t)}{1-2\rho(x,t)} \tag{25a}$$

and

$$\left\langle r_i^+\right\rangle_{x,t} = \langle n_i\rangle_{x,t} - \langle n_i n_{i+3}\rangle_{x,t} = \frac{\rho(x,t)(1-3\rho(x,t))}{1-2\rho(x,t)} \tag{25b}$$

$$\left\langle r_i^-\right\rangle_{x,t} = \langle n_{i+1}\rangle_{x,t} - \langle n_{i-2}n_{i+1}\rangle_{x,t} = \frac{\rho(x,t)(1-3\rho(x,t))}{1-2\rho(x,t)} \tag{25c}$$

这里我们利用了以下事实：由于三格点排斥，（24）和（24c）中的其余项均为零。所得的作用量（21），其中 $M = 3$ 给出了与 SSTEP 相关的涨落流体力学。

对于 SSMEP，对微观占据变量与局域平衡测度进行平均时，关键步骤在于：唯一的非零贡献来自包含相隔恰好为 $(M-1)$ 个格点的占据变量乘积的项，并表示为 [55, 61]

$$\langle n_i\, n_{i+M}\rangle_{x,t} = \frac{\rho^2(x,t)}{1-(M-1)\rho(x,t)}\,. \tag{26}$$

分母考虑了体积排斥：格点 i 和 $i+M$ 仅当所有 $(M-1)$ 个中间格点均为空时，才能同时被占据。推导出（22）的其余计算很直接。

现在我们来做一个重要观察。设晶格间距为单位长度。那么，SSMEP 描述的是有效长度为 $M \equiv a$、以单位大小的离散步长跳跃的粒子。取 $M \gg 1$的极限后，我们发现（23）中的输运系数化简为

$$D(\rho) \simeq \frac{1}{(1-M\rho)^2} \text{ and } \sigma(\rho) \simeq 2\rho\,, \tag{27}$$

这与布朗硬杆气体的输运系数一致 [63–65]（见表 1）。这证实了我们的直觉：对扩展硬核粒子的晶格模型取适当的连续极限（大 M 极限），描述了有限长度布朗硬杆连续模型的大尺度动力学。

2.3 对称简单部分排斥过程

接下来我们考虑对称简单排斥过程的一种变体 [36, 53, 66, 67]：放宽了每个格点在任一时刻至多容纳一个粒子的硬核约束，使得每个格点最多可容纳 N 个粒子。粒子以与目标格点空位数成正比的速率跳向任一最近邻格点 [36, 53, 66, 67]。更准确地说，从格点 i 向格点 $i \pm 1$ 发生一次跳跃事件的速率为$n_i(N - n_{i\pm1})$，即

$$r_i^+ = n_i(N - n_{i+1}) \tag{28a}$$

$$r_i^- = n_{i+1}(N - n_i) \tag{28b}$$

我们将这一动力学称为对称简单部分排斥过程（SSPEP）。

与 SSDEP 类似，该模型中跨越键 $(i,i+1)$ 的平均电流也呈现出离散梯度结构，其局域 h函数为，

$$h_i(\boldsymbol{n}) = N n_i\,. \tag{28c}$$

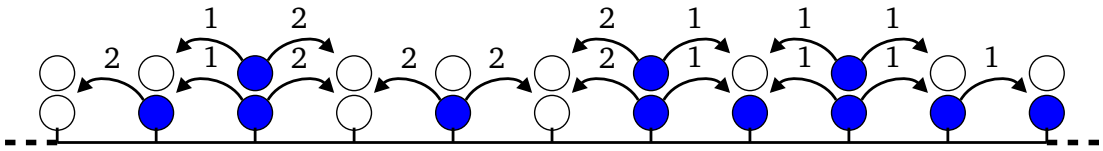


图 3：**SSPEP**：当每个格点的阈值占据数为 $N = 2$ 时，对称简单部分排斥过程动力学示意图。实心圆表示粒子，空心圆表示空位。箭头表示允许的最近邻跃迁，并标出各个粒子对应的跃迁率。

粗粒化同样采用路径积分方法，如第 2.1 节中对 SSDEP 所做的那样，唯一的变化在于跃迁率的平衡平均值。对于 SSPEP，我们使用已知的 [68,69] 局域平衡测度来计算

$$\langle h_i(\boldsymbol{n})\rangle_{x,t} = N\langle n_i\rangle_{x,t} = N\rho(x,t) \tag{29a}$$

and

$$\left\langle r^{+}\right\rangle_{x,t} = N\langle n_i\rangle_{x,t} - \langle n_i n_{i+1}\rangle_{x,t} = \rho(x,t)(N-\rho(x,t))\,, \tag{29b}$$

$$\left\langle r^{-}\right\rangle_{x,t} = N\langle n_{i+1}\rangle_{x,t} - \langle n_{i+1} n_i\rangle_{x,t} = \rho(x,t)(N-\rho(x,t))\,. \tag{29c}$$

由此得到流体动力学作用量（3b），进而得到涨落流体动力学方程（1），其输运系数为 $D(\rho) = N$ 和 $\sigma(\rho) = 2\rho(N-\rho)$（见表 1）。

该模型的另一种变体 [70] 是将粒子的跃迁率设为 1，不受目标格点空位数的影响；这相当于从格点 i 跃迁到格点 $i \pm 1$ 的速率为 $n_i\{1-[n_{i\pm1}(n_{i\pm1}-1)\ldots(n_{i\pm1}-N+1)]/N!\}$，并将排斥约束纳入其中。这种选择破坏了跃迁率的梯度结构 [70,71]，而梯度结构对于我们的粗粒化方法至关重要。

3 朗之万动力学：相互作用布朗粒子

现在考虑一个由 N 个布朗粒子组成的系统，它们在实数轴上运动，并通过对称两体势 $V(x-y)$ 相互作用。在本文讨论中，我们考虑短程势 [72–74]，其中 $V(x)$ 的衰减速度快于 $1/x^2$，从而避免平衡相变。过阻尼极限下，第 i 个粒子的随机动力学由朗之万方程给出

$$\dot{X}_i(\tau) = -\mu\sum_{j\neq i}\partial_{X_i}V\left(X_i(\tau)-X_j(\tau)\right) + \sqrt{2D_0}\zeta_i(\tau)\,, \tag{30}$$

其中，μ 表示粒子迁移率，D_0 是裸扩散系数，在热平衡时通过爱因斯坦–斯莫鲁霍夫斯基关系 $D_0 = \mu/\beta$ 与 μ 相关。噪声项 $\zeta_i(\tau)$ 是相互独立的高斯白噪声，其均值为零 $\langle\zeta_i(\tau)\rangle = 0$，协方差为单位协方差 $\left\langle\zeta_i(\tau)\zeta_{i'}(\tau')\right\rangle = \delta_{i,i'}\delta(\tau-\tau')$。

Dean-Kawasaki方程 [40–42] 为微观经验密度提供了精确的随机演化描述

$$\varrho(X,\tau) \equiv \sum_{i=1}^{N}\delta(X-X_i(\tau))\,. \tag{31}$$

其形式为连续性方程

$$\partial_\tau \varrho(X,\tau) = -\partial_X j(X,\tau), \tag{32a}$$

其中，流分解为确定性分量和涨落分量：前者描述平均输运，后者刻画底层布朗动力学产生的内禀噪声，$j = j_{\rm det} + j_{\rm fluc}$。确定性贡献来自由密度梯度引起的扩散通量，以及由成对作用力产生的相互作用驱动的漂移

$$j_{\rm det}(X,\tau) = -D_0\partial_X\varrho(X,\tau) - \mu\varrho(X,\tau)\int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}Y\,\partial_X V(X-Y)\varrho(Y,\tau), \tag{32b}$$

以及涨落分量

$$j_{\rm fluc}(X,\tau) = \sqrt{2D_0\varrho(X,\tau)}\xi(X,\tau), \tag{32c}$$

其中 $\xi(X,\ \tau)$ 是均值为零的高斯白噪声 $\langle\xi(X,\ \tau)\rangle\ = 0$ 且在时空中为δ相关，协方差为单位协方差 $\left\langle\xi(X,\ \tau)\xi(X',\ \tau')\right\rangle = \delta(X\ -X'\ )\delta(\tau-\tau')$。在写出（32b）时，我们遵循 Itô约定。

Dean-Kawasaki方程（32）的粗粒化描述是涨落流体力学方程（1），其扩散率为 $D(\rho) = \beta P'(\rho)$，线性迁移率为 $\sigma(\rho) = 2\rho$ （见表 1）。显然，在粗粒化过程中，（32b）中的相互作用项会使裸扩散率 D_0 重整化，这是简单地重标度坐标所无法实现的。接下来我们将展示如何系统地进行这种粗粒化，从而得到（1）。

我们采用与第2节所述晶格模型类似的方案。初始 $\varrho_{\rm ini}\equiv\varrho(X、\ 0)$ 与终态 $\varrho_{\rm fin}\equiv\varrho(X、\ \mathcal{T})$ 之间，遵循 Dean-Kawasaki 方程（32）的跃迁振幅可表示为路径积分 [44–47, 75, 76]

$$\Pr(\varrho_{\rm fin}|\varrho_{\rm ini}) = \int_{\varrho_{\rm ini}}^{\varrho_{\rm fin}} [\mathcal{D}\widehat{\varrho}][\mathcal{D}\varrho]\,{\rm e}^{-\int_0^{\mathcal{T}}{\rm d}\tau\left[\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}X(\widehat{\varrho}\partial_\tau\varrho)-\mathcal{H}(\widehat{\varrho},\varrho)\right]} \tag{33a}$$

其有效微观哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\widehat{\varrho},\varrho) = \int_{-\infty}^{\infty} {\rm d}X\,\partial_X\widehat{\varrho}\,(D_0\varrho\partial_X\widehat{\varrho} + j_{\rm det}). \tag{33b}$$

在过阻尼相互作用布朗系统中，动力学是扩散的，因此在较长时间 $\tau \gg \ell^2 \gg 1$ 后，长度小于 ℓ 的区域内的涨落会有效地达到局域平衡 [2, 3]。根据构造，长度 ℓ 远大于平衡关联长度。因此，$\varrho(X$ 的局部统计性质，$\tau)$，可近似为与平滑变化的粗粒化密度剖面相对应的局域平衡测度

$$\langle\varrho(X,\tau)\rangle \simeq \rho\left(\frac{X}{\ell}, \frac{\tau}{D_0\ell^2}\right). \tag{34}$$

与第2节一样，我们进一步假设响应场可以平滑变化

$$\widehat{\varrho}(X,\tau) \simeq \widehat{\rho}\left(\frac{X}{\ell}, \frac{\tau}{D_0\ell^2}\right). \tag{35}$$

在微观作用量（33a-33b）中，密度场唯一的非线性项来自确定性流 $j_{\rm det}$。至于 SSDEP，我们注意到 $j_{\rm det}$ 具有梯度结构 [2]，因为它可以表示为 Irving-Kirkwood张量的散度 [77]，

$$j_{\rm det} = -\partial_X\left[D_0\varrho(X,\tau) - \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}{\rm d}Y\,V'(Y)Y\int_0^1 {\rm d}\lambda\,\varrho(X-\lambda Y,\tau)\varrho(X+(1-\lambda)Y,\tau)\right]. \tag{36}$$

对于各向同性对势 [77]，这种梯度结构可推广至高维。这一结构（36）使得我们能够轻松地遵循第 2 节中概述的粗粒化过程。

对（33a）中的空间和时间进行重新缩放，令 $(X、\ \tau) \to (x、\ t) = \left(X/\ell,\ \tau/(D_0\ell^2)\right)$，我们可以写出粗粒化密度场的跃迁振幅

$$\Pr(\rho(x,T)|\rho(x,0)) = \int_{\rho(x,0)}^{\rho(x,T)} [\mathcal{D}\widehat{\rho}][\mathcal{D}\rho]\,\mathrm{e}^{-\ell\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}]}, \tag{37a}$$

其中我们记 $T = \mathcal{T}/\left(D_0\ell^2\right)$，作用量为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}] = \int_0^T \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Bigg\{ \widehat{\rho}\partial_t\rho - \partial_x^2\widehat{\rho}\Bigg[\rho - \frac{\beta}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Y \Bigg(V'(Y)Y \\ \times \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \left\langle \varrho(X-\lambda Y,\tau)\varrho(X+(1-\lambda)Y,\tau)\right\rangle_{x,t}\Bigg)\Bigg] - \left(\partial_x\widehat{\rho}\right)^2\rho\Bigg\}.\end{aligned} \tag{37b}$$

方程（37b）给出了均匀平衡系统在密度 $\rho^{(2)}$ 处、间隔为 Y 的二点关联函数，系统的密度为 $\rho(x,\ t)$，

$$\left\langle \varrho(X-\lambda Y,\tau)\varrho(X+(1-\lambda)Y,\tau)\right\rangle_{x,t} = \rho^{(2)}[\rho(x,t)](Y). \tag{38}$$

我们看到，流体动力学作用量（37b）可以用压力的平衡状态方程表示 [77]

$$\beta P(\rho) = \rho - \frac{\beta}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}Y\, Y\, V'(Y)\rho^{(2)}[\rho](Y)\,, \tag{39}$$

由此得到

$$\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}] = \int_0^T \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\widehat{\rho}\partial_t\rho + \beta P'(\rho)\partial_x\widehat{\rho}\partial_x\rho - \rho(\partial_x\widehat{\rho})^2\right]. \tag{40}$$

有两点需要说明。首先，通过比较相互作用布朗粒子的粗粒化分布的转移概率（37a）与任意扩散系统的转移概率（3），我们确立了压力（静态平衡观测量）与扩散率（动态非平衡观测量）之间的一般关系：$D(\rho) = \beta P'(\rho)$。其次，我们发现，无论二体相互作用的具体形式如何，相互作用布朗粒子的集体迁移率均为 $\sigma(\rho) = 2\rho$ 。此前已有研究基于涨落耗散关系对这些结果进行了论证 [19,20,39,42,78]。

与（37a）中的流体动力学作用量相对应的涨落流体动力学方程明确写为

$$\partial_t\rho = \partial_x\left(\beta P'(\rho)\partial_x\rho\right) + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\partial_x\left(\sqrt{2\rho}\eta\right), \tag{41}$$

其中 $\langle\eta(x,t)\rangle = 0$ 和 $\left\langle\eta(x,t)\eta(x',t')\right\rangle = \delta(x-x')\delta(t-t')$。对于长度为$a$、相互作用势为

$$V(r) = \begin{cases}\infty & \text{for } |r| < a\,,\\ 0 & \text{for } |r| \geq a\,,\end{cases} \tag{42}$$

该系统的热力学压力 $\beta P(\rho) = \rho/(1-a\rho)$ [79] 给出了表中报告的扩散率1。

微观模型	$\langle Q^2{}_T\rangle_c/\sqrt{T}$	$\langle X^2{}_T\rangle_c/\sqrt{T}$
对称简单双重排斥过程	$\frac{2\bar{\rho}(1-2\bar{\rho})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{2(1-2\bar{\rho})}{\sqrt{\pi}\bar{\rho}}$
对称简单三重排斥过程	$\frac{2\bar{\rho}(1-3\bar{\rho})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{2(1-3\bar{\rho})}{\sqrt{\pi}\bar{\rho}}$
对称简单多重排斥过程	$\frac{2\bar{\rho}(1-M\ \bar{\rho})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{2(1-M\ \bar{\rho})}{\sqrt{\pi}\bar{\rho}}$
布朗硬杆	$\frac{2\bar{\rho}(1-a\ \bar{\rho})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{2(1-\text{一个}\ \bar{\rho})}{\sqrt{\pi}\bar{\rho}}$
短程相互作用布朗粒子	$\frac{2\bar{\rho}}{\sqrt{\pi\beta P'(\bar{\rho})}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi\beta P'(\bar{\rho})}\bar{\rho}}$

表 2：无限直线上平均密度为 $\bar{\rho}$ 时，时间积分电流和标记粒子位移的方差。

4 涨落流体力学的数值验证

我们进行了三项独立测试，以数值验证本文所讨论模型的涨落流体力学描述。

第一项测试将不含噪声项的流体力学方程（1）的数值积分结果，与微观随机动力学模拟得到的平均密度演化进行比较。对于微观动力学，我们对晶格模型使用吉莱斯皮算法，而对于朗之万粒子，则在周期几何中对随机方程进行积分。流体力学方程采用标准的傅里叶伪谱法进行数值求解 [80], , 其中非线性项在实空间中使用2/3 去混叠规则 [80]进行计算。时间积分在傅里叶空间中采用标准的三阶龙格–库塔（RK3）方法，时间步长为 $\mathrm{d}t = 10^{-7}$。

我们的第二项数值测试验证了利用涨落流体动力学方程（1）预测的宏观观测量统计性质。我们考虑两个著名的观测量：时间积分电流 Q_T 和标记粒子的位置 X_T，它们在时长为 T 的时间段内测量。在初始密度剖面均匀的无限一维直线上，Q_T 是在时长 T 内测得的、穿过原点的净粒子通量，而 X_T 是粒子在时间 T 内的净位移。对于单列扩散系统，由于硬核约束，粒子始终保持其排序；其 Q_T 和 X_T 的前两个非平凡累积量已利用涨落流体力学描述（1）推导得出。对于平均密度均匀为 $\bar{\rho}$ 的系统，均值 $\langle Q_T\rangle$ 和 $\langle X_T\rangle$ 均为零，而它们的方差为 [19, 20, 37]

$$\left\langle Q_T^2\right\rangle_c \simeq \frac{\sigma(\bar{\rho})}{\sqrt{\pi D(\bar{\rho})}}\sqrt{T} \qquad \text{and} \qquad \left\langle X_T^2\right\rangle_c \simeq \frac{\sigma(\bar{\rho})}{\bar{\rho}^2\sqrt{\pi D(\bar{\rho})}}\sqrt{T}, \tag{43}$$

在较大的 T时。本文章所讨论模型的显式结果汇总于表2中。

通常无法获得 Q_T 和 X_T 四阶以上的高阶累积量的显式表达式 [81]。一个重要的例外是对称简单排斥过程，其完整的大偏差统计已被计算出来，因此可以全面验证涨落流体力学的预测 [11, 82, 83]。对于其他模型，例如 SSMEP 或一般的朗之万气体，目前尚无类似的大偏差结果。

对于对称简单部分排斥过程（SSPEP），其输运系数与对称简单排斥过程的输运系数之间仅相差一个简单的缩放因子，因此也可以显式确定该情形下的大偏差统计。因此，我们的第三项数值测试重点

在于使用稀有事件模拟方法验证 SSPEP 中Q_T 的大偏差统计。下面将介绍这些数值测试的细节。

4.1 对称简单多重排斥过程

我们考察 SSMEP 的两个模型——SSDEP（M = 2）和 SSTEP（M = 3）——以验证其流体力学。具体而言，我们将无噪声流体力学方程 (1) 的演化与周期晶格上系统尺寸为 L = 512 的微观蒙特卡洛模拟进行比较。初始条件为阶跃密度分布，系统两半的密度分别为 $\rho_a = 0.2$ 和 $\rho_b = 0.1$。在微观模拟中，我们测量平均占据数 $\langle n_i(t) \rangle$ 随时间的演化，并将其与通过式 (11) 定义的介观平均得到的粗粒化密度场 $\rho(x, t)$ 进行比较。如图 4a 和图 5a 所示，分别对于 SSDEP 和 SSTEP，取 $\ell = 64$（ℓ 是式 (11) 中的介观长度，且 $0 \ll \ell \ll L$。）时，微观模拟与无噪声流体力学符合良好。

接下来，为了研究时间积分电流的方差和示踪粒子位置，我们考虑无限几何情形。初始构型从稳态中采样：我们在密度 ρ下准备伯努利乘积测度，并施加长度约束，同时将指定的示踪粒子固定在原点 $x = 0$。电流Q_t 方差的数值结果见图 4b 和图 5b，分别对应 SSDEP 和 SSTEP；结果与表 2中汇总的理论预测高度吻合。我们还在图 4c 和图 5c 中对这两个模型的示踪粒子位置方差进行了数值验证。

4.2 具有WCA相互作用的布朗气体

为了验证连续模型的流体动力学方程（41），我们研究具有 Weeks-Chandler-Andersen（WCA）相互作用的布朗气体 [84],

$$V(r) = \begin{cases} 4\varepsilon\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right] + \varepsilon & \text{for } |r| < 2^{1/6}a \\ 0 & \text{for } |r| \geq 2^{1/6}a \end{cases} \tag{44}$$

其中 ε 表示排斥作用的强度，a 表示特征相互作用长度。压力的精确状态方程尚不清楚，但可以在低到中等密度下用维里展开近似。对于 For $\beta = 1$、$\epsilon = 1$ 和 $a = 1$，其形式为 [39, 85]

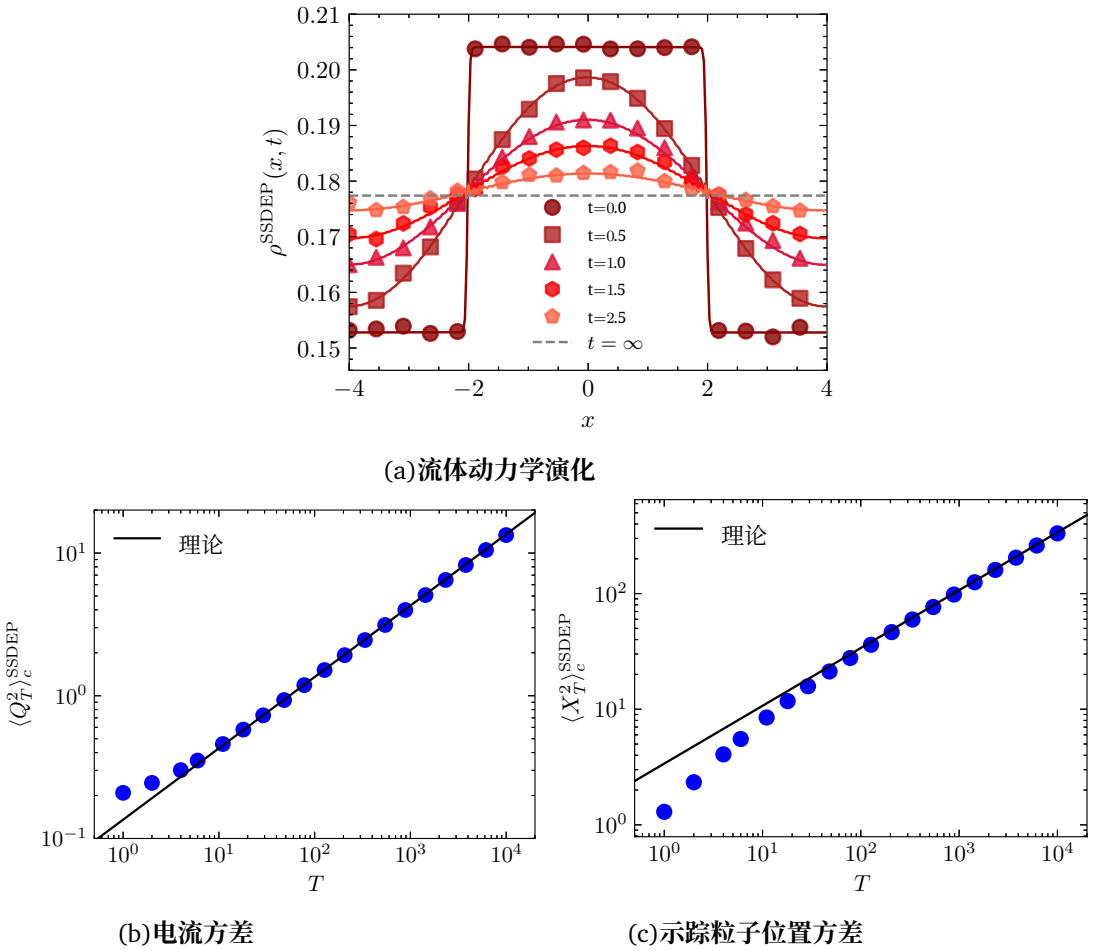
$$P(\rho) = \rho + 1.01561\rho^2 + 1.02977\rho^3, \tag{45}$$

因此，扩散率 $D(\rho) = \beta P'(\rho)$ 变为

$$D(\rho) = 1 + 2.03122\rho + 3.08931\rho^2. \tag{46}$$

使用这些输运系数，我们首先对照（1）和（30）中给出的微观动力学，并结合（44），对无噪声流体动力学方程进行数值验证。微观动力学采用欧拉–丸山格式积分，时间步长为 $dt = 10^{-4}$，系统位于长度为$L = 1200$的环上。初始构型为确定性阶跃分布，其中 $\rho_a = 0$为 .15，$\rho_b = 0$为 .1。粗粒化微观密度与流体动力学预测相符（介观长度为 $\ell = 150$），如图 6a所示。

我们还验证了时间积分电流和示踪粒子方差的理论表达式。为验证这些结果，我们模拟了长度为 $L = 5000$ 、全局密度为 $\rho = 0.2$ 的环，时间步长为 $dt = 10^{-4}$。初始构型取自稳态。在微观模拟中测得的电流和示踪粒子的长时间方差



(a)**流体动力学演化**

(b)**电流方差**

(c)**示踪粒子位置方差**

图 4：**对称简单双重排斥过程**：(a) 流体动力学密度的时间演化 $\rho(x,\ t)$，初始条件为阶跃分布 $\rho(x,\ 0)$。实线表示无噪声的（1）流体动力学演化，标记表示在大小为 $L\ =512$ 的环上对微观动力学进行的数值模拟。(b) 和 (c) 中，实线分别表示表 2 中给出的无限几何下电流方差和示踪粒子位置的理论结果，点表示数值模拟。参数：$\rho=0.1$，以及 10^6 次实现。

与理论预测高度吻合，结果分别汇总于表2 并展示于图6b和图6c中。

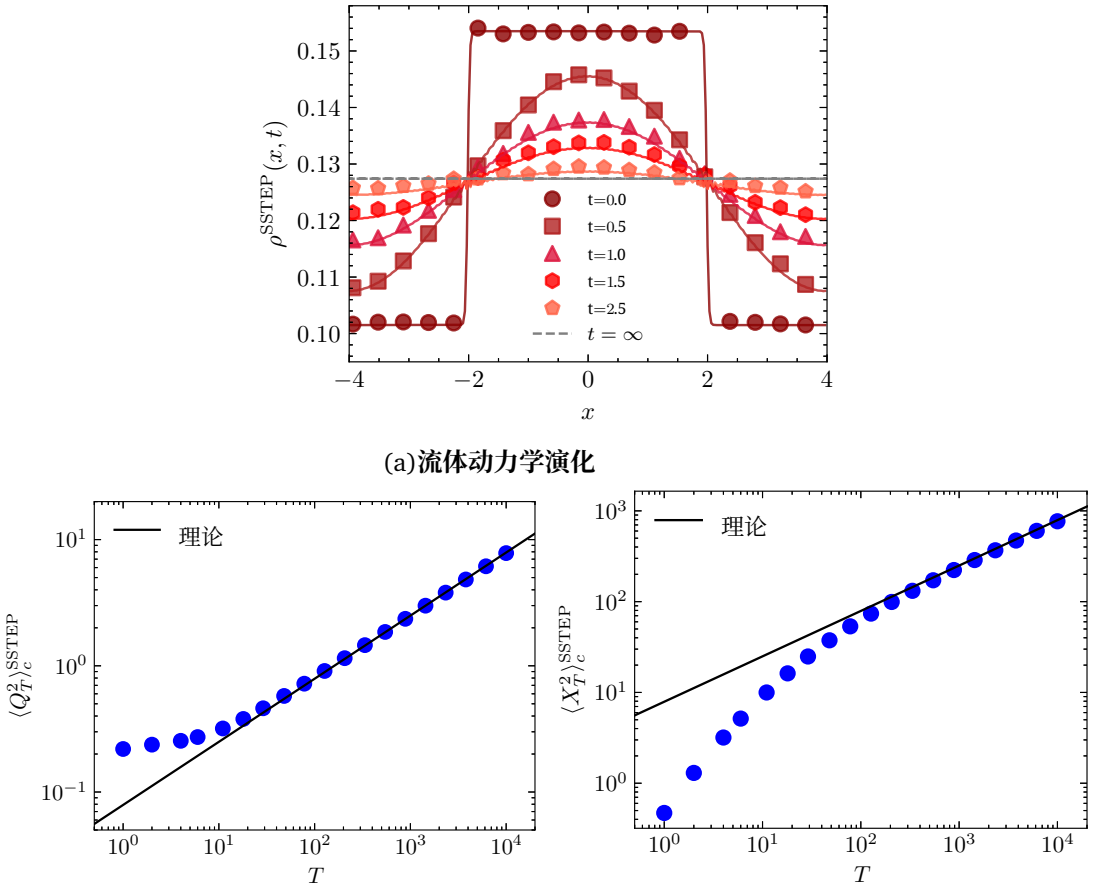
4.3 对称简单部分排斥过程

利用 SSPEP 与 SSEP 的输运系数之间的关系，我们证明，对于前者，时间积分电流的标度累积量生成函数

$$\mu(\lambda,\rho_a,\rho_b)=\lim_{T\to\infty}\frac{\ln\left\langle \mathrm{e}^{\lambda Q_T}\right\rangle}{\sqrt{T}}, \tag{47}$$

由一个简单的关系给出

$$\mu_{\mathrm{SSPEP}}(\lambda,\rho_a,\rho_b)=N^{3/2}\mu_{\mathrm{SSEP}}\left(\lambda,\frac{\rho_a}{N},\frac{\rho_b}{N}\right), \tag{48a}$$



(a)**流体动力学演化**

(b)**电流方差**

(c)**示踪粒子位置方差**

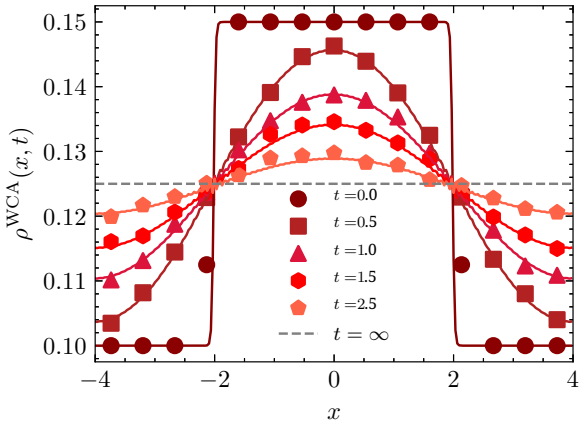
图 5：**对称简单三重排斥过程**：（a）流体动力学密度 $\rho(x、t)$ 从阶跃分布 $\rho(x、0)$开始演化。实线表示（1）的无噪声流体动力学演化，标记表示在大小为 $L=512$ 的环上对微观动力学进行的数值模拟。（b）和（c）中，实线分别表示表 2 中给出的无限几何下电流方差和示踪粒子位置方差的理论结果，而数据点表示数值模拟。参数：$\rho=0.1$，以及 10^6 次实现。

对称简单排斥过程中的标度累积量生成函数 [82,86] 给出为

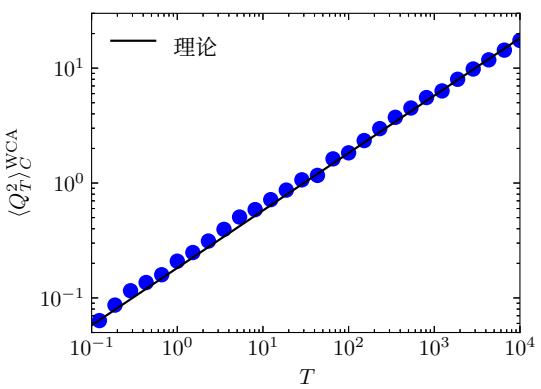
$$\mu_{\mathrm{SSEP}}(\lambda,\rho_a,\rho_b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\ln\left\{1+\left[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)\rho_a(1-\rho_b)+(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)\rho_b(1-\rho_a)\right]\mathrm{e}^{-k^2}\right\}, \tag{48b}$$

其中 N 是 SSPEP 中每个格点的最大占据数（见图 3 中 $N=2$的情形）。类似地，边界驱动的 SSPEP 在非平衡稳态下的密度剖面大偏差可以与 SSEP 的相应结果联系起来 [23,36]。鉴于 SSPEP 的微观动力学无法通过 Bethe Ansatz 求解，这些结果仍十分引人注目。然而，其涨落流体力学描述依然易于处理，凸显了流体力学框架的多功能性与稳健性。

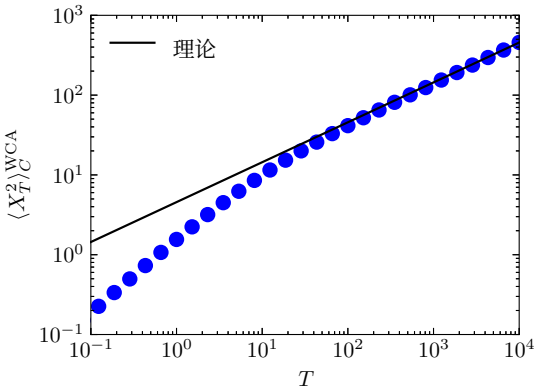
我们通过基于连续时间克隆算法 [87–89] 的稀有事件数值模拟，验证了式（48a）给出的结果。为获得无限晶格上 $N=2$ 个 SSPEP 的流的缩放累积量生成函数，我们在长度为 $2L+1$ 的有限晶格上进行了数值模拟，并在 $-L$ 处施加



(a)**流体动力学演化**



(b)**电流方差**



(c)**示踪粒子位置方差**

图 6：具有 WCA 相互作用的布朗气体：(a) 从阶跃分布 $\rho(\mathrm{x},0)$ 出发时，流体力学密度 $\rho(\mathrm{x},\mathrm{t})$ 的时间演化。实线表示式 (1) 的无噪声流体力学演化，标记表示在大小为 $\mathrm{L}=1200$ 的环上，依据式 (30) 和 (44) 对微观动力学进行数值模拟所得的结果，并对 4000 次实现取平均。(b) 和 (c) 中，实线分别表示表 2 中给出的电流方差和示踪粒子位置的理论结果，点表示针对 $\rho=0.2$、$\mathrm{L}=5000$ 的数值模拟结果，共有 1212 次实现。其余模拟参数 (a)-(c)：$\mu=1, \mathrm{D}_0=1, \beta=1, \epsilon=1, \mathrm{a}=1$。

+L处设置反射边界条件。初始时，晶格上原点左侧和右侧的粒子密度分别为 ρ_a 和 ρ_b。在时长为 $T \ll L^2$,的时间段内测量穿过原点的净电流，以确保反射边界的影响可以忽略不计。

在有限晶格上得到流的标度累积量生成函数，其中$L=75$ 截至测量时间 $T=500$，采用克隆群体 $N_c=40000$，并对 10 个独立样本取平均。图 7成功地将这些结果与以下参数范围内的理论预期进行了比较：$\rho_a=\rho_b=1/2$，参数范围为 λ。

5 结论

在这篇文章中，我们为一类具有排斥相互作用的随机晶格气体模型提出了一种系统的涨落流体力学描述粗粒化方法。

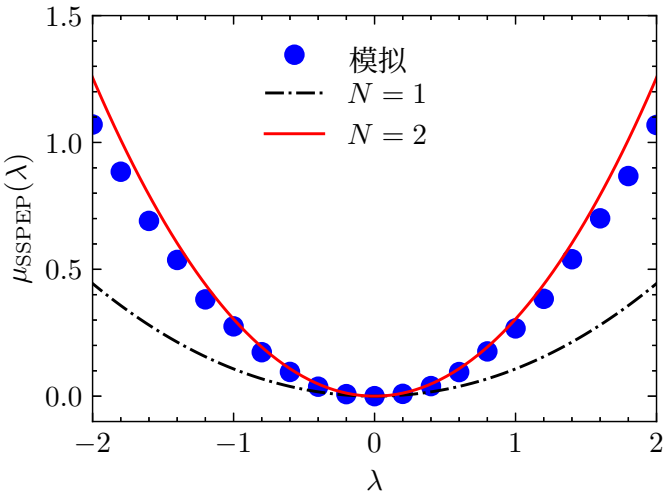


图 7： **SSPEP 中流的标度累积量生成函数，其中**$N = 2$：红色实线表示在48a式中 $\rho_{a(b)} = 0.5$ 时的理论结果，蓝色圆圈表示通过克隆算法获得的相应模拟结果。在 $-1 \le \lambda \le 1$范围内，两者吻合良好。在较大的 λ 附近，理论结果与模拟结果存在明显偏差，这是由有限尺寸效应导致的。作为比较，黑色虚线表示对称简单排斥过程（$N = 1$） [82, 86] 中流的标度累积量生成函数。

我们的方法基于对微观随机动力学的路径积分表述，并在此基础上进行粗粒化，从而得到粗粒化密度场的 Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis (MSRJD) 路径积分。相应的随机微分方程描述了晶格气体的大尺度演化，即涨落流体力学。在这种粗粒化描述中，底层动力学的所有微观细节都仅通过两个输运系数体现：扩散率和迁移率。

在文章的后半部分，我们将粗粒化方法扩展到 Dean–Kawasaki方程所描述的连续情形，其中布朗粒子通过短程二体相互作用势相互作用。粗粒化过程恢复了此前主要基于现象学论证提出的涨落流体力学，并为宏观涨落理论奠定了基础。我们的分析表明，Dean-Kawasaki方程中的相互作用势如何重整化裸扩散率，并将其表示为热力学压力的函数；与此同时，迁移率仍是粗粒化密度的线性函数。

需要指出的是，也可以直接在随机偏微分方程层面对 Dean-Kawasaki方程进行粗粒化。不过，路径积分方法为晶格和非晶格动力学提供了一种统一的方法论。

在这篇文章 中，我们有意未讨论外势的作用。对于$U(x) = u(x/\ell)$这种形式的平滑变化势，其影响可以纳入线性响应理论，从而得到涨落流体力学

$$\partial_t \rho = \partial_x\big(D(\rho)\,\partial_x \rho + \sigma(\rho)\,u'(x)\big) + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\,\partial_x\Big(\sqrt{\sigma(\rho)}\,\eta\Big). \tag{49}$$

相比之下，快速变化的外势预计会使裸输运系数发生重整化。参见 [90, 91] 中的类似结果。在我们的框架内明确构造相应的涨落流体力学，仍是未来工作中一个有趣的方向。

为更大类的动力学（例如弹道输运 [32, 92] 或可积动力学 [93, 94]）建立定量的涨落流体力学仍是一项挑战。本文 文章 中介绍的粗粒化方案或许有助于实现这一目标。对于活性动力学而言，其在短尺度上表现为弹道输运，而在更大尺度上表现为扩散的；我们的方法证明可用于为标准活性物质模型 [5,95]（例如活性布朗粒子（ABP） [96] 和活性奥恩斯坦-乌伦贝克粒子（AOUP） [97]）构建自下而上的涨落流体力学。详细讨论将另文呈现。

我们的粗粒化方法在很大程度上依赖于微观尺度下粒子流的梯度结构 [54]。对于高维中的梯度动力学，我们的方法可以直接推广。一个自然的问题是，能否将我们的方法推广到非梯度模型 [70,98,99], ，尤其是能否恢复 Spohn 和 Varadhan 提出的变分公式 [2, 71, 100, 101] 来求扩散率。我们强调，在我们的粗粒化方法中，即使没有梯度结构，仍然可以计算迁移率（见附录A）。

致谢

我们感谢 Bernard Derrida 在本项目进行过程中与我们进行了多次宝贵的讨论，尤其是他提出了采用M格点排斥过程研究硬杆问题的想法。

经费信息 SS、SJ 和 TS 感谢印度政府原子能部通过项目识别编号 RTI 4002 提供的经费支持。SS 衷心感谢 Infosys–TIFR Leading Edge 旅行资助，为其参加 StatPhys29 会议及卫星会议 NESP-2025 期间提供经费支持；本研究的部分工作正是在会议期间完成的。TS 感谢法国国家科学研究中心（CNRS）通过名为“非平衡系统中的经典与量子动力学”的国际研究项目（IRP）提供支持。TADP 感谢塔塔基础研究院孟买分院接待访问，为本项目的启动提供了帮助。

A 粗粒化的进一步细节

这里，我们详细讨论针对扩散型晶格气体的涨落流体力学方法，旨在阐明正文第2节所采取的各个步骤。我们特别强调，响应场可以视为平滑场，而局域平衡测度则是大数定律的结果。

我们沿用第2节中的记号。我们将格点i 处的占据数记为n_i。由于粒子守恒，我们将微观连续性方程写作$n_i(\tau+\mathrm{d}\tau)-n_i(\tau)=Y_i(\tau)-Y_{i+1}(\tau)$ 其中

$$Y_i(\tau)=\begin{cases}+1, & \text{with prob. } r_i^+(\tau)\mathrm{d}\tau\,,\\ -1, & \text{with prob. } r_i^-(\tau)\mathrm{d}\tau\,,\\ 0, & \text{with prob. } 1-r_i^+(\tau)\mathrm{d}\tau-r_i^-(\tau)\mathrm{d}\tau\,,\end{cases} \tag{A.1}$$

其中 $r^{\pm}{}_i(\tau)$ 是时刻 τ处占据数的局域函数，与前文讨论的 SSDEP（13）、SSTEP（24）和 SSPEP（28）中的情况相同。我们引入一个宏观长度尺度 ℓ和一个介观粗粒化长度 Λ （最终令 $\ell\to\infty$, $\Lambda\to\infty$ 且 $\ell/\Lambda\to\infty$）。我们

将粗粒化密度场定义为

$$\rho(x,\tau)=\sum_j K_\Lambda(j)\,n_{i+j}(\tau)\quad;\quad i=\ell x\,,$$

其中核 K_Λ 在尺度 $O(\Lambda)$上非零，并且满足

$$\sum_j K_\Lambda(j)=1\,.$$

在下文中，我们取 $x\in[0,1]$、$\mathrm{d}x=1/\ell$，并采用以下记号

$$\sum_x \mathrm{d}x f(x)=\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{\ell}f\left(\frac{i}{\ell}\right).$$

占据数集合 $\{n_i\}$ 的动力学具有马尔可夫性。这里我们证明，在大尺度上，粗粒化场 $\rho(x,\tau)$ 的动力学也变为马尔可夫性。为此，我们引入

$$\Delta_x=\frac{\rho(x,\tau+d\tau)-\rho(x,\tau)}{\mathrm{d}\tau},$$

并计算在时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 已知时刻 τ的占据数时，时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 粗粒化密度场的条件概率 $\mathcal{P}(\{\Delta_x\}|\{n_i(\tau)\})$。我们用记号 $\langle\ldots\rangle_0$表示对时刻 τ初始态取平均，并记 $\bar\rho(x)\equiv\langle n_{\ell x}(t)\rangle_0$。我们假设函数 $\bar\rho(x)$ 在量级为 $O(1)$的尺度上平滑变化，这意味着平均密度在量级为 $O(\ell)$的尺度上变化。我们进一步假设，初始态中的关联长度 ξ相较于介观尺度较小，即 $\xi\ll\Lambda$。由此，根据大数定律可知，在初始态中，

$$\rho(x,\tau)\simeq\bar\rho(x),\tag{A.2}$$

忽略按 $\Lambda^{-1/2}$ 缩放的小修正。我们进一步假设初始态处于局域平衡，即对于占据数的任意局域函数，初始态平均满足

$$\langle f(n_{\ell x})\rangle_0=\langle f(n)\rangle^{\mathrm{eq}}_{\bar\rho(x)}$$

其中 $\langle\ldots\rangle^{\mathrm{eq}}_{\bar\rho(x)}$表示均匀系统中平均密度为$\bar\rho(x)$时的稳态平均。

为了构造概率 $\mathcal{P}(\{\Delta_x\}|\{n_i(\tau)\})$，我们遵循 [21, 35, 48, 49] 以及第2节中概述的步骤。我们得到：

$$\mathcal{P}(\{\Delta_x\}|\{n_i(\tau)\})=\int\prod_x\frac{\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau}{2\pi}\mathrm{d}\widehat\rho_x\exp\left(i\,\mathrm{d}\tau\,\ell\sum_x\mathrm{d}x\,\widehat\rho_x\Delta_x\right)\left\langle\exp\left(-i\ell\sum_x\mathrm{d}x\,\widehat\rho_x\sum_j K_\Lambda(j)\left[Y_{\ell x+j}(\tau)-Y_{\ell x+j+1}(\tau)\right]\right)\right\rangle.$$

现在我们进行分部求和，并忽略边界项，得到

$$-i\ell\sum_x\mathrm{d}x\,\widehat\rho_x\sum_j K_\Lambda(j)\left[Y_{\ell x+j}(\tau)-Y_{\ell x+j+1}(\tau)\right]=-i\sum_x\mathrm{d}x\,\partial_x\widehat\rho\sum_j K_\Lambda(j)Y_{\ell x+j}(\tau),$$

采用如下记号

$$\partial_x\widehat\rho=\ell\left(\widehat\rho_{x+1/\ell}-\widehat\rho_x\right).$$

利用（A.1），我们可以对变量 $Y_i(\tau)$ 进行平均，并得到关于 d 的一阶结果τ

$$\begin{aligned}&\left\langle \exp\left(-i\ell\sum_x \mathrm{d}x\widehat{\rho}_x\sum_j K_\Lambda(j)\left[Y_{\ell x+j}(\tau)-Y_{\ell x+j+1}(\tau)\right]\right)\right\rangle\\&=\exp\left(\mathrm{d}\tau\sum_k r_k^+(\tau)\left[\exp\left(-i\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\,K_\Lambda(k-\ell x)\right)-1\right]\right.\\&\qquad\left.+\mathrm{d}\tau\sum_k r_k^-(\tau)\left[\exp\left(i\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\,K_\Lambda(k-\ell x)\right)-1\right]\right),\end{aligned}$$

现在注意到，内部指数函数中的求和按 $O(\ell^{-1})$ 缩放。事实上，核$K_\Lambda(k-\ell x)$ 将关于 x 的求和限制在运行于 $O(\Lambda)$ 个项之上，而核本身的阶为 $O(\Lambda^{-1})$。因此，$\mathrm{d}x=O(\ell^{-1})$ 确定了这些求和的尺度，我们可以将内部指数函数展开到 $O(\ell^{-2})$ 阶。再结合关于 k 的求和，这意味着将作用量展开到 $O(\mathrm{d}\tau\ell^{-1})$ 阶；在对时间 $\tau=\ell^2 t$ 进行扩散重标度后，该阶数变为 $O(\ell)$。到此阶为止，我们得到

$$\begin{aligned}&\left\langle \exp\left(-i\ell\sum_x \mathrm{d}x\widehat{\rho}_x\sum_j K_\Lambda(j)\left[Y_{\ell x+j}(\tau)-Y_{\ell x+j+1}(\tau)\right]\right)\right\rangle\\&=\exp\left(-i\mathrm{d}t\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\sum_k K_\Lambda(k)\left(r^+_{\ell x+k}(\tau)-r^-_{\ell x+k}(\tau)\right)\right)\\&\quad\exp\left(-\mathrm{d}\tau\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\sum_k K_\Lambda(k)\left[\sum_{x'}\mathrm{d}x' K_\Lambda(k+\ell(x-x'))\,\partial_{x'}\widehat{\rho}\right]\frac{r^+_{\ell x+k}(\tau)+r^-_{\ell x+k}(\tau)}{2}\right).\end{aligned}\tag{A.3}$$

我们首先讨论第二项，该项关于响应场是二次的。根据上述幂次计数论证，我们只需考虑其关于 ℓ 的最低阶，这得到

$$\sum_{x'}\mathrm{d}x' K_\Lambda(k+\ell(x-x'))\,\partial_{x'}\widehat{\rho}=\frac{1}{\ell}\sum_{k'}K_\Lambda(k')\partial_x\widehat{\rho}\left(x+k/\ell-k'/\ell\right)\simeq\frac{1}{\ell}\partial_x\widehat{\rho},$$

因为 k 和 k' 都是 Λ 阶。因此我们得到

$$\begin{aligned}&-\mathrm{d}t\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\sum_k K_\Lambda(k)\left[\sum_{x'}\mathrm{d}x' K_\Lambda(k+\ell(x-x'))\,\partial_{x'}\widehat{\rho}\right]\frac{r^+_{\ell x+k}(\tau)+r^-_{\ell x+k}(\tau)}{2}\\&\simeq-\frac{\mathrm{d}\tau}{\ell}\sum_x \mathrm{d}x\,(\partial_x\widehat{\rho})^2\sum_k K_\Lambda(k)\frac{r^+_{\ell x+k}(\tau)+r^-_{\ell x+k}(\tau)}{2}.\end{aligned}$$

与（A.2）中一样，我们可以利用大数定律和平衡假设，在流体力学极限的最低阶上得到

$$\sum_k K_\Lambda(k)\frac{r^+_{\ell x+k}(\tau)+r^-_{\ell x+k}(\tau)}{2}\simeq\left\langle\frac{r^++r^-}{2}\right\rangle^{\mathrm{eq}}_{\rho(x,\tau)}.$$

这确定了涨落流体力学中的噪声振幅。推导确定性部分则更为微妙，需要对（A.3）中响应场的线性项进行次领先阶分析，因为这些项形式上属于 $O(\ell^{-1})$ 阶。一个重要的简化是，

然而，对于梯度系统，存在一个关于占据数的函数h_i，使得平均电流可以写成离散梯度，

$$r^+_{\ell x+k}(\tau)-r^-_{\ell x+k}(\tau)=h_{\ell x+k+1}(\tau)-h_{\ell x+k}(\tau),$$

正如本文所研究的那样。随后，可以再进行一次分部求和

$$\begin{aligned}&-i\mathrm{d}t\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x\widehat{\rho}\sum_k K_\Lambda(k)\left(r^+_{\ell x+k}(\tau)-r^-_{\ell x+k}(\tau)\right)\\ =&i\mathrm{d}t\sum_x \mathrm{d}x\sum_k K_\Lambda(k)\left(\partial_x\widehat{\rho}(x+1/\ell)-\partial_x\widehat{\rho}\right)h_{\ell x+k}(\tau)\\ =&\frac{i\mathrm{d}t}{\ell}\sum_x \mathrm{d}x\,\partial_x^2\widehat{\rho}\,\langle h\rangle^{\mathrm{eq}}_{\rho(x,\tau)}\end{aligned}$$

其中最后一行是利用大数定律和局部平衡假设得到的。在所考虑的阶次下，$\rho(x、\tau+\mathrm{d}\tau)$与$\rho(x、\tau)$之间的转移概率因此仅依赖于$\rho(x、\tau)$，而不依赖于初始态的更精细细节。若假设局部平衡假设在时间演化过程中得以保持，这意味着粗粒化密度场的动力学实际上具有马尔可夫性。因此，对时间进行扩散重标度后，我们得到路径积分表述

$$\mathcal{P}(\rho(x,T)|\rho(x,0)=\int_{\rho(x,0)}^{\rho(x,T)}[\mathcal{D}\rho][\mathcal{D}\widehat{\rho}][\mathcal{D}\rho]\,\mathrm{e}^{-\ell\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}]}$$

其作用量为

$$\mathcal{S}[\rho,\widehat{\rho}]=\int_0^T \mathrm{d}t\int \mathrm{d}x\left[\widehat{\rho}\,\partial_t\rho+\partial_x\widehat{\rho}\,\partial_x\langle h\rangle^{\mathrm{eq}}_\rho-(\partial_x\widehat{\rho})^2\left\langle\frac{r^++r^-}{2}\right\rangle^{\mathrm{eq}}_\rho\right].$$

与（3）比较可知

$$\partial_x\langle h\rangle^{\mathrm{eq}}_\rho=D(\rho)\partial_x\rho\ \text{ and }\ \left\langle\frac{r^++r^-}{2}\right\rangle^{\mathrm{eq}}_\rho=\frac{\sigma(\rho)}{2}.$$

参考文献

[1] E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevskii，《统计物理学》第二部分：凝聚态理论，《朗道-栗弗席兹理论物理学教程》第 9 卷，Butterworth-Heinemann，ISBN 978-0-08-050350-9，doi:10.1016/C2009-0-24308-X（1980年）。[2] H. Spohn，《相互作用粒子的大尺度动力学》，施普林格出版社（柏林、海德堡），第 1 版，doi:10.1007/978-3-642-84371-6（1991年）。[3] C. Kipnis 和 C. Landim，《相互作用粒子系统的标度极限》，施普林格出版社（柏林、海德堡），第 1 版，doi:10.1007/978-3-662-03752-2（1999年）。[4] J. M. O. de Zárate 和 J. V. Sengers，《流体及流体混合物中的流体动力学涨落》，爱思唯尔科学出版社，ISBN 978-0-444-51515-5，doi:10.1016/B978-0-444-51515- 5.X5000-5（2006年）。[5] M. C. Marchetti、J. F. Joanny、S. Ramaswamy、T. B. Liverpool、J. Prost、M. Rao 和 R. A. Simha，软活性物质的流体动力学，《现代物理评论》85，1143（2013年），doi:10.1103/RevModPhys.85.1143。

[6] A. Gromov、A. Lucas 和 R. M. Nandkishore，分形子流体力学，《Physical Review Research》2，033124（2020年），doi:10.1103/PhysRevResearch.2.033124。[7]J. F. Wienand、S. Karch、A. Impertro、C. Schweizer、E. McCulloch、R. Vasseur、S. Gopalakrishnan、M. Aidelsburger 和 I. Bloch，混沌量子系统中涨落流体力学的涌现，《Nature Physics》1，031080（2024年），doi:10.1038/s41567- 024-02611-z。[8]B. Doyon、S. Gopalakrishnan、F. Møller、J. Schmiedmayer 和 R. Vasseur，广义流体力学：一种观点，《Physical Review X》15，010501（2025年），doi:10.1103/PhysRevX.15.010501。[9] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim，不可逆过程的非平衡稳态中的涨落，《物理评论快报》87，040601（2001年），doi:10.1103/PhysRevLett.87.040601。[10] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim，非平衡稳态的宏观涨落理论，《统计物理学杂志》107，635–675（2002年），doi:10.1023/A:1014525911391。[11] B. Derrida，非平衡稳态：密度和流的涨落及大偏差，《统计力学杂志》2007，P07023（2007年），doi:10.1088/1742-5468/2007/07/P07023。[12] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim，宏观涨落理论，《现代物理评论》87，593（2015年），doi:10.1103/RevModPhys.87.593。[13] P. L. Garrido、J. L. Lebowitz、C. Maes 和 H. Spohn，守恒动力学中的长程关联，《物理评论》A 42，1954（1990年），doi:10.1103/PhysRevA.42.1954。[14] T. Bodineau、B. Derrida、V. Lecomte 和 F. van Wijland，非平衡扩散系统中的长程关联与相变，《统计物理学杂志》133，1013–1031（2008年），doi:10.1007/s10955-008-9647-3。[15] L. Bertini、A. De Sole、D. Gabrielli、G. Jona-Lasinio 和 C. Landim，迈向非平衡热力学：对驱动扩散系统的自洽宏观描述，《统计物理学杂志》135，857–872（2009年），doi:10.1088/1742-5468/2010/11/L11001。[16] P. L. Krapivsky、K. Mallick 和 T. Sadhu，单列扩散的动力学性质，《统计力学杂志》2015，P09007（2015年），doi:10.1088/1742-5468/2015/09/P09007。[17] T. Sadhu 和 B. Derrida，单列扩散中示踪粒子位置的大偏差函数，《统计力学杂志》2015，P09008（2015年），doi:10.1088/1742-5468/2015/09/P09008。[18]T. Sadhu 和 B. Derrida，非平衡扩散系统中的密度关联与流关联，《统计力学杂志》2016，113202（2016年），doi:10.1088/1742-5468/2016/11/113202.[19] P. L. Krapivsky、K. Mallick 和 T. Sadhu，单列扩散中的大偏差，《物理评论快报》113，078101（2014年），doi:10.1103/PhysRevLett.113.078101。[20] P. L. Krapivsky、K. Mallick 和 T. Sadhu，单列扩散中的标记粒子，《统计物理学杂志》160，885–925（2015年），doi:10.1007/s10955-015-1291-0。[21] S. Saha 和 T. Sadhu，具有慢边界的对称简单排斥过程中的大偏差：流体力学视角，SciPost Phys. 17，033（2024年），doi:10.21468/SciPostPhys.17.2.033。

[22] K. Sharma、S. Saha、S. Jangid 和 T. Sadhu，《半无限直线上的对称简单排斥过程以及带有慢键的无限直线上的电流大偏差》，doi:10.48550/arXiv.2405.00654，arXiv:2405.00654v3（2025年）。[23] S. Saha 和 T. Sadhu，《边界驱动扩散系统非平衡稳态中的密度大偏差》，doi:10.48550/arXiv.2501.03164，arXiv:2501.03164（2025年）。[24]T. Bodineau 和 B. Derrida，《非平衡扩散系统中的电流分布与相变》，《物理评论E》72，066110（2005年），doi:10.1103/PhysRevE.72.066110。[25]G. Bunin、Y. Kafri 和 D. Podolsky，《边界驱动扩散系统中的不可微大偏差泛函》，《统计力学杂志》2012，L10001（2012年），doi:10.1088/1742-5468/2012/10/L10001。[26] G. Bunin、Y. Kafri 和 D. Podolsky，《边界驱动扩散系统中的尖点奇异性》，《统计物理学杂志》152，112–135（2013年），doi:10.1007/s10955-013-0752-6。[27] B. Derrida 和 A. Gerschenfeld，《具有阶跃初始密度分布的一维扩散系统中的电流涨落》，《统计物理学杂志》137，978–1000（2009年），doi:10.1007/s10955-009-9830-1。[28] B. Derrida，《非平衡系统的微观方法与宏观方法》，《统计力学杂志》2011，P01030（2011年），doi:10.1088/1742-5468/2011/01/P01030。[29] A. Miron、J. Cividini、A. Kundu 和 D.Mukamel，《硬粒子气体中涨落流体力学的推导及从扩散输运到反常输运的交叉》，《物理评论E》99，012124（2019年），doi:10.1103/PhysRevE.99.012124。[30] P. Gaspard，《不可逆现象的统计力学》，剑桥大学出版社，剑桥，doi:10.1017/9781108563055（2022年）。[31] R. Zwanzig，《非平衡统计力学》，牛津大学出版社，纽约，doi:10.1093/oso/9780195140187.001.0001（2001年）。[32] H. Spohn，《非谐链的非线性涨落流体力学》，《统计物理学杂志》154，1191–1227（2014年），doi:10.1007/s10955-014-0933-y。[33]S. P. Das 和 A. Yoshimori，《描述流体中粒子微观运动的方程的粗粒化形式》，《物理评论E》88，043008（2013年），doi:10.1103/PhysRevE.88.043008。[34] M. A. Durán-Olivencia、P. Yatsyshin、B. D. Goddard 和 S. Kalliadasis，《涨落动态密度泛函理论的一般框架》，New J. Phys. 19，123022（2017年），doi:10.1088/1367-2630/aa9041。[35] A. Lefèvre 和 G. Biroli，《相互作用粒子系统的动力学：随机过程与场论》，《统计力学杂志》2007，P07024（2007年），doi:10.1088/1742-5468/2007/07/P07024。[36] J. Tailleur、J. Kurchan 和 V. Lecomte，《将非平衡映射为一维输运模型中的平衡》，《物理学杂志A：数学与理论》41，505001（2008年），doi:10.1088/1751-8113/41/50/505001。

[37] P. L. Krapivsky 和 B. Meerson，《非定常扩散格气中的电流涨落》，《物理评论E》86，031106（2012年），doi:10.1103/PhysRevE.86.031106。[38] P. C. Hohenberg 和 B. I. Halperin，《动态临界现象理论》，《现代物理评论》49，435（1977年），doi:10.1103/RevModPhys.49.435。[39] A. Grabsch、D. Venturelli 和 O. Bénichou，《具有一般相互作用的扩散系统中的精确大尺度关联》，物理评论快报135，137102（2025年），doi:10.1103/gwdh- 3vqm。[40] K. Kawasaki，《过冷液体和致密胶体悬浮液中慢动力学的随机模型》，Physica A：统计力学及其应用208，35–64（1994年），doi:10.1016/0378- 4371(94)90533-9。[41] D. S. Dean，《相互作用朗之万过程系统的密度朗之万方程》，J. Phys. A: Math. Gen. 29，L613（1996年），doi:10.1088/0305-4470/29/24/001。[42] P. Illien，《Dean-Kawasaki方程与随机密度泛函理论》，物理学进展报告88，086601（2025年），doi:10.1088/1361-6633/adee2e。[43] T. A. de Pirey、L. F. Cugliandolo、V. Lecomte 和 F. van Wijland，《路径积分与随机微积分》，物理学进展71，1–85（2022年），doi:10.1080/00018732.2023.2199229。[44] P. C. Martin、E. D. Siggia 和 H. A. Rose，《经典系统的统计动力学》，《物理评论A》8，423（1973年），doi:10.1103/PhysRevA.8.423。[45]H. K. Janssen，《关于经典场动力学的拉格朗日量及动态临界性质的重整化群计算》，Z. Physik B 23，377–380（1976年），doi:10.1007/BF01316547。[46]C. De Dominicis，《场论重整化技术与临界现象动力学》，物理学杂志专题37，C1（1976年），doi:10.1051/jphyscol:1976138。[47] C. De Dominicis 和 L. Peliti，《T_c以上的场论重整化与临界动力学：氦、反铁磁体和液气系统》，《物理评论B》18，353（1978年），doi:10.1103/PhysRevB.18.353。[48]R. Mukherjee、S. Saha、T. Sadhu、A. Dhar 和 S. Sabhapandit，《硬核活性格气的流体力学》，《物理评论E》111，024128（2025年），doi:10.1103/PhysRevE.111.024128。[49] A. Andreanov、G. Biroli、J.-P. Bouchaud 和 A. Lefèvre，《相互作用粒子系统的场论与精确随机方程》，《物理评论E》74，030101（2006年），doi:10.1103/PhysRevE.74.030101。[50] L. Neville，《活性格气的流体动力学方程与临界附近的大偏差》，《统计力学杂志》2025，033204（2025年），doi:10.1088/1742-5468/adbefe。[51] C. T. MacDonald、J. H. Gibbs 和 A. C. Pipkin，《核酸模板上的生物聚合动力学》，生物聚合物6，1–25（1968年），doi:10.1002/bip.1968.360060102。[52] C. T. MacDonald 和 J. H. Gibbs，《关于多核糖体上多肽合成的动力学》，生物聚合物7，707–725（1969年），doi:10.1002/bip.1969.360070508。

[53] G. Schütz 和 S. Sandow，随机过程的非阿贝尔对称性：随机顶点模型与无序相互作用粒子系统关联函数的推导，《物理评论E》49，2726（1994），doi:10.1103/PhysRevE.49.2726.[54] B. Derrida，非平衡扩散系统大偏差讲义，SciPost 物理学讲义 p. 106（2025），doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes.106.[55] G. Schönherr 和 G. Schütz，任意延展粒子的排斥过程：流体动力学极限与代数性质，J. Phys. A: Math. Gen. 37，8215（2004），doi:10.1088/0305-4470/37/34/002.[56] C. Giardinà、J. Kurchan 和 F. Redig，热传导模型的对偶性与精确关联，《数学物理杂志》48，033301（2007），doi:10.1063/1.2711373.[57]F. Spitzer，马尔可夫过程的相互作用，《数学进展》5，246–290（1970），doi:10.1016/0001-8708(70)90034-4.[58] C. Kipnis、C. Marchioro 和 E. Presutti，可精确求解模型中的热流，《统计物理学杂志》27，65–74（1982），doi:10.1007/BF01011740.[59] E. Levine、D. Mukamel 和 G. Schütz，具有开放边界的零程过程，《统计物理学杂志》120，759–778（2005），doi:10.1007/s10955-005-7000-7.[60] L. Bertini、D. Gabrielli 和 J. L. Lebowitz，热流随机模型的大偏差，《统计物理学杂志》121，843–885（2005），doi:10.1007/s10955-005-5527-2.[61] P. L. Krapivsky，排斥过程的动力学，统计力学杂志2013，P06012（2013），doi:10.1088/1742-5468/2013/06/P06012.[62]Y. Baek、Y. Kafri 和 V. Lecomte，驱动扩散系统中的动力学对称性破缺与相变，物理评论快报118，030604（2017），doi:10.1103/PhysRevLett.118.030604.[63] P. Rizkallah、A. Grabsch、P. Illien 和 O. Bénichou，单列扩散中的对偶关系，统计力学杂志2023，013202（2023），doi:10.1088/1742-5468/aca8fb.[64] G. Schönherr，具有长程相互作用的硬杆气体：基于离散模型对连续系统流体动力学性质的精确预测，《物理评论E》71，026122（2005），doi:10.1103/PhysRevE.71.026122.[65] B. Lin、M. Meron、B. Cui、S. A. Rice 和 H. Diamant，从随机游走到单列扩散，物理评论快报94，216001（2005），doi:10.1103/PhysRevLett.94.216001.[66] Y. Baek、Y. Kafri 和 V. Lecomte，大N极限下边界驱动系统的极端电流涨落，统计力学杂志2016，053203（2016），doi:10.1088/1742-5468/2016/05/053203.[67] C. Franceschini、P. Gonçalves 和 B. Salvador，具有开放边界的对称简单部分排斥过程的流体动力学行为，《数学物理分析与几何》26，11（2023），doi:10.1007/s11040-023-09446-9.[68] G. Carinci、C. Giardinà、C. Giberti 和 F. Redig，输运随机模型的对偶性，《统计物理学杂志》152，657–697（2013），doi:10.1007/s10955-013-0786-9.[69] S. Floreani、F. Redig 和 F. Sau，边界驱动粒子系统的正交多项式对偶性与非平衡关联，《庞加莱研究所年刊：概率与统计》58，220–247（2022），doi:10.1214/21-AIHP1163。

[70] C. Arita、P. L. Krapivsky 和 K. Mallick，广义排斥过程：输运系数，《物理评论E》**90**，052108（2014），doi：10.1103/PhysRevE.90.052108。

[71]C. Arita、P. L. Krapivsky 和 K. Mallick，扩散晶格气体中输运系数的变分计算，《物理评论E》**95**，032121（2017年），doi：10.1103/PhysRevE.95.032121。

[72]J. Fröhlich 和 T. Spencer，具有 $1/r^2$ 相互作用能的一维伊辛模型中的相变，《Commun. Math. Phys.》**84**，87–101（1982年），doi：10.1007/BF01208373。

[73] D. Ruelle，《统计力学：严格结果》，Addison–Wesley，马萨诸塞州雷丁，ISBN 0-201-09416-9（1989年）。

[74] J. A. Cuesta 和 A. Sánchez，具有短程相互作用的一维系统中相变的一般不存在定理，以及此类相变的物理实例，《统计物理学杂志》**115**，869–893（2004年），doi：10.1023/B:JOSS.0000022373.63640.4e。

[75] P. L. Krapivsky、K. Mallick 和 T. Sadhu，伊辛象限的熔化，《物理学杂志A：数学与理论》**48**，015005（2015），doi：10.1088/1751-8113/48/1/015005。

[76] L. Le Bon、A. Carof 和 P. Illien，*Dean-Kawasaki*方程中的非高斯密度涨落，《物理评论E》**112**，034127（2025年），doi：10.1103/5mjd-m46h。

[77] J. H. Irving 和 J. G. Kirkwood，输运过程的统计力学理论。*IV*. 流体力学方程，《化学物理学杂志》**18**，817–829（1950），doi：10.1063/1.1747782。

[78] T. Sadhu，关于非平衡涨落的一些精确结果，网址：www.icts.res.in/program/ifwcqm/talks，印法非平衡系统经典与量子动力学研讨会，ICTS-塔塔基础研究院，班加罗尔（2024年12月）。

[79] L. Tonks，硬弹性球一维、二维和三维气体的完整状态方程，《物理评论》**50**，955（1936），doi：10。1103/PhysRev.50.955。

[80] L. N. Trefethen，*MATLAB* 谱方法，工业与应用数学学会，doi：10。1137/1.9780898719598（2000）。

[81]A. Grabsch 和 O. Bénichou，超越高斯行为的示踪粒子扩散：一般单列系统的显式结果，物理评论快报 **132**，217101（2024），doi：10。1103/PhysRevLett.132.217101。

[82] B. Derrida 和 A. Gerschenfeld，阶跃初始条件下的一维对称简单排斥过程的电流涨落，《统计物理学杂志》**136**，1–15（2009），doi：10.1007/s10955-009-9772-7。[83] T. Imamura、K. Mallick 和 T. Sasamoto，对称排斥过程中示踪粒子的大偏差，物理评论快报**118**，160601（2017），doi：10.1103/PhysRevLett.118.160601。[84] J. D. Weeks、D. Chandler 和 H. C. Andersen，排斥力在决定简单液体平衡结构中的作用，《化学物理学杂志》**54**，5237（1971），doi：10.1063/1.1674820。[85] J.-P. Hansen 和 I. R. McDonald，简单液体理论：及其在软物质中的应用，学术出版社，doi：10.1016/C2010-0-66723-X（2013）。

[86] K. Mallick、H. Moriya 和 T. Sasamoto，对称排斥过程宏观涨落理论的精确解，物理评论快报 129，040601（2022），doi:10.1103/PhysRevLett.129.040601.[87] C. Giardinà、J. Kurchan 和 L. Peliti，大偏差函数的直接计算，物理评论快报 96，120603（2006），doi:10.1103/PhysRevLett.96.120603.[88] V. Lecomte 和 J. Tailleur，连续时间大偏差的数值方法，统计力学杂志 2007，P03004（2007），doi:10.1088/1742-5468/2007/03/P03004.[89] C. Pérez-Espigares 和 P. I. Hurtado，跨越动力学相变的稀有事件采样，Chaos 29，083106（2019），doi:10.1063/1.5091669.[90] S. Lifson 和 J. L. Jackson，聚电解质溶液中离子的自扩散，《化学物理学杂志》36，2410–2414（1962），doi:10.1063/1.1732899.[91] B. Derrida，周期性一维跳跃模型的速度和扩散常数，统计力学杂志 31，433–450（1983），doi:10.1007/BF01019492.[92] J. Krug，驱动扩散系统中的边界诱导相变，物理评论快报 67，1882（1991），doi:10.1103/PhysRevLett.67.1882.[93] B. Bertini、M. Collura、J. De Nardis 和 M. Fagotti，非平衡 XXZ链中的输运：荷和流的精确分布，物理评论快报 117，207201（2016），doi:10.1103/PhysRevLett.117.207201.[94]O. A. Castro-Alvaredo、B. Doyon 和 T. Yoshimura，可积量子系统非平衡态中的涌现流体力学，Physical Review X 6，041065（2016），doi:10.1103/PhysRevX.6.041065.[95] A. Dinelli、J. O'Byrne 和 J. Tailleur，受趋性和群体感应作用的活性粒子的涨落流体力学：静态与动力学，《物理学杂志A：数学与理论》57，395002（2024），doi:10.1088/1751-8121/ad72bc.[96]Y. Fily 和 C. M. Marchetti，无定向排列自驱动粒子的非热相分离，物理评论快报 108，235702（2012），doi:10.1103/PhysRevLett.108.235702.[97] G. Szamel，外部势中的自驱动粒子：有效温度的存在性，《物理评论E》90，012111（2014），doi:10.1103/PhysRevE.90.012111.[98] C. Kipnis、C. Landim 和 S. Olla，非梯度系统的流体力学极限：广义对称排斥过程，纯粹与应用数学通讯 47，1475–1545（1994），doi:10.1002/cpa.3160471104.[99] C. Landim、M. Mourragui 和 S. Sellami，具有随机储库的非梯度相互作用粒子系统的流体力学极限，概率论及其应用 45，604（2001），doi:10.1137/S0040585X97978543。

[100] H. Spohn，非平衡稳态下随机晶格气体的长程关联，J. Phys. A: Math. Gen. **16**，4275（1983），doi：10.1088/0305-4470/16/18/029。

[101] M. Z. Guo、G. C. Papanicolaou 和 S. R. S. Varadhan，具有最近邻相互作用系统的非线性扩散极限，Commun. Math. Phys. **118**，31–59（1988），doi：10.1007/BF01218476。