arXiv:2601.02325v1 [math.HO] 5 Jan 2026

什么是
微分几何？：曲线与曲面

安东·彼得鲁宁和Sergio Zamora Barrera

翻译与编辑：N. D. 列别杰娃和 G. Yu. 帕尼娜

艺术设计：安娜·克里斯蒂娜·查韦斯·卡利斯。


本作品依据 CC BY-SA 4.0 许可协议发布，您可以通过链接
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0 查阅该协议

目录

前言 **6**

第一部分 曲线

1 定义 10A. 开始之前 **10**; B. 简单曲线 **11**; C. 参数化曲线 **11**; D. 光滑曲线 **13**; E. 隐式给定曲线 **14**;F. 正则、闭合与开放曲线 **15**。

2 弧长 **16**
A. 定义**16**; B. 不可求长曲线 **17**; C. 弧长的半连续性**18**; D. 按弧长参数化 **19**; E. 凸曲线 **20**; F. 克罗夫顿公式 **22**; G. 内在度量 **24**; H. 球面曲线 **25**。

3 曲率 **28**
A. 加速度与速度 **28**； B. 曲率 **29**； C. 切线指标曲线**29**； D. 切线 **30**； E. 全曲率 **31**； F. 凸曲线**33**； G. 弓形引理 **35**。

4 折线 **40**
A. 分段光滑曲线 **40**； B. 芬切尔广义定理 **41**； C. 折线 **42**； D. 那么如果 $\Phi(\gamma) = 2\cdot\pi$ 呢? **44**； E. DNA广义定理 **45**； F. 广义曲率**46**。

5 挠率 **47**
A. 弗雷内标架 **47**； B. 挠率**48**； C. Frenet 公式 **48**； D. 斜坡线 **50**； E. 球面曲线 **51**； F. 基本定理 **52**。

6 带符号曲率 **54**
A. 定义**54**； B. 基本定理 **55**； C. 完全定向曲率 **57**； D. 密切圆**60**； E. 螺旋引理**61**。

7 支撑曲线 **64**
A. 同向性 **64**; B. 支撑曲线 **65**; C. 判据

支撑的 **66**; D. 凸曲线 **67**; E. 水洼中的月亮 **69**; F. 四顶点定理 **71**.

第二部分 曲面

8 定义 **76**
A. 拓扑曲面 **76**; B. 光滑曲面 **76**; C. 带边界的曲面 **77**; D. 曲面类型 **77**; E. 隐式定义的曲面 **78**; F. 局部参数化**78**; G. 全局参数化 **81**。

9 一阶导数 **82**
A. 切平面 **82**; B. 方向导数 **83**; C. 作为泛函的切向量 **85**; D. 微分 **85**; E. 积分与面积 **86**; F. 法向量与定向 **88**; G. 截面 **90**。

10 曲率 **91**
A. 切向—法向坐标**91**；B. 主曲率**92**；C. 其他曲率**93**；D. 形算子**94**。

11 曲面上的曲线 **98**
A. 达布标架**98**；B. 欧拉公式**99**；C. 拉古诺夫水族馆**101**。

12 支撑曲面 **104**
A. 定义 **104**；B. 凸性判据 **107**；C. 凸性判据 **107**；D. 关于凸性的补充**108**。

13 鞍形曲面 110A. 定义 **110**；B. 小丘判据 **111**；C. 鞍形图像**113**；D. 注释 **116**。

第三部分 测地线

14 最短路径
118A
· 内蕴几何 **118**；B. 定义 **119**；C. 短投影**120**；D. 凸曲面上的最短路径 **121**。

15 测地线 **123**
A. 定义 **123**; B. 存在性与唯一性 **124**; C. 指数映射 **127**; D. 单射半径 **128**; E. 最短线与测地线**129**; F. 利伯曼引理 **131**; G. 测地线的全曲率 **132**。

16 平移 **134**

A. 平行场 **134**; B. 平行移动 **134**; C. 自行车车轮与投影**136**; D. 测地线的全曲率 **137**。

17 高斯—博内公式 140 A. 定理陈述 **140**; B. 可加性 **142**; C. 球面情形 **142**; D. 直观的半证明 **144**; E. 简单测地线 **144**; F. 一般区域**146**.

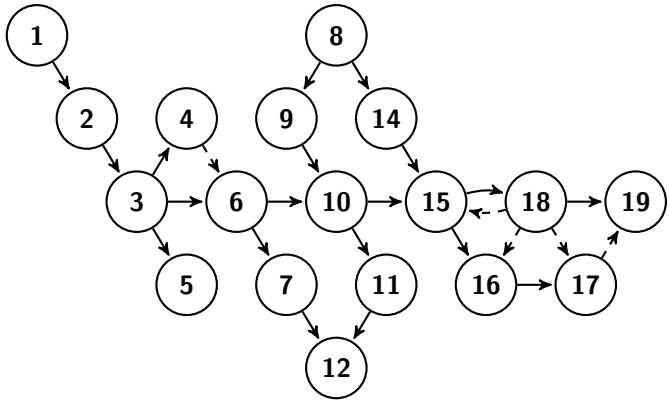
18 半测地坐标 **149**
A. 极坐标**149**; B. 再谈最短线与测地线 **150**; C. 高斯曲率 **152**; D. 向量场的旋度 **155**; E. 推导高斯—博内公式 **158**; F. Rauch 比较定理 **159**; G. 内蕴等距变换 **160**; H. 一个重要定理 **161**.

19 比较定理 **163**
A. 三角形与扇形 **163**; B. 定理陈述 **164**; C. 局部定理 **166**; D. 非正曲率 **167**; E. 非负曲率 **167**; F. 亚历山德罗夫引理 **171**; G. 改述**171**.

附录 A **175**
A. 度量空间 **175**； B. 拓扑学 **177**； C. 初等几何学 **178**； D. 凸几何学 **179**； E. 线性代数 **180**； F. 数学分析 **180**； G. 向量分析 **182**； H. 微分方程 **185**。

提示 **186**

后记206 主题索引 207 参考文献 210



前言

这本教科书适合那些决定学习微分几何的人，也适合那些想找个充分理由不学微分几何的人。内容足够讲授一个学期，而且还会有剩余。

微分几何学依托数学的多个分支，包括实分析、测度论、变分法、微分方程、拓扑学、初等几何和凸几何。此外，物理直觉有助于理解其中的许多方面。这门学科入门途径众多，因此无论是教学还是学习，都既有趣又困难。

光滑曲线和曲面为微分几何学提供了最重要的例子和思想来源。在继续学习之前，最好先透彻理解这一领域——不必操之过急。

本书侧重于习题，证明通俗易懂、直观明了，而且几乎严谨（有时会略去其他领域的一些内容，主要是附录中讨论的内容）。我们聚焦于若干在今后学习中肯定会派上用场的思想。因此，我们没有涉及一些传统上会纳入入门教材的主题；例如，我们几乎没有谈及极小曲面和彼得森–科达齐公式。

同时，本书还收录了一些通常不会在入门课程中讨论的定理。

第一个例子是弗拉基米尔·约宁和赫尔曼·佩斯托夫的水洼中的月亮定理（7.14）。这是所谓从局部到整体定理中最简单而又重要的例子，这类定理构成了整个微分几何学的基础；它很好地回答了本书的核心问题——“什么是微分几何学？”。其他例子还包括谢尔盖·伯恩斯坦的鞍形图定理（13.13），以及斯特凡·科恩-福森关于无限双向测地线的定理（17.12）。

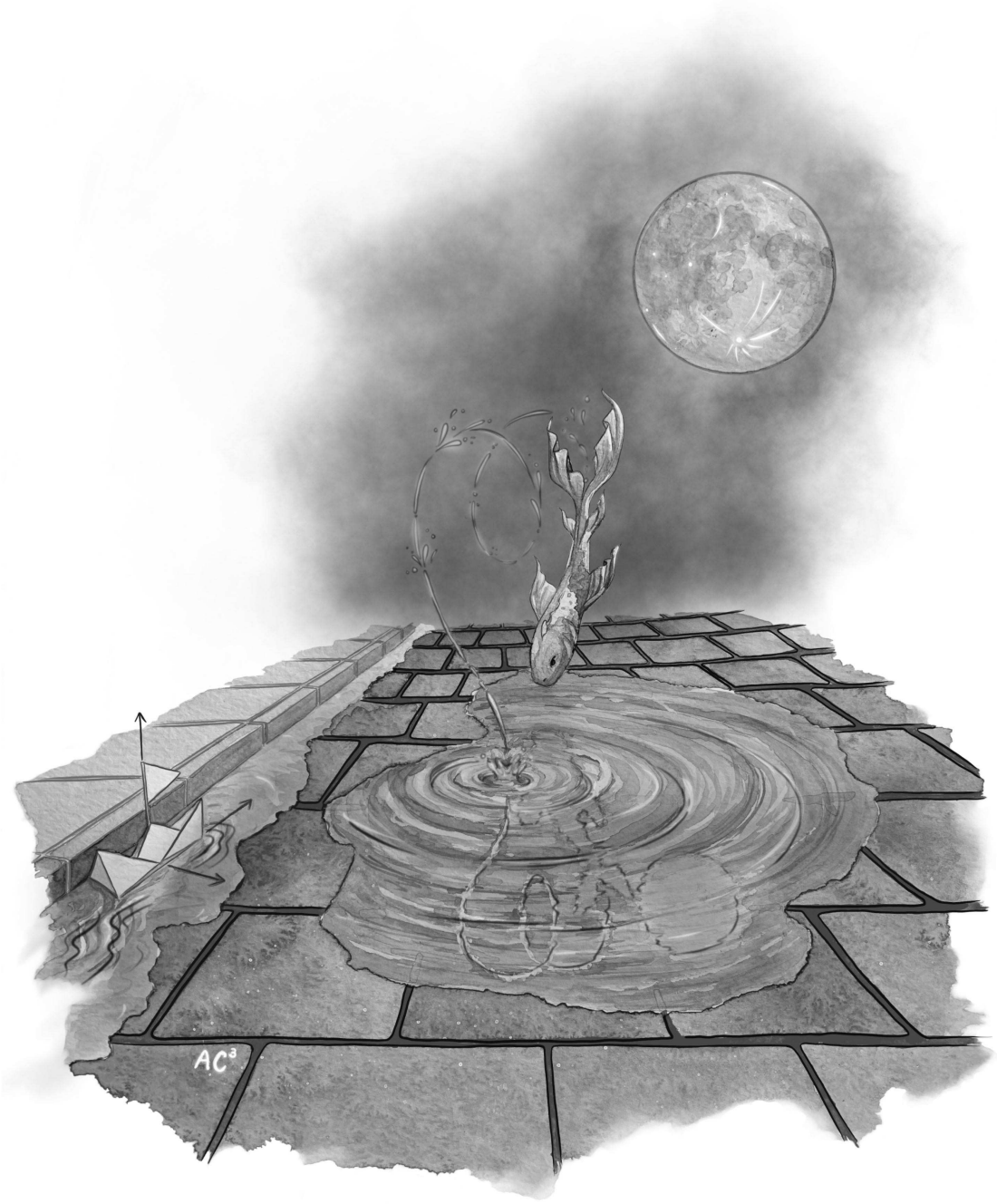
本教科书基于我们在2018年秋季于宾夕法尼亚州立大学MASS项目上讲授的课程编写。这些主题中有许多曾由尤里·布拉戈在列宁格勒大学讲授，

当时第一作者还是他的学生。撰写本书时，我们参考了威廉·布拉施克、维克托·托波诺戈夫和阿列克谢·切尔纳夫斯基的教科书，也参考了谢尔盖·伊万诺夫的讲座；许多进阶习题选自 [79]。最后一章基于Stefani Alexander、维塔利·卡波维奇和第一作者所著书籍中的入门材料 [5]。我们感谢Stefani Alexander、尤里·布拉戈、贝尔克·杰伊兰、妮娜·列别杰娃、亚历山大·雷恰克、本杰明·麦凯以及本班学生提供的帮助。

本研究部分获得美国国家科学基金会（NSF）DMS-2005279 项目和西蒙斯基金会 No584781 项目的资助。

安东·彼得鲁宁和塞尔吉奥·萨莫拉-巴雷拉。

第一部分 曲线



第1章

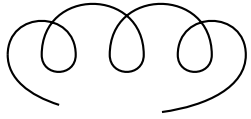
定义

通常可以根据自行车的轮迹判断它的行进方向，也能区分前轮和后轮的轮迹，并找出它们之间的距离。

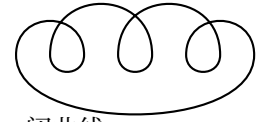
想一想，怎样才能做到这些。这会促使你重新发现曲线微分几何中很大一部分直观内容，也会让你更容易阅读第一部分；另请参阅练习6.1之后紧接着的链接。

A 开始之前

曲线的概念有许多变体。有些用名词来描述（路径、弧等），另一些则用形容词来描述（闭合、开曲线、正则曲线、简单、光滑曲线等）。下图展示了四种曲线类型。



曲线



闭曲线



简单曲线



简单闭曲线

接下来我们将讨论所有这些定义。本章可以跳过，并在之后将其作为参考手册使用。

B 简单曲线

我们假设读者熟悉度量空间（参见附录 AA）；其主要例子包括欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 和欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$。

回顾一下，区间是实数直线的连通子集。若连续双射 $f\colon X \to Y$ 在度量空间的子集之间成立，且其逆映射 $f^{-1}\colon Y \to X$ 也连续，则称该双射为同胚。

1.1. 定义。 度量空间的连通子集 γ 称为简单曲线，若它局部同胚于区间；也就是说，每个点 $p \in \gamma$ 都有一个邻域，该邻域在 γ 中与区间同胚。

众所周知，任意简单曲线 γ 都可以用区间或圆来参数化。也就是说，存在一个同胚 $\mathbb{G} \to \gamma$，其中 $\mathbb{G}$ 是一个区间（开区间、闭区间或半开区间）或一个圆

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

这在戴维·盖尔的文章中已有证明 [34]；证明并不复杂，但会使我们偏离主题。

参数化 $\mathbb{G} \to \gamma$ 完整地描述了曲线。通常，曲线及其参数化用同一个字母表示；例如，可以说曲线 γ 由参数化 γ 给出：$(a, b] \to \mathbb{R}^2$。不过，任何简单曲线都存在不同的参数化。

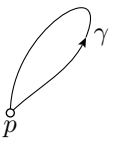
1.2. 练习。
(a) 证明，任意连续单射 $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 的像都是简单曲线。*(b)* 构造一个连续单射 $\gamma\colon\ (0,\ 1) \to\!\!\to \mathbb{R}^2$，使其像不是简单曲线。

C 参数化曲线

设 $\mathbb{G}$ 是圆或区间（开区间、闭区间或半开区间），$\mathcal{X}$ 是度量空间。参数化曲线定义为连续映射 $\gamma\colon \mathbb{G} \to\!\!\to \mathcal{X}$。对于参数化曲线，我们不假设映射是单射；换句话说，允许自相交。

简单曲线总可以看作参数化曲线。当我们不想明确说明曲线是参数化的还是简单的时，可以使用“曲线”这一术语。

如果定义域 $\mathbb{G}$ 是开区间或圆，那么 γ称为无端点曲线；否则称为有端点曲线。如果 $\mathbb{G}$是圆，那么 γ称为闭曲线。如果 $\mathbb{G}$是闭区间 $[a,b]$，那么该曲线称为弧。如果此外 $\mathbb{G}$ 是单位区间 $[0,1]$，那么该曲线也称为路径。



如果弧 $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathcal{X}$满足条件 $p=\!=\gamma(a)=\gamma(b)$，那么它称为环路，而 p 称为它的基点。

设 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$，二者均为区间或圆。连续的满射 $\tau\colon \mathbb{G}_1\to\mathbb{G}_2$称为单调映射，如果对于任意 $t\in\mathbb{G}_2$ 集合-集合 $\tau^{-1}\{t\}$ 连通。如果 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$ 是区间，那么根据介值定理，单调映射要么是单调不减的，要么是单调不增的；也就是说，当 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$ 是区间时，我们的定义与标准定义一致。

1.3. 练习。 请举出一个单调映射（特别是满射）$(0,1)\to[0,1]$的例子。

设 $\gamma_1\colon \mathbb{G}_1\to\mathcal{X}$ 和 $\gamma_2\colon \mathbb{G}_2\to\mathcal{X}$ 是两条参数化曲线，满足：对于单调映射 $\tau\colon \mathbb{G}_1\to\mathbb{G}_2$，$\gamma_1=\gamma_2\circ\tau$。那么我们称 γ_2 是借助 τ 的重新参数化 [1] γ_1。

1.4. 进阶练习。 设 X 是平面的子集。假设两个不同的点 $p,q\in X$ 可以通过 X 中的道路连接。证明，在 X 中存在一条从 p 到 q 的简单弧。

任意环路（以及闭曲线）都可以用周期参数化 $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathcal{X}$ 来表示；也就是说，存在某个周期 $\ell>0$，使得对所有 t，都有 $\gamma(t+\ell)=\gamma(t)$。例如，平面上的单位圆可以用 $2\cdot\pi$-周期参数化 $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ 来描述。

反过来也成立：可以将具有周期参数化的曲线视为闭曲线或环路。

[1] 不过，γ_1 可能不是 γ_2的重参数化。换句话说，按照我们的定义，“是重参数化”这一关系并不对称；具体而言，它不是等价关系。可以像 [13, 2.5.1]，中那样，转而采用最小等价关系来解决这个问题，不过我们仍将坚持使用当前的定义。

D 光滑曲线

欧几里得空间中的曲线或平面上的曲线，分别称为空间曲线或平面曲线。

参数化空间曲线可以用其坐标函数 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 来描述。平面曲线可以看作具有 $z(t) \equiv 0$ 的空间曲线的特例。

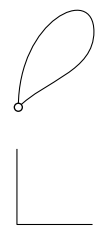
我们回顾一下，实值函数称为光滑的，是指它的各阶导数在定义域内处处有定义。如果每个坐标函数 $x(t)$ $y(t)$ 和 $z(t)$ 都是光滑的，那么参数化也称为光滑的。

如果速度向量 $\gamma'(t) = (x'(t)\ y'(t)\ z'(t))$ 在每一点都不等于零，那么参数化 γ 称为正则的。

参数化曲线称为光滑的，是指其参数化既光滑又正则。简单空间曲线称为光滑的，是指它允许一个正则的光滑参数化；对于闭曲线，则假定参数化是周期的。这些是本书第一部分的主要对象。光滑曲线也可以称为正则光滑曲线；这样会更准确，但名称也会更长。

光滑环路可能确定一条不光滑的闭曲线；图中给出了一个例子。

根据下面的练习，具有光滑参数化的曲线也可能是不光滑的。



1.5. 练习。 从附录 *AF* 可以看出，下面的函数是光滑的：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } t \leqslant 0, \\ \frac{t}{e^{1/t}} & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

证明，$\alpha(t) = (f(t)\ f(-t))$ 描述了图中的曲线的一种光滑参数化；这是一条简单曲线，由平面上的两条半轴合并而成。

证明，这条曲线的任意光滑参数化在原点处的速度向量都为零。由此推出这条曲线是不光滑的；也就是说，它不允许正则的光滑参数化。

1.6. 练习。 描述使参数化 $\gamma_\ell(t) = (t + \ell \cdot \sin t, \ell \cdot \cos t)$，$t \in \mathbb{R}$ 成立的实数集合 ℓ

(a) гладкой; *(b) регулярной;* *(c) простой.*

1.7. 练习。 在平面上构造一条光滑但不规则的三次抛物线参数化 $y = x^3$ 。

E 隐式定义曲线

假设 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ —光滑函数；也就是说，它的所有偏导数处处都有定义。设 $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ —它的等值集，由方程 $f(x, y) = 0$描述。

假设 0 是 f的正则值；也就是说，梯度 $\nabla_p f$ 在 $p \in \gamma$的任何一点都不为零。换句话说，如果 $f(p) = 0$，那么 $f_x(p) \neq 0$ 或 $f_y(p) \neq 0$。[2] 如果此时集合 γ 是连通的，那么根据隐函数定理（A.26）， γ 是一条光滑简单曲线。

所述条件充分，但并非必要。例如，0不是函数 $f(x, y) = y^2$的正则值，但方程 $f(x, y) = 0$ 描述了一条光滑曲线—— x轴。

同样，假设 (f, h) 是定义在$\mathbb{R}^3$上的一对光滑函数。再次根据隐函数定理（A.26），方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

当 γ 的解集合连通，且 0 是映射$F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$的正则值时，该方程组描述一条光滑空间曲线，其中映射定义为

$$F\colon (x, y, z) \mapsto (f(x, y, z), h(x, y, z)).$$

这意味着，在 $p \in \gamma$中的任意一点，梯度 ∇f 和 ∇h 都是线性无关的。换言之，雅可比行列式

$$\operatorname{Jac}_p F = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}$$

映射 $F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 在 $p \in \gamma$中的任意一点的秩均为 2。

如果曲线 γ 以这种方式描述，我们就称其为隐式定义的。

反函数定理保证了对任意隐式给定的曲线，都存在正则光滑参数化。不过，直接使用隐式表示通常更方便。

[2]这里， f_x 是偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的简写。

1.8. 练习。 考虑平面上由方程 $y^2 = x^3$ 描述的集合。它是简单曲线吗？它是光滑曲线吗？

1.9. 练习。 描述使方程组成为光滑曲线的实数集合 ℓ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ x^2 + \ell \cdot x + y^2 & = 0 \end{cases}$$

描述一条光滑曲线。

F 真、闭集与开集

度量空间 $\mathcal{X}$ 中的参数化曲线 γ 称为真曲线，如果对于任意紧集 $K \subset \mathcal{X}$，其原像 $\gamma^{-1}(K)$ 都是紧集。

下面是在整个实直线上定义的非本征曲线的一个例子： $\gamma(t) = (e^t, 0, 0)$。事实上，集合 $(-\infty, 0]$ 是以坐标原点为中心的闭单位球的原像，而 $(-\infty, 0]$ 不紧致。

1.10. 练习。 证明曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 是自身的，当且仅当 $|\gamma(t)| \to \infty$ 在 $t \to \pm\infty$ 时。

回顾一下，闭区间是紧致的，紧集的闭子集也同样是紧致的（附录 AB）。由于圆和闭的有限区间是紧致的，闭曲线和弧都是自身的曲线。

如果一条简单曲线允许自身的参数化，就称其为自身的。

1.11. 练习。 证明，简单空间曲线是自身的，当且仅当它形成一个闭集。

如果一条自身的简单曲线既不闭合也没有端点，则称其为开曲线。因此，任何没有端点的自身简单曲线要么是闭合的，要么是开曲线。请注意，术语 开曲线 和闭曲线 与开集和闭集无关。

1.12. 练习。 利用 *Jordan* 定理 *(A.12)*，证明任何简单开曲线都将平面分成两个连通分支。

第 2 章

长度

A 定义

回顾一下，形如

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b.$$

称为区间 $[a, b]$ 的分割。

2.1. 定义。 设 $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{X}$ 是度量空间中的曲线。长度 γ 定义为

$$\operatorname{length} \gamma = \sup \left\{ |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|_{\mathcal{X}} + \cdots + |\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)|_{\mathcal{X}} \right\},$$

其中，上确界取遍区间 $t_0, \ldots, t_k[a, b]$ 的所有分割。

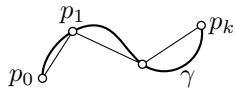
闭曲线的长度定义为相应闭环的长度。如果曲线以开区间或半开区间为参数区间，则其长度定义为它在所有闭区间上的限制长度的上确界。

有限长度曲线称为可求长曲线。

2.2. 练习。 假设 $\gamma_1\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ 是曲线 $\gamma_2\colon [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$的重新参数化。证明：

$$\operatorname{length} \gamma_1 = \operatorname{length} \gamma_2.$$

设 $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$—参数化空间曲线。选取划分$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$，并设 $p_i = \gamma(t_i)$。那么折线 $p_0 \ldots p_k$ 称为内接



于 γ。如果 γ 闭合，则 $p_0 = p_k$，因此，其内接折线也闭合。

注意，空间曲线的长度可以定义为内接于该曲线的折线长度的上确界。

2.3. 练习。 考虑路径 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$。假设 β_n — 是内接于 γ 的折线序列，其顶点为 $\gamma(\frac{i}{n})$，其中 $i \in \{0,\dots,n\}$。证明

$$\operatorname{length}\beta_n \to \operatorname{length}\gamma \quad npu \quad n\to\infty.$$

2.4. 练习。 考虑简单路径 $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}^3$。假设路径 $\beta\colon [0,1]\to\mathbb{R}^3$ 与 γ 的像相同；也就是说，$\beta([0,1]) = \gamma([0,1])$。证明

$$\operatorname{length}\beta \geqslant \operatorname{length}\gamma.$$

试着通过将假设弱化为 $\beta([0,1]) \supset \gamma([0,1])$ 来证明这个不等式。

2.5. 练习。 设 $\gamma\colon \ [a,b]\to\mathbb{R}^3$ 是一条光滑曲线。证明

(a) $\operatorname{length}\gamma \leqslant \int_a^b |\gamma'(t)|\cdot dt$; *(b)* $\operatorname{length}\gamma \geqslant \int_a^b |\gamma'(t)|\cdot dt$.

特别地

❶ $$\operatorname{length}\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\cdot dt.$$

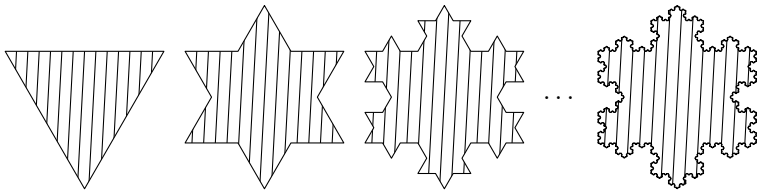
2.6. 进阶练习。
(a) 证明公式 ❶ 对任意利普希茨曲线 $\gamma\colon \ [a,b]\to\mathbb{R}^3$ 都成立。*(b)* 构造一条非常值曲线 $\gamma\colon \ [a,b]\to\mathbb{R}^3$，使得$\gamma'(t) = 0$ 几乎处处成立。（对于这样的曲线，等式❶不成立，尽管等式两边都有定义。）

B 不可求长曲线

下面介绍所谓的科赫雪花——不可求长曲线的经典例子。

从一个等边三角形开始。将每条边分成三段相等的线段，并在中间的线段上添加一个等边三角形，

以此作为底边。对得到的多边形重复同样的操作，并递归地继续下去。科赫雪花是所有得到的多边形的并集的边界。图中展示了两次迭代的结果以及雪花本身。



2.7. 练习。
(a) 证明科赫雪花是一条简单闭曲线；特别地，它可以用圆周参数化。
(b) 证明科赫雪花不可求长。

C 长度的半连续性

数列 x_n 的下极限记作

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

它定义为最小的部分极限；也就是说，是子数列 x_n 的可能极限中的最小者。下极限对任意实数数列都有定义，其取值属于扩展实数轴 $[-\infty,\infty]$。

2.8. 定理。 假设度量空间 $\mathcal{X}$ 中的曲线序列 $\gamma_n\colon [a,b]\to\mathcal{X}$ 逐点收敛于曲线 $\gamma_\infty\colon [a,b]\to\mathcal{X}$；即 $\gamma_n(t)\to\gamma_\infty(t)$ 对任意 $t\in[a,b]$ 和 $n\to\infty$ 均成立。那么

❷ $$\varliminf_{n\to\infty} \operatorname{length}\gamma_n \geqslant \operatorname{length}\gamma_\infty.$$

2.9. 推论。 长度关于曲线的逐点收敛是下半连续的。

证明。 选取划分 $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$。设

$$\begin{aligned}\Sigma_n &:= |\gamma_n(t_0)-\gamma_n(t_1)|+\dots+|\gamma_n(t_{k-1})-\gamma_n(t_k)|,\\ \Sigma_\infty &:= |\gamma_\infty(t_0)-\gamma_\infty(t_1)|+\dots+|\gamma_\infty(t_{k-1})-\gamma_\infty(t_k)|.\end{aligned}$$

对于每个 i,

$$|\gamma_n(t_{i-1}) - \gamma_n(t_i)| \to |\gamma_\infty(t_{i-1}) - \gamma_\infty(t_i)|,$$

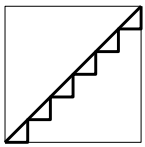
在 $n \to \infty$ 时，因此 $\Sigma_n \to \Sigma_\infty$。由于对每个 n 都有 $\Sigma_n \leqslant \operatorname{length} \gamma_n$，因此得到

$$\varliminf_{n\to\infty} \operatorname{length} \gamma_n \geqslant \Sigma_\infty$$

对于任意分割都成立。现在，不等式 ❷ 由弧长的定义即可得出。

□

不等式 ❷ 可能是严格不等式。例如，单位正方形的对角线 γ_∞ 可以用阶梯折线 γ_n 逼近，这些折线的边平行于正方形的边（γ_6 和 γ_∞ 在图中给出）。在这种情况下，



$$\operatorname{length} \gamma_\infty = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{length} \gamma_n = 2 \quad \text{для любого} \quad n.$$

D 按弧长参数化

如果曲线 γ 按弧长参数化，或具有自然（标准）参数化，我们就称之为

$$t_2 - t_1 = \operatorname{length} \gamma|_{[t_1,t_2]}$$

对于参数 $t_1 < t_2$的任意两个取值；也就是说，从 t_1 到t_2 的弧 γ 长度为 $t_2 - t_1$。

2.10. 练习。 设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{X}$是度量空间中的一条可求长曲线。对于给定的 $t \in [a,b]$，记$s(t)$ 为弧 $\gamma|_{[a,t]}$的长度。证明函数 $t \mapsto s(t)$ 连续。

由此推出，γ 允许按弧长参数化。

根据练习 2.5，光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$按弧长参数化，当且仅当它的速度向量在任意时刻都是单位向量；也就是说，

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = 1$$

对于所有 t。因此，按弧长参数化的光滑曲线也称为单位速度曲线。需要指出的是，单位速度光滑参数化始终是正则的（见 1D）。

2.11. 命题。 如果 $t \mapsto \gamma(t)$ 是光滑曲线，那么它的弧长参数化也是光滑且正则的。此外，弧 s 对于 γ 的参数可以写成积分的形式

❸
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)| \cdot d\tau.$$

通常用字母 s 表示弧长参数。

证明。 由于 γ 是光滑曲线， $|\gamma'(t)| > 0$ 对任意 t都成立，因此函数 $t \mapsto |\gamma'(t)|$ 也是光滑的。

根据牛顿-莱布尼茨公式， $s'(t) = |\gamma'(t)|$。特别地， $t \mapsto s(t)$是一个导数为正的光滑递增函数。

根据反函数定理（A.25），函数 $s^{-1}(t)$也是光滑的，并且 $|(\gamma \circ s^{-1})'| \equiv 1$。因此，重新参数化 $\gamma \circ s^{-1}$的速度恒为 1。根据构造， $\gamma \circ s^{-1}$ 是光滑曲线，并且由于 $|(\gamma \circ s^{-1})'| \equiv 1$，参数化 $\gamma \circ s^{-1}$ 是正则的。 □

2.12. 练习。请将螺旋线参数化

$$\gamma_{a,b}(t) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t, b \cdot t)$$

为弧长参数。

我们关注的是在重新参数化时保持不变的曲线性质。因此，总可以假设给定的光滑曲线以弧长参数化。这些参数化的选择几乎是典范的——它们只相差一个符号和一个平移，因此更容易据此定义不依赖于参数化的量。这个观察将在定义曲率和挠率时用到。

但在实际应用中，直接使用原始参数化更简单。而且，通常无法显式求出弧长参数。

E 凸曲线

如果一条平面简单曲线围成一个凸区域，就称它为凸曲线。由于任何区域的边界都是闭集，任何凸曲线要么闭合，要么开放（见 1F）。

2.13. 命题。假设闭凸曲线 α 位于平面上一条简单闭曲线 β 所围成的区域内。那么

$$\operatorname{length}\alpha \leqslant \operatorname{length}\beta.$$

只需证明，内接于 α 的任意多边形的周长小于或等于 β 的长度。由于内接于 α 的任意多边形都是凸的，只需证明以下结论。

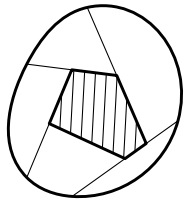
2.14. 引理。设凸多边形 P 位于由简单闭曲线围成的图形 F 内。那么

$$\operatorname{perim} P \leqslant \operatorname{perim} F,$$

其中，周长 F 表示 F 的周长。

证明。图形 F 的弦定义为：F 中端点位于其边界上的一条直线线段。设 F' 是从 F 沿其一条弦切下一块后得到的图形。根据三角不等式，

$$\operatorname{perim} F' \leqslant \operatorname{perim} F.$$



注意，存在一个递减的图形序列

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n = P,$$

使得 F_{i+1} 可由 F_i 沿弦截去一段得到。因此，

$$\operatorname{perim} F = \operatorname{perim} F_0 \geqslant \operatorname{perim} F_1 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{perim} F_n = \operatorname{perim} P. \qquad \square$$

注。其他证明可通过应用克罗夫顿公式（2.18），并像在 14.3 节中那样将 F 投影到 P 上得到。

2.15. 推论。任意闭合的凸平面曲线都可求长。

证明。任意闭曲线都是有界的。事实上，可以用一条环路 $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$，$\alpha(t) = (x(t)\ y(t))$ 来表示该曲线。坐标函数 $t \mapsto x(t)$ 和 $t \mapsto y(t)$ 连续，且定义在 $[0,1]$ 上。特别地，两个函数都被某个常数 C 所界。因此，α 位于由不等式 $|x| \leqslant C$ 和 $|y| \leqslant C$所确定的正方形内。

根据 2.13， α 的长度不超过该正方形的周长；由此得证。

□

回顾一下，集合 X 的凸包是包含 X 的最小凸集；换句话说，它是包含 X 的所有凸集的交集。

2.16. 练习。设 α 是平面上的简单闭曲线。用 K 表示 α 的凸包；设 β 是围成 K 的曲线。证明：

$$\operatorname{length}\alpha \geqslant \operatorname{length}\beta.$$

试证明：对于平面上的任意闭曲线，只要 K 具有非空内部，该命题仍然成立。

F 克罗夫顿公式

对于函数 $f\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$，将其平均值记为 $f(\mathrm{u})$；即

$$\overline{f(\mathrm{u})} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int\limits_{\mathrm{u}\in\mathbb{S}^1} f(\mathrm{u}).$$

对于向量 w 和单位向量 u，用 w_u 表示 w 在 u 方向直线上的正交投影；也就是说

$$\mathrm{w}_\mathrm{u} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle\cdot \mathrm{u}.$$

2.17. 定理。对于平面上的任意曲线 γ，等式成立

❹ $$\operatorname{length}\gamma = \tfrac{\pi}{2}\cdot\overline{\operatorname{length}\gamma_\mathrm{u}},$$

其中 γ_u 定义为 $\gamma_\mathrm{u}(t)\colon=(\gamma(t))_\mathrm{u}$。

证明。向量 w 的长度与其投影的平均长度成正比；也就是说

$$|\mathrm{w}| = k\cdot\overline{|\mathrm{w}_\mathrm{u}|}$$

对于某个 $k \in \mathbb{R}$。（系数 k 可以通过积分求得[1]，，但我们将用另一种方法求出它。）设 $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$——一条光滑曲线。对于任意 $t \in [a,b]$,

$$\gamma'_\mathrm{u}(t) = (\gamma'(t))_\mathrm{u} \quad \text{и} \quad |\gamma'_\mathrm{u}(t)| = |\langle \mathrm{u}, \gamma'(t)\rangle|.$$

[1]这是 $|\cos\ x|$ 在 $x \in [0, 2\cdot\pi]$时的平均值。

由练习 2.5 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{length}\gamma &= \int_a^b |\gamma'(t)|\cdot dt = \\ &= \int_a^b k\cdot\overline{|\gamma'_{\mathrm{u}}(t)|}\cdot dt = \\ &= k\cdot\overline{\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}}}.\end{aligned}$$

由于 k 是常数，只需假设 γ 是单位圆来计算它。在这种情况下，

$$\operatorname{length}\gamma = 2\cdot\pi.$$

曲线 γ_{u} 来回走过一条长度为 2 的线段。因此，对于任意 u，$\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}} = 4$，并且

$$\overline{\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}}} = 4.$$

由此可得 $2\cdot\pi = k\cdot 4$。至此，我们证明了 ❹ 对光滑曲线成立。

应用同 2.6 一样的推理，可得 ❹ 对所有利普希茨曲线成立。此外，2.10 推出 ❹ 对任意可求长曲线成立，因为弧长参数化会将可求长曲线变为利普希茨曲线。

剩下只需考虑不可求长曲线的情形；只需证明

$$\operatorname{length}\gamma = \infty \quad\Longrightarrow\quad \overline{\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}}} = \infty.$$

由长度的定义可知，

$$\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}} + \operatorname{length}\gamma_{\mathrm{v}} \geqslant \operatorname{length}\gamma$$

对于 $\mathbb{R}^2$ 中任意一对正交归一向量 (u,v) 都成立。因此，如果 γ 的长度无限大，那么 γ_{u} 的平均长度也无限大。

□

2.18. 练习。 考虑一条简单闭曲线 γ，它围成平面上的图形 F。用 s 表示 F 在直线上的投影的平均长度。证明 $\operatorname{length}\gamma \geqslant \pi\cdot s$。此外，当且仅当 γ 是凸集时，等式成立。

利用给定的命题解答 *2.16*。

下一个练习给出了欧几里得空间中类似的公式。

与之前一样，用 w_{u} 表示向量 w 沿 u 的方向在直线上的正交投影。接下来，用 $\mathrm{w}_{\mathrm{u}}^{\perp}$ 表示 w 在与 u 正交的平面上的投影；也就是说

$$\mathrm{w}_{\mathrm{u}}^{\perp} = \mathrm{w} - \mathrm{w}_{\mathrm{u}}.$$

接下来，我们用记号 $f(\mathrm{u})$ 表示定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的函数 f 的平均值。

2.19. 进阶练习。 证明空间曲线的长度正比于

(a) 它在所有直线上的投影长度的平均值；即

$$\operatorname{length}\gamma = k_1 \cdot \overline{\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}}}$$

对于某个 $k_1 \in \mathbb{R}$。

(b) 它在所有平面上的投影长度的平均值；即

$$\operatorname{length}\gamma = k_2 \cdot \overline{\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{u}}^{\perp}}$$

对于某个 $k_2 \in \mathbb{R}$。

求出 k_1 和 k_2的值。

G 内部度量

设 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间。对于$\mathcal{X}$ 中的两点 x 和 y，用 $\ell(x, y)$ 表示连接 x 与 y的所有路径长度的下确界；如果不存在这样的路径，则认为 $\ell(x, y) = \infty$。

容易看出，函数 ℓ 满足度量的所有公理，但它可能等于无穷大。因此，如果在 $\mathcal{X}$ 中任意两点都可以用可求长曲线连接，那么 ℓ 就在 $\mathcal{X}$上定义了一个新的度量；此时，ℓ称为 $\mathcal{X}$上的内蕴度量。

显然，对于任意一对点 x、$y \in \mathcal{X}$，$\ell(x, y) \geqslant |x - y|$。如果等式对所有点对都成立，那么度量 $|* - *|$ 称为内蕴度量。

2.20. 练习。 设 $(x, y) \mapsto \ell(x, y)$ 是度量空间 $\mathcal{X}$ 上诱导的内度量。证明ℓ是内度量。

我们大多讨论带有内度量的空间。例如，欧几里得空间的度量是内度量。

子空间 A 上的度量可能不是内蕴度量，即使其母空间 $\mathcal{X}$ 具有内蕴度量。

子空 间 A 上的诱导内在度量中的距离记作 $|x-y|_A$；也就是说，$|x-y|_A$ 是 A 中从 x 到 y的路径长度的下确界。

2.21. 练习。 设 $A \subset \mathbb{R}^3$ 是闭子集。证明： A 是凸的，当且仅当

$$|x-y|_A = |x-y|_{\mathbb{R}^3}$$

对任意 $x, y \in A$ 都成立。

H 球面曲线

用 $\mathbb{S}^2$ 表示空间中的单位球面；即

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1 \right\}.$$

空间曲线 γ 称为球面曲线，如果它位于 $\mathbb{S}^2$ 上；即对任意 t， $|\gamma(t)| = 1$ 。

提醒一下， $\measuredangle(u,v)$表示向量 u 和 v之间的角。

2.22. 观察。 对于任意 $u, v \in \mathbb{S}^2$ ， 等式成立

$$|u-v|_{\mathbb{S}^2} = \measuredangle(u,v).$$

证明。 设 γ 是大圆[2] 上从u 到 v 的短弧，位于 $\mathbb{S}^2$中。那么 $\operatorname{length}\gamma = \measuredangle(u, v)$。因此，

$$|u-v|_{\mathbb{S}^2} \leqslant \measuredangle(u,v).$$

还需证明反向不等式。换句话说，我们需要证明，对于任意内接于 γ 的折线 $\beta = p_0 \dots p_n$，都存在一条内接于任意给定球面曲线 γ_1的折线 $\beta_1 = q_0 \dots q_n$，该曲线连接 u 和 v，使得

$$\operatorname{length}\beta_1 \geqslant \operatorname{length}\beta. \tag{❺}$$

定义 q_i 为 γ_1 上满足等式 $|u-p_i| = |u-q_i|$的第一个点，但令 $q_n = v$。显然， β_1 内接于 γ_1。根据角的三角不等式 (A.16)，

$$\begin{aligned}\measuredangle(q_{i-1}, q_i) &\geqslant \measuredangle(u,q_i) - \measuredangle(u,q_{i-1}) = \\ &= \measuredangle(u,p_i) - \measuredangle(u,p_{i-1}) = \\ &= \measuredangle(p_{i-1}, p_i).\end{aligned}$$

[2]大圆是球面与经过其中心的平面的交集。

根据角单调性 (A.15),

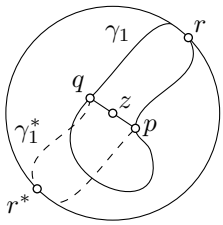
$$|q_{i-1}-q_i| \geqslant |p_{i-1}-p_i|$$

且❺成立。 □

2.23. 半球引理。 任意长度小于 $2\cdot\pi$ 的闭合球面曲线都位于某个开半球内。

这个引理将在芬切尔定理（3.11）的证明中发挥作用。下面的证明出自 Stefani Alexander。它并不像看起来那么简单。阅读之前，不妨先试着自己想出一种证明。

证明。 设 γ 是 $\mathbb{S}^2$ 中的一条长度为 $2\cdot\ell$的闭曲线。假设 $\ell < \pi$。



将 γ 分成两条弧 γ_1 和 γ_2，每条弧的长度均为 ℓ；设 p 和 q 是它们的公共端点。由2.22，得到

$$\begin{aligned}\measuredangle(p,q) &\leqslant \operatorname{length}\gamma_1 = \\ &= \ell < \\ &< \pi.\end{aligned}$$

我们用 z 表示 p 和 q 在 $\mathbb{S}^2$中的中点；也就是说，z 是 p 到 q 在 $\mathbb{S}^2$上的大圆短弧的中点。我们断言，γ 位于以 z为极点的开半球内。若非如此，则 γ 会与赤道相交于某一点 r。不失一般性，可以认为 r 属于 γ_1。

将弧 γ_1 绕经过 z和球面中心的直线旋转角度 π。所得弧 γ_1^* 与 γ_1 构成一条长度为 $2\cdot\ell$、经过 r 及其对径点 r^*的闭曲线。再次应用 2.22，得到

$$\tfrac{1}{2}\cdot\operatorname{length}\gamma = \ell \geqslant \measuredangle(r,r^*) = \pi$$

——矛盾。 □

2.24. 练习。 请描述一条不含对径点对、且不位于任何半球内的简单闭球面曲线。

2.25.练习。 假设简单闭合球面曲线 γ 将 $\mathbb{S}^2$ 分成面积相等的两个区域。证明：

$$\operatorname{length}\gamma \geqslant 2\cdot\pi.$$

2.26. 练习。 找出下面这道题的解答中的错误，并给出正确的解答。

问题。 假设平面上的一条闭曲线长度不超过 4。证明它位于单位圆内。

错误的解法。 只需证明我们的曲线的直径（记作 γ）不超过 2；也就是说，

$$|p-q|\leqslant 2 \tag{❻}$$

对于 γ 上任意两点 p 和 q，
γ 的长度不小于从 p 到 q 再返回 p 的闭合内接折线的长度。因此，

$$2\cdot|p-q|\leqslant \operatorname{length}\gamma\leqslant 4;$$

由此可得 ❻。 □

2.27. 进阶练习。 设 $\mathrm{U},\mathrm{W}\in\mathbb{S}^2$。记 $\mathrm{W}^*_{\mathrm{U}}$ 为以 U 为极点的赤道上离 W 最近的点；换言之，若 $\mathrm{W}^\perp_{\mathrm{U}}$ 是 U 的垂直平面上 W 的投影，则 $\mathrm{W}^*_{\mathrm{U}}$ 是沿 $\mathrm{W}^\perp_{\mathrm{U}}$ 方向的单位向量。向量 $\mathrm{W}^*_{\mathrm{U}}$ 在 $\mathrm{W}\neq\pm\mathrm{U}$ 时有定义。

(a) 证明，对于任意可求长球面曲线 γ，都有其中长度 γ^*_{U} 表示当 U 变化 $\mathbb{S}^2$ 时，γ^*_{U} 的平均长度。*(b)* 利用*(a)*给出半球引理*(2.23)*的另一种证明。

$$\operatorname{length}\gamma=\operatorname{length}\gamma^*_{\mathrm{U}},$$

练习的*(a)*部分就是球面克罗夫顿公式。它可以改写如下：

$$\operatorname{length}\gamma=\overline{n}\cdot\pi,$$

其中 $\overline{n}$ —是 γ 与赤道的交点平均数。等价性由利维单调收敛定理得出。

第3章

曲率

曲率通常指衡量几何对象偏离直线程度的方法，尽管“直线”究竟意味着什么尚不明确。因此，曲线的曲率衡量的是它在某一点偏离直线的程度。

A 加速度与速度

回顾一下，任意光滑曲线都可以按弧长参数化（2.11）。所得曲线，设为 γ，仍然是光滑曲线，且具有单位速度；也就是说，$|\gamma'| = 1$。力学课程中应该学过，物体做匀速运动时，速度垂直于加速度；现在我们将对此重新表述。

3.1. 命题。设 γ 是一条具有单位速度的光滑空间曲线。那么，对于任意 s，$\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$。

两个向量 v 和 w 的数量积记作 $\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle$。回顾一下，数量积的导数满足乘积法则（也称为莱布尼茨恒等式）；也就是说，若 $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t)$ 且 $\mathrm{w} = \mathrm{w}(t)$ 是实变量 t 的光滑向量值函数，则

$$\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle' = \langle \mathrm{v}', \mathrm{w} \rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}' \rangle.$$

证明。对恒等式 $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$ 求导，得到 $2 \cdot \langle \gamma'', \gamma' \rangle = \langle \gamma', \gamma' \rangle' = 0$；因此，$\gamma'' \perp \gamma'$。 □

B 曲率

设 γ 是一条单位速率的光滑空间曲线。那么，量 $|\gamma''(s)|$ 称为曲率在时刻 s 的值 γ。也可以说，$|\gamma''(s)|$ 是点 $p=\gamma(s)$ 处的曲率；如果我们的曲线是简单曲线，就不会产生歧义。曲率记作 $\kappa(s)$ 或 $\kappa(s)\gamma$；对于简单曲线，也可以使用记号 $\kappa(p)$ 或 $\kappa(p)\gamma$。

3.2. 练习。 证明：在光滑简单的空间曲线中，只有直线段在每一点的曲率都为零。

3.3. 练习。 设 γ 是一条光滑简单的空间曲线，γ_λ 是它经过系数为 $\lambda>0$ 的位似变换后得到的曲线；也就是说，对于任意 t，都有 $\gamma_\lambda(t)=\lambda\cdot\gamma(t)$。证明：

$$\kappa(\lambda\cdot p)_{\gamma_\lambda}=\frac{\kappa(p)_\gamma}{\lambda}$$

对于任意 $p\in\gamma$。

3.4. 练习。 证明：任意光滑球面曲线的曲率都不小于1。

C 切向指标曲线

设 γ —一条光滑空间曲线。曲线

❶ $$\mathrm{T}(t)=\tfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|};$$

称为它的切向指标曲线。注意，对于任意 t，$|\mathrm{t}(t)|=1$；也就是说，t 是一条球面曲线。

如果 $s\mapsto\gamma(s)$ 是弧长参数化，那么 $\mathrm{t}(s)=\gamma'(s)$。此时，我们有曲率的如下表达式：

$$\kappa(s)=|\mathrm{T}'(s)|=|\gamma''(s)|.$$

对于一般参数化 $t\mapsto\gamma(t)$，曲率表示为

❷ $$\kappa(t)=\frac{|\mathrm{T}'(t)|}{|\gamma'(t)|}.$$

事实上，如果 $s(t)$ 是弧长参数，那么 $s'(t)=|\gamma'(t)|$，并且

$$\kappa=\left|\frac{d\mathrm{T}}{ds}\right|=\left|\frac{d\mathrm{T}}{dt}\right|\Big/\left|\frac{ds}{dt}\right|=\frac{|\mathrm{T}'|}{|\gamma'|}.$$

请记住，光滑曲线具有光滑的正则参数化；参见 1D。如果 γ 光滑，那么 $t \mapsto \mathrm{t}(t)$ 定义了一个光滑参数化，并且当 $|\mathrm{t}'| = \kappa \cdot |\gamma'|$ 不为零时，该参数化是正则的。由此可知，如果光滑曲线的曲率不为零，那么它的切线指标曲线就是光滑曲线。

3.5. 练习。 设 γ 是一条光滑空间曲线。利用 ❶ 和 ❷，推导其曲率的下列公式：

(a)

$$\kappa = \frac{|\mathrm{w}|}{|\gamma'|^2},$$

где w — *проекция* $\gamma''(t)$ *на нормальную плоскость к* $\gamma'(t)$*;*

(b)

$$\kappa = \frac{|\gamma'' \times \gamma'|}{|\gamma'|^3},$$

где $\times$ *обозначает векторное произведение.*

3.6. 练习。 设 f 是一个光滑实函数。应用上一道练习中的公式，证明

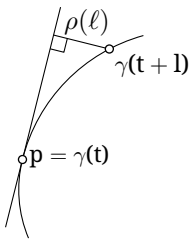
$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

是图像 $y = f(x)$ 在点 $(x,\ f(x))$ 处的曲率。

3.7.进阶练习。 证明，任意曲率不超过 1 的光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ 都可以用曲率恒为 1的光滑曲线来逼近。也就是说，存在一个曲率恒为 1 的光滑曲线序列 $\gamma_n\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$，使得对于任意 t，都有 $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$。

D 切线

设 γ 是一条光滑曲线，t 是它的切向指标曲线。经过 $\gamma(t)$ 且方向为 $\mathrm{t}(t)$ 的直线，称为 γ 在 t 处的切线。任何与 $\mathrm{t}(t)$ 成比例的向量，都称为 γ 在 t 处的切向量。



切线也可以定义为在 γ处当 t时，与曲线有一阶接触的唯一直线；也就是说，$\rho(\ell) = o(\ell)$，其中 $\rho(\ell)$表示从 $\gamma(t + \ell)$到直线的距离。

3.8. 进阶练习。 构造一条光滑的闭合空间曲线，使其切线互不平行。

如果光滑曲线 γ_1 和 γ_2 在 s_1 和 s_2处满足$\gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2)$，且 γ_1 在 s_1 处的切线与 γ_2 在 s_2处的切线重合，那么称这两条光滑曲线相切。也可以说，这两条曲线在点 $p = \gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2)$处相切；如果两条曲线都是简单曲线，则不会产生歧义。

E 总曲率

设 $\gamma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^3$ 是一条单位速度光滑曲线。积分

$$\Phi(\gamma) := \int_{\mathbb{I}} \kappa(s)\cdot ds$$

称为 γ的总曲率。总曲率衡量曲线转弯的程度；它也称为转向的变化量。

变量替换公式可以表示具有一般参数化 $t \mapsto \gamma(t)$的曲线的总曲率：

❸ $$\Phi(\gamma) := \int_{\mathbb{I}} \kappa(t)\cdot|\gamma'(t)|\cdot dt.$$

由于以弧长参数化的光滑曲线，其曲率等于切线像的速度，因此得到如下结论。

3.9. 观察。 光滑曲线的全曲率等于其切线像的长度。

3.10. 练习。 求螺旋线的曲率

$$\gamma_{a,b}(t) = (a\cdot\cos t, a\cdot\sin t, b\cdot t),$$

它的切线像以及它的弧 $\gamma_{a,b}|_{[0,2\cdot\pi]}$ 的全曲率。

3.11. 芬切尔定理。 任意闭合光滑空间曲线的全曲率不小于 $2\cdot\pi$。

证明。 设 γ 是闭合光滑空间曲线。设 γ由一条以弧长参数化的环路 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 描述；在这种情况下， $\gamma(a) = \gamma(b)$，且 $\gamma'(a) = \gamma'(b)$。

考察它的切线指标曲线 $\mathrm{t} = \gamma'$。回顾一下，$|\mathrm{t}(s)| = 1$ 对任意 s都成立；也就是说，t 是一条闭球面曲线。

下面证明 t 不可能位于半球内。反设它位于由不等式 $z > 0$ 在坐标 (x, y, z) 中确定的半球内。换句话说，如果 $\gamma(s) = (x(s)\ y(s)\ z(s))$，那么对任意 t，$z'(t) > 0$。因此，

$$z(b) - z(a) = \int_a^b z'(s)\cdot ds > 0.$$

特别地，$\gamma(a) \neq \gamma(b)$——矛盾。

应用观察结果 (3.9) 和半球引理 (2.23)，可得

$$\Phi(\gamma) = \operatorname{length} \mathrm{T} \geqslant 2\cdot\pi.$$

□

3.12. 练习。 证明，曲率不超过 1 的闭合空间曲线 γ 不短于单位圆；也就是说

$$\operatorname{length}\gamma \geqslant 2\cdot\pi.$$

3.13. 进阶练习。 假设光滑空间曲线 γ 不经过坐标原点。考虑球面曲线 $\sigma(t) := {}^{\gamma}\!/_{|\gamma(t)|}$. 证明

$$\operatorname{length}\sigma < \Phi(\gamma) + \pi.$$

此外，如果 γ 闭合，则

$$\operatorname{length}\sigma \leqslant \Phi(\gamma).$$

最后一个不等式给出了芬切尔定理的另一种证明。事实上，可以假设坐标原点位于弦 γ上。在这种情况下，闭球面曲线 σ 从一个点走向其对跖点，然后返回原处，来回各经过距离 π。因此

$$\operatorname{length}\sigma \geqslant 2\cdot\pi.$$

我们回顾一下，球面曲线的曲率至少为 1（见 3.4）。特别地，球面曲线的长度不超过其全曲率。下一个定理表明，对于单位球中的闭合曲线，同样的不等式也成立。

3.14. DNA定理。 设 γ 是一条位于单位球内的光滑曲线。则

$$\Phi(\gamma) \geqslant \operatorname{length}\gamma.$$

这一定理的若干种证明收录于谢尔盖·塔巴奇尼科夫的文章 [93]中。二维情形由伊什特万·法里证明[28]。唐·查克里安 [18] 将定理推广到了更高维数。下面的练习基于他的另一种证明 [19],, 还有一种证明在 4E 中讨论。

3.15. 练习。 考虑一条单位速率的光滑曲线 $\gamma\colon\ [0,\ell]\to\mathbb{R}^3$，它位于单位球内；即 $|\gamma|\leqslant 1$。 (*a*) 证明

$$\langle\gamma''(s),\gamma(s)\rangle\geqslant-\kappa(s)$$

对任意 s。

(*b*) 利用 (*a*) 证明

$$\int_0^\ell\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle'\cdot ds\geqslant\ell-\Phi(\gamma).$$

(*c*) 设 $\gamma(0)=\gamma(\ell)$ 且 $\gamma'(0)=\gamma'(\ell)$。证明

$$\int_0^\ell\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle'\cdot ds=0.$$

利用 (*b*) 和这个等式证明 *3.14*。

F 凸曲线

本节将证明，凸曲线的切向指标曲线是单调旋转的。下面的练习将在证明中用到。

3.16. 练习。 设 F 是平面上的一个凸集，其边界由光滑曲线 γ 构成。证明，直线 ℓ 在点 p 与 γ 相切，当且仅当 ℓ 在点 p 支撑 F；也就是说，$\ell\ni p$ 和 F 位于由 ℓ 界定的半平面内。

回顾一下，若目标空间中任意一点的原像都是连通的（特别是非空的），则称映射是单调的。

3.17. 命题。 设 γ 是一条光滑凸平面曲线。*(a)* 若 γ 闭合，且 $\gamma\colon\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2$ 是它的参数化，则它的切向指标曲线 $\mathrm{T}\colon\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是单调映射。

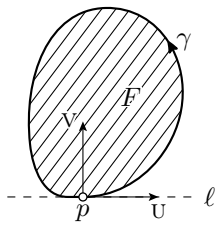
(b) 若 γ 开，且 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 是它的参数化，则它的切向指标曲线 $\mathrm{T}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 确定了一个从某个区间到闭半圆的单调映射。

根据下面的推论，凸曲线满足芬歇尔定理中的等式(3.11)。稍后，在4.8节中，我们将证明，只有凸曲线才满足等式。

3.18. 推论。 设 γ —为平面上的一条凸曲线。
(a) 若 γ 闭合，则 $\Phi(\gamma) = 2\cdot\pi$。*(b)* 若 γ 开，则 $\Phi(\gamma) \leqslant \pi$。

证明。 由3.17a、3.9和2.2可得。 □

证明 3.17； *(a)*。由于 γ 是闭集，它界定了紧致凸集合 F。不妨设 F位于 γ的左侧。



选取单位向量 u，并建立坐标系，使轴 x 沿 u 方向。

由习题 3.16 可知，$\mathsf{u} = \mathsf{t}(s)$ 当且仅当 $p = \gamma(s)$ 是 y坐标在 F上的极小值点。

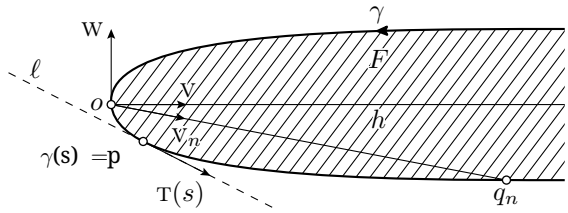
事实上，设 p 为极小值点。过 p 作水平直线 ℓ；它在 p处支撑 F。根据习题，ℓ 在 p处与 γ相切。由于 F位于 γ的左侧，我们得到 $\mathsf{t}(s) = \mathsf{u}$。反之，若 $\mathsf{t}(s) = \mathsf{u}$，则点 $p = \gamma(s)$处的切线是水平的，并且根据习题，它支撑 F。由于 F 位于 γ 的左侧，y坐标在 F 上的极小值于点 p处达到。

由于集合 F 紧致，y 坐标在 F 的某个点 $p = \gamma(s)$ 处达到最小值。点 p 可能是唯一的，此时 $\mathsf{t}^{-1}\{\mathsf{u}\} = \{s\}$；也可能 y 坐标在 γ 上有一条最小点线段，此时 $\mathsf{t}^{-1}\{\mathsf{u}\}$——是 $\mathbb{S}^1$ 中的一条弧。因此，映射 $\mathsf{t}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是单调的。

(b) 与 *(a)* 中相同的推理表明，t 是到其像上的单调映射。显然，该像在 $\mathbb{S}^1$ 中是连通的。剩下要证明的是，该像包含在一个半圆内；换句话说，

❹ $\quad \measuredangle(\mathrm{w}, \mathrm{T}(s)) \geqslant \frac{\pi}{2}$ для некоторого w и любого s.

由于 γ 是开集，它界定了一个非紧凸闭集 F。和之前一样，假设 F 位于 γ的左侧。



我们证明存在一条射线，例如 h，包含在 F中。可以假设坐标原点 o 位于 F 中。考虑点序列 $q_n \in F$，使得当 $n \to \infty$ 时， $|q_n| \to \infty$ 。用 v_n 表示沿 q_n方向的单位向量；也就是说，$\mathrm{v}_n = \frac{q_n}{|q_n|}$。

由于单位圆是紧致的，取子序列 q_n后，不妨设 v_n 收敛于某个单位向量，记为 v。从 o 沿 v 的方向作射线 h 。h 上的任意点都可以用当 $n \to \infty$时线段 $[o, q_n]$ 上的点逼近。因此，射线 h 位于 F中，因为 F 是闭集。

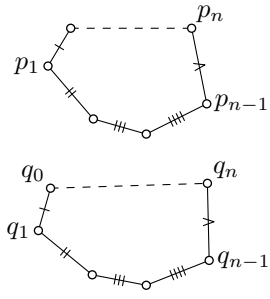
设 w 是将 v 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量， ℓ 是 γ 在点 $p = \gamma(s)$处的切线直线，而 H 是由 ℓ界定的闭合左半平面；也就是说，按照 t(s)的方向， H 位于 ℓ 的左侧。与*(a)*中相同的推理表明， F，因此h也位于 H 中。特别地，v 从 p 指向 H，这等价于 ❹。

□

G 关于手的引理

下一个引理由埃哈德·施密特证明 [88]；它推广了阿克塞尔·舒尔的结果 [90]。 p_0

该引理是微分几何中奥古斯丁-路易·柯西所谓“手的引理”的类似命题。根据该引理，如果平面上的凸多边形$p_0 \dots p_n$与空间折线 $q_0 \dots q_n$满足



$$|p_i - p_{i-1}| = |q_i - q_{i-1}|,$$
$$\measuredangle[p_i \, {}^{p_{i+1}}_{p_{i-1}}] \leqslant \measuredangle[q_i \, {}^{q_{i+1}}_{q_{i-1}}]$$

对于所有 i，则 $|p_0 - p_n| \leqslant |q_0 - q_n|$。 (可以这样理解：如果把手臂的所有关节伸直，那么从肩膀到中指指尖的距离就会增加。)

3.19. 引理。 设 $\gamma_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ 和 $\gamma_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ 是两条单位速度光滑曲线。假设对于任意 s，都有 $\kappa(s)_{\gamma_1}\geqslant\kappa(s)_{\gamma_2}$，并且曲线 γ_1 是凸曲线的一段弧；也就是说，它沿着某个凸平面图形的边界行进。那么，γ_1 的端点之间的距离不大于 γ_2的端点之间的距离；也就是说

$$|\gamma_1(b)-\gamma_1(a)|\leqslant|\gamma_2(b)-\gamma_2(a)|.$$

下面的练习说明，凸性 γ_1 是必要条件。值得在阅读证明之前先做一做。

3.20. 练习。 构造两条速度为单位速度的简单光滑曲线 γ_1，γ_2：$[a,b]\to\mathbb{R}^2$，使得 $\kappa(s)_{\gamma_1}>\kappa(s)_{\gamma_2}>0$ 对任意 s都成立，并且

$$|\gamma_1(b)-\gamma_1(a)|>|\gamma_2(b)-\gamma_2(a)|.$$

引理的证明。 可以假设 $\gamma_1(a)\neq\gamma_1(b)$；否则就无须证明。根据凸性，曲线 γ_1 位于经过 $\gamma_1(a)$ 和 $\gamma_1(b)$ 的直线 ℓ 的一侧；设 ℓ 水平指向，且 γ_1 位于其下方。

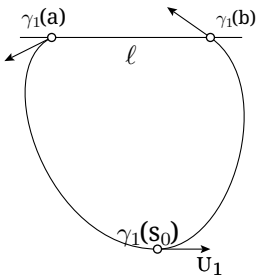
设 $\gamma_1(s_0)$ 是 γ_1 上最低的点；也就是说，$\gamma_1(s_0)$ 的 y 坐标最小。

分别用 t_1 和 t_2 表示 γ_1 和 γ_2的切向指标曲线。考虑两个单位向量

$$\mathrm{u}_1=\mathrm{T}_1(s_0)=\gamma_1'(s_0),\quad\text{и}\quad\mathrm{u}_2=\mathrm{T}_2(s_0)=\gamma_2'(s_0).$$

注意，$\gamma_1(b)$沿着从 $\gamma_1(a)$指向 u_1 的方向。

我们来证明，



❺ $$\measuredangle(\gamma_1'(s),\mathrm{u}_1)\geqslant\measuredangle(\gamma_2'(s),\mathrm{u}_2)$$

对于任意 s_0。设 $s\leqslant s_0$； $s\geqslant s_0$ 的情况类似。

注意到

❻ $$\measuredangle(\gamma_1'(s),\mathrm{u}_1)=\measuredangle(\mathrm{T}_1(s),\mathrm{u}_1)=\\=\operatorname{length}(\mathrm{T}_1|_{[s,s_0]}).$$

对于任意 $s\leqslant s_0$。事实上，根据 3.16， y 坐标 γ_1 在区间 $[a,s_0]$ 上单调不减。因此，弧 $\mathrm{t}_1|_{[a,s_0]}$ 位于以 u_1 和 $-\mathrm{u}_1$ 为端点的某个单位半圆内。剩下只需应用 3.9、3.17 和 2.2。

由 2.22 还可得,

❼ $$\measuredangle(\gamma_2'(s), \mathrm{U}_2) = \measuredangle(\mathrm{T}_2(s), \mathrm{U}_2) \leqslant \operatorname{length}(\mathrm{T}_2|_{[s,s_0]}).$$

接下来,

$$\begin{aligned}\operatorname{length}(\mathrm{T}_1|_{[s,s_0]}) &= \int_s^{s_0} |\mathrm{T}_1'(t)|\cdot dt = \\ &= \int_s^{s_0} \kappa_1(t)\cdot dt \geqslant \int_s^{s_0} \kappa_2(t)\cdot dt = \\ &= \int_s^{s_0} |\mathrm{T}_2'(t)|\cdot dt = \operatorname{length}(\mathrm{T}_2|_{[s,s_0]}).\end{aligned}$$

这个不等式与❻和❼一起推出❺。

由于 $1 = |\gamma_1'(s)| = |\gamma_2'(s)| = |\mathrm{u}_1| = |\mathrm{u}_2|$,

$$\langle \gamma_1'(s), \mathrm{U}_1\rangle = \cos\measuredangle(\gamma_1'(s), \mathrm{U}_1) \quad \text{и} \quad \langle \gamma_2'(s), \mathrm{U}_2\rangle = \cos\measuredangle(\gamma_2'(s), \mathrm{U}_2).$$

余弦在区间 $[0, \pi]$上递减；因此，❺推出

❽ $$\langle \gamma_1'(s), \mathrm{U}_1\rangle \leqslant \langle \gamma_2'(s), \mathrm{U}_2\rangle$$

对任意 s。接下来,

$$|\gamma_1(b) - \gamma_1(a)| = \langle \mathrm{U}_1, \gamma_1(b) - \gamma_1(a)\rangle,$$

因为 $\gamma_1(b)$ 位于从 $\gamma_1(a)$ 沿 u_1 的方向上。由于 u_2 是单位向量,

$$|\gamma_2(b) - \gamma_2(a)| \geqslant \langle \mathrm{U}_2, \gamma_2(b) - \gamma_2(a)\rangle.$$

对 ❽ 积分，得到

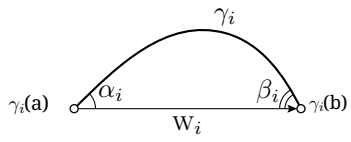
$$\begin{aligned}|\gamma_1(b) - \gamma_1(a)| &= \langle \mathrm{U}_1, \gamma_1(b) - \gamma_1(a)\rangle = \\ &= \int_a^b \langle \mathrm{U}_1, \gamma_1'(s)\rangle\cdot ds \leqslant \int_a^b \langle \mathrm{U}_2, \gamma_2'(s)\rangle\cdot ds = \\ &= \langle \mathrm{U}_2, \gamma_2(b) - \gamma_2(a)\rangle \leqslant |\gamma_2(b) - \gamma_2(a)|.\end{aligned}$$

□

3.21. 进阶练习。 假设 γ_1 和 γ_2 如弓引理（*3.19*）中所述，而 T_1 和 T_2 是它们的切向指标曲线。

设

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_i &= \gamma_i(b) - \gamma_i(a),\\ \alpha_i &= \measuredangle(\mathrm{T}_i(a), \mathrm{w}_i),\\ \beta_i &= \measuredangle(\mathrm{T}_i(b), \mathrm{w}_i).\end{aligned}$$



(a) 假设 $\beta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$。证明 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$。 *(b)* 举例说明，不等式 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$在一般情况下不成立。

3.22. 练习。设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$—是一条光滑曲线，且 $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$。假设

$$\Phi(\gamma) \leqslant 2\cdot\theta.$$

(a) 证明

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| > \cos\theta \cdot \operatorname{length}\gamma.$$

(b) 证明：如果 γ 自相交，则 $\Phi(\gamma) > \pi$。画一条具有 $\Phi(\gamma) < 2\cdot\pi$ 和自交的光滑曲线 γ。

(c) 证明 *(a)* 中的不等式是最优的；也就是说，对于给定的 θ，存在一条光滑曲线 γ，使得 $\Phi(\gamma) \leqslant\leqslant 2\cdot\theta$，且 $\frac{|\gamma(b)-\gamma(a)|}{\text{长度}\,\gamma}$ 可以任意接近 余弦 θ。

3.23. 练习。设 p 和 q 是单位圆上的点，将圆周分成长度为 $\ell_1 < \ell_2$的两段弧。假设空间曲线 γ 连接 p 和 q，且曲率不超过1。证明：

$$\operatorname{length}\gamma \leqslant \ell_1 \quad \textit{либо} \quad \operatorname{length}\gamma \geqslant \ell_2.$$

下面的练习是对 3.12 的推广。

3.24. 练习。假设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 是曲率不超过 1 的光滑闭曲线。证明：

$$\operatorname{length}\gamma \geqslant 2\cdot\pi.$$

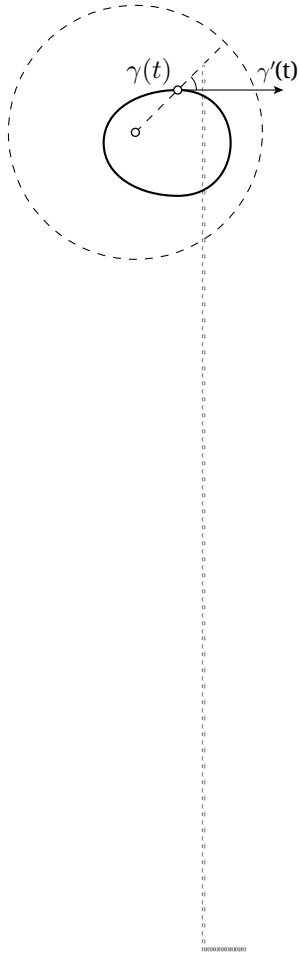
3.25. 练习。设 κ 是定义在区间 $[0,\ell]$上的光滑非负函数。构造一条光滑曲线$\gamma\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}^3$，使其具有单位速度，且曲率为 $\kappa(s)$，对任意 s 均成立，并使距离 $|\gamma(\ell) - \gamma(0)|$ 任意接近 ℓ。

3.26. 进阶练习。*P*

设 γ 是闭合的光滑空间曲线，曲率不超过 2。假设 $|\gamma(t)| \leqslant 1$ 对任意 t都成立。证明，若 $\gamma(t) \neq 0$, 则

$$|\gamma(t)| \leqslant \sin(\alpha(t)),$$

其中， $\alpha(t)$ 表示 $\gamma(t)$与 $\gamma'(t)$之间的角。

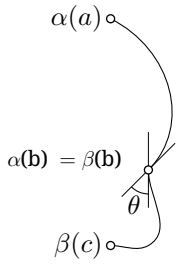


第4章

折线

本章将曲线曲率与内接于其中的折线的角联系起来；这将帮助你建立对曲率的正确几何直觉。

A 分段光滑曲线



设 $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 和 $\beta\colon [b,c] \to \mathbb{R}^3$ 是两条曲线，满足 $\alpha(b) = \beta(b)$。那么可以将它们合并为一条曲线 $\gamma\colon [a,c] \to \mathbb{R}^3$，定义如下：

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{если} \quad t \leqslant b, \\ \beta(t) & \text{если} \quad t > b. \end{cases}$$

曲线 γ 称为 α 和 β 的乘积。（条件 $\alpha(b) = \beta(b)$ 保证映射 $t \mapsto \gamma(t)$ 的连续性。）

同样的定义也可以应用于 α 和/或 β 定义在半开区间（a、b] 和/或 $[b,c)$ 上的情形。

假设区间 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 彼此延续并不重要。只需终点 α 与起点 β 重合即可。这样可以移动区间，使其中一个延续另一个。

如果另外还有 $\beta(c) = \alpha(a)$，那么可以考虑这些曲线的循环乘积；这样我们将得到一条闭曲线。

如果 $\alpha'(b)$ 和 $\beta'(b)$ 有定义，那么角 $\theta = \measuredangle(\alpha'(b)\ \beta'(b))$ 称为 γ 在 b 处的外角。如果 $\theta = \pi$，则称 γ 在 b 处具有返回点。

空间曲线 γ称为分段光滑曲线，如果它可以表示为有限条光滑曲线的乘积；如果 γ 闭合，则假定该乘积是循环的。

若 γ 是由光滑弧 γ_1、……、γ_n 拼接而成的曲线，则其全曲率 γ 定义为各段全曲率 γ_i 与外角之和；即

$$\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma_1) + \cdots + \Phi(\gamma_n) + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-1},$$

其中 θ_i 是 γ_i 与 γ_{i+1} 交接处的外角。

若 γ 是闭合的，则其全曲率定义为

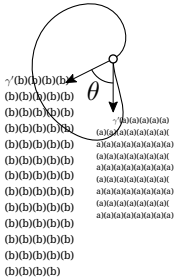
$$\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma_1) + \cdots + \Phi(\gamma_n) + \theta_1 + \cdots + \theta_n,$$

其中 θ_n 是 γ_n 与 γ_1 交接处的外角。

特别地，如果 $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 是一条光滑闭曲线，而 $\hat{}$ γ 是与之对应的闭曲线，那么

$$\Phi(\hat{\gamma}) := \Phi(\gamma) + \theta,$$

其中 $\theta = \measuredangle(\gamma'(a)\ \gamma'(b))$ 。



B 芬歇尔定理的推广

4.1. 定理。设 γ 是一条闭合的分段光滑空间曲线。那么

$$\Phi(\gamma) \geqslant 2{\cdot}\pi.$$

证明。设 γ 是弧 γ_1、……、γ_n 的循环拼接，θ_1、……、θ_n 是它的外角。我们需要证明，

❶ $$\Phi(\gamma_1) + \cdots + \Phi(\gamma_n) + \theta_1 + \cdots + \theta_n \geqslant 2{\cdot}\pi.$$

对于每一段弧 γ_i，考虑其切向指标曲线 t_i；它们都是球面弧。

芬切尔定理（3.11）证明中的论证表明，所有 t_1、……、t_n 不可能都位于开半球内。

从终点 t_i 到起点 t_{i+1} 的球面距离等于外角 θ_i（我们按循环方式为弧编号，因此$\gamma_{n+1} = \gamma_1$）。用球面上的大圆短弧连接终点 t_i 和起点 t_{i+1}，得到一条闭合球面曲线，其长度比 t_1、……、t_n的总长度长 $\theta_1 + \cdots + \theta_n$。

对它应用半球引理（2.23），得到

$$\operatorname{length}\mathrm{T}_1+\dots+\operatorname{length}\mathrm{T}_n+\theta_1+\dots+\theta_n\geqslant 2\cdot\pi.$$

只需应用 3.9。 □

4.2. 弦引理。 设 $\gamma\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^3$ 是一条光滑弧，ℓ 是其弦。假设 γ 在点 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 处分别以角度 α 和 β 趋近于 ℓ；也就是说

$$\alpha=\measuredangle(\mathrm{W},\gamma'(a))\quad u\quad \beta=\measuredangle(\mathrm{W},\gamma'(b)),$$

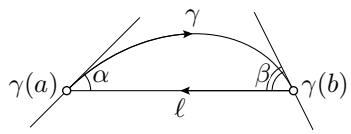
其中 $\mathrm{W}=\gamma(b)-\gamma(a)$。于是

❷ $$\Phi(\gamma)\geqslant\alpha+\beta.$$

证明。 将弦 ℓ 从 $\gamma(b)$ 参数化到 $\gamma(a)$，并令 $\hat{}\gamma$ 为 γ 与 ℓ 的循环乘积。闭曲线 $\hat{}\gamma$ 具有两个外角 $\pi-\alpha$ 和 $\pi-\beta$。

由于 ℓ 的曲率等于零，我们得到

$$\Phi(\hat{\gamma})=\Phi(\gamma)+(\pi-\alpha)+(\pi-\beta).$$



根据广义芬歇尔定理 (4.1)，$\Phi(\hat{}\gamma)\geqslant 2\cdot\pi$；由此可得 ❷。 □

4.3. 练习。 证明引理中的估计是最优的。

更确切地说，给定一对不同的点 p,q 和一对单位向量 U,V，位于 $\mathbb{R}^3$中，构造一条光滑曲线 γ，使其从 p 出发，方向为U，并在 q 处以V方向结束，同时其全曲率 $\Phi(\gamma)$ 可以任意接近 $\measuredangle(\mathrm{W},\mathrm{U})+\measuredangle(\mathrm{W},\mathrm{V})$，其中 W 是一个方向从 p 指向 q 的向量。

C 折线

折线是分段光滑曲线的一种特殊情形；构成折线的每条弧都是一条直线段。由于线段的曲率为零，折线的全曲率就是其外角之和。

4.4. 练习。 设 a、b、c、d 和 x 是 $\mathbb{R}^3$ 中互不相同的点。证明，折线 $abcd$ 的全曲率不可能超过 $abxcd$ 的全曲率；即

$$\Phi(abcd)\leqslant\Phi(abxcd).$$

利用这一点证明，任意闭合折线的曲率不小于 $2{\cdot}\pi$。

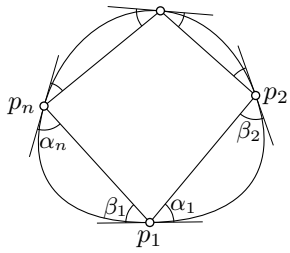
4.5. 命题。 设折线 $p_1 \dots p_n$ 内接于光滑曲线 γ。那么

$$\Phi(\gamma) \geqslant \Phi(p_1 \dots p_n).$$

此外，若 γ 闭合，则可以认为折线$p_1 \dots p_n$ 也闭合。

证明。 设 γ闭合。引入以下记号:

$$\begin{aligned} p_i &= \gamma(t_i), & \alpha_i &= \measuredangle(\mathrm{w}_i, \mathrm{v}_i), \\ \mathrm{w}_i &= p_{i+1} - p_i, & \beta_i &= \measuredangle(\mathrm{w}_{i-1}, \mathrm{v}_i), \\ \mathrm{v}_i &= \gamma'(t_i), & \theta_i &= \measuredangle(\mathrm{w}_{i-1}, \mathrm{w}_i). \end{aligned}$$



下标按模 n 计算；因此$p_{n+1} = p_1$。

由于线段的曲率为零，折线 $p_1 \dots p_n$ 的全曲率等于外角 θ_i 之和。

根据角的三角不等式 A.16,

$$\theta_i \leqslant \alpha_i + \beta_i.$$

根据弦引理 (4.2)，弧 γ 从 p_i 到 p_{i+1} 的全曲率不小于$\alpha_i + \beta_{i+1}$。因此,

$$\begin{aligned} \Phi(p_1 \dots p_n) = \theta_1 + \dots + \theta_n \leqslant \\ \leqslant \beta_1 + \alpha_1 + \dots + \beta_n + \alpha_n = \\ = (\alpha_1 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_1) \leqslant \\ \leqslant \Phi(\gamma). \end{aligned}$$

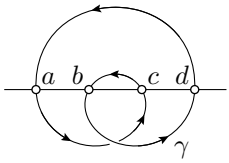
如果 γ 不闭合，则计算过程类似

$$\begin{aligned} \Phi(p_1 \dots p_n) = \theta_2 + \dots + \theta_{n-1} \leqslant \\ \leqslant \beta_2 + \alpha_2 + \dots + \beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \leqslant \\ \leqslant (\alpha_1 + \beta_2) + \dots + (\alpha_{n-1} + \beta_n) \leqslant \\ \leqslant \Phi(\gamma). \end{aligned}$$

□

4.6. 练习。 使用 *4.5* 解决练习 *3.22b*。

4.7. 练习。 闭合曲线 γ 与直线相交于四个点 a、b、c 和 d。假设这些点在直线上的顺序为 a、b、c、d，而在曲线 γ 上的顺序为 a、c、b、d。证明：



$$\Phi(\gamma) \geqslant 4{\cdot}\pi.$$

D 那么，如果 $\Phi(\gamma) = 2{\cdot}\pi$?

4.8. 命题。 芬歇尔定理中的等号仅在平面凸曲线的情形下成立；也就是说，光滑空间曲线 γ 的全曲率等于 $2{\cdot}\pi$，当且仅当 γ 是凸平面曲线。

证明 4.8. 充分性由 3.18 得出；剩下要证明必要性。

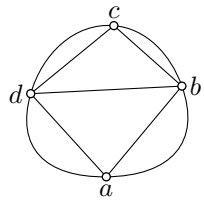
设 $abcd$ 是内接于 γ的四边形。根据全曲率的定义，

$$\begin{aligned}\Phi(abcd) &= (\pi - \measuredangle[a\,{}^{d}_{b}]) + (\pi - \measuredangle[b\,{}^{a}_{c}]) + (\pi - \measuredangle[c\,{}^{b}_{d}]) + (\pi - \measuredangle[d\,{}^{c}_{a}]) = \\ &= 4{\cdot}\pi - (\measuredangle[a\,{}^{d}_{b}] + \measuredangle[b\,{}^{a}_{c}] + \measuredangle[c\,{}^{b}_{d}] + \measuredangle[d\,{}^{c}_{a}])\end{aligned}$$

根据角的三角不等式 (A.16),

❸ $$\measuredangle[b\,{}^{a}_{c}] \leqslant \measuredangle[b\,{}^{a}_{d}] + \measuredangle[b\,{}^{d}_{c}] \quad \text{и} \quad \measuredangle[d\,{}^{c}_{a}] \leqslant \measuredangle[d\,{}^{c}_{b}] + \measuredangle[d\,{}^{b}_{a}].$$

任意三角形的内角和等于 π。因此，根据上述内容可得



$$\begin{aligned}\Phi(abcd) \geqslant 4{\cdot}\pi &- (\measuredangle[a\,{}^{d}_{b}] + \measuredangle[b\,{}^{a}_{d}] + \measuredangle[d\,{}^{b}_{a}]) - \\ &- (\measuredangle[c\,{}^{b}_{d}] + \measuredangle[d\,{}^{c}_{b}] + \measuredangle[b\,{}^{d}_{c}]) = \\ &= 2{\cdot}\pi.\end{aligned}$$

根据 4.5,

$$\Phi(abcd) \leqslant \Phi(\gamma) \leqslant 2{\cdot}\pi.$$

因此，❸ 中等号成立。这意味着点d 属于角 abc，而点 b 属于角 cda。后者意味着$abcd$ 是平面上的凸四边形。

也就是说，内接于 γ 的任意四边形都是平面的且凸的。因此，所有点 γ 都位于由 γ 上的三个点确定的同一平面内。又因为内接于 γ 的任意四边形都是凸的，所以曲线 γ 本身也是凸的。

□

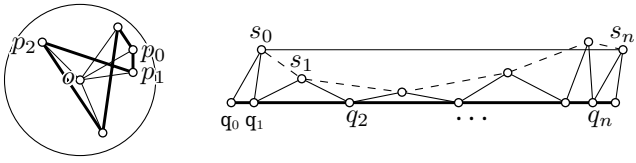
E DNA 广义定理

4.9. 定理。设 $p_1 \dots p_n$ 是单位球内的一条闭折线。那么

$$\Phi(p_1 \dots p_n) > \text{length}(p_1 \dots p_n).$$

根据练习 4.11，该定理推出了定理（3.14）的光滑版本。也就是说，4.9 推广了 3.14。

证明。我们假设 $p_n = p_0, p_{n+1} = p_1$，依此类推。将 p_i处的外角记为 θ_i。



设 o 是球心。考虑如下三角形序列

$$\triangle q_0 q_1 s_0 \cong \triangle p_0 p_1 o, \quad \triangle q_1 q_2 s_1 \cong \triangle p_1 p_2 o, \quad \dots$$

这些三角形的点 $q_0, q_1, \dots$ 按相同顺序位于同一条直线上，并且所有点 s_i 都位于这条直线的同一侧。

注意到 $s_0 s_n q_n q_0$ 是平行四边形，因此，

$$|s_n - s_0| = |q_n - q_0| = \text{length}(p_1 \dots p_n).$$

因此，

$$|s_0 - s_1| + \dots + |s_{n-1} - s_n| \geqslant \text{length}(p_1 \dots p_n).$$

接下来，

$$|q_i - s_{i-1}| = |q_i - s_i| = |p_i - o| \leqslant 1$$

и

$$\theta_i \geqslant \measuredangle[q_i \, {}^{s_{i-1}}_{s_i}]$$

对于每个 i。因此，

$$\theta_i > |s_{i-1} - s_i|$$

对于每个 i。因此，

$$\begin{aligned} \Phi(p_1 \dots p_n) &= \theta_1 + \dots + \theta_n > \\ &> |s_0 - s_1| + \dots + |s_{n-1} - s_n| \geqslant \\ &\geqslant \text{length}(p_1 \dots p_n). \end{aligned}$$

□

再提及DNA定理的另一种推广；这是由Jeffrey Lagarias和Thomas Richardson [54]得到的；Alexander Nazarov和Fyodor Petrov找到了另一种证明 [72]。这两种证明都复杂得令人遗憾。

4.10. 定理。 假设 α 是一条位于平面上凸图形内的闭曲线，该图形由曲线 γ 所围成。那么， α 的平均曲率不小于 γ 的平均曲率。

F 广义曲率

下一个练习说明，4.5 中的不等式是最佳的。

4.11. 练习。 证明，对于任意光滑空间曲线 γ ，等式

$$\Phi(\gamma) = \sup\{\Phi(\beta)\},$$

其中，精确上确界取遍所有内接于 γ 的折线 β（如果 γ 是闭合的，则假设 β 也闭合）。

练习中的等式用于定义任意曲线 γ 的全曲率——它被定义为内接于 γ 的非退化折线的全曲率的上确界。

这一理论曾被重新发现过几次；参见 [83, III § 1], [3]和 [92]。本章的大多数结论都可以推广到按这种广义意义具有有限全曲率的曲线。

4.12. 练习。 假设曲线$\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^3$ 的全曲率在广义意义下有界；也就是说，内接于 γ 的折线的全曲率存在一个上界。

证明 γ 可求长。构造一个示例，说明逆命题不成立。

第 5 章

挠率

本章主要提供计算练习。除第 5A 节中的定义外，后文将不再使用本章内容。

挠率在很大程度上类似于曲率。曲率表示曲线偏离直线的程度，而挠率表示空间曲线偏离平面的程度（见 5.10）。

A 弗雷内标架

设 γ 是一条光滑空间曲线。我们假设 γ 按弧长参数化，因此速度向量 $\mathrm{T}(s) = \gamma'(s)$ 是单位向量。

假设 γ 在时刻 s 处具有非零曲率；换句话说，$\gamma''(s) \neq 0$。那么在 s 处的法向量定义为

$$\mathrm{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}.$$

注意到，

$$\mathrm{T}'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s) \cdot \mathrm{N}(s).$$

根据 3.1，$\mathrm{N}(s) \perp \mathrm{T}(s)$。因此，向量积

$$\mathrm{B}(s) = \mathrm{T}(s) \times \mathrm{N}(s)$$

是单位向量。此外，向量三元组 $\mathrm{T}(s)$、$\mathrm{N}(s)$、$\mathrm{B}(s)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中构成一个定向正交归一基；它

称为曲线 γ 在 s 处的弗雷内标架。特别地,

❶
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T},\mathrm{T}\rangle &= 1, \quad \langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle = 1, \quad \langle \mathrm{B},\mathrm{B}\rangle = 1,\\ \langle \mathrm{T},\mathrm{N}\rangle &= 0, \quad \langle \mathrm{N},\mathrm{B}\rangle = 0, \quad \langle \mathrm{B},\mathrm{T}\rangle = 0.\end{aligned}$$

向量 $\mathrm{t}(s)$、$\mathrm{n}(s)$ 和 $\mathrm{b}(s)$ 分别称为弗雷内标架的切向量、法向量和副法线。请注意,只有当 $\kappa(s) \neq 0$ 时,弗雷内标架才有定义。

过 $\gamma(s)$ 且由 $\mathrm{t}(s)$ 和 $\mathrm{n}(s)$ 张成的平面 Π_s ,在 s 处称为密切平面;它也可定义为过 $\gamma(s)$ 且垂直于副法线向量 $\mathrm{b}(s)$ 的平面。这是唯一一个在 s 处与 γ 有二阶接触的平面;也就是说, $\rho(\ell) = o(\ell^2)$,其中 $\rho(\ell)$ 是从 $\gamma(s+\ell)$ 到 Π_s 的距离。

B 扭转

设 γ 是一条单位速率的光滑空间曲线,t、n、b 是它的弗雷内标架。量

$$\tau(s) = \langle \mathrm{N}'(s), \mathrm{B}(s)\rangle$$

称为在 s 时的挠率 γ。

与弗雷内标架一样,挠率 $\tau(s_0)$ 只有在 $\kappa(s_0) \not= 0$ 时才有定义。事实上,由于函数 $s \mapsto \kappa(s)$ 是连续的, $\kappa(s_0) \neq 0$ 意味着,对于所有 $s \approx s_0$, $\kappa(s) \neq 0$。因此,弗雷内标架定义在一个包含 s_0 的开区间上。显然,$\mathrm{t}(s)$、$\mathrm{n}(s)$ 和 $\mathrm{b}(s)$ 在各自的定义域内光滑地依赖于 s。所以导数 $\mathrm{n}'(s_0)$ 有定义,从而挠率也有定义。

5.1. 练习。给定 a 和 b,计算螺旋线 $\gamma_{a,\,b}(t) = (a\cdot\cos t,\ a\cdot\sin t,\ b\cdot t)$ 的曲率和挠率。

由此推出,对于给定的 $\kappa > 0$ 和 τ,存在一条曲率为常数 κ、挠率为常数 τ 的螺旋线。

C Frenet 公式

假设曲线 γ的弗雷内标架 $\mathrm{t}(s)$、$\mathrm{n}(s)$、$\mathrm{b}(s)$ 在点 s处有定义。回顾一下,

❷
$$\mathrm{T}' = \kappa\cdot\mathrm{N}.$$

让我们将剩余的导数 n' 和 b' 表示为基 t、n、b。

首先证明,

❸ $$\mathrm{N}' = -\kappa\cdot\mathrm{T} + \tau\cdot\mathrm{B}.$$

事实上，由于基 t,n,b 正交归一，上面给出的公式等价于以下三个恒等式:

❹ $$\langle \mathrm{N}', \mathrm{T}\rangle = -\kappa, \quad \langle \mathrm{N}', \mathrm{N}\rangle = 0, \quad \langle \mathrm{N}', \mathrm{B}\rangle = \tau,$$

最后一个恒等式由挠率的定义得出。第二个恒等式由恒等式 $\langle \mathrm{n},\mathrm{n}\rangle = 1$ в ❶ 得出。对恒等式$\langle \mathrm{t}, \mathrm{n}\rangle = 0$ в ❶ 求导，得到

$$\langle \mathrm{T}', \mathrm{N}\rangle + \langle \mathrm{T}, \mathrm{N}'\rangle = 0.$$

应用 ❷，得到 ❹ 中的第一个恒等式。

对 ❶ 中的第三个恒等式求导，得到 $\mathrm{b}' \perp \mathrm{b}$。对 ❶ 中另外两个含 b 的恒等式求导，得到

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{B}', \mathrm{T}\rangle &= -\langle \mathrm{B}, \mathrm{T}'\rangle = -\kappa\cdot\langle \mathrm{B}, \mathrm{N}\rangle = 0,\\ \langle \mathrm{B}, \mathrm{N}'\rangle &= -\langle \mathrm{B}', \mathrm{N}\rangle = \tau.\end{aligned}$$

又由于基 t, n, b 正交归一，得到

❺ $$\mathrm{B}' = -\tau\cdot\mathrm{N}.$$

方程❷、❸和❺称为弗雷内公式。这三条公式可以写成一个矩阵恒等式:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{T}'\\ \mathrm{N}'\\ \mathrm{B}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{T}\\ \mathrm{N}\\ \mathrm{B}\end{pmatrix}.$$

回顾一下，副法线 b 与密切平面正交。因此，方程❺意味着，挠率衡量的是沿着 γ 移动时，密切平面转动得有多快。

5.2. 练习。 对恒等式$\mathrm{B} = \mathrm{T}\times\mathrm{N}$求导，推导出公式❺ 。

5.3. 练习。 设 γ 是一条曲率非零的光滑空间曲线。证明: γ 位于一个平面内，当且仅当它的挠率恒等于零。

5.4. 练习。 设T，N，B 是光滑曲线的弗雷内标架γ_0: $[a,b]\to\mathbb{R}^3$。考虑曲线 $\gamma_1(t)$: $= \gamma_0(t) + \mathrm{B}(t)$。证明:

$$\operatorname{length}\gamma_1 \geqslant \operatorname{length}\gamma_0.$$

5.5. 练习。 设 γ 是一条光滑空间曲线，T，N，B 是它的弗雷内标架， τ是它的挠率。推导等式

$$\mathrm{B} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{|\gamma' \times \gamma''|} \quad u \quad \tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

5.6. 练习。 求曲线 *m ом ен тов* $\gamma\colon \ t \mapsto (t,\ t^2,\ t^3)$ 在点 $\gamma(t)$处的曲率 $\kappa(t)$ 和挠率 $\tau(t)$。

下一个练习与弓形引理（3.19）密切相关。

5.7. 练习。 设 $\gamma_1,\ \gamma_2\colon \ [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 是两条单位速度曲线。假设

$$|\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)| \geqslant |\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)|$$

对于任意 t_1 和 t_2。证明，对于任意 t_0，都有 $\kappa(t_0)_{\gamma_1} \leqslant \kappa(t_0)_{\gamma_2}$ 。

5.8. 进阶练习。 设 γ 是一条挠率为正的闭合光滑空间曲线。证明，其切向指标曲线具有自交。

D 斜坡线

如果光滑空间曲线 γ与某个固定方向成恒定角度，则称其为斜坡线。下述定理由米歇尔-安热·朗克雷 [59]证明。

5.9. 定理。 设 γ 是一条曲率和挠率分别为 κ 和 τ 的光滑曲线。假设对于所有 s，都有 $\kappa(s) > 0$ 。那么， γ 是斜坡线，当且仅当比值 $\frac{\tau}{\kappa}$ 为常数。

5.10. 证明与练习。 设 γ 是一条具有非零曲率的光滑空间曲线，T,N,B 是其弗雷内标架，而 κ 和 τ 分别是其曲率和挠率。

(a) 假设对于某个固定的非零向量 W ， $\langle \mathrm{W},\mathrm{T} \rangle$ 的值为常数。证明 $\langle \mathrm{W},\mathrm{N} \rangle = 0$。推出 $\langle \mathrm{W},\mathrm{B} \rangle$ 为常数。证明

$$\tau \cdot \langle \mathrm{W}, \mathrm{B} \rangle - \kappa \cdot \langle \mathrm{W}, \mathrm{T} \rangle = 0.$$

由此推出， $\frac{\tau}{\kappa}$ 的比值是恒定的。

(b) 假设比值 $\frac{\tau}{\kappa}$ 不变。证明向量 $\mathrm{W} = \frac{\tau}{\kappa} \cdot \mathrm{T} + \mathrm{B}$ 也不变。由此推出， γ 是一条斜坡线。

设 γ 是一条单位速度光滑曲线，s_0 是其参数的一个固定值。那么曲线

$$\alpha(s) = \gamma(s) + (s_0 - s)\cdot\gamma'(s)$$

称为 γ的渐伸线。注意，如果 $\ell(s)$表示 γ 在 s点处的切线，那么对所有 s，$\alpha(s) \in \ell(s)$，且 $\alpha'(s) \perp \ell(s)$。

5.11. 练习。证明，斜线的渐伸线位于平面上。

E 球面曲线

5.12. 定理。设 γ 是一条挠率 τ 不为零（因此曲率 κ也不为零）的光滑空间曲线。那么，当且仅当满足恒等式时，γ 位于单位球面上：

$$\left|\frac{\kappa'}{\tau}\right| = \kappa\cdot\sqrt{\kappa^2 - 1}.$$

5.13. 证明与练习。假设 γ 是一条具有单位速度的光滑空间曲线，T,N,B 是它的弗雷内标架，而 κ、τ 分别是它的曲率和挠率。

假设 γ 是球面的；也就是说，对于任意 s，$|\gamma(s)| = 1$。证明：

(a) $\langle \mathrm{T}\ \gamma\rangle = 0$ 和 $\langle \mathrm{N}\ \gamma\rangle^2 + \langle \mathrm{B}\ \gamma\rangle^2 = 1$。*(b)* $\langle \mathrm{N}\ \gamma\rangle = -\frac{1}{\kappa}$。*(c)* $\langle \mathrm{B}\ \gamma\rangle' = \frac{\tau}{\kappa}$。*(d)* 利用 *(c)*，证明若 γ 闭合，则对于某个 s，$\tau(s) = 0$。*(e)* 假设挠率 γ 不为零。利用 *(a)–(c)* 证明：

$$\left|\frac{\kappa'}{\tau}\right| = \kappa\cdot\sqrt{\kappa^2 - 1}.$$

现在设 γ 满足 *(e)* 中的恒等式。

(f) 证明点 $\gamma + \frac{1}{\kappa}\cdot\mathrm{N} + \frac{\kappa'}{\kappa^2\cdot\tau}\cdot\mathrm{B}$保持不变。推出 γ 位于以该点为圆心的单位球面上。

对于曲线 γ，其速度为单位速度，且曲率和挠率均非零，当 s 时，经过 $\gamma(s)$、圆心位于 的球面 Σ_s

$$p(s)=\gamma(s)+\tfrac{1}{\kappa(s)}\cdot \mathrm{N}(s)+\tfrac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\cdot\tau(s)}\cdot \mathrm{B}(s)$$

称为在 s处与 γ具有三阶接触的球面曲线 γ s。这是唯一一个在 s处与 γ具有三阶接触的球面；也就是说， $\rho(\ell)=o(\ell^3)$，其中 $\rho(\ell)$ 表示从 $\gamma(s+\ell)$ 到 Σ_s 的距离。

F 基本定理

5.14. 定理。 设 $s\mapsto\kappa(s)$ 和 $s\mapsto\tau(s)$ 是定义在区间 $\mathbb{I}$上的两个光滑函数。假设对所有 s，都有 $\kappa(s)>0$。那么存在一条单位速度的光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{I}\to\mathbb{R}^3$，其曲率为 $\kappa(s)$，挠率为 $\tau(s)$，对任意 $s\in\mathbb{I}$均成立。此外，γ 在保定向的空间等距变换下唯一确定。

证明基于微分方程解的存在唯一性定理（A.29）。

证明。 选取参数值 s_0、点 $\gamma(s_0)$ 以及定向标准正交基 $\mathrm{t}(s_0)$、$\mathrm{n}(s_0)$、$\mathrm{b}(s_0)$。考虑以下微分方程组

❻
$$\begin{cases}\gamma' = \mathrm{T},\\ \mathrm{T}' = \kappa\cdot\mathrm{N},\\ \mathrm{N}' = -\kappa\cdot\mathrm{T}+\tau\cdot\mathrm{B},\\ \mathrm{B}' = -\tau\cdot\mathrm{N}\end{cases}$$

其初始条件为 $\gamma(s_0)$、$\mathrm{t}(s_0)$、$\mathrm{n}(s_0)$、$\mathrm{b}(s_0)$。（我们的方程组由四个向量方程组成，因此可以将其改写为含 12 个标量方程的系统。）

根据 A.29，该系统有唯一解，且解定义在包含 s_0 的最大子区间 $\mathbb{J}\subset\mathbb{I}$ 上。我们来证明 $\mathbb{J}=\mathbb{I}$。

首先注意到

❼
$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{T},\mathrm{T}\rangle=1,\quad \langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle=1,\quad \langle \mathrm{B},\mathrm{B}\rangle=1,\\ &\langle \mathrm{T},\mathrm{N}\rangle=0,\quad \langle \mathrm{N},\mathrm{B}\rangle=0,\quad \langle \mathrm{B},\mathrm{T}\rangle=0\end{aligned}$$

对于参数 s 的任意取值。

确实，由 ❻ 可得以下方程组：

❽
$$\begin{cases} \langle \mathrm{T},\mathrm{T}\rangle' &= 2\cdot\langle \mathrm{T},\mathrm{T}'\rangle = 2\cdot\kappa\cdot\langle \mathrm{T},\mathrm{N}\rangle, \\ \langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle' &= 2\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{N}'\rangle = -2\cdot\kappa\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{T}\rangle + 2\cdot\tau\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{B}\rangle, \\ \langle \mathrm{B},\mathrm{B}\rangle' &= 2\cdot\langle \mathrm{B},\mathrm{B}'\rangle = -2\cdot\tau\langle \mathrm{B},\mathrm{N}\rangle, \\ \langle \mathrm{T},\mathrm{N}\rangle' &= \langle \mathrm{T}',\mathrm{N}\rangle + \langle \mathrm{T},\mathrm{N}'\rangle = \kappa\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle - \kappa\cdot\langle \mathrm{T},\mathrm{T}\rangle + \tau\cdot\langle \mathrm{T},\mathrm{B}\rangle, \\ \langle \mathrm{N},\mathrm{B}\rangle' &= \langle \mathrm{N}',\mathrm{B}\rangle + \langle \mathrm{N},\mathrm{B}'\rangle = \kappa\cdot\langle \mathrm{T},\mathrm{B}\rangle + \tau\cdot\langle \mathrm{B},\mathrm{B}\rangle - \tau\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle, \\ \langle \mathrm{B},\mathrm{T}\rangle' &= \langle \mathrm{B}',\mathrm{T}\rangle + \langle \mathrm{B},\mathrm{T}'\rangle = -\tau\cdot\langle \mathrm{N},\mathrm{T}\rangle + \kappa\cdot\langle \mathrm{B},\mathrm{N}\rangle. \end{cases}$$

❼ 中的常数满足该系统。此外，由于基 $\mathsf{t}(s_0)$、$\mathsf{n}(s_0)$、$\mathsf{b}(s_0)$ 是定向且正交归一的，❼ 为系统 ❽ 的柯西问题提供了解。

假设 $\mathbb{J} \subsetneq \mathbb{I}$。那么 $\mathbb{J}$ 的一个端点，例如 b，位于 $\mathbb{I}$ 的内部。定理 A.29 适用于 $\Omega = \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{I}$。因此，$\gamma(s)$、$\mathsf{t}(s)$、$\mathsf{n}(s)$、$\mathsf{b}(s)$ 中的一个值在 $s \to b$ 时趋于无穷大。但这是不可能的——向量 $\mathsf{t}(s)$、$\mathsf{n}(s)$、$\mathsf{b}(s)$ 始终是单位向量，并且 $|\gamma'(s)| = |\mathsf{t}(s)| = 1$；因此，$\gamma$ 在 $s \to b$ 时只经过有限的距离。由此，$\mathbb{J} = \mathbb{I}$，定理的第一部分得证。

现在假设有两条曲线 γ_1 和 γ_2，其曲率和挠率函数已知。对空间施加一个等距变换后，可设 $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$，且两条曲线的弗雷内标架在 s_0处重合。那么根据系统 (A.29) 解的唯一性，$\gamma_1 = \gamma_2$，证毕。

□

5.15. 练习。 假设曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 具有恒定的速度、曲率和挠率。证明，γ 是一条螺旋线，也可能退化为一个圆；也就是说，在适当的坐标系中，$\gamma(t) = (a\cdot\text{余弦}\, t,\ a\cdot\text{正弦}\ t,\ b\cdot t)$，其中 a 和 b为某些常数。

5.16. 进阶练习。 设 γ 是一条光滑空间曲线，且距离 $|\gamma(t) - \gamma(t+\ell)|$ 仅取决于 ℓ。证明，γ 是一条螺旋线，也可能退化为直线或圆。

第 6 章

带符号曲率

平面上的曲线可以向左或向右转弯。这使我们能够为平面曲线引入曲率的符号。如果沿着曲线在平面上驾驶汽车，有向曲率就决定了方向盘的位置。

A 定义

设 γ 是一条单位速度光滑平面曲线。照例，$\mathrm{t}(s) = \gamma'(s)$ 是它在 s 处的单位切向量。

将 $\mathrm{t}(s)$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角；把所得向量记作 $\mathrm{n}(s)$。$\mathrm{t}(s)$、$\mathrm{n}(s)$ 这一对向量构成平面的定向正交归一基。它类似于弗雷内基（见 5A），也将称为弗雷内基。

回忆一下，$\gamma''(s) \perp \gamma'(s)$（见 3.1）。因此，

❶ $$\mathrm{T}'(s) = k(s)\cdot \mathrm{N}(s).$$

对于某个数 $k(s)$。量 $k(s)$ 称为在 s 处的有向曲率 γ，也可记作 $k(s)\gamma$。注意，

$$\kappa(s) = |k(s)|;$$

也就是说，除符号外，有向曲率 $k(s)$ 与通常的曲率 $\kappa(s)$ 相同（见 3B）。有向曲率的符号表示旋转方向：如果曲线向左延伸，则 $k(s) > 0$。如果想强调我们讨论的是通常的曲率，可以称之为无符号曲率。

有向曲率在反转曲线的参数化方向以及反转平面的定向时都会改变符号。

由于 $\mathrm{t}(s)$、$\mathrm{n}(s)$ 构成标准正交基，

$$\langle \mathrm{T}, \mathrm{T}\rangle = 1, \qquad \langle \mathrm{N}, \mathrm{N}\rangle = 1, \qquad \langle \mathrm{T}, \mathrm{N}\rangle = 0.$$

对这些恒等式求导，得到

$$\langle \mathrm{T}', \mathrm{T}\rangle = 0, \qquad \langle \mathrm{N}', \mathrm{N}\rangle = 0, \qquad \langle \mathrm{T}', \mathrm{N}\rangle + \langle \mathrm{T}, \mathrm{N}'\rangle = 0.$$

根据 ❶，$\langle \mathrm{t}', \mathrm{n}\rangle = k$。因此，$\langle \mathrm{t}, \mathrm{n}'\rangle = -k$，且

❷ $$\mathrm{N}'(s) = -k(s)\cdot \mathrm{T}(s).$$

方程 ❶ 和 ❷ 称为平面曲线的弗雷内公式。它们可以写成一个矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{T}' \\ \mathrm{N}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{N} \end{pmatrix}.$$

6.1. 练习。 设 T 是光滑曲线 $\gamma_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 的切向指标曲线。考虑曲线 $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$，其定义为 $\gamma_1(t) := \gamma_0(t) + \mathrm{T}(t)$。证明

(a) 长度 $\gamma_0 \leqslant$ 长度 γ_1; *(b)* $\Phi(\gamma_0) \leqslant \operatorname{length} \gamma_1$.

上面的曲线 γ_0 和 γ_1 描述了理想化自行车的轮胎轨迹，其两轮之间的距离为单位长度。由练习可知，前轮的轨迹通常更长。更多相关内容可参阅罗伯特·富特、马克·利维和谢尔盖·塔巴奇尼科夫的综述 [32]。

B 基本定理

6.2. 定理。 对于定义在区间 $\mathbb{I}$ 上的任意光滑函数 $s \mapsto k(s)$，都存在一条光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$，其速度为单位速度，且对任意 s，其定向曲率为 $k(s)$。此外，γ 在保定向的平面等距变换意义下唯一确定。

该定理是其三维对应定理（5.14）的一个特例，但我们将给出直接证明。

证明。 取 $s_0 \in \mathbb{I}$。考虑函数

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(t)\cdot dt.$$

根据牛顿-莱布尼茨公式，对于所有 s， $\theta'(s) = k(s)$。设 $\mathrm{t}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$，以及 $\mathrm{n}(s) = (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$；也就是说，$\mathrm{n}(s)$ 是将 $\mathrm{t}(s)$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度$\frac{\pi}{2}$ 逆时针。考虑曲线

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \mathrm{T}(s) \cdot ds.$$

由于 $|\gamma'| = |\mathrm{t}| = 1$，曲线 γ 具有单位速度，且 t、n 是它的弗雷内标架。

注意，

$$\begin{aligned}\gamma''(s) = \mathrm{T}'(s) = \\ = (\cos(\theta(s))', \sin(\theta(s))') = \\ = \theta'(s) \cdot (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \\ = k(s) \cdot \mathrm{N}(s).\end{aligned}$$

也就是说，曲线 γ 在 s 处的有向曲率等于 $k(s)$。

存在性已得到证明；剩下的是证明唯一性。

假设 γ_1 和 γ_2 是满足定理条件的两条曲线。通过施加一个平面等距变换，可以使点 $\gamma_1(s_0)$与 $\gamma_2(s_0)$重合，并使两条曲线在 s_0处的弗雷内标架也重合。设 t_1,n_1 和 t_2,n_2 分别是曲线 γ_1 和γ_2的弗雷内标架。两组三元组 γ_i、t_i、n_i 都满足以下常微分方程组

$$\begin{cases}\gamma_i' = \mathrm{T}_i, \\ \mathrm{T}_i' = k \cdot \mathrm{N}_i, \\ \mathrm{N}_i' = -k \cdot \mathrm{T}_i.\end{cases}$$

此外，这两组三元组在 s_0 中具有相同的初始值，因此，根据柯西问题（A.29）解的唯一性，$\gamma_1 = \gamma_2$ □

设 $\gamma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$—为一条单位速度曲线。函数 $\theta\colon \mathbb{I} \to\to \mathbb{R}$ 称为 γ 的连续辐角，如果它是连续的，并且

$$\gamma'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

对任意 s 均成立。从定理的证明中可得出以下结论。

6.3. 推论。对任意单位速度光滑曲线$\gamma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$，都存在连续辐角 $\theta\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}$。此外，

$$\theta'(s) = k(s),$$

其中 k —有向曲率 γ。

C 总有向曲率

设 $\gamma\colon\ \mathbb{I}\to\mathbb{R}^2$ 是一条速度为单位长度的光滑平面曲线。平面曲线的有向曲率 γ记作$\Psi(\gamma)$；它定义为积分

❸ $$\Psi(\gamma)=\int_{\mathbb{I}} k(s)\cdot ds,$$

其中 k — γ的有向曲率。

如果 $\mathbb{I}=[a,b]$，那么

❹ $$\Psi(\gamma)=\theta(b)-\theta(a),$$

其中 θ — γ 的连续辐角（见 6.3）。

如果 γ 是分段光滑曲线，那么它的总有向曲率定义为各弧段的总有向曲率之和，加上接合处有向外角之和；当 γ 向左转时，这些角为正；当 γ向右转时，这些角为负；当 γ 直行时，这些角为 0。返回点处的有向角无定义。

换句话说，如果 γ是光滑弧 γ_1、.....、 γ_n的乘积，那么

$$\Psi(\gamma)=\Psi(\gamma_1)+\dots+\Psi(\gamma_n)+\theta_1+\dots+\theta_{n-1},$$

其中 θ_i 是 γ_i 与 γ_{i+1}的接合处的外有向角。如果 γ 是闭合的，那么乘积是循环的，并且

$$\Psi(\gamma)=\Psi(\gamma_1)+\dots+\Psi(\gamma_n)+\theta_1+\dots+\theta_n,$$

其中 θ_n 是 γ_n 与 γ的接合处的外有向角 1.

Поскольку $\left|\int k(s)\cdot ds\right|\leqslant\int|k(s)|\cdot ds$, неравенство

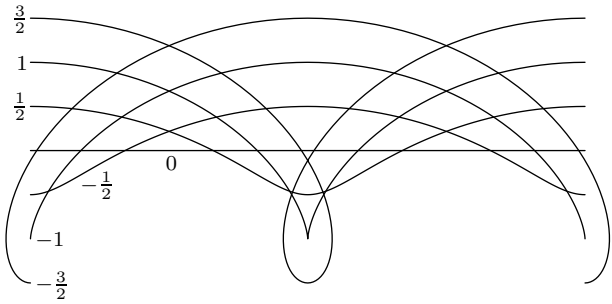
❺ $$|\Psi(\gamma)|\leqslant\Phi(\gamma)$$

对平面上的任意光滑曲线 γ 都成立；也就是说， Ψ 的全有向曲率的绝对值不超过 Φ的全曲率。等式成立，当且仅当有向曲率不变号。

6.4. 练习。摆线是由固定在车轮上的一点在车轮沿直线滚动时描绘出的曲线。摆线族 $\gamma_a\colon\ [0,2\cdot\pi]\to\mathbb{R}^2$ （见图）可以参数化为

$$\gamma_a(t)=(t+a\cdot\sin t, a\cdot\cos t).$$

(a) 对于给定的 $a\in\mathbb{R}$，求 Ψ（γ_a），如果它有定义。



(b) 对给定的 $a \in \mathbb{R}$ ，求出 $\Phi(\gamma_a)$。

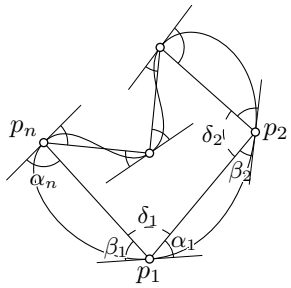
6.5. 命题。 任意简单闭光滑平面曲线 γ 的总有向曲率 $\pm 2\cdot\pi$等于 $+2\cdot\pi$；若由 γ围成的区域位于曲线左侧，该值为 $+2\cdot\pi$；否则为 $-2\cdot\pi$ 。

此外，对于平面上任意简单闭合分段光滑曲线 γ ，只要其总定向曲率有定义，同样的结论也成立。

该命题给出了多边形内角和定理（A.13）的微分几何类比，我们将在证明中用到它。海因茨·霍普夫 [44], [45, 在第 42]页找到了一个更具概念性的证明。

证明。 不失一般性，可以假设 γ的定向使得由 γ围成的区域位于其左侧。还可以假设 γ 的速度为单位速度。

考虑内接于 γ 的闭合折线 $p_1 \dots p_n$。可以认为顶点之间的弧足够小，使得折线是简单的，并且每条弧 γ_i 从 p_i 到 p_{i+1} 都具有较小的全曲率；也就是说，对于任意 i，都有 $\Phi(\gamma_i) < \pi$ 。



设 $p_i = \gamma(t_i)$；和通常一样，以下标模 n 计算；特别地，$p_{n+1} = p_1$。于是

$$\mathrm{w}_i = p_{i+1} - p_i, \qquad \mathrm{v}_i = \gamma'(t_i),$$
$$\alpha_i = \measuredangle(\mathrm{v}_i, \mathrm{w}_i), \qquad \beta_i = \measuredangle(\mathrm{w}_{i-1}, \mathrm{v}_i),$$

这里 α_i，$\beta_i \in (-\pi, \pi)$ 是有向角：如果 $\mathbf{w}_i$ 指向 $\mathbf{v}_i$ 的左侧，则 α_i 为正。

根据 ❹，量

❻ $$\Psi(\gamma_i) - \alpha_i - \beta_{i+1}$$

是 $2\cdot\pi$ 的倍数。由于 $\Phi(\gamma_i) < \pi$，由弦引理（4.2）可得 $|\alpha_i| + |\beta_{i+1}| < \pi$。由❺可得 $|\Psi(\gamma_i)| \leqslant \Phi(\gamma_i)$；因此，❻中的量等于零。也就是说

$$\Psi(\gamma_i) = \alpha_i + \beta_{i+1}$$

对于每个 i，有

注意到，

❼ $$\delta_i = \pi - \alpha_i - \beta_i$$

— p_i处折线的折线内角；对于每个 i，$\delta_i \in (0, 2\cdot\pi)$。回想一下，$n$边形的内角和等于 $(n-2)\cdot\pi$(A.13)；也就是说

$$\delta_1 + \cdots + \delta_n = (n-2)\cdot\pi.$$

因此，

❽
$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) = \Psi(\gamma_1) + \cdots + \Psi(\gamma_n) = \\ = (\alpha_1 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_1) = \\ = (\beta_1 + \alpha_1) + \cdots + (\beta_n + \alpha_n) = \\ = (\pi - \delta_1) + \cdots + (\pi - \delta_n) = \\ = n\cdot\pi - (n-2)\cdot\pi = \\ = 2\cdot\pi.\end{aligned}$$

分段光滑曲线的情形类似；还需要进一步细分循环乘积中的弧，使其满足上述条件。此时不能使用❼，而必须使用方程

$$\delta_i = \pi - \alpha_i - \beta_i - \theta_i,$$

其中 θ_i —曲线 γ 在 p_i处的有向外角；如果曲线 γ 在 p_i处光滑，则该角为零。❽ 中的计算可化为：

$$\begin{aligned}\Psi(\gamma) = \Psi(\gamma_1) + \cdots + \Psi(\gamma_n) + \theta_1 + \cdots + \theta_n = \\ = (\alpha_1 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_1) + \theta_1 + \cdots + \theta_n = \\ = (\beta_1 + \alpha_1 + \theta_1) + \cdots + (\beta_n + \alpha_n + \theta_n) = \\ = (\pi - \delta_1) + \cdots + (\pi - \delta_n) = \\ = n\cdot\pi - (n-2)\cdot\pi = \\ = 2\cdot\pi.\end{aligned}$$

□

6.6. 练习。 在平面上画一条光滑的闭曲线γ，使得

(a) $\Psi(\gamma) = 0$*; (b)* $\Psi(\gamma) = \Phi(\gamma) = 10{\cdot}\pi$*; (c)* $\Psi(\gamma) = 2{\cdot}\pi$ 和 $\Phi(\gamma) = 4{\cdot}\pi$.

6.7. 练习。 设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是平面上的一条光滑曲线，且 T,N 是它的弗雷内标架。对于给定的参数 ℓ，考虑曲线 $\gamma_\ell(t) = \gamma(t) + \ell{\cdot}\mathrm{N}(t)$；它称为与 γ 平行、参数为 ℓ 的曲线。

(a) 证明，当对所有 t 都有 $\ell{\cdot}k(t)_\gamma \neq 1$ 时，参数化 γ_ℓ 是正则的。*(b)* 考虑函数 $L(\ell) =$ 长度 γ_ℓ。证明

$$L(\ell) = L(0) - \ell{\cdot}\Psi(\gamma) \tag{❾}$$

对所有充分接近 0 的 ℓ 都成立。

(c) 举例说明，公式 ❾ 在某些 ℓ 值下可能不成立。

D 密切圆

6.8. 命题。 对于给定的点 $p \in \mathbb{R}^2$、单位向量T 和实数 k，存在唯一一条光滑曲线 $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，其速度为单位速度，从 p 出发，沿T 方向前进，并且具有恒定的有向曲率 k。

此外，若 $k = 0$，则这是直线 $\sigma(s) = p + s{\cdot}\mathrm{T}$；若 $k \neq 0$，则 σ 描绘一个半径为 $\frac{1}{|k|}$、圆心位于 $p + \frac{1}{k}{\cdot}\mathrm{N}$ 的圆，其中T,N 是定向标准正交基。

证明。 选择一个坐标系，使原点位于p，令 t 沿着 x 轴。在这种情况下，n 沿着 y 轴。

注意，

$$\theta(s) = \int_0^s k{\cdot}dt = k{\cdot}s$$

是 σ 的连续参数，参见 6.3。因此，

$$\sigma'(s) = (\,\cos(k{\cdot}s),\, \sin(k{\cdot}s)\,).$$

剩下的就是对最后一个等式积分。如果 $k = 0$，那么得到 $\sigma(s) = (s, 0)$，它描述了直线 $\sigma(s) = p + s{\cdot}\mathrm{t}$。

如果 $k \neq 0$，那么得到

$$\sigma(s) = (\,\tfrac{1}{k}\cdot \sin(k\cdot s),\, \tfrac{1}{k}\cdot(1-\cos(k\cdot s))\,);$$

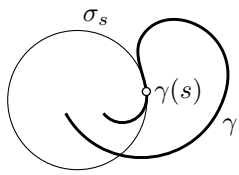
这是一个半径为 $r = \frac{1}{|k|}$、圆心位于 $(0, \frac{1}{k})$ 的圆 $= p + \frac{1}{k}\cdot \mathbf{n}$。 □

6.9. 定义。设 γ 是一条单位速度光滑平面曲线，且 $k(s)$ 是它在 s 处的有向曲率。

曲线 σ_s 是一条有向曲率恒为 $k(s)$ 的单位速度曲线，它从 $\gamma(s)$ 出发，方向为 $\gamma'(s)$，称为曲线 γ 在 s 处的密切圆。

密切圆的中心和半径分别称为曲线在相应点处的曲率中心和曲率半径。

密切圆 可能是圆，也可能是直线；在后一种情况下，曲率中心未定义，而曲率半径可以视为无穷大。

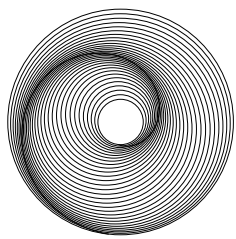


密切圆 σ_s 也可以定义为唯一一个与 γ在 s 处具有二阶接触的圆（或直线）；也就是说，$\rho(\ell) = o(\ell^2)$，其中 $\rho(\ell)$ 表示从 $\gamma(s+\ell)$ 到 σ_s 的距离。

建议熟悉反演概念的读者完成下面的练习。

6.10. 进阶练习。设 γ 是一条不经过坐标原点的平面光滑曲线，且 $\hat{}\gamma$ 是它关于以坐标原点为圆心的圆的反演。证明，反演将 s 处的 $\hat{}$密切圆映射为 s 处 γ 的密切圆。

E 螺旋引理



下面的引理由彼得·泰特证明 [95]，后由阿道夫·克内泽尔重新发现[51]。

6.11. 引理。设 γ 是一条曲率严格递减且为正的平面光滑曲线。那么与 γ 相切的圆周

构成单调族；也就是说，如果 σ_s 是在 s 处与 γ 相切的圆，那么对于任意 $s_0 < s_1$，圆 σ_{s_0} 都位于由 σ_{s_1} 所围成的开圆盘内。

图中画出了一条曲线及其相切圆。它们填满了环域，形成的图案相当奇特：如果一个光滑函数在每个圆上都是常数，那么它在整个环域 [33, 讲座 10] 上都是常数。还要指出，曲线 γ 在自身每一点都与这个曲线族中的一个圆相切。不过，它并不沿着其中任何一个圆延伸。

证明。设 $\mathrm{t}(s)$,$\mathrm{n}(s)$ 是弗雷内标架。记$\omega(s)$ 和 $r(s)$ 分别为曲率 γ 的中心和曲率半径；根据 6.8,

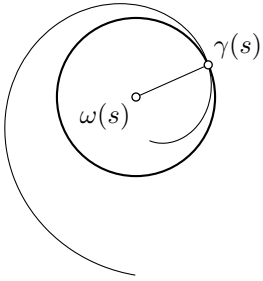
$$\omega(s) = \gamma(s) + r(s)\cdot \mathrm{N}(s).$$

由于曲率为正， $r(s)\cdot k(s) = 1$。应用弗雷内公式 ❷，得到

$$\begin{aligned}\omega'(s) &= \gamma'(s) + r'(s)\cdot \mathrm{N}(s) + r(s)\cdot \mathrm{N}'(s) = \\ &= \mathrm{T}(s) + r'(s)\cdot \mathrm{N}(s) - r(s)\cdot k(s)\cdot \mathrm{T}(s) = \\ &= r'(s)\cdot \mathrm{N}(s).\end{aligned}$$

由于 $k(s)$ 递减， $r(s)$ 递增；因此， $r' \geqslant 0$。由此可知， $|\omega'(s)| = r'(s)$，且 $\omega'(s)$ 沿着 $\mathrm{n}(s)$ 方向。

由于 $\mathrm{n}'(s) = -k(s)\cdot \mathrm{t}(s)$， $\omega'(s)$ 的方向不可能在任何区间内保持不变；换言之，曲线$s \mapsto \omega(s)$ 不含直线段。



特别是，

$$|\omega(s_1) - \omega(s_0)| < \operatorname{length}(\omega|_{[s_0,s_1]})$$

对于任意 $s_0 < s_1$。因此，

$$\begin{aligned}|\omega(s_1) - \omega(s_0)| < \operatorname{length}(\omega|_{[s_0,s_1]}) &= \\ &= \int_{s_0}^{s_1} |\omega'(s)|\cdot ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} r'(s)\cdot ds = \\ &= r(s_1) - r(s_0).\end{aligned}$$

换句话说， σ_{s_1} 和 σ_{s_0} 的中心之间的距离严格小于它们半径之差，因此引理得证。 □

曲线 $s \mapsto \omega(s)$ 称为渐屈线 γ；它描述该曲线的曲率中心，并表示为

$$\omega(t) = \gamma(t) + \tfrac{1}{k(t)}\cdot \mathrm{N}(t).$$

由证明可知，$(\frac{1}{k})' \cdot \mathrm{n}$ 是它的速度向量。

6.12. 练习。 设 ω 是平面上光滑曲线 γ 的渐屈线。假设 γ 的曲率 k 为正，且在所有点处 $k' \neq 0$。求渐屈线 ω 的弗雷内标架和有向曲率，用 k 和曲线 γ 的弗雷内标架 (T,N) 表示。

可以这样理解下面的定理：如果在平面上开车，一直向左打方向盘，就不可能回到原来的位置。

6.13. 定理。 任何曲率为正且严格单调的光滑平面曲线 γ 都没有自交。

即使不假设曲率为正，定理仍然成立；证明只需稍作修改。

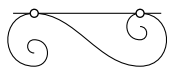
证明。 注意到 $\gamma(s) \in \sigma_s$，其中 σ_s —是与 γ 在 s处相切的圆。由 6.11 可知， σ_{s_0} 在 $s_1 \neq s_0$处不与 σ_{s_1}相交。特别地， $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_0)$，定理得证。 □

6.14. 进阶练习。 验证定理的三维类比并不成立。也就是说，构造一条具有交集且曲率严格单调的光滑曲线。

6.15. 练习。 假设 γ —是一条具有正的严格单调曲率的光滑平面曲线。

(a) 证明没有一条直线在两个不同的点处与 γ 相切。*(b)* 证明没有一个圆在三个不同的点处与 γ 相切。

如果允许负曲率，部分*(a)* 便不再成立；示例见图。



6.16. 进阶练习。证明：具有非零挠率的光滑球面曲线没有自交。

第 7 章

支撑曲线

如果一条曲线与另一条曲线相切，并始终位于它同一侧，那么可以用后一条曲线的曲率来估计前一条曲线的曲率。我们将证明这一命题，并展示如何将其用于研究平面曲线。

A 同向性

设 γ_1 和 γ_2 是平面上的光滑曲线。回顾一下，若曲线 γ_1 和 γ_2 在 t_1 和 t_2处相切，当且仅当 $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$，且它们在 t_1 和 t_2 处分别具有公共切线。在这种情况下，点 $p == \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$称为曲线的切点。注意，速度向量 $\gamma_1'(t_1)$和 $\gamma_2'(t_2)$平行。相切称为



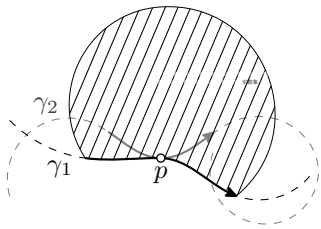
同向或反向，如果向量 $\gamma_1'(t_1)$ 和 $\gamma_2'(t_2)$ 分别同向或相反。

将其中一条曲线的参数化反向，会把同向相切变为反向相切，反之亦然。因此，总可以认为给定的相切是同向的。

B 支撑曲线

设 γ_1 和 γ_2 是具有公共点的两条光滑平面曲线

$$p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2),$$



并且 p 既不是 γ_1的端点，也不是 γ_2的端点。假设，对于某个$\varepsilon > 0$，弧 $\gamma_2|_{[t_2-\varepsilon,t_2+\varepsilon]}$ 位于一个闭合的区域 R 内，且弧 $\gamma_1|_{[t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon]}$ 位于其边界上。那么我们称 γ_1在参数 t_1和 t_2下是 γ_2的局部支撑曲线。此时，如果图中的曲线按箭头方向参数化，那么在点 p 处， γ_1从右侧支撑 γ_2 （同样， γ_2 在 p处从左侧支撑 γ_1 ）。

假设 γ_1 是简单的，并将平面分割成两个闭区域：分别位于 γ_1的左侧和右侧。若γ_1 在全局上于 $p = \gamma_2(t_2)$处支撑 γ_2，我们就说γ_1 全局支撑 γ_2于点 $p = \gamma_2(t_2)$；此时， γ_2位于这两个闭区域之一，且 p 位于 γ_1上。

接下来，假设 γ_2 是平面上的一条简单闭曲线。根据Jordan定理（A.12）， γ_2 将平面分割成两个闭区域：其中一个有界，另一个无界。若p 位于有界区域内（相应地，位于无界区域内），我们就说点 p位于 γ_2 内部（相应地，位于其外部）。如果 γ_1 支撑 γ_2 ，且位于 γ_2 内部（ γ_2外部），那么我们就说 γ_1从内部（相应地，从外部）支撑 γ_2

如果 $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$，且曲线 γ_1 和 γ_2 在 t_1 和 t_2处彼此不相切，那么在时刻 t_2 ，曲线 γ_2 会从 γ_1 的一侧转到另一侧。在这种情况下， γ_1 无法在t_1 和 t_2处支撑 γ_2 ，也就是说，以下结论成立。

7.1. 观察与定义。 设 γ_1 和 γ_2 是平面上的两条光滑曲线。假设 γ_1 在 t_1 和 t_2处局部支撑 γ_2。那么， γ_1 和 γ_2 在 t_1 和 t_2处相切。

在这种情况下，如果曲线同向，且支撑曲线定义中的区域 R 位于弧 γ_1的右侧（左侧），那么我们称 γ_1 从左侧（相应地从右侧）支撑 γ_2 。

如果 $k'(s)_\gamma = 0$，我们就称光滑平面曲线 γ 在s处有一个顶点，也就是说，有向曲率函数在 s处有一个临界点。也可以说，点 $p = \gamma(s)$是 γ 的一个顶点（如果 γ 是简单的，则不会产生歧义）。

7.2. 练习。 证明，光滑平面曲线 γ 上的点 $p = \gamma(s)$ 是其顶点，当密切圆σ_s 在 s 处局部支撑 γ 于 $\gamma(s)$。

C 支撑判据

7.3. 命题。 设 γ_1 和 γ_2 是平面上的光滑曲线。假设 γ_1 在 t_1 处于 γ_2 的左侧（右侧）局部支撑，并且 t_2。则

$$k_1(t_1) \geqslant k_2(t_2) \quad (\textit{соответственно} \quad k_1(t_1) \leqslant k_2(t_2)),$$

其中， k_1 和 k_2 分别是 γ_1 和 γ_2的有向曲率。

此外，严格不等式可推出其逆命题。具体而言，若γ_1 和 γ_2 在 t_1 和 t_2处相切且同向，则

$$k_1(t_1) > k_2(t_2) \quad (\textit{соответственно} \quad k_1(t_1) < k_2(t_2)),$$

可推出 γ_1 在 t_1 和 t_2处局部从左侧（右侧）支撑 γ_2 。

证明。 不失一般性，可设 $t_1 = t_2 == 0$，公共点 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$为坐标原点，且速度向量 $\gamma_1'(0)$、 $\gamma_2'(0)$沿 x轴方向。于是，小弧段 $\gamma_1|_{[-\varepsilon,+\varepsilon]}$ 和 $\gamma_2|_{[-\varepsilon,+\varepsilon]}$ 可表示为光滑函数 f_1和 f_2的图像 $y = f_1(x)$和 $y = f_2(x)$，其中 $f_i(0) = 0$且 $f_i'(0) = 0$。由 3.6， $f_1''(0) = k_1$且$f_2''(0) = k_2$。

显然，如果对于所有足够小的 γ_1， γ_2 在左侧（右侧）托住 γ_1，那么

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \quad (\text{соответственно} \quad f_1(x) \leqslant f_2(x))$$

对于所有足够小的 x都成立。接下来只需对函数 $f_1 - f_2$应用二阶导数极值判别法。

反向结论的证明类似。 □

7.4. 进阶练习。 假设两条单位速度的光滑简单平面曲线 γ_0 和 γ_1 在点 $p = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ 相切且同向，并且对于任意 s，都有 $k_0(s) \leqslant k_1(s)$。证明 γ_0 在点 p局部从右侧托住 γ_1 。

举例说明两条简单曲线 γ_0 和 γ_1满足上述条件，且 γ_0 闭合，但在点 p处并非 γ_1 的全局支撑曲线。

回顾一下（参见 3.14），单位圆内闭合光滑曲线的曲率平均值不小于 1。特别是，曲线上必定存在一点，其曲率至少为 1。下面的练习指出，这对闭环也同样成立。

7.5. 练习。 假设光滑闭曲线 γ 位于平面上的单位圆内。证明， γ 至少在某一点的曲率不小于 1 。

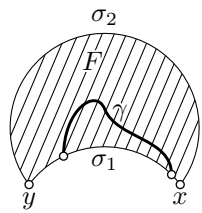
7.6. 练习。 设闭光滑曲线 γ 位于平面上两条平行直线之间，这两条直线的距离为 2。证明， γ上存在一点，其曲率至少为 1。

试着证明光滑平面闭环也有同样的结论。

7.7. 练习。设闭合光滑平面曲线 γ位于三角形 $\triangle$ 内部，且该三角形的内切圆半径为 *1*。证明，曲线 γ 上存在一点，其曲率至少为1。

请注意，上面的三个练习都是练习 7.16 的特例，不过还是请尝试寻找直接的解法。

7.8. 练习。设 F 是平面上由两段圆弧 σ_1 和 σ_2 围成的图形，这两段圆弧的定向曲率为1，且从 x 延伸至 y。假设 σ_1 比 σ_2 短，而光滑弧 γ 位于 F 内，且两个端点都在 σ_1 上。证明，对于某个参数值， γ 的曲率不小于1 。



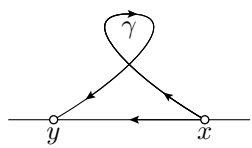
D 凸曲线

回顾一下，如果平面曲线围成一个凸区域，就称它为凸曲线。

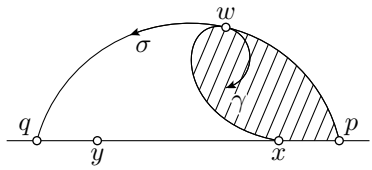
7.9. 命题。 设简单闭光滑曲线 γ在平面上围成紧集 F。曲线凸的充要条件是有向曲率 γ 不变号。

7.10. 透镜引理。 设 γ 是一条从 x 到 y 的光滑简单平面曲线。设 γ 严格位于有向直线 xy 的右侧（左侧），且只有其端点 x 和 y 落在该直线上。那么在 γ 上存在一点，其有向曲率为正（相应地，为负）。

这个引理不适用于存在自交的曲线。例如，图中的曲线 γ 始终向右转，因此它的有向曲率处处为负，但它位于直线 xy的右侧。



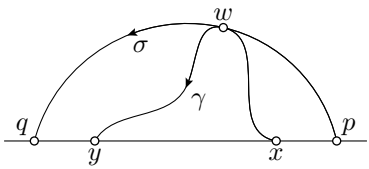
证明。在直线 xy上选取点p 和 q ，使得点 p、x、y、q沿直线依次按此顺序出现。可以假设 p 和 q 距离 x 和 y足够远，这样

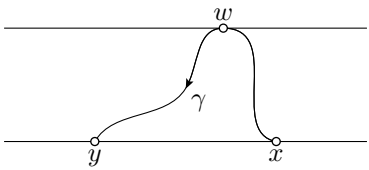


半圆的直径为 pq ，且包含 γ。

考虑包含 γ且以 $[p,q]$为弦的最小圆弓形。它的弧 σ 在某点 $w=\gamma\left(t_0\right)$ 处支撑 γ 。

我们将 σ 参数化为从 p 到 q。注意， γ 与 σ 在 w处相切且同向。否则，从 w 到 y 的弧 γ 就会被困在曲线三角形 xwp中，该三角形由线段 $[p,x]$ 以及曲线弧 σ 和 γ围成。但这是不可能的，因为 y 不属于这个三角形。





由此可知，当 t_0时， σ 从右侧支撑 γ 。根据7.3，

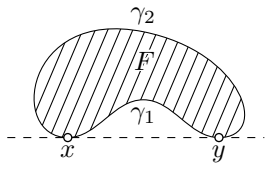
$$k(w)_\gamma \geqslant k_\sigma > 0.$$

□

注。也可以选取 γ上的一点 w ，使其到直线 xy的距离最大。相同的推理表明， w 处的曲率非负，这比所要求的正曲率稍弱。

证明 7.9；必要性。如果 F 是凸的，那么每条与 γ 相切的直线都会支撑 γ。沿着 γ移动时，图形 F必须始终位于其切线的同一侧。可以假设每条切线都从同一侧支撑 γ ，例如右侧。由于直线的曲率为零，根据支撑性判据（7.3）， $k \geqslant 0$ 在每一点都成立。

充分性。将 F 的凸包记为 K 。如果 F 不是凸的，那么 F 是 K 的真子集。因此， ∂K 的边界包含一段直线，而该直线段不是 ∂F 的一部分。换句话说，存在一条直线，在 γ 的两个点处支撑它，设这两个点为 x 和 y。这些点—



将 γ 分成两段弧 γ_1 和 γ_2，两段弧都不同于直线的线段 $[x,y]$。

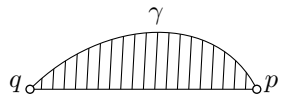
其中一条弧 γ_1 或 γ_2 由 x 参数化至 y，另一条则由y 参数化至 x。应用透镜引理可知，在 γ 上存在曲率符号相反的点

，且曲率方向相反。或许需要改用较短的弧，使得只有它们的端点位于直线上。

□

7.11. 练习。 设 γ 是一条光滑、简单、闭合的平面曲线，直径大于2。证明， γ 上存在一点，其曲率小于1。

7.12.练习。 设 γ 是一条简单的光滑平面弧，端点为 p 和 q。假设 γ 具有非负的有向曲率，



且 $|p-q|$ 等于 γ的直径。证明，弧 γ及其弦 $[p,q]$ 在平面上围成一个凸图形。

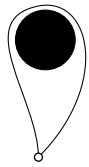
7.13. 练习。 证明，任何曲率不小于1 的简单光滑平面曲线 γ ，其直径不超过2。

试证明， γ 位于单位圆内。

E 水洼中的月亮

下一个定理 уточняет 弗拉基米尔·约宁和赫尔曼·佩斯托夫的结果 [46], ，而对于凸曲线，这一结果此前已知 [11,§ 24]。

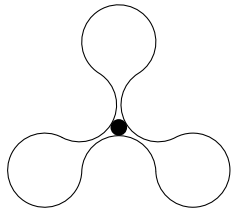
7.14. 定理。 假设曲率不超过1 的简单光滑闭曲线在平面上围成一个图形 F。那么 F 包含单位圆。



这是局部性质到全局性质这一类定理的一个简单但内容丰富的例子。也就是说，我们从某些局部性质（在本例中是曲率的估计

）出发，证明某种全局性质（在本例中是存在一个被曲线包围的单位圆）。

可以尝试从 F 中的某个圆开始，将其膨胀，希望达到单位半径。然而，图中的示例表明，这并不总能导向解决方案——有时，为了达到单位半径，必须先将圆压缩。



7.15. 基本引理。 设 γ —平面上的简单光滑闭曲线。那么，在某一点处与其相切的圆

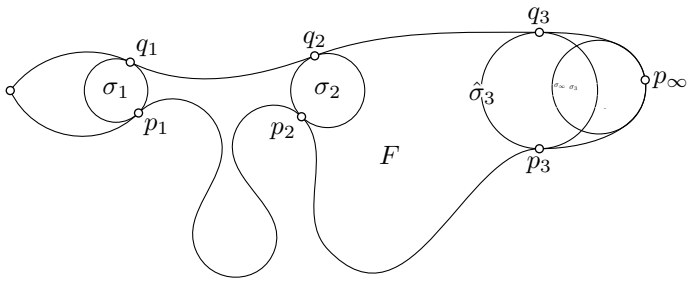
（不同于基准的）全局支撑 γ 从内部。

首先证明定理可由引理推出。

证明7.14，利用7.15。由于曲率 γ 不超过 1，每个相切圆的半径都不小于 1。根据基本引理，其中一个相切圆，比如 σ，从内部支撑 γ。特别地，σ 位于 γ内部，由此得出结论。

□

证明7.15。用 F 表示由 γ 围成的闭区域。可以认为 F 位于 γ 的左侧。反设，在 $p \in \gamma$ 的每一点，密切圆都不位于 F 内。



对于给定的点 $p \in \gamma$，考虑一条完全包含在 F 中并在 p 处与 γ 相切的最大圆。我们把这个圆，姑且称为 σ，称作在 p 处内切于 F 的圆。它的曲率 k_σ 必须大于 $k(p)\gamma$。事实上，由 7.3，$k_\sigma \geqslant k(p)\gamma$，因为 σ从左侧支撑着 γ。若取等号，σ 便是 p 处的密切圆，这与我们的假设矛盾。

因此，σ 必须在另一点与 γ 相切。否则，就可以将它稍微扩大，同时使其仍包含在 F 内。事实上，由于 $k_\sigma > k(p)\gamma$，根据 7.3，存在点 p 的一个邻域 U，使得稍微扩大 σ 后，$U \cap \sigma$ 的交集仍包含在 F 内。另一方面，如果 σ 不在另一点与 γ 相切，那么经过某种（可能更小幅度的）扩大后，σ 的补集仍包含在 F 内。也就是说，稍微扩大后的 σ 仍包含在 F 内——这就产生了矛盾。

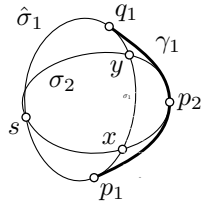
选择环路 γ 上不同于基点的点 p_1。设 σ_1 是 p_1 处的内接圆，γ_1 是从 p_1 到 σ_1 上第一个点 q_1 的弧 γ。用 σ_1 和 σ_1 分别表示从 p_1 到 q_1 的两条弧 σ_1，使得 σ_1 和 γ_1 的循环乘积围绕 σ_1。

设 p_2 是 γ_1 的中点。用 σ_2 表示点 p_2 处的内切圆。

圆周 σ_2 不能与 $\hat{}\sigma_1$相交，因为如果 σ_2 与 $\hat{}\sigma_1$ 在某个点 s相交，那么它还必须与 $\check{}\sigma_1$有另外两个公共点，比如说 x 和 y ——分别位于从 p_2 到 s的两条弧 σ_2 上。因此，

$\sigma_1 = \sigma_2$，因为它们有三个公共点： s、 x 和 y。另一方面，按照构造， $p_2 \in \sigma_2$ 和 $p_2 \notin \sigma_1$ ——这就产生了矛盾。

回顾一下， σ_2 必须在 γ 处相切于另一点。由上述内容可知， σ_2只能与 γ_1相切。因此，可以选取圆弧 $\gamma_2 \subset \gamma_1$，它从 p_2 延伸到 q_2 在 σ_2上的第一个点。由于 p_2 是γ_1的中点，



两个椭圆表示圆。

❶ $$\operatorname{length}\gamma_2 < \tfrac{1}{2}\cdot \operatorname{length}\gamma_1.$$

递归地重复这一构造，我们得到圆弧 $\gamma_1 \supset \supset \gamma_2 \supset \ldots$的无限序列；根据❶还可得到，

$$\operatorname{length}\gamma_n \to 0 \quad \text{когда} \quad n \to \infty.$$

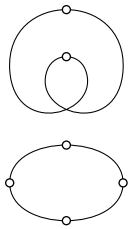
因此， $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \ldots$的交集包含唯一的点，记为 p_∞。

设 σ_∞ 是 p_∞处的内切圆；它必须在另一点与 γ 相切，记为 q_∞。与上文相同的论证表明，对于任意 n， $q_\infty \in \gamma_n$。因此， $q_\infty = p_\infty$ —— 矛盾。 □

7.16. 练习。 设闭光滑曲线 γ 位于由简单闭平面曲线围成的图形 F内。设R 是包含在 F内的圆的最大半径。证明：在某个参数值处， γ 的曲率不小于 $\frac{1}{R}$。

F 四顶点定理

回忆一下，光滑曲线的顶点定义为其有向曲率的临界点。特别地，曲率的局部极小值点（或极大值点）是顶点，而圆上的所有点都是顶点。



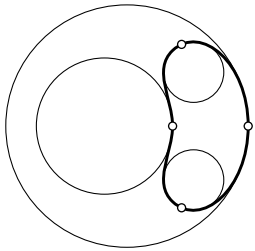
7.17. 定理。 任何光滑简单闭平面曲线至少有四个顶点。

显然，每条闭光滑曲线至少有两个顶点——即曲率达到极小值和极大值的点。图中标出了两条曲线的顶点；第一条有一个

自交，且恰有两个顶点；第二条有四个顶点，且没有自交。

对于凸曲线，这一定理由 Shyamadas Mukhopadhyay 证明[70]。Robert Osserman 提出了最漂亮的一般情形证明之一 [73]。我们将利用上一节的基本引理，证明以下更强的命题。更多相关内容可见我们的文章 [78] 以及其中列出的参考文献。

7.18. 定理。 对于任意光滑简单闭平面曲线 γ ，都可以找到四个点，使这些点处的密切圆支撑 γ 该曲线；其中两个从内部支撑，另外两个从外部支撑。



利用 7.18 证明 7.17。只需证明以下命题： 如果一个密切
*ıo*圆 σ 在点 p 处支撑 γ p，那么 p 是一个顶点 γ.

如果不是这样，那么在 p 周围的一小段弧上，曲率是单调的。根据螺旋引理（6.11），这段弧上的密切圆构成一个单调族。特别地，曲线 γ 在点 p穿过 σ，因此， σ 不支撑 γ。

□

证明 7.18。 根据基本引理（7.15），在某个点 $p \in \gamma$ 处的密切圆从内部支撑 γ 。曲线 γ 可以看作以 p为基点的环路。因此，根据基本引理，还存在另一个具有相同性质的点 $q \in \gamma$ 。

这就得到一对从内部支撑 γ 的密切圆；还需要再找到另外两个。

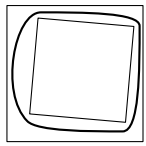
要得到从外部支撑 γ的相切圆，可以重复基本引理的证明，但不取内切圆，而取有向曲率最大的圆（或直线），使其从外部支撑曲线；假设 γ 的定向使其左侧的区域有界。

□

证明的另一种结尾。 对 γ 进行关于一个圆的反演，该圆的圆心位于 γ内部。这样得到的曲线，例如记作 γ_1，也可以找到一对与 γ_1 从内部相切的支撑圆。根据 6.10，它们的反演是与 γ相切的圆。其中，位于 γ内部的区域映射为 γ_1外部的区域，反之亦然。因此，这两个新圆从外部支撑着 γ 。

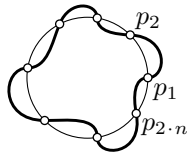
□

7.19. 练习。 假设光滑简单闭合平面曲线 γ 位于边长为2的正方形内，并围住一个对角线长为2的正方形。证明，γ 包含一个曲率等于1的点。



7.20. 练习。 设一条光滑简单闭合平面曲线围成面积为 a 的区域。证明：曲线上存在一个曲率为 $\sqrt{\pi/a}$ 的点。

7.21. 进阶练习。 设简单闭合光滑平面曲线 γ 与圆 σ 相交于$p_1,\ldots,p_{2\cdot n}$，且这些点在 γ 和 σ 上出现的顺序相同。证明： γ 至少有 $2\cdot n$ 个顶点。



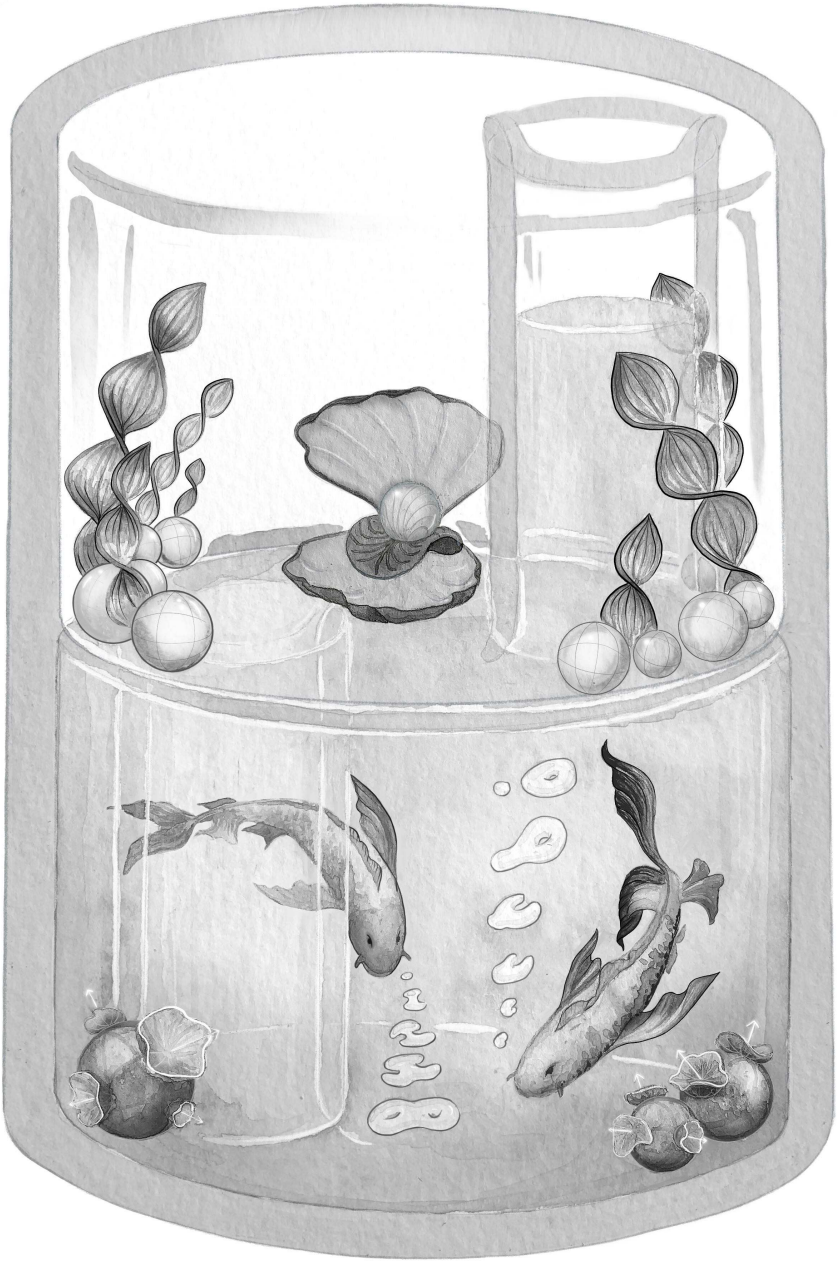
构造一个简单闭合光滑平面曲线γ，使其只有4 个顶点，同时与给定的圆相交于任意多个点。

7.22. 进阶练习。 设 γ 是一条曲率受1限制的简单光滑平面曲线。证明，γ 围住两个互不相交的开单位圆盘，当且仅当它的直径不小于 4；也就是说，存在某些点 $p,q\in\gamma$，使得 $|p-q|\geqslant 4$ 。

下面的练习是关于没有平行切线的空间曲线的四顶点定理的一个版本；根据 3.8，这类曲线确实存在。

7.23. 进阶练习。 设 γ 是一条闭合光滑空间曲线，它没有一对切线平行的点。假设曲率 γ 在每一点都不为零。证明， γ 至少有四个挠率为零的点。

第二部分 表面



第 8 章

定义

A 拓扑曲面

我们主要关注下一节中定义的光滑曲面。现在我们将给出一个更一般的定义，这一定义只会使用几次。

欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 的连通子集 Σ 称为拓扑曲面（更确切地说，是无边界的嵌入拓扑曲面），如果每个点 $p \in \Sigma$ 在 Σ 中都有一个邻域 W，且该邻域可以用欧几里得平面的开子集进行参数化；也就是说，存在一个从开集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ 出发的同胚$V \to W$；参见附录 AB。

B 光滑曲面

回顾一下，二元函数 f x 和 y 称为光滑函数，如果它的所有偏导数 $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f$在定义域 f内都有定义（因此也连续）。

连通集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$称为光滑曲面[1],，如果它在局部可表示为适当坐标系中的光滑函数图像。

更准确地说，对于任意点 $p \in \Sigma$，都存在一个坐标系 (x, y, z) 和一个邻域 $U \ni p$，使得交集 $W = U \cap \Sigma$ 由光滑函数 f 的图像 $z = f(x, y)$ 给出，该函数定义在平面 (x, y) 的某个开区域 V 上。

[1]这是“光滑正则嵌入曲面”一词的简称。

注意，映射 $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ 定义了一个同胚 $V \to W$。因此，光滑曲面是拓扑曲面的一个例子。

例子。坐标平面 $z = 0$ 是光滑曲面的一个例子，因为它是函数 $f(x, y) = 0$的图像。

任何其他平面也是光滑曲面，因为在适当的坐标系中，它就是坐标平面。也可以将平面表示为线性函数$f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c$的图像，其中常数为 a、b和 c（假设平面不是竖直的，否则就必须采用其他坐标）。

单位球面是一个更巧妙的例子

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

整个球面不是一个图像，但可以用 6 个图像覆盖：

$$\begin{aligned} z &= f_\pm(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ y &= g_\pm(x, z) = \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}, \\ x &= h_\pm(y, z) = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}, \end{aligned}$$

其中每个函数 f_+、f_-、g_+、g_-、h_+ 和 h_- 都定义在开单位圆内。每个点 $p \in \mathbb{S}^2$ 都位于这些图像之一上，因此，$\mathbb{S}^2$ 是一个光滑曲面。

C 带边界的曲面

由一条或多条分段光滑曲线所界定的曲面的连通子集，称为带边界的曲面；这些曲线构成曲面的边界。

通常，我们所说的曲面是指无边界的光滑曲面。必要时，可以使用“可能具有非空边界的曲面”这一术语。

D 曲面类型

如果曲面 Σ 在 $\mathbb{R}^3$中构成闭集，则称其为真曲面。例如，定义在整个平面上的任意光滑函数 f 的图像 $z = f(x, y)$ 都是真曲面。球面 $\mathbb{S}^2$ 是另一个真曲面的例子。

另一方面，开圆盘

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0 \right\}$$

——是非真曲面，因为它既不是开集，也不是在 $\mathbb{R}^3$ 中闭合的。
无边界的紧曲面称为闭合曲面（这与闭曲线类似，但与闭集无关）。

开曲面是指无边界的正则非紧曲面（同样，这个术语与开曲线有关，但与开集无关）。

例如，抛物面 $z = x^2 + y^2$ 是开曲面，而球面 $\mathbb{S}^2$ 是闭合曲面。注意，任何无边界的正则曲面要么是闭合曲面，要么是开曲面。

下一个事实是若尔当定理（1.12）的三维类比。它由所谓的亚历山大对偶性 [42] 推出。我们省略证明，因为它会让我们离题太远。

8.1 事实。 任意无边界的真拓扑曲面的补集（等价地，任意开或闭拓扑曲面的补集）恰有两个连通分支。

E 隐式曲面

8.2 命题。 设零是光滑函数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 的正则值；也就是说，若 $f(p) = 0$，则 $\nabla_p f \neq 0$。那么，水平集 $f(x, y, z) = 0$ 的任意连通分支 Σ 都是光滑曲面。

证明。 取一点 $p \in \Sigma$。由于 $\nabla_p f \neq 0$，条件 $f_x(p) \neq 0$、$f_y(p) \neq 0$ 或 $f_z(p) \neq 0$ 中必有一个成立。可以假设 $f_z(p) \neq 0$；否则，重新命名坐标 x、y、z。

根据隐函数定理（A.26），邻域 p 在 Σ 中是光滑函数 h 的图像 $z = h(x, y)$，该函数定义在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开集上。剩下的就是应用光滑曲面的定义（见 8B）。 □

8.3 练习。 对于哪些 ℓ，等值集 $x^2 + y^2 - z^2 = \ell$ 是光滑曲面？

F 局部参数化

设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开区域，且 $s\colon U \to \mathbb{R}^3$ 是一个光滑映射；如果其雅可比矩阵在任意一点都具有最大秩，则称该映射为正则映射。在本例中，这意味着

导数 s_u 和 s_v 在任意一点 $(u,v) \in U$ 处线性无关；等价地，$s_u \times s_v \neq 0$，其中 $\times$ 表示向量积。

8.4. 命题。 连通开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 的光滑正则嵌入 s 的像是一个光滑曲面。

证明 8.4. 设 $s(u,v) = (x(u,v)\ y(u,v)\ z(u,v))$。由于 s 是正则的，雅可比矩阵

$$\operatorname{Jac} s = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

在任意点 $(u,v) \in U$ 处的秩为二。设 $\Sigma = s(U)$。

选取一点 $p \in \Sigma$；平移坐标 (x,y,z) 和 (u,v) 后，不妨设 $p = (0,0,0) = s(0,0)$。重新命名坐标 x,y,z，可使矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{smallmatrix}\right)$ 可逆。注意，这是映射 $(u,v) \mapsto (x(u,v)\ y(u,v))$ 的雅可比矩阵。

根据反函数定理（A.25），存在光滑正则映射 $w\colon (x,y) \mapsto (u,v)$，它定义在平面 (x,y) 的开集 $W \ni 0$ 上，使得 $w(0,0) = (0,0)$，且 $s \circ w(x,y) = (x,y,f(x,y))$，其中 $f = z \circ w$。也就是说，子集 $s \circ w(W) \subset \Sigma$ 是 f 的图像。

再次根据反函数定理，$w(W)$ 的像是 U 中的开集。由于 s 是嵌入，我们的图像在 Σ 中是开集；也就是说，存在一个开集 $V \subset \mathbb{R}^3$，使得 $s \circ w(W) = V \cap \Sigma$ 是一个光滑函数的图像。这就意味着 Σ 是光滑曲面，因为点 $p \in \Sigma$ 是任意选取的。 □

8.5. 练习。 求一个光滑正则单射映射 $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，使其像不是曲面。

若 s 和 Σ 如命题所述，则称 s 为曲面 Σ 的光滑参数化。

并非所有光滑曲面都能这样参数化；例如，球面 $\mathbb{S}^2$ 就不能。不过，任何光滑曲面 Σ 在每一点都允许局部参数化 $p \in \Sigma$；也就是说，p 有一个开邻域 $W \subset \Sigma$，其上存在光滑正则参数化 s。在这种情况下，W 中的每一点都可以用两个参数描述，通常记作 u 和 v；它们称为 p 处的局部坐标。映射 s 称为曲面 Σ 的图。

如果 W —光滑函数 h 的图像 $z = h(x,y)$，那么映射

$$s\colon (u,v) \mapsto (u,v,h(u,v))$$

是一个坐标图。事实上，映射 $(u,v,h(u,v)) \mapsto (u,v)$ 是 s 的逆映射，并且它是连续的；也就是说，s —嵌入。此外，$s_u = (1,0,h_u)$ 和 $s_v = (0,1,h_v)$。特别地，s_u 和 s_v 线性无关；也就是说 s 正则。

8.6. 推论。集合 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是光滑曲面，当且仅当对于其中任意一点，在 Σ 有一个邻域，该邻域可以用一个坐标卡覆盖。

定义在光滑曲面 Σ 上的函数 $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 称为光滑函数，如果对于任意坐标卡 $s\colon U \to \Sigma$，复合映射 $g \circ s$ 都是光滑的；也就是说，所有偏导数 $\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n}(g \circ s)$ 都存在，并且在定义域内连续。

8.7. 练习。设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是光滑曲面。证明：函数 $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，当且仅当对于任意一点 $p \in \Sigma$，都存在一个邻域 $N \subset \mathbb{R}^3$ 以及一个光滑函数 $h\colon N \to \mathbb{R}$，使等式 $g(q) = h(q)$ 对点 $q \in \Sigma \cap N$ 成立。

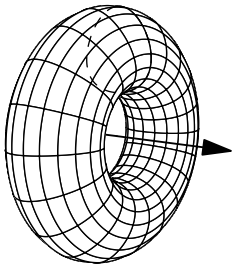
构造一个光滑曲面 Σ 及其上的光滑函数 $g\colon \Sigma \to \mathbb{R}$，使其无法延拓为光滑函数 $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$。

8.8. 练习。证明

$$s(u,v) = \left(\tfrac{2\cdot u}{1+u^2+v^2}, \tfrac{2\cdot v}{1+u^2+v^2}, \tfrac{2}{1+u^2+v^2}\right).$$

是以点 $(0,\ 0,\ 1)$ 为圆心的单位球面的一个坐标图；描述像 s。

设 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t))$ 是平面上的一条曲线。回顾一下，曲线 γ 绕轴 x 旋转所得的曲面可表示为映射的像



$$(t,s) \mapsto (x(t), y(t)\cdot \cos s, y(t)\cdot \sin s).$$

其中，参数 t 和 s 分别称为纬度和经度；对于固定的 t或 s，所得曲线分别称为纬线或子午线。注意，纬线是由垂直于旋转轴的平面内的圆周构成的。曲线γ称为该曲面的母线。

8.9.练习。假设 γ 是一条不与轴 x 相交的简单闭光滑平面曲线。证明，以 γ 为母线、绕轴 x 旋转所得的旋转曲面是光滑曲面。

G 全局参数化

曲面可以描述为另一个曲面的嵌入。例如，考虑椭球面

$$\Theta = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

其中 a、b 和 c 是正数常量。根据 8.2，Θ 是光滑曲面。事实上，设 $h(x,\ y,\ z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$，则

$$\nabla h(x,y,z) = (\tfrac{2}{a^2}\cdot x, \tfrac{2}{b^2}\cdot y, \tfrac{2}{c^2}\cdot z).$$

因此，$\nabla h \neq 0$，如果 $h = 1$；也就是说，1 是 h 的正则值。只需注意集合 Θ 是连通的。

曲面 Θ 是球面 $\mathbb{S}^2$ 在映射下的像

$$(x,y,z) \mapsto (a\cdot x, b\cdot y, c\cdot z).$$

映射 $f\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}^3$（或 $f\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}^2$）称为光滑映射，如果它的所有坐标函数都光滑。此外，光滑映射 $f\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}^3$ 称为光滑曲面参数化，若它是嵌入，且对于任意坐标图 $s\colon\ U \to \Sigma$，复合映射 $f \circ s$ 正则；也就是说，两个向量 $\frac{\partial}{\partial u}(f\circ s)$ 和 $\frac{\partial}{\partial v}(f\circ s)$ 线性无关。在这种情况下，$\Sigma^* = f(\Sigma)$ 的像是光滑曲面，因为对于任意坐标图 $s\colon\ U \to \Sigma$，复合映射 $f\circ s\colon\ U \to \Sigma^*$ 给出 Σ^* 上的一个坐标图。

这样的映射 f称为从 Σ到 Σ^*的微分同胚；如果存在微分同胚 $f\colon\ \Sigma \to \Sigma^*$，则称曲面 Σ和 Σ^*微分同胚。下面的练习说明，微分同胚是一种等价关系。

8.10. 练习。证明，微分同胚的逆映射也是微分同胚。

8.11. 进阶练习。证明以下内容：
(a) 平面中去掉任意一个点的补集彼此微分同胚。*(b)* 由闭合光滑曲线围成的平面开凸集彼此微分同胚。*(c)* 任意平面开凸集彼此微分同胚。*(d)* 任意平面开星形集彼此微分同胚。

第9章

一阶导数

A 切平面

9.1. 定义。设 Σ 是光滑曲面。若存在曲线 γ，位于 Σ 上，且在点 p 处的速度向量为 w，则称向量 w 在点 p 处与 Σ 相切；也就是说，$p=\gamma(t)$ 且 $\mathrm{w}=\gamma'(t)$，其中 t。

9.2. 命题与定义。设 p 是光滑曲面 Σ 上的一点。那么，Σ 在点 p 处的切向量集合构成一个平面；这个平面称为 Σ 在点 p 处的切平面。

此外，如果 $s\colon\ U\to\Sigma$ 是局部坐标图，且 $p=s(u_0,\ v_0)$，那么 Σ 在点 p 处的切平面由向量 $s_u(u_0,\ v_0)$ 和 $s_v(u_0,\ v_0)$ 张成。

Σ 在点 p 处的切平面记作 T_p 或 $\mathrm{T}_p\Sigma$。这个平面可以看作线性子空间 $\mathbb{R}^3$，也可以看作经过 p 的平行平面；后者可称为仿射切平面。它能以平面最佳逼近 Σ 中 p 的邻域。更准确地说，它与 Σ 在点 p 处有一阶接触；也就是说，$\rho(q)=o(|p-q|)$，其中 $q\in\Sigma$，而 $\rho(q)$ 表示从 q 到 T_p 的距离。

如果在曲面 Σ 的每一点 p 选取一个切向量 v_p，且 v_p 随 p 光滑变化，那么这种选取称为切向量场；也就是说，在任意坐标图 s 中，该场可表示为

$$\mathrm{v}_{s(u,v)}=a(u,v)\cdot s_u+b(u,v)\cdot s_v,$$

其中，a 和 b 是定义在区域 s上的光滑函数。

证明。选取一张在 p处的坐标图 s。假设光滑曲线 γ 始于 p。不妨认为 γ 被这张坐标图覆盖；特别地，

$$\gamma(t) = s(u(t), v(t))$$

对于光滑函数 $t \mapsto u(t)$ 和 $t \mapsto v(t)$。根据复合函数的求导法则，

$$\gamma' = s_u \cdot u' + s_v \cdot v'.$$

特别地，γ' 是 s_u 和 s_v的线性组合。

由于光滑函数 $t \mapsto u(t)$ 和 $t \mapsto v(t)$ 可以任意选取，因此，s_u 和 s_v 的任意线性组合都是 p处的切向量。

□

9.3. 练习。曲面 Σ是光滑函数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$的水平集 $f(x, y, z) = 0$ 的一个连通分支，该函数具有正则值0。证明，切平面$\mathrm{T}_p\Sigma$ 在 $p \in \Sigma$的任意一点处都垂直于梯度 $\nabla_p f$。

9.4. 练习。设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面，且 $p \in \Sigma$。证明，p 在 Σ 中的邻域是光滑函数 $z = f(x, y)$的图像，该函数定义在平面 (x, y)的一个开子集上，当且仅当切平面 T_p不是竖直的；也就是说，若T_p不垂直于水平面。

9.5.练习。证明，若光滑曲面 Σ与平面 Π 仅在一点 p 相交，则 Π 是 Σ在 p 处的切线。

B 方向导数

本节将把方向导数的定义推广到定义在光滑曲面上的光滑函数。首先回顾平面上的标准定义。

给定点 $p \in \mathbb{R}^2$、向量 $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^2$ 和函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$。考虑函数 $h(t) = f(p + t \cdot \mathrm{w})$。那么，函数 f 在点 p 沿 w 的方向导数定义为

$$D_{\mathrm{w}} f(p) := h'(0).$$

回顾一下，如果对于任意图册 $s\colon U \to \Sigma$，复合映射 $f \circ s$ 是光滑函数，那么函数 $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 就称为光滑函数。

9.6. 命题与定义。设 f 是定义在光滑曲面 Σ 上的光滑函数。假设 γ 是 Σ 中的一条光滑曲线，它从 p 出发，速度向量为$\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p$；也就是说，$\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = \mathrm{w}$。那么导数 $(f \circ \gamma)'(0)$ 只取决于 f、p 和 w；它称为函数 f 在点 p 沿 w 方向的导数，记作

$$D_{\mathrm{w}} f, \quad D_{\mathrm{w}} f(p), \quad u\text{л}u \quad D_{\mathrm{w}} f(p)_{\Sigma}$$

— 若上下文已清楚，可省略 p 和 Σ。

此外，如果 $(u, v) \mapsto s(u, v)$ 是局部坐标图，且 *{style id='18'>w* $= a \cdot s_u + + b \cdot s_v$ 在点 p处，那么

$$D_{\mathrm{w}} f = a \cdot (f \circ s)_u + b \cdot (f \circ s)_v.$$

如果曲面 Σ 是平面，那么这个定义与标准定义一致。事实上，在这种情况下，$\gamma(t) = p + \mathrm{w} \cdot t$是一条位于 Σ中的曲线，它从 p 出发，速度向量为 w。然而，一般来说，点 $p + \mathrm{w} \cdot t$ 不一定位于曲面上，因此 $f(p + \mathrm{w} \cdot t)$没有定义。这种情况下，标准定义不适用。

证明。不失一般性，可以假设$p = s(0,0)$，且曲线 γ 被坐标图 s覆盖。在这种情况下

$$\gamma(t) = s(u(t), v(t))$$

对于在点 0 的邻域内定义的光滑函数 u、v，满足 $u(0) = v(0) = 0$。

根据复合函数的求导法则，

$$\gamma'(0) = u'(0) \cdot s_u + v'(0) \cdot s_v$$

在点 (0, 0) 处。由于 $\mathrm{w} = \gamma'(0)$，且向量 s_u、s_v 线性无关，我们得到 $a = u'(0)$ 和 $b = v'(0)$。

应用同一法则，得到

❶ $$(f \circ \gamma)'(0) = a \cdot (f \circ s)_u + b \cdot (f \circ s)_v.$$

在点 (0, 0) 处。

❶ 中的左侧不依赖于坐标图 s 的选择，而右侧只依赖于 p、w、f 和 s。因此，$(f \circ \gamma)'(0)$ 只依赖于 p、w 和 f。

最后一个命题由❶推出。 □

9.7. 进阶练习。设X 和Y 是光滑曲面 Σ上的向量场。假设X_p 和Y_p 线性

无关。请构造在点 p的某个邻域内的两个函数 u 和 v，使得

$$D_{\mathrm{X}}u > 0, \qquad D_{\mathrm{Y}}u = 0, \qquad D_{\mathrm{X}}v = 0, \qquad D_{\mathrm{Y}}v > 0.$$

在 Σ 上构造一张 p处的图，其中场X 和Y 与坐标线相切。

C 切向量作为泛函

本节给出切向量的一种更具概念性的定义。我们不会使用它，但最好了解一下。

光滑曲面 Σ 上的切向量$\mathbf{w} \in \mathrm{T}_p$ 定义了一个线性泛函[1] D_{w}；它接收定义在 Σ上的光滑函数 φ，并输出沿方向 $D_{\mathrm{w}}\varphi$的导数。请注意， D_{w} 满足乘积法则，也就是说

❷ $$D_{\mathrm{w}}(\varphi\cdot\psi) = (D_{\mathrm{w}}\varphi)\cdot\psi(p) + \varphi(p)\cdot(D_{\mathrm{w}}\psi).$$

不难证明，切向量w完全由泛函 D_{w}确定。此外，点p 处的切向量可以定义 为满足恒等式❷的光滑函数空间上的线性泛函。

换句话说，恒等式 ❷ 捕捉了关于切向量的一切信息。虽然这种方法不太直观，但在证明中很方便；例如，9.6 就变成了一个重言式。

D 微分

回忆一下，从平面上的区域到空间的光滑映射已在 AG 中定义。设 Σ_0 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面。若对于任意坐标卡 $w\colon\ U \to \Sigma_0$，复合映射 $s\circ w$ 都给出从 $U \to \mathbb{R}^3$ 的光滑映射，则映射 $s\colon\ \Sigma_0 \to \mathbb{R}^3$ 称为光滑映射。

任意从曲面 Σ_0 到 $\mathbb{R}^3$ 的光滑映射 s 都可以用其坐标函数 $s(p) = (x(p)\ y(p)\ z(p))$ 来描述。它沿方向的导数按坐标逐个定义，即

$$D_{\mathrm{w}}s := (D_{\mathrm{w}}x, D_{\mathrm{w}}y, D_{\mathrm{w}}z).$$

假设 s 将一个光滑曲面 Σ_0 映射到另一个曲面 Σ_1。设 $p_0 \in \Sigma_0$ 和 $p_1 = s(p_0)$。选取一条这样的曲线 γ_0，使其位于

[1]“泛函”一词用于指代以函数为参数并返回一个数的函数。

Σ_0，满足 $\gamma_0(0) = p_0$ 且 $\gamma_0'(0) = \mathrm{w}$。那么 $\gamma_1 = s \circ \gamma_0$ 是 Σ_1上的一条光滑曲线。根据方向导数的定义，$D_{\mathrm{w}} s = \gamma_1'(0)$，因此，对于任意 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_{p_0}$，都有 $D_{\mathrm{w}} s \in \mathrm{T}_{p_1}\Sigma_1$。

由 9.6 可知，$\mathrm{w} \mapsto D_{\mathrm{w}} s$ 确定了线性映射 $\mathrm{T}_{p_0}\Sigma_0 \to \mathrm{T}_{p_1}\Sigma_1$；也就是说

$$D_{c\cdot \mathrm{w}} s = c \cdot D_{\mathrm{w}} s \quad \text{и} \quad D_{\mathrm{v}+\mathrm{w}} s = D_{\mathrm{v}} s + D_{\mathrm{w}} s$$

对任意 v、$\mathrm{w} \in \mathrm{T}_{p_0}$和 $c \in \mathbb{R}$。映射 $d_{p_0} s \colon \mathrm{T}_{p_0}\Sigma_0 \to \mathrm{T}_{p_1}\Sigma_1$，定义为

$$d_{p_0} s \colon \mathrm{w} \mapsto D_{\mathrm{w}} s$$

称为 s在 p_0处的微分。

微分 $d_{p_0} s$ 由 $\mathrm{T}_{p_0}\Sigma_0$和 $\mathrm{T}_{p_1}\Sigma_1$的正交归一基下的 2×2-矩阵 M 描述。将 s在 p_0处的雅可比定义为 $\operatorname{jac}_{p_0} s = |\det M|$；它不依赖于 $\mathrm{T}_{p_0}\Sigma_0$和 $\mathrm{T}_{p_1}\Sigma_1$中正交归一基的选取。[2]

若 $r \colon \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 是光滑曲面 Σ_1 与 Σ_2之间的另一个光滑映射，则

$$d_{p_0}(r \circ s) = d_{p_1} r \circ d_{p_0} s;$$

由此

❸
$$\operatorname{jac}_{p_0}(r \circ s) = \operatorname{jac}_{p_1} r \cdot \operatorname{jac}_{p_0} s.$$

上述构造适用于映射 s；在这种情况下，曲面 Σ_0 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域。于是可以利用公式求得 $\operatorname{jac}_{p_0} s$ 的值

$$\begin{aligned} \operatorname{jac} s &= |s_u \times s_v| = \\ &= \sqrt{\langle s_u, s_u\rangle \cdot \langle s_v, s_v\rangle - \langle s_u, s_v\rangle^2} = \\ &= \sqrt{\det[(\operatorname{Jac} s)^\top \cdot \operatorname{Jac} s]}, \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Jac} s$ 表示 s 的雅可比矩阵；参见附录 AG。

E 积分与面积

设 Σ 是一条光滑曲线，且 $h \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。定义 h 在博雷尔集合 $R \subset \Sigma$ 上的积分；这一概念最常用于带边界的曲面。

[2]可以从更几何的角度理解 $\operatorname{jac}_{p_0} s$：若 R_0 是 T_{p_0} 中的区域，而 $R_1 = (d_{p_0} s)(R_0)$ 是它的像，则

$$\operatorname{area} R_1 = \operatorname{jac}_{p_0} s \cdot \operatorname{area} R_0.$$

这个等式在定义曲面面积时会派上用场。

回想一下，雅可比行列式 $\operatorname{jac}_p s$ 已在上一节中定义。假设存在一个从 Σ 到 $(u,v) \mapsto s(u,v)$ 的坐标图，其定义在开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上，并且满足 $R \subset s(U)$。在这种情况下，定义

❹ $$\iint\limits_R h := \iint\limits_{s^{-1}(R)} h \circ s(u,v) \cdot \operatorname{jac}_{(u,v)} s \cdot du \cdot dv.$$

根据变量替换公式（A.27），❹中的右侧不取决于 s的选择。也就是说，如果 $s_1\colon\ U_1 \to \Sigma$ —是另一个坐标图，且满足$s_1(U_1) \supset R$，那么

$$\iint\limits_{s^{-1}(R)} h \circ s(u,v) \cdot \operatorname{jac}_{(u,v)} s \cdot du \cdot dv = \iint\limits_{s_1^{-1}(R)} h \circ s_1(u,v) \cdot \operatorname{jac}_{(u,v)} s_1 \cdot du \cdot dv.$$

换句话说，等式❹可以用来定义左侧。

一般情况下，可以将区域 R 分割为可数多个区域 $R_1, R_2, \ldots$，使得每个 R_i 都包含在坐标图的像中，并将 R 上的积分定义为以下各项之和

$$\iint\limits_R h := \iint\limits_{R_1} h + \iint\limits_{R_2} h + \ldots$$

如果 R 是紧致的，或者 $h \geqslant 0$，很容易验证，$\iint_R h$ 的值不取决于此类分割的选择。

光滑曲面 Σ 上区域 R 的面积定义为积分

$$\operatorname{area} R = \iint\limits_R 1.$$

下一个命题给出了曲面积分的变量替换法则。

9.8. 面积公式。 设 $s\colon\ \Sigma_0 \to \Sigma_1$ 是光滑曲面之间的微分同胚。考虑区域 $R \subset \Sigma_0$ 和光滑函数 $f\colon\ \Sigma_1 \to \mathbb{R}$。假设区域 R 是紧的，或者函数 f 非负。那么

$$\iint\limits_R (f \circ s) \cdot \operatorname{jac} s = \int\limits_{s(R)} f.$$

特别地，当 $f \equiv 1$ 时，我们得到

$$\iint\limits_R \operatorname{jac} s = \operatorname{area}(s(R)).$$

证明。 由❸以及曲面积分的定义可得。

□

设 Σ_1 和 Σ_2 是两条光滑曲面。若对任意曲线 γ在Σ_1 上都有 $\operatorname{length}\gamma \geqslant \operatorname{length}(f\circ\gamma)$，则称映射 $f\colon \Sigma_1 \to\!\!\!\!\to \Sigma_2$为非收缩映射。下面的定理给出了面积更自然的定义。尽管其表述很直观，但证明远超本书的范围；它基于对利普希茨映射面积公式的推广 [29, 3.2.3]。

9.9. 定理。 面积泛函满足以下性质：

(a) σ-可加性：设 $R_1, R_2, \ldots$ 是光滑曲面上一个互不相交的博雷尔集序列。那么

$$\operatorname{area}(R_1 \cup R_2 \cup \ldots) = \operatorname{area} R_1 + \operatorname{area} R_2 + \ldots$$

(b) 单调性：设 $f\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 是两个光滑曲面之间的非扩张映射。假设 $R_1 \subset \Sigma_1$ 和 $R_2 \subset \Sigma_2$ 是满足 $f(R_1) \supset R_2$ 的博雷尔集。那么

$$\operatorname{area} R_1 \geqslant \operatorname{area} R_2.$$

(c) 单位正方形的面积为 *1*。

此外，面积泛函在所有博雷尔集上由这些性质唯一确定。

注。面积和长度的概念很相似。不过，曲线长度是用另一种思路定义的（通过内接折线长度的上确界）。众所周知，类似的定义即使对非常简单的曲面也不成立。这一点可从经典例子——所谓的施瓦茨靴中看出。这个例子以及关于面积概念的各种方法，在弗拉基米尔·杜布罗夫斯基 [26] 的一篇通俗文章中都有讨论。

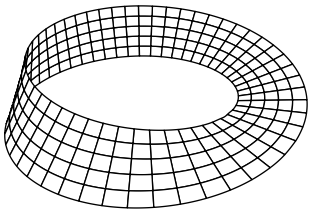
F 法向量定向

曲面 Σ称为定向曲面，如果它配备了法向量场 ν；也就是说，一个连续映射$p \mapsto \nu(p)$，使得 $\nu(p) \perp \mathrm{T}_p$ 且 $|\nu(p)| = 1$ 对任意 p都成立。场 ν的选取

称为定向 Σ。曲面 Σ称为可定向的，如果可以为其指定定向。每个可定向曲面都允许两种定向： ν 和 $-\nu$。

设 Σ 是光滑有向曲面， ν 是它的法向量场。映射 $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$，定义为 $p \mapsto \nu(p)$，称为球面映射或高斯映射。

对于曲面，球面映射所起的作用与曲线的切线指标曲线相同。



图中所示的莫比乌斯带是不可定向曲面的一个例子——法向量场无法沿中线连续延拓。

（试图绕带一周时，法向量会改变方向）。

每个曲面在局部都是可定向的。此外，每个坐标图 $s(u,v)$ 都允许赋予定向

$$\nu = \frac{s_u \times s_v}{|s_u \times s_v|}.$$

确实， s_u 和 s_v 是点 p处的切向量。因此，它们的向量积垂直于切平面，且不为零，因为 s_u 和 s_v线性无关。显然，映射 $(u,v) \mapsto \nu(u,v)$ 是连续的。因此， ν 是单位法向量场。

9.10. 练习。 假设光滑曲面 Σ具有常值法向量场 ν_0。证明， Σ 位于垂直于 ν_0的平面内。

9.11. 练习。 设 0 是光滑函数 $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$的正则值。证明，水平集 $h(x, y, z) = 0$ 的连通分支是可定向曲面。

回想一下，欧几里得空间中的任意无边界正则曲面 Σ 都会将其分成两个连通分支（8.1）。因此，我们可以在 Σ 上选取一个指向补集其中一个连通分支的单位法向量场；于是得到如下结论。

9.12. 注。 欧几里得空间中的任意无边界光滑真曲面都是可定向的。

特别是，不可能将莫比乌斯带延拓为无边界的光滑曲面。

G 截面

9.13. 引理。 设 Σ 是光滑曲面，$f\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，且 $r_0 \in \mathbb{R}$。那么存在任意接近于 r_0 的 $r \in \mathbb{R}$，使得水平集 $L_r == \{\, x \in \Sigma\colon\ f(x) = r \,\}$ 的每个连通分支都是光滑曲线。

证明。 曲面 Σ 可以用可数个图册 s_i覆盖：$U_i \to \Sigma$。其中，对任意 i，复合映射 $f \circ s_i$ 都是光滑函数。根据萨德引理（A.24），几乎所有 $r \in \mathbb{R}$ 都是每个复合映射 $f \circ s_i$的正则值。

固定这样一个足够接近 r_0的值 r，并考察它的等值线 $L_r \subset \Sigma$。L_r 中的任意点都属于某个图册的像。因此，该点有一个邻域，它是一条光滑曲线；由此得证。 □

9.14. 进阶练习。 设 Π 是坐标平面 $z = 0$，且 $A \subset \Pi$ 是任意闭子集。构造一个开光滑曲面 Σ，使得 $\Sigma \cap \Pi = A$。

上面的练习表明，光滑曲面的截线可能相当棘手。下面的推论允许稍微移动平面，使截线变得规整一些。

9.15. 推论。 设 Σ 是光滑曲面。那么，对于任意平面 Π，都存在一个与之平行的平面 Π^*，它可以任意接近 Π，并且交集 $\Sigma \cap \Pi^*$ 是若干条互不相交的光滑曲线的并集。

第10章

曲率

我们从前一章得知，曲面的切平面与曲面相切，且达到一阶接触。特别是，在一阶近似下，所有曲面在某一点附近看起来都一样。到了二阶近似时，才会出现差异，这正是我们接下来要讨论的内容。

A 切向法向坐标

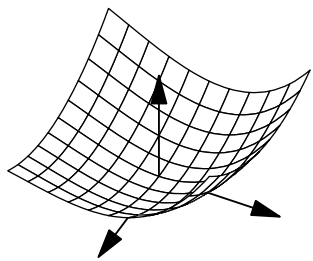
取光滑定向曲面 Σ 上的点 p；设 ν 是其法向量场。考虑坐标系 (x, y, z)，原点位于点 p，使切平面 T_p 成为水平面，且轴 z 沿 $\nu(p)$ 方向。这样的坐标称为切向法向坐标。根据 9.4，Σ 中的邻域 p 可由光滑函数 $z = f(x, y)$ 的图像给出，其中

$$f(0,0) = 0, \qquad f_x(0,0) = 0, \qquad f_y(0,0) = 0.$$

第一个等式表示 $p = (0,0,0)$ 位于图像上，另外两个则表示 p 处的切平面是水平的。

设

$$\begin{aligned} \ell &= f_{xx}(0,0), \\ m &= f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0), \\ n &= f_{yy}(0,0). \end{aligned}$$



泰勒级数 f 在 $(0, 0)$ 处的二阶形式可写为

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}(\ell \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot x \cdot y + n \cdot y^2) + o(x^2 + y^2).$$

数值 ℓ、m 和 n 完全由这个方程确定。泰勒多项式的图像

$$z = \tfrac{1}{2}\cdot(\ell\cdot x^2 + 2\cdot m\cdot x\cdot y + n\cdot y^2)$$

称为与 Σ 在 p处相切的抛物面。它具有二阶接触。

接下来注意到

$$\ell\cdot x^2 + 2\cdot m\cdot x\cdot y + n\cdot y^2 = \langle M_p\cdot\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\rangle,$$

где

❶ $$M_p = \begin{pmatrix}\ell & m\\ m & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0)\\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}.$$

——这就是点(0, 0)处的海森矩阵 f,

B 主曲率

切向—法向坐标几乎由曲面上的点唯一确定；除了平面(x, y)的旋转外，它们是唯一的。旋转该平面时，海森矩阵 M_p在新基下重新表示。

由于矩阵 $M_p = \left(\begin{smallmatrix}\ell & m\\ m & n\end{smallmatrix}\right)$ 是对称的，根据谱定理 (A.19)，它可以用正交矩阵对角化。也就是说，通过旋转平面 (x, y)，可以使 $m = 0$。在这种情况下，

$$M_p = \begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix},$$

对角线上的数 k_1 和 k_2 称为点 p 处的主曲率 Σ；可以记作 $k_1(p)$ 和 $k_2(p)$，或者记作 $k_1(p)_\Sigma$ 和 $k_2(p)_\Sigma$，以强调它们是在曲面 Σ 的点 p 处计算的。若无特别说明，我们将认为

$$k_1 \leqslant k_2.$$

如果在这些坐标 Σ 中，局部可由图像 $z = f(x, y)$ 表示，那么

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}\cdot(k_1\cdot x^2 + k_2\cdot y^2) + o(x^2 + y^2).$$

主曲率也可以定义为矩阵 M_p 的特征值。特征方向 M_p 在点 p 处称为主方向 Σ。如果 $k_1(p) \neq k_2(p)$，那么在点 p

恰好有两个彼此垂直的主方向；而如果 $k_1(p) = k_2(p)$，那么点 p 处的所有切向方向都是主方向。

若改变 Σ的定向，则主曲率的符号和指标都会改变：k_1 变为 $-k_2$，而 k_2 变为 $-k_1$。

曲面 Σ上的光滑曲线，如果始终沿主方向前进，就称为曲率线 Σ。若 $k_1(p) \neq k_2(p)$，则点 p 处存在一个坐标图 $(u, v) \mapsto s(u, v)$，其坐标线由曲率线构成（由 9.7 可知），并且 $s_u \perp s_v$，因为主方向彼此垂直。

10.1. 练习。设 Σ 是关于平面 Π镜面对称的光滑曲面。假设 Σ 和 Π 沿光滑曲线 γ相交。证明 γ 是曲率线。

C 其他曲率

设 p 是定向光滑曲面 Σ 上的一点。提醒一下，$k_1(p)$ 和 $k_2(p)$ 表示点 p 处的主曲率。

乘积

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$$

称为点 p 处的高斯曲率。它可以记作K、$K(p)$，甚至是 $K(p)_\Sigma$，如果想同时指出点和曲面的话。

由于行列式等于特征值的乘积，我们得到

$$K = \ell \cdot n - m^2,$$

其中 $M_p = \left(\begin{smallmatrix} \ell & m \\ m & n \end{smallmatrix}\right)$ 是海森矩阵。

需要指出的是，改变定向 Σ 不会改变高斯曲率，因此它对不可定向曲面也有定义。

10.2. 练习。证明，任何具有正高斯曲率的曲面都是可定向的。

和

$$H(p) = k_1(p) + k_2(p)$$

称为点 p 处的平均曲率[1]。如果需要，也可以将其记作 $H(p)_\Sigma$。可以将平均曲率理解为 Hessian 矩阵 $M_p = \left(\begin{smallmatrix} \ell & m \\ m & n \end{smallmatrix}\right)$ 的迹；也就是说

$$H = \ell + n.$$

[1]一些作者将其定义为 $\frac{1}{2} \cdot (k_1(p) + k_2(p))$——主曲率的平均值。这更符合名称的含义，但实际使用起来不方便。

定向 Σ 的反转会改变其平均曲率的符号。

平均曲率为零的曲面称为极小曲面。

10.3. 练习. 设 Σ 是有向曲面，而 Σ_λ 是它的位似变换，系数为 $\lambda > 0$；也就是说，Σ_λ 由点 $\lambda\cdot x$ 组成，其中 $x \in \Sigma$。证明

$$K(\lambda\cdot p)_{\Sigma_\lambda} = \tfrac{1}{\lambda^2}\cdot K(p)_\Sigma \quad u \quad H(\lambda\cdot p)_{\Sigma_\lambda} = \tfrac{1}{\lambda}\cdot H(p)_\Sigma$$

对任意点 $p \in \Sigma$。

D 形算子

以下定义中使用了方向导数和微分的概念，参见 9B 和 9D。

设 p 是具有定向的光滑曲面 Σ 上的一点，该定向由法向量场 ν 给出，并设 w 是在 p 处的切向量。w 的形算子 [2] 定义为

$$\mathrm{Shape}_p \mathrm{w} = -D_{\mathrm{w}}\nu.$$

它也可以定义为

❷ $$\mathrm{Shape} = -d\nu,$$

其中 $d\nu$ 是球面映射 $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$ 的微分；也就是说，$d_p\nu(\mathrm{v}) = (D_{\mathrm{v}}\nu)(p)$。

回顾一下，$d_p\nu$ 是线性映射 $\mathrm{T}_p\Sigma \to \mathrm{T}_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$。注意，$\mathrm{T}_p\Sigma$ 与 $\mathrm{T}_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ 重合，因为这两个平面都垂直于 $\nu(p)$。因此，Shape_p 确实是一个线性算子 $\mathrm{T}_p\Sigma \to \mathrm{T}_p\Sigma$（这也将由 10.4 推出）。

切向量 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p\Sigma$ 的形算子可以记作 $\mathrm{Shape}\mathrm{w}$，若上下文已明确所指的基点 p 和曲面 Σ；否则可以写作

$$\mathrm{Shape}_p(\mathrm{w}) \quad \text{или} \quad \mathrm{Shape}_p(\mathrm{w})_\Sigma.$$

[2] 切平面上的以下双线性形式

$$\mathrm{I}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \langle \mathrm{v},\mathrm{w}\rangle, \qquad \mathrm{II}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \langle \mathrm{Shape}\,\mathrm{v},\mathrm{w}\rangle, \qquad \mathrm{III}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \langle \mathrm{Shape}\,\mathrm{v},\mathrm{Shape}\,\mathrm{w}\rangle$$

分别称为第一基本形式、第二基本形式和第三基本形式。从历史上看，这些形式的引入早于形算子，但我们完全不会讨论它们。

10.4. 定理。 设 $(u,\ v)\ \mapsto\ s(u,\ v)$ 是映射到具有法向量场的光滑曲面 Σ ν 的光滑映射。那么

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Shape}(s_u), s_u\rangle &= \langle s_{uu}, \nu\rangle, & \langle \mathrm{Shape}(s_v), s_u\rangle &= \langle s_{uv}, \nu\rangle,\\ \langle \mathrm{Shape}(s_u), s_v\rangle &= \langle s_{uv}, \nu\rangle, & \langle \mathrm{Shape}(s_v), s_v\rangle &= \langle s_{vv}, \nu\rangle,\\ \langle \mathrm{Shape}(s_u), \nu\rangle &= 0, & \langle \mathrm{Shape}(s_v), \nu\rangle &= 0\end{aligned}$$

对任意(u, v)。

证明。 我们将使用简写 $\nu = \nu(u, v)$ 表示$\nu(s(u, v))$，因此

❸ 形状$(s_u) = -D_{s_u}\nu = -\nu_u$，形状$(s_v) = -D_{s_v}\nu = -\nu_v$.

由于 ν 是垂直于 s_u 和 s_v的单位向量，

$$\langle \nu, s_u\rangle \equiv 0, \qquad \langle \nu, s_v\rangle \equiv 0, \qquad \langle \nu, \nu\rangle \equiv 1.$$

对这些恒等式求偏导数，得到

$$\begin{aligned}\langle \nu_u, s_u\rangle + \langle \nu, s_{uu}\rangle &= 0, & \langle \nu_v, s_u\rangle + \langle \nu, s_{uv}\rangle &= 0,\\ \langle \nu_u, s_v\rangle + \langle \nu, s_{uv}\rangle &= 0, & \langle \nu_v, s_v\rangle + \langle \nu, s_{vv}\rangle &= 0,\\ 2\cdot\langle \nu_u, \nu\rangle &= 0, & 2\cdot\langle \nu_v, \nu\rangle &= 0.\end{aligned}$$

只需将❸中的表达式代入此处即可。 □

10.5. 练习。 证明形算子是自伴的；也就是说

$$\langle \mathrm{Shape}\,\mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle = \langle \mathrm{U}, \mathrm{Shape}\,\mathrm{V}\rangle$$

对于任意U，$\mathrm{V} \in \mathrm{T}p$。

回顾一下，海森矩阵的分量 ℓ、 m 和 n 在 10A 中定义。

10.6. 推论。 设 $z = f(x,\ y)$ 是光滑曲面 Σ 在点 p处的切向-法向坐标下的局部表示，并设$\left(\begin{smallmatrix}\ell & m\\ m & n\end{smallmatrix}\right)$ 是它的海森矩阵。那么

$$\mathrm{Shape}\,\mathrm{I} = \ell\cdot\mathrm{I} + m\cdot\mathrm{J}, \qquad \mathrm{Shape}\,\mathrm{J} = m\cdot\mathrm{I} + n\cdot\mathrm{J},$$

其中I，J，K 是 $\mathbb{R}^3$中的标准基。换言之，形算子由海森矩阵乘法给出。

这个推论揭示了曲率与形算子之间的联系。点 p 处的主曲率 Σ 是 Shape$p$ 的特征值，主方向是 Shape$p$ 的特征方向，高斯曲率是 Shape$p$ 的行列式，而平均曲率是 Shape$p$ 的迹。

由于海森矩阵是对称的，由推论可知形算子是自伴的；这就解决了习题 10.5。

证明。 注意， $s\colon (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v))$ 是Σ 上的坐标图，其中 p。此外，

$$\begin{aligned} s_u(0,0) &= \mathrm{I}, & s_v(0,0) &= \mathrm{J}, & \nu(0,0) &= \mathrm{K}, \\ s_{uu}(0,0) &= \ell\cdot\mathrm{K}, & s_{uv}(0,0) &= m\cdot\mathrm{K}, & s_{vv}(0,0) &= n\cdot\mathrm{K}. \end{aligned}$$

剩下的只需应用 10.4。 □

10.7. 推论。 设 Σ 是高斯曲率不为零的光滑曲面。假设它的球面映射 $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是单射。那么

$$\iint_{\Sigma} |K| = \operatorname{area}(\nu(\Sigma)).$$

证明。 在 T_p 中选取沿主方向的正交归一基。于是形算子可表示为矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{smallmatrix}\right)$。

由于 $\operatorname{Shape}_p = -d_p\nu$，由 10.6 可得

$$\operatorname{jac}_p \nu = |\det\left(\begin{smallmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{smallmatrix}\right)| = |K(p)| \neq 0$$

对于任意点 $p \in \Sigma$。特别地，映射 ν 是正则的，并且由于它是单射，故定义了 $\Sigma \to \nu(\Sigma)$ 的微分同胚。接下来只需应用面积公式（9.8）。 □

10.8. 练习。 设 Σ 是带有法向量场 ν 的光滑曲面，且其主曲率在所有点均等于 1 。

(a) 证明，对于任意 $p \in \Sigma$ 和 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p\Sigma$，都有 形算子$_p(\mathrm{w}) = \mathrm{w}$ 。

(b) 证明点 $q = p + \nu(p)$ 不依赖于 $p \in \Sigma$ 的选取。由此推出，Σ 是以 q 为圆心的单位球面的子集。

10.9. 进阶练习。 设 Σ 是光滑曲面，ν 是其法向量场，且 $Z_0 \subset \Sigma$ 是形算子为零的连通集。证明 Z_0 位于一个平面内。

两条有向曲面在交点处的夹角 p 定义为它们在 p处法线之间的角。

10.10. 练习。 假设两个光滑定向曲面 Σ_1 和 Σ_2 沿光滑曲线 γ 以

恒定角度相交。设 γ 是 Σ_1上的曲率线。证明， γ 也是 Σ_2上的曲率线。

由此推出：如果光滑曲面 Σ 与平面或球面沿光滑曲线 γ 以恒定角相交，那么 γ 是 Σ 上的曲率线。

10.11. 练习。设 Σ 是一个带有由法向量场 ν 确定的定向的闭光滑曲面。

(a) 证明集合

$$\Sigma_t = \{\, p + t\cdot\nu(p) \,:\, p \in \Sigma \,\}$$

当 t 充分接近于零时，是一个光滑曲面。

(b) 证明对于所有充分接近于零的 t，等式成立

$$\operatorname{area}\Sigma_t = \operatorname{area}\Sigma - t\cdot\iint_\Sigma H + t^2\cdot\iint_\Sigma K,$$

其中， H 和 K 分别表示 Σ的平均曲率和高斯曲率。

10.12. 进阶练习。 设 Σ 是由坐标矩形参数化的光滑定向曲面$u(\,v,\mapsto\,s)$ $u(\,v,)$，并设U $=\frac{s_u}{|s_u|}$、 V $=\frac{s_v}{|s_v|}$和 $\nu(u,v)$ 是点 $s(u,v)$处的法向量。

假设U 和V 是主方向场；设0和 $k = k(u,v)$ 是它们的主曲率，其中 k 不为零，且 $|s_u| = 1$ 位于其中一条 u坐标线上。

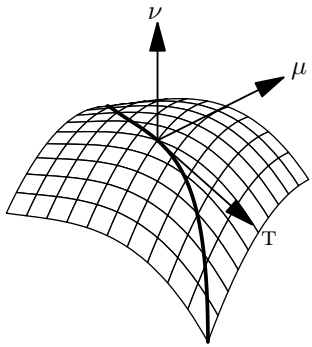
(a) 证明，对于任意*(u, v)*， *ν(u, v)*、*u(u, v)*和*v(u, v)*构成一个标准正交基。*(b)* 证明， *ν(u, v)*、*u(u, v)*和*v(u, v)*仅依赖于 v。由此推出， u坐标线是直线段。*(c)* 证明，在所有点处， s_{uu} 与 s_u 成比例。由此推出，$|s_u| = 1$ 在所有点处均成立。*(d)* 证明，当 v_0 固定时，$k\ u^{1}$ *(,v_0)*的值关于 u呈线性关系。

练习包含以下定理证明的主要部分：任何高斯曲率为零的开曲面都是柱面的；也就是说，它由一族平行直线扫成。练习 9.7 和 18.15 说明了该证明的其他部分。上述定理由阿列克谢·波戈列洛夫 [84, II §3 定理 2] 在更加一般的假设下证明，后来又被重新发现了几次 [41, 66]。

第 11 章

曲面上的曲线

A 达布标架



设 γ —为光滑定向曲面 Σ上的光滑曲线，带有法向量场 ν。设 γ 按弧长参数化，因此，$\mathrm{t}(s) = \gamma'(s)$ 是它的切向指标曲线。下面我们将使用缩写$\nu(s) = \nu(\gamma(s))$。

单位向量 $\mathrm{t}(s)$ 和 $\nu(s)$ 相互正交。因此，存在唯一的单位向量 $\mu(s)$，使得 $\mathrm{t}(s)$ $\mu(s)$ $\nu(s)$ 构成一个定向正交归一基。它称为曲线 γ在 Σ上的达布标架。

由于 $\mathrm{T}_{\gamma(s)} \perp \nu(s)$，向量 $\mu(s)$ 在点 $\gamma(s)$ 处与 Σ 相切。实际上，可以将 $\mu(s)$ 绕 $\mathrm{t}(s)$ 在 $\mathrm{T}^{\gamma(s)}$ 中逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角得到。该向量也可以通过向量积 $\mu(s)$ 定义：$= \nu(s) \times \mathrm{t}(s)$。

由于 γ 具有单位速度，$\gamma'' \perp \gamma'$（见 3.1）。特别地，γ'' 可以表示为 μ 和 ν 的线性组合；即

$$\gamma''(s) = k_g(s) \cdot \mu(s) + k_n(s) \cdot \nu(s).$$

量 $k_g(s)$ 和 $k_n(s)$ 分别称为曲线 γ在 s处的测地曲率和法曲率。由于基 $\mathrm{t}(s)$、$\mu(s)$、 $\nu(s)$ 是正交归一的，这些曲率可改写为标量积

$$k_g(s) = \langle \gamma''(s), \mu(s) \rangle = \\ = \langle \mathrm{T}'(s), \mu(s) \rangle,$$

$$k_n(s) = \langle \gamma''(s), \nu(s) \rangle = \\ = \langle \mathrm{T}'(s), \nu(s) \rangle.$$

对 $0 = \langle \mathrm{T}(s),\ \nu(s)\rangle$ 求导，得到

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathrm{T}(s), \nu(s)\rangle' = \\ = \langle \mathrm{T}'(s), \nu(s)\rangle + \langle \mathrm{T}(s), \nu'(s)\rangle = \\ = k_n(s) + \langle \mathrm{T}(s), D_{\mathrm{T}(s)}\nu\rangle. \end{aligned}$$

并应用形算子的定义，可得到如下结果 .

11.1. 命题。 设 γ —是在光滑曲面 Σ 上具有单位速度的光滑曲线， $p = \gamma($ $s_0)$ 且 $\mathrm{v} = \gamma'(s_0)$。则

$$k_n(s_0) = \langle \mathrm{Shape}_p(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle,$$

其中 k_n —在 s_0 处的法曲率 γ ， 而 Shape$_p$ —点 p处的形算子。

根据该命题，光滑曲线在Σ 处的法曲率完全由其速度向量 v 确定。因此，将沿 v 方向的法曲率记作 k_{v} 是合理的，并且

$$k_{\mathrm{v}} = \langle \mathrm{Shape}_p(\mathrm{v}), \mathrm{v}\rangle$$

对于 T$_p$ 中的任意单位向量 v。

B 欧拉公式

设 p 是光滑曲面 Σ上的一点。在 p 处选取切向-法向坐标，使海森矩阵为对角矩阵

$$M_p = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

考虑向量 $\mathrm{w} = a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j}$，它在 p处与曲面相切。根据 10.6,

$$\langle \mathrm{Shape}\,\mathrm{w}, \mathrm{w}\rangle = a^2\cdot k_1(p) + b^2\cdot k_2(p).$$

由于 $|\mathrm{w}|^2 = a^2 + b^2$，得到如下结果。

11.2. 观察。 对于有向光滑曲面 Σ 上的任意点 p ， 主曲率 $k_1(p)$ 和 k_2 (p) 分别是点 p处法曲率的极小值和极大值。此外，若 θ 是单位向量 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p$与第一个主方向之间的角，则

$$k_{\mathrm{w}}(p) = k_1(p)\cdot(\cos\theta)^2 + k_2(p)\cdot(\sin\theta)^2.$$

最后一个恒等式称为欧拉公式。

11.3. 练习。 证明，在光滑曲面上的点 p 处，平均曲率 $H(p)$ 等于任意一对正交切向方向的法曲率之和，其中 p。

11.4. 练习. 证明 $\frac{3}{8}\cdot H(p)^2 - \frac{1}{2}\cdot K(p)$ 等于在 p处法曲率平方的平均值；也就是说，对所有单位向量 $\mathrm{W} \in \mathrm{T}_p$，等于 k_{W}^2 的平均值。

11.5. 莫尼定理。 设 γ 是光滑定向曲面 Σ上的一条光滑曲线，$p = \gamma(t_0)$，$\mathrm{V} = \gamma'(t_0)$ 和 $\alpha = \measuredangle(\nu(p),\mathrm{N}(t_0))$；也就是说，$\alpha$ 是点 p 处曲面 Σ 的法向量与曲线 γ 在 t_0处的弗雷内基中的法向量之间的角。则

$$\kappa(t_0)\cdot\cos\alpha = k_n(t_0);$$

这里，$\kappa(t_0)$ 和 $k_n(t_0)$ 分别是 γ 在 t_0处的曲率和法曲率。

证明。因为 $\gamma'' = \mathrm{T}' = \kappa\cdot\mathrm{N}$,

$$\begin{aligned} k_n(t_0) &= \langle\gamma''(t_0),\nu(p)\rangle = \\ &= \kappa(t_0)\cdot\langle\mathrm{N}(t_0),\nu(p)\rangle = \\ &= \kappa(t_0)\cdot\cos\alpha. \end{aligned}$$

□

11.6. 练习。 设$\mathrm{V} \in \mathrm{T}_p\Sigma$ 是光滑曲面 Σ 上点 $p \in \Sigma$处的单位切向量。假设法曲率 $k_{\mathrm{V}}(p)$ 不等于零。

证明，p 处沿V方向前进的光滑曲线 Σ的密切圆扫过一个球面 S，其圆心位于点 $p + \frac{1}{k_{\mathrm{V}}}\cdot\nu$，半径为 $r = \frac{1}{|k_{\mathrm{V}}|}$。

11.7. 练习。 设 Σ 是由一条位于上半平面的光滑简单曲线绕轴x 旋转而成的旋转曲面，该曲线具有单位速度 $\gamma(s) = (x(s)\ y(s))$。假设 $x' \neq 0$。

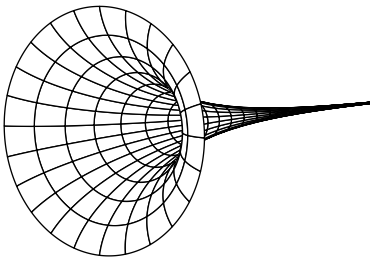
(a) 证明曲面的纬线和子午线是其曲率线。*(b)* 证明

$$\frac{|x'(s)|}{y(s)} \quad u \quad \frac{-y''(s)}{|x'(s)|}$$

是点 Σ 处 $(x(s)\ y(s),\ 0)$ 沿相应纬线和子午线方向的主曲率。

(c) 证明：当且仅当 y 满足微分方程 $y'' = y$时，Σ 在所有点的高斯曲率均为 -1 。

在 $y = e^{-s}$的情形下， γ曲线称为曳物线，曲面称为伪球面；根据 *(c)*，其高斯曲率为 -1。



11.8. 练习。 证明，由方程定义的悬链面

$$(\operatorname{ch} z)^2 = x^2 + y^2$$

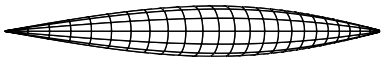
是极小曲面。

11.9. 练习。 证明，由下列参数化定义的螺旋面

$$s(u, v) = (u \cdot \sin v, u \cdot \cos v, v)$$

是极小曲面。

11.10. 练习。 设 Σ是绕 x轴旋转的旋转曲面，其母线为 $y = a \cdot \sin x$，对于.....



常数 $a > 0$ 和 $x \in (0,\ \pi)$。证明，高斯曲率 Σ 不超过 1。

11.11. 练习。 设 $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$ 是一个光滑正函数，而 Σ 是由图像 $y = f(x)$ 绕轴 x旋转得到的旋转曲面。假设 Σ 的高斯曲率为零。证明 f 是线性函数；也就是说，对于某些常数 c 和 d，有 $f(x) = c \cdot x + d$。

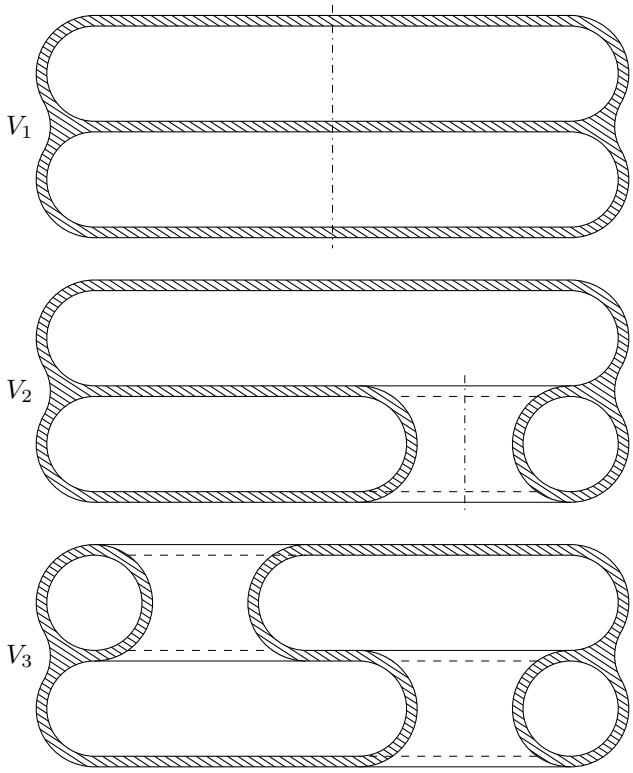
C 拉古诺夫水族馆

我们从三维版本的水注中的月亮问题（7.14）开始。

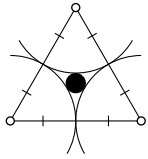
11.12. 问题。 假设立体 $V \subset \mathbb{R}^3$ 由一个闭曲面 Σ 围成，其主曲率的绝对值不超过 1 。那么， V 是否包含一个半径为 1的球?

11.13. 练习。证明，对于旋转体，问题 *11.12* 的答案是肯定的。

稍后（见 12.8 和 15.19）我们将看到，对于凸体以及半径为 2 的开集球内的曲面，答案同样是肯定的。而现在，我们将构造弗拉基米尔·拉古诺夫 [56], 的一个例子，说明一般情况下答案是否定的。



构造。 我们从旋转体 V_1开始，其横截面如下一幅图所示。横截面的边界由 6 条长的水平线段组成，这些线段包含在 3 条简单闭光滑曲线中。（构造这些曲线时，需要使用附录 AF 中的光滑化程序。） V_1 的边界由三个光滑球面组成。



我们假设曲线的曲率不超过 1。更进一步，除了近乎水平的部分外，曲率都接近 1。物体中最厚的地方是 V_1 三个边界球彼此靠近之处；其余部分 V_1则假设非常薄。可以设法使 V_1 中最大球的半径 r 仅略微大于 $r_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$。（图中的小黑圆半径为 r_2，三个大圆的半径均为 1。）特别地，可以认为 $r < \frac{1}{6}$。

习题 11.7 给出了适用于边界球面的主曲率公式，

由此可知，两个主曲率的绝对值均不超过 1。

接下来要使边界 V_1 连通，同时不破坏主曲率的估计，也不改变立体内部球的最大半径。

每个边界球面都包含两个平面圆；它们组成三对彼此靠近的圆。我们在其中两对圆上钻出贯穿的孔，再用一根管子连接这些孔——这根管子是一个旋转体，其轴发生了偏移，但仍与轴 V_1 平行。设 V_2 为所得立体；其横截面如图所示。

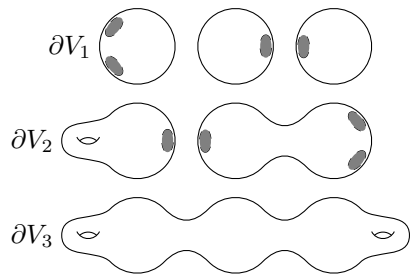
现在对另外两对圆重复这一操作。设 V_3 为所得立体。

注意，边界 V_3 是连通的。假设孔足够大，就可以使其主曲率仍不超过 1；这一点的证明与 V_1 的情形相同。

□

估计值 $r_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ 是最优的；这一点以及其他结论由弗拉基米尔·拉гунов和阿布拉姆·费特 [55—58]证明。

拉гунов水族馆中的曲面 V_3 亏格为 2；也就是说，它可以用带有两个把手的球面进行参数化。



事实上，边界 V_1由三个光滑球面组成。

第一次钻孔后，我们在物体表面得到四个孔——两个球面各得到一个孔，另一个球面得到两个孔。将其中两个球面用管道连接起来，就得到一个球面。将剩余球面的两个孔连接起来，就得到一个环面。它画在图的左侧。因此，V_2 由一个球面和一个环面围成。

为了用 V_2构造 V_3，我们用剩余的球面制成一个环面，再用管道将它与另一个环面连接起来，于是得到一个带有两个把手的球面。

11.14. 练习。修改拉贡诺夫的构造，使边界曲面成为带有四个把手的球面。

尝试更改构造，使边界曲面成为带有三个把手的球面。

第 12 章

支撑曲面

A 定义

两个光滑曲面 Σ_1和 Σ_2在点 $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$相切，是指它们在该点有共同的切平面。在这种情况下，它们在 p 处的法向量要么相等，要么方向相反。也就是说，如果曲面是定向的，那么可以说它们在 p处正向相切或反向相切。

如果曲面 Σ_1 在点 p 局部支撑曲面 Σ_2，则 p 是曲面的公共点，并且存在点 p 的某个邻域 U，使得 $\Sigma_2 \cap U$ 完全位于 U 中由 Σ_1 划分的一侧。根据下面的练习，这样的曲面必然在 p 相切；选定它们的定向后，可以认为它们在 p 同向。

12.1. 练习。设光滑曲面 Σ_1 在点 p 局部支撑光滑曲面 Σ_2。证明，Σ_1 在点 p 与 Σ_2 相切。

假设曲面 Σ_1 和 Σ_2 在 p 相切且同向。将它们局部表示为函数图像，例如 f_1 和 f_2，并使用在 p 处的公共切向—法向坐标。注意到，当且仅当不等式成立时，Σ_2 在 p 局部支撑 Σ_1。

$$f_1(x,y) \geqslant f_2(x,y) \quad (\text{или} \quad f_1(x,y) \leqslant f_2(x,y))$$

对所有足够接近于零的（x，y）均成立；在这种情况下，Σ_2在局部从外部（相应地，从内部）支撑 Σ_1。

12.2. 命题。设 Σ_1 和 Σ_2 是光滑的定向曲面。假设 Σ_1 在点 p 处从内部局部支撑 Σ_2（等价地，Σ_2 从外部局部支撑 Σ_1）。

那么

$$k_1(p)_{\Sigma_1} \geqslant k_1(p)_{\Sigma_2} \quad u \quad k_2(p)_{\Sigma_1} \geqslant k_2(p)_{\Sigma_2}.$$

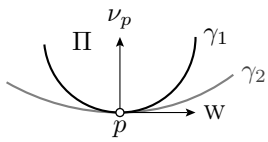
12.3. 练习。构造两个曲面 Σ_1 和 Σ_2，它们在 p处有公共点 p 和公共法向量，并且在局部不相互支撑，但 $k_1(p)_{\Sigma_1} > k_1(p)_{\Sigma_2}$ 和 $k_2(p)_{\Sigma_1} > k_2(p)_{\Sigma_2}$。

证明 12.2。不妨设 Σ_1 和 Σ_2 是在 p 和 $f_1 \geqslant f_2$处、同一切向-法向坐标下的图像，分别为 $z = f_1(x, y)$ 和 $z = f_2(x, y)$。

设 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p\Sigma_1 = \mathrm{T}_p\Sigma_2$ 是一个公共切向单位向量。构造平面 Π，使其经过 p，并以法向量 ν_p 和 w 为方向。设γ_1 和 γ_2 是 Σ_1 和 Σ_2 与 Π的交线。

在 Π 上选取定向，使 ν_p 指向 w 的左侧。接着，沿 w 的方向对两条曲线进行参数化，令 p；在这种情况下，它们方向相同，并且 γ_1 在 p 中从左侧支撑 γ_2。

由 7.3，得到关于沿 w 方向的 p 处 Σ_1 和 Σ_2 的法曲率的不等式：



❶ $$k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_1} \geqslant k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_2}.$$

接着，由 11.2，

$$k_1(p)_{\Sigma_i} = \min_{\mathrm{w}} \{\, k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_i} \,\},$$

其中 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p$ 且 $|\mathrm{w}| = 1$。选取 w，使得

$$k_1(p)_{\Sigma_1} = k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_1}.$$

于是由 ❶ 得到

$$\begin{aligned} k_1(p)_{\Sigma_1} = k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_1} &\geqslant \\ &\geqslant k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_2} \geqslant \\ &\geqslant \min_{\mathrm{v}} \{\, k_{\mathrm{v}}(p)_{\Sigma_2} \,\} = \\ &= k_1(p)_{\Sigma_2}. \end{aligned}$$

类似地，由 11.2 得到，

$$k_2(p)_{\Sigma_i} = \max_{\mathrm{w}} \{\, k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_i} \,\},$$

其中 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p$ 且 $|\mathrm{w}| = 1$。选取 w，使得

$$k_2(p)_{\Sigma_2} = k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_2},$$

并由 ❶，

$$\begin{aligned} k_2(p)_{\Sigma_2} = k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_2} &\leqslant \\ &\leqslant k_{\mathrm{w}}(p)_{\Sigma_1} \leqslant \\ &\leqslant \max_{\mathrm{v}} \{\, k_{\mathrm{v}}(p)_{\Sigma_1} \,\} = \\ &= k_2(p)_{\Sigma_1}. \end{aligned}$$

两种情况下都假设 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}_p$ 和 $|\mathrm{v}| = 1$。 □

12.4. 推论。设 Σ_1 和 Σ_2 为定向光滑曲面。若 Σ_1 在点 p从内部局部支撑 Σ_2，则

(a) $H(p)_{\Sigma_1} \geqslant H(p)_{\Sigma_2}$; *(b)* 若 $k_1(p)_{\Sigma_2} \geqslant 0$,

则 $K(p)_{\Sigma_1} \geqslant K(p)_{\Sigma_2}$。

证明； *(a)*。由 12.2 可得，因为 $H = k_1 + k_2$。

(b). 由于 $k_2(p)_{\Sigma_i} \geqslant k_1(p)_{\Sigma_i}$，且 $k_1(p)_{\Sigma_2} \geqslant 0$，所有主曲率$k_1(p)_{\Sigma_1}$, $k_1(p)_{\Sigma_2}$, $k_2(p)_{\Sigma_1}$和 $k_2(p)_{\Sigma_2}$均非负。由 12.2，得到

$$\begin{aligned} K(p)_{\Sigma_1} = k_1(p)_{\Sigma_1} \cdot k_2(p)_{\Sigma_1} \geqslant \\ \geqslant k_1(p)_{\Sigma_2} \cdot k_2(p)_{\Sigma_2} = K(p)_{\Sigma_2}. \end{aligned}$$

□

12.5. 练习。 证明，位于单位球内的任意闭合曲面上，都存在一点，其高斯曲率至少为 1。由此推出，任何闭合曲面都有一点具有正的高斯曲率。

12.6. 练习。 证明，距离某条直线不超过 1 的任意闭合曲面，都存在一点，其高斯曲率至少为 1。

B 凸曲面

如果曲面围成一个凸区域，就称它为凸曲面。

12.7. 练习。 证明光滑凸曲面的高斯曲率非负。

12.8. 进阶练习。 设 R 是 $\mathbb{R}^3$ 中由一个主曲率不超过 1 的曲面所界定的凸体。证明 R 包含一个单位球。

回忆一下，如果欧几里得空间中的区域 R 满足：对于任意两个点 x、$y \in R$，位于 x 和 y 之间的任意一点 z 都处于 R 的内部，那么就称该区域为严格凸区域。

任何开凸集都是严格凸的。立方体和任何凸多面体一样，都不是严格凸的。显然，闭凸区域严格凸，当且仅当其边界不含线段。

12.9. 引理。 设 $z = f(x,\ y)$ 是曲面 Σ 在 $p \in \Sigma$处的切向-法向坐标中的光滑曲面的局部表示。若在 p 处的两个主曲率 Σ 均为正，则函数 f 在零点的邻域内严格凸，并在零点处取得局部最小值。

特别地，切平面 T_p 在局部从外部支撑 Σ p。

证明。 由于两个主曲率均为正，10.6推出

$$D^2_{\mathrm{w}} f(0,0) = \langle \mathrm{Shape}_p(\mathrm{w}), \mathrm{w} \rangle \geqslant k_1(p) > 0$$

对于任意单位切向量 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p\Sigma$ （在我们的坐标系中，w 是水平向量）。

由于函数 $(x, y, \mathrm{w}) \mapsto D^2_{\mathrm{w}} f(x, y)$ 连续，所以 $D^2_{\mathrm{w}} f(x, y) > 0$，对于任意 $\mathrm{w} \neq 0$ 以及零点附近的任意点 (x, y) 都成立。因此，f 在零点的某个邻域内严格凸（A.28）。

最后，f 在零点处有严格局部极小值，因为$\nabla f(0, 0) = 0$，且 f在零点的邻域内严格凸。 □

12.10. 练习。设 Σ 是具有正高斯曲率的光滑曲面（无边界）。证明，Σ 与平面的交集的任一连通分支要么是一个点，要么是一条定向曲率符号恒定的光滑曲线。

C 凸性判据

12.11. 定理。设 Σ 是一条开曲线或闭光滑曲面，且具有正高斯曲率。那么 Σ 在 $\mathbb{R}^3$ 中围成一个严格凸区域。

证明中需要用到曲面是连通的这一点（按定义这总是成立）；否则，两张球面就构成一个反例。同样可以证明，任何具有非负高斯曲率的闭光滑曲面都围成一个凸区域，不过证明要比 [36, 40, 87] 复杂得多。对于存在自交的曲面，定理依然成立。这是詹姆斯·斯托克证明的[91], , 他将这一结果归功于雅克·阿达马；阿达马证明了一个相近的命题 [40, § 23]。从下面的证明中可以推出，欧几里得空间中的任何闭连通局部凸区域都是凸的。

证明。由于高斯曲率为正，可以认为所有点处的主曲率均为正。用 R 表示由 Σ围成、且法向量场 ν 在 Σ上指向其中的区域。（根据 8.1，区域 R 存在。）

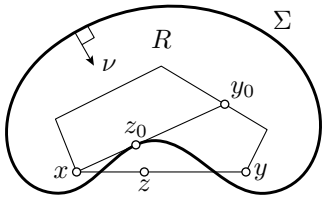
首先证明 R局部严格凸；也就是说，对于任意点 $p \in \Sigma$，R 与以 p为圆心的小球的交集严格凸。事实上，设 Σ 在 p处的切向-法向坐标中局部由图 $z = f(x, y)$给出。根据 12.9，函数 f 在零点的某个邻域内严格凸。特别地，以 p为圆心的小球与函数 $z \geqslant f(x, y)$的上图集的交集严格凸。

由于 Σ 是连通的，区域 R也连通。此外，R 内部的任意两点都可以用一条折线在 R的内部连接起来。

假设 R 的内部不是凸的；也就是说，存在点x、$y \in R$，以及位于 x 和 y 之间、但不在 R内部的点 z。

考虑内部 R中从 x 到 y 的折线 β 。设 y_0 是 β上第一个满足以下条件的点: 弦 $[x, y_0]$ 与 Σ相切，设切点为 z_0。

由于 R 局部严格凸， $R \cap B(z_0, \varepsilon)$在 $\varepsilon > 0$充分小时严格凸。另一方面， z_0 位于 $[x, y_0] \cap B(z_0, \varepsilon)$交集中的两个点之间。由于 $[x, y_0] \subset R$，我们得出矛盾。



因此， R 的内部是凸的。注意，区域 R是其内部的闭包，因此 R 也凸。

由于 R 局部严格凸，其边界 Σ 不含直线段。因此， R 严格凸。

□

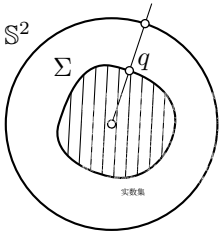
12.12. 练习。 假设闭曲面Σ 围成一个包含单位圆的区域。证明，在某个点 $p \in \Sigma$处， $K(p) \leqslant 1$ 。

12.13. 练习。 设 Σ 是直径不小于 π的闭光滑凸曲面；也就是说，存在一对点p， $q \in \Sigma$ 使得 $|p - q| \geqslant \pi$。证明， Σ 上存在一点，其高斯曲率不大于 1。

D 进一步讨论凸性

12.14. 定理。 任意闭光滑凸曲面Σ 都是光滑球面；也就是说， Σ 可以由标准球面 $\mathbb{S}^2$进行光滑正则参数化。ξ

12.15. 证明与练习。
设 R 是由光滑曲面 Σ围成的凸紧区域。假设 R 包含坐标原点。



(a) 证明，任何一条从原点出发的射线都与 Σ 相交于唯一一点；换言之，存-

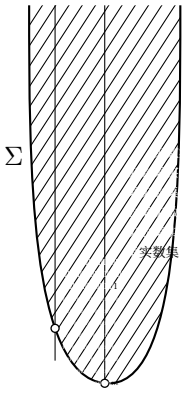
在一个正函数 ρ: $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$，使得 Σ 由点 $q = \rho(\xi) \cdot \xi$ 组成，其中 $\xi \in \mathbb{S}^2$。

(b) 证明函数 ρ: $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ 是光滑曲线。推导出$\xi \mapsto \rho(\xi) \cdot \xi$ 是 $\mathbb{S}^2 \to \Sigma$的光滑正则参数化。

12.16. 定理。设 Σ 是一个开光滑曲面，它围成一个严格凸的闭区域。那么，在某个坐标系中， Σ 由凸函数 $z = f(x, y)$ 的图像给出

函数 f，它定义在 Ω 这一凸开区域上，该区域位于$(x,\ y)$平面内。此外，f $(x_n,\ y_n) \to \infty$ 当$(x_n,\ y_n) \to (x_\infty,\ y_\infty) \in \partial\Omega$。

12.17. 证明与练习。假设严格凸闭非紧区域 R 包含原点作为内点，并由光滑曲面 Σ限定。证明下列结论。



(a) R 包含一条射线，比如说 ℓ。*(b)* 任意一条与 ℓ 平行的直线 m与 Σ 至多相交于一点。*(c)* 在以 ℓ 为方向的 z 轴所定义的坐标系中，Σ 在(x,y)平面上的投影是一个开凸集，比如说Ω。*(d)* Σ 是定义在Ω上的光滑凸函数 f的图像(x,y)。*(e)* 证明 *12.16*中的最后一个命题。

12.18.练习。 证明，任何具有正高斯曲率的开曲面 Σ 都是拓扑平面；也就是说，存在一个嵌入 $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$，其像为 Σ。

试着证明，Σ 是光滑平面；也就是说，可以使嵌入 f 光滑且正则。

12.19. 练习。 证明，任何具有正高斯曲率的开光滑曲面 Σ 都包含在一个无限圆锥内。换句话说，在某个坐标系中，Σ 位于区域 $z \geqslant m\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ 内，其中 m为正数。

12.20. 练习。 设 Σ 是具有正高斯曲率的光滑凸曲面，且 $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是它的球面映射。

(a) 假设 Σ 是闭的，证明ν: $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是双射。由此推导出，

$$\iint\limits_{\Sigma} K = 4\cdot\pi.$$

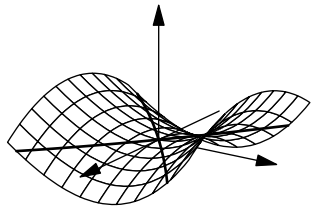
(b) 假设 Σ 是开放的，证明 ν: $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 在半球的某个子集上定义了一个双射，并推出

$$\iint\limits_{\Sigma} K \leqslant 2\cdot\pi.$$

第13章

鞍形曲面

A 定义



如果一个曲面上每一点的高斯曲率都不为正，则称该曲面为马鞍面；换句话说，每一点的主曲率符号相反，或者至少有一个等于零。

如果每一点的高斯曲率都为负，则该曲面称为严格鞍形曲面；这意味着每一点的主曲率符号相反。在这种情况下，切平面甚至无法在局部托住曲面——从该点沿曲面的主方向移动，可能到达切平面上方，也可能到达其下方。

13.1. 练习。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑正函数。证明：图像 $y = f(x)$ 绕轴 x 旋转所得的旋转曲面是鞍形曲面，当且仅当 f 是凸的；也就是说，对于任意 x，都有 $f''(x) \geqslant 0$。

如果曲面 Σ 上每一点 $p \in \Sigma$ 都存在一条经过该点的直线 $\ell_p \subset \Sigma$，则称该曲面为直纹曲面。

13.2. 练习。证明任意直纹曲面都是鞍形的。

13.3. 练习。设 Σ 是一张开且严格鞍形的曲面，而 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是一个光滑凸函数。证明，f 在 Σ 上的限制没有局部极大点。

光滑曲面上法曲率为零的方向称为渐近方向。始终沿渐近方向延伸的光滑曲线称为渐近线。

提醒一下，如果存在一个点 $p \in R$，使得对于任意点 $x \in R$，线段 $[p,x]$ 都属于 R，那么平面上的集合 R 称为星形集合。

13.4. 进阶练习。 设 γ 是光滑函数 f 的图像 $z = f(x,y)$ 上的一条闭光滑渐近线。假设该图像在 γ的某个邻域内严格呈鞍形。证明，由曲线 γ 的投影 $\bar{\gamma}$ 所围成的 (x,y)平面区域不可能是星形的。

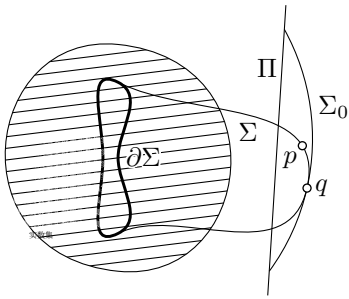
13.5. 进阶练习。 设 p 是光滑曲面 Σ 上的一个点，其 $K(p) < 0$。证明，存在点 p 在 Σ 中的一个邻域Ω，使得Ω 与切平面T_p 的交集是两条光滑曲线的并集，它们在点 p 处横截相交；也就是说，它们在 p 处的速度向量线性无关。

B 小丘判据

请注意，闭曲面不可能是鞍面。事实上，设 Σ 是闭曲面。考虑包围 Σ 的最小球面。该球面必定在某一点支撑 Σ。根据 12.2，在该点 Σ 的主曲率同号。下面这个更一般的命题运用了类似的思想。

13.6.引理。 设 Σ 是紧致马鞍曲面，且其边界位于闭凸区域 R 中。那么整个曲面 Σ 都位于 R 中。

注。对于严格鞍面，这个引理可以由 13.3 推出。



证明。 假设存在一点 $p \in \Sigma$ 不在 R 中。那么将存在一个平面 Π，把 p 与 R 分隔开（A.18）。用 Σ' 表示 Σ 中与 p 位于 Π 同一侧的那一部分。

由于 Σ 紧致，可以用一个球面包围它；设 σ 是该球面与 Π 的交集圆。考虑带边界 σ 的、包围 Σ' 的最小球形穹顶 Σ_0。

Σ_0 在某点 q处支撑着 Σ。不失一般性，可以假设 Σ_0 和 Σ 在 q处同向，且 Σ_0 的主曲率为正。在这种情况下， Σ_0 从外部支撑着 Σ，由 12.4 可得，$K(q)_\Sigma \geqslant K(q)_{\Sigma_0} > 0$ ——这就产生了矛盾。 □

13.7. 练习。 构造一个自身的鞍面，使其不包含在其边界的凸包内。（根据 *13.6*，它不是紧致的。）

13.8.练习。 假设点 p 位于紧致光滑鞍面 Δ上，其边界位于以 p为圆心的单位球面上。证明：如果 Δ 是一个拓扑圆盘，那么$\operatorname{length}(\partial\Delta) \geqslant 2\cdot\pi$。

证明：如果不假设 Δ 是拓扑圆盘，则该结论不再成立。

注。 实际上 $\operatorname{area}\Delta \geqslant \pi$；也就是说，单位圆在练习中的曲面中具有可能的最小面积。这可由所谓的等周公式推出。

13.9. 练习。 证明：开曲面鞍面不可能位于无限圆锥内部。

曲面 Σ 上的拓扑圆盘 Δ 称为曲面的凸帽 Σ，如果其边界 $\partial\Delta$ 位于某个平面 Π内，而$\Delta \setminus \partial\Delta$ 严格位于 Π的一侧。

13.10. 命题。 光滑曲面 Σ 是鞍面的充要条件是其上没有凸帽。

鞍面可以包含一条闭合的平面曲线。例如，双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 与平面 (x, y) 的交线是单位圆。然而，根据命题（和引理），鞍面上的平面曲线不能围成拓扑圆盘（也不能围成任何紧集）。

证明。 由于平面是凸的，必要性由 13.6 得出；剩下只需证明充分性。

假设 Σ 不是鞍面的；也就是说，它有一点 p，其高斯曲率严格为正；换言之，它的主曲率 $k_1(p)$和 $k_2(p)$同号。不妨设 $0 < k_1(p) \leqslant k_2(p)$，另一种情况类似。

设 $z = f(x,y)$是 Σ在 p处切向法向坐标下的局部表示。考虑(x,y)平面上的集合 F_ε，它由不等式 $f(x,y) \leqslant \varepsilon$定义。根据12.9，函数 f 在(0,0)的一个小邻域内是凸函数。因此，当 $\varepsilon > 0$充分小时，F_ε是凸的。特别地，F_ε 是一个拓扑圆盘。

映射 $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ 是从 F_ε 到.....的同胚

$$\Delta_\varepsilon = \left\{ (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) \leqslant \varepsilon \right\};$$

因此，对任意足够小的 $\varepsilon > 0$，Δ_ε 是一个拓扑圆盘。边界直线 Δ_ε 位于平面 $z = \varepsilon$ 中，整个圆盘位于该平面的下方；也就是说，Δ_ε 是一个凸帽 Σ。□

下面的练习表明，事实上 Δ_ε 是一个光滑圆盘。由此可以推出更强的凸帽判据（13.10）；也就是说，在凸帽的定义中，可以假设圆盘是光滑的。

13.11. 练习。设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个在零点处取极小值的光滑严格凸函数。证明，对任意 $\varepsilon > 0$，由不等式 $f(x,y) \leqslant \varepsilon$ 所定义的图像 $z = f(x,y)$ 上的集合 F_ε 是一个光滑圆盘；也就是说，存在从 F_ε 到单位圆盘 $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$ 的微分同胚。

13.12. 练习。设 $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是一个仿射变换；也就是说，它是一个双射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，将任意平面映到平面。证明：对于任意鞍面 Σ，其像 $L(\Sigma)$也是鞍面。

C 鞍形图像

下述定理由谢尔盖·伯恩施泰因证明 [8]。

13.13. 定理。如果光滑函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的图像 $z = f(x,y)$ 是严格鞍形图像，那么它无界；也就是说，不存在常数 C，使得不等式 $|f(x,y)| \leqslant C$ 对任意 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 都成立。

根据定理，鞍形图像不可能位于两个水平平面之间。结合 13.12 可知，鞍形图像不可能位于两个平行平面之间。下一道练习表明，该定理不适用于非图像形式的鞍形曲面。

13.14. 练习。 构造一个位于两个平行平面之间的开严格鞍形曲面。

有些函数的图像严格呈鞍形，却只在一侧有界。由于 $\exp(x-y^2) > 0$，下面的练习给出了这样一个例子。也就是说，在定理的证明中，我们必须同时使用 f 的上界和下界。

13.15. 练习。 证明， $z=\exp(x-y^2)$ 的图像是严格鞍形的。

下面的练习给出了伯恩斯坦定理的一个加强形式。

13.16. 进阶练习。 设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条开曲线光滑的严格鞍面。假设存在一个紧子集 $K \subset \Sigma$，使得补集 $\Sigma \setminus K$ 是由在平面 $x,y)$ 的一个开区域上定义的光滑函数 $z=f(x,y)$ 的图像。证明整个曲面Σ 是一个图像。

下面的引理与 13.8 类似；它将在定理 13.13 的证明中用到。

13.17. 引理。 在平面 Π 中，不存在一张自身且严格鞍形、带边界的光滑曲面，使其与 Π 中某条直线的距离有界。

证明。 利用 13.12，可以将引理改述如下：不存在一张自身且严格鞍形、带边界的光滑曲面，它位于(x,y)平面中，并包含在如下形式的无界平行六面体内：

$$R = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leqslant z \leqslant r,\ 0 \leqslant y \leqslant r \right\}.$$

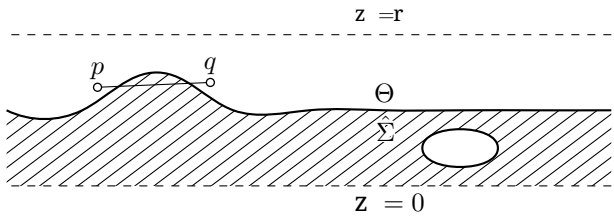
反设 Σ 是这样一张曲面。考虑 Σ 在 (x,z) 平面上的投影。它位于上半平面内，但在直线 $z=r$ 下方。

考虑开上半平面

$$H = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, z > 0 \right\}.$$

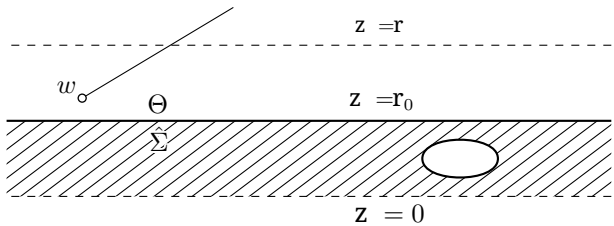
设 Θ 是补集 $H \setminus \^{\Sigma}$的一个连通分支，其中包含直线 $z=r$ 上方的点。

注意到 Θ 是凸的。若并非如此，则存在一条线段$\^{[p,q]}$，其端点为 p、$q \in \Theta$，它从 Σ 上截下一块紧致部分。设 Π 为经过 $[p,q]$、垂直于（x、 z）平面的平面，它从Σ 上截下一个紧区域 Δ。应用9.13，可认为 Δ 是——



位于 Π中的带边界紧致曲面，而 Δ 的其余部分严格位于 Π的一侧。由于平面 Π 是凸的，这与13.6矛盾。

因此， Θ 是一个开集凸子集 H，包含 $z = r$上方的所有点。根据凸性，对于任意点 w ，集合 Θ 都包含从 w 出发并且向上的射线上的所有点；也就是说，包含所有具有正 z坐标方向上的点。换句话说，对于任意点 w，集合 Θ 都包含所有 z坐标更大的点。由于 Θ



是开集，可用不等式 $z > r_0$描述。由此可知，平面 $z = r_0$ 在某个点（实际上在许多点）处支撑着 Σ 。应用 12.2，便得出矛盾。

□

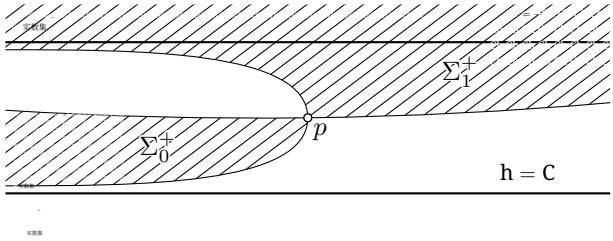
证明 13.13。 设 Σ是 $z = f(x, y)$的图像。反设不然，即 Σ 位于两个平面$z = \pm C$之间。

函数 f 不可能是常数。因此，某个点 $p \in \Sigma$ 处的切平面 T_p 不是水平的。

用 Σ^+ 表示 Σ中位于 T_p上方的部分。其中至少有两个连通分支，它们沿着正主曲率对应的主方向，从两侧趋近 p。否则，就存在一条位于 Σ^+中的曲线，从两侧趋近 p 。该曲线会从 Σ 上截出一个拓扑圆盘，比如 Δ，其边界不低于 T_p ，且有一些点严格低于 T_p，这与 13.6 矛盾。

因此， Σ^+ 至少有两个连通分支。

设 T_p 由方程 $z = h(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c$给出。因此 $\Sigma^+ = \{(x, y, f(x, y)) \in \Sigma : h(x, y) \leqslant f(x, y)\}$。由此可得， Σ^+



曲面 Σ，俯视图。

包含一个连通集

$$R_- = \{\,(x,y,f(x,y)) \in \Sigma : h(x,y) < -C\,\}$$

且不与.....相交

$$R_+ = \{\,(x,y,f(x,y)) \in \Sigma : h(x,y) > C\,\}.$$

因此，某个连通分支，例如 Σ_0^+，位于带状区域

$$R_0 = \{\,(x,y,f(x,y)) \in \Sigma : |h(x,y)| \leqslant C\,\}.$$

这个集合与直线 T_p 的距离有界，该直线是 (x,y)-平面的交线。

将 T_p 稍微向上移动，并从 Σ_0^+ 中截去所得平面上方的部分，称之为 $\tilde{\Sigma}_0^+$。应用 9.13 后，可以认为 $\tilde{\Sigma}_0^+$ 是带边界的光滑曲面；根据构造，其边界位于平面内。所得曲面 $\tilde{\Sigma}_0^+$ 到直线的距离仍然有界，这与 13.17 矛盾。 □

D 注记

对于非严格鞍面，伯恩斯坦定理及其证明中的引理并不成立；反例可以在柱面中找到，参见第 10D 节。事实上，没有其他反例；证明基于相同的思路，但更为复杂。

根据隆起判据 13.10，鞍面可以定义为无隆起的光滑曲面。这个定义适用于任意曲面，不一定要求光滑。许多已给出的结果，例如鞍形图像的刻画，对于这类广义鞍面仍然成立。不过，这类曲面目前尚未得到充分研究；参见 [4, 章 4] 及其中的参考文献。

第三部分 测地线



第14章

最短线

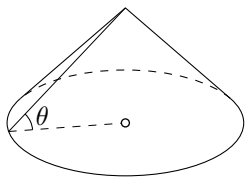
A 内蕴几何

曲面的几何学分为内蕴几何和外在几何。内蕴几何指的是无需离开曲面就能检验或测量的一切；例如，可以测量曲面上曲线的长度以及它们之间的角度。如果需要用到母空间，我们谈论的就是外在性质；法曲率就是一个例子。

平均曲率和高斯曲率一样，是通过主曲率定义的，而主曲率属于外在性质。稍后（18.16）将会说明，高斯曲率是内蕴的，也就是说，确实可以通过在曲面本身上进行测量来求得。然而，平均曲率并非内蕴性质；例如，平面的内蕴几何与图像 $z = (x+y)^2$ 的内蕴几何并无不同。不过，第一个曲面的平均曲率在所有点上都等于零，而第二个曲面的平均曲率则不为零，例如在原点处。

接下来的练习有助于调整到合适的状态。这可能看起来像一道枯燥的分析题，但实际上是一道有趣的几何题。

14.1. 练习。牛仔站在一座冰山脚下。冰山呈圆锥形，底面为圆形，倾斜角为 θ。他把套索抛向圆锥的顶点，收紧套索，试图爬上去。

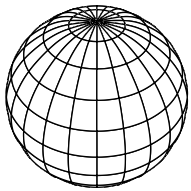


求出最大角 θ，在这个角度下，牛仔无法爬上山。

B 定义

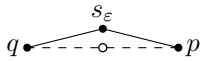
设 p 和 q 是曲面 Σ 上的点。提醒一下，$|p-q|_\Sigma$ 表示从 p 到 q 的内在距离；也就是说，它是曲面 Σ 上从 p 到 q 的路径长度的下确界。

在 γ 上从 p 到 q 的曲线 Σ，若其长度达到最小值，就称为最短曲线。这样的最短曲线的像记作 $[p,q]$ 或$[p,q]_\Sigma$。如果我们写作 $[p,q]_\Sigma$，就表示假定最短曲线存在，并且我们选取了其中一条。一般来说，这样的最短线段可能不存在，也可能不止一条；下面两个例子展示了这两种情况。



非唯一性。球面的两个极点之间，每条子午线都是最短曲线。这可由 2.22 得出。

不存在性。设 Σ 是去掉坐标原点后的 $z=0$平面。考虑其上的两个点 $p=(1,0,0)$和 $q=(-1,0,0)$。我们将证明在 Σ 上，从 p 到 q不存在最短曲线。



注意到，$|p-q|_\Sigma=2$。事实上，设$s_\varepsilon=(0,\varepsilon,0)$，其中 $\varepsilon>0$。折线 $ps_\varepsilon q$ 沿着 Σ经过；其长度 $2\cdot\sqrt{1+\varepsilon^2}$在 $\varepsilon\to 0$时趋近于 2。由此可得 $|p-q|_\Sigma\leqslant 2$。又因为 $|p-q|_\Sigma\geqslant|p-q|_{\mathbb{R}^3}=2$，所以得到 $|p-q|_\Sigma=2$。

因此，从 p到 q的最短曲线（如果存在）长度应为 2。根据三角不等式，从 p 到 q 的任意长度为 2 的曲线都必须沿着线段 $[p,q]$经过；特别地，还必须包含坐标原点。然而，由于 Σ 中没有坐标原点，其中也就不存在从 p 到 q的最短曲线。

14.2. 命题。任意两个点都可以在一个本征光滑曲面（可能带边界）上由最短路径连接。

证明。设 p 和 q 是本征光滑曲面 Σ上的点，并且 $\ell=|p-q|_\Sigma$。

由于 Σ 是光滑的，点 p 和 q 可以在 Σ 中由分段光滑路径连接。任意这样的路径都可以拉直，因此，$\ell<\infty$。

根据 Σ上诱导内在度量 (2G) 的定义，存在从 p 到 q的路径序列 γ_n，使得

$$\operatorname{length}\gamma_n\to\ell\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

可以认为，对于任意 n，$\operatorname{length}\gamma_n<\ell+1$，并且每个$\gamma_n$ 都按照其弧长成比例参数化。特别地，每条路径 $\gamma_n\colon\ [0,1]\to\Sigma$ 都是常数为 $(\ell+1)$ 的利普希茨函数；也就是说

$$|\gamma_n(t_0)-\gamma_n(t_1)|\leqslant(\ell+1)\cdot|t_0-t_1|$$

对于任意 t_0、$t_1 \in [0,1]$ 和 n。

对于任意 n，γ_n的像都 лежит 于闭球 $B[p, \ell+1]$ 中。因此，所有 γ_n 的坐标函数都一致连续且有界。根据阿尔泽拉—阿斯科利定理（A.23），存在一个收敛的子序列 γ_n，其极限，记作 $\gamma_\infty\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^3$，是连续的。曲线 γ_∞ 从 p 走到 q，特别是，

$$\operatorname{length} \gamma_\infty \geqslant \ell.$$

由于 Σ 是闭集，γ_∞ лежит в Σ。

根据长度的半连续性（2.9），$\operatorname{length} \gamma_\infty \leqslant \ell$。因此，$\operatorname{length} \gamma_\infty = \ell$，且 γ_∞ 是从 p 到 q 的最短曲线。 □

C 短投影

下一个引理涉及凸几何，但它将发挥如此重要的作用，以至于我们要对其进行证明。

14.3. 引理。 设 R 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭凸集。对于任意点 $p \in \mathbb{R}^3$，存在唯一的点 $\bar{p} \in R$，使其到 R 的距离最小；也就是说，对于任意点 $x \in R$，都有 $|p-\bar{p}| \leqslant |p-x|$。

此外，映射 $p \mapsto \bar{p}$ 是压缩映射；也就是说

❶ $$|p-q| \geqslant |\bar{p}-\bar{q}|$$

对于任意一对点 p，$q \in \mathbb{R}^3$。

映射 $p \mapsto \bar{p}$ 称为短投影；它将欧几里得空间映射到 R。注意，对于任意点 $p \in R$，都有 $\bar{p} = p$。特别地，$\bar{\bar{p}} \equiv \bar{p}$。

证明。 取 $p \in \mathbb{R}^3$。设

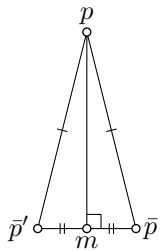
$$\ell = \inf \{\, |p-x| \,:\, x \in R \,\},$$

且 $x_n \in R$ 是这样的序列：当 $n \to \infty$ 时，$|p-x_n| \to \ell$。

不失一般性，可以认为所有点 x_n 都位于半径为 $\ell+1$、圆心在 p 的球内。因此，数列 x_n存在一个部分极限，不妨记作 $\bar{p}$；也就是说，$\bar{p}$ 是某个子数列 x_n的极限。集合 R 是闭集，因此$\bar{p} \in R$。根据构造

$$|p-\bar{p}| = \lim_{n\to\infty} |p-x_n| = \ell,$$

于是，存在性得证。

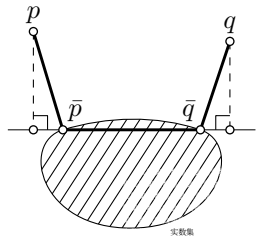


假设存在两个不同的点$\bar{p}, \bar{p}' \in R$，它们到 p 的距离最小。由于R 是凸的，其中点 $m = \frac{1}{2}\cdot(\bar{p} + \bar{p}')$ 属于 R。注意到 $|p - \bar{p}| = |p - \bar{p}'| = \ell$；也就是说，$[p\bar{p}\bar{p}']$ 是等腰三角形。因此，$[p\bar{p}m]$是直角三角形。由于直角边比斜边短，$|p - m| < \ell$ 与此矛盾。

剩下只需验证❶。可以认为 $\bar{p} \neq \bar{q}$；否则也就无须证明了。

如果 $\measuredangle[\bar{p}\,{}^{p}_{\bar{q}}] < \frac{\pi}{2}$，那么对于靠近的点 $x \in [\bar{p}, \bar{q}]$，有 $|p - x| < |p - \bar{p}|$ $\bar{p}$，这是不可能的，因为 $[\bar{p}, \bar{q}] \subset R$。

因此 $\measuredangle[\bar{p}\,{}^{p}_{\bar{q}}] \geqslant \frac{\pi}{2}$，或者 $p = \bar{p}$。在这两种情况下，p 在直线 $\bar{p}\bar{q}$ 上的正交投影都位于 $\bar{p}$ 之前，或与 $\bar{p}$ 重合。类似地可证明，q 在直线 pq 上的投影位于 q 之后，或与 q重合。因此，$[p, q]$ 的投影包含 $[\bar{p}, \bar{q}]$，于是❶得证。 □



D 凸曲面上的最短路径

14.4. 定理。假设曲面 Σ 围成一个闭凸区域 R，且 p，$q \in \Sigma$。用 W 表示相对于 Σ的闭外部区域；也就是说，W 包括Σ 以及 R的补集。那么

$$\operatorname{length}\gamma \geqslant |p - q|_{\Sigma}$$

对于从 p 到 q、位于 W 中的任意路径 γ。此外，如果 γ 不在Σ上，则不等式严格成立。

证明。设 $\bar{\gamma}$ 是 γ 在 R上的短投影。曲线 $\bar{\gamma}$沿着 Σ从 p 到 q；因此，

$$\operatorname{length}\bar{\gamma} \geqslant |p - q|_{\Sigma}.$$

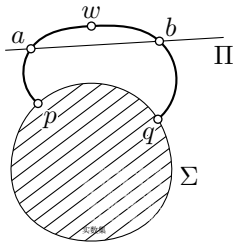
我们来证明，

❷ $$\operatorname{length}\gamma \geqslant \operatorname{length}\bar{\gamma}.$$

考虑内接于 $\bar{\gamma}$ 的折线 $\bar{p}_0 \dots \bar{p}_n$。设 $p_0 \dots p_n$— 是内接于 γ 的相应折线；也就是说，若 $\bar{p}_i = \bar{\gamma}(t_i)$，则 $p_i = \gamma(t_i)$。根据 14.3，$|p_i - p_{i-1}| \geqslant |\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1}|$ 对任意 i 都成立。因此，

$$\operatorname{length} p_0 \dots p_n \geqslant \operatorname{length} \bar{p}_0 \dots \bar{p}_n.$$

应用长度定义，得到 ❷，第一个命题由此得证；还剩下第二个。



假设存在点 $w = \gamma(t_1) \notin \Sigma$；注意，$w \notin R$。于是存在平面 Π，将 w 与 Σ分隔开（A.18）。

曲线 γ 必须在 t_1之前和之后各与 Π 相交于一点。设 $a = \gamma(t_0)$和 $b = \gamma(t_2)$为这两点。从 a 到 b 的弧 γ 比$|a-b|$长，因为它的长度不小于 $|a-w|+|w-b|$，而 $|a-w|+|w-b| > |a-b|$，这是因为 $w \notin [a,b]$。

在 γ 中，用线段$[a,b]$替换从 a 到 b 的圆弧。将所得曲线记作 γ_1。那么

$$\operatorname{length}\gamma > \operatorname{length}\gamma_1.$$

由上述内容可知，

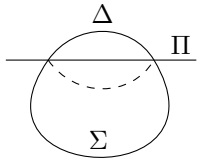
$$\operatorname{length}\gamma_1 \geqslant |p-q|_\Sigma,$$

因为 γ_1 位于 W 中。第二个命题也由此得出。 □

14.5. 练习。设 Σ 是一张开或闭的、具有正高斯曲率的光滑曲面，ν 是它的法向量场。证明：

$$|p-q|_\Sigma \leqslant 2\cdot\frac{|p-q|}{|\nu(p)+\nu(q)|}$$

对于任意 p，$q \in \Sigma$。



14.6. 练习。设平面 Π 从闭光滑曲面 Σ 上截下一个凸起部分 Δ。假设 Σ 围成凸区域 R，且内部部分的反射

线段 Δ 相对于 Π 位于 R内部。证明 Δ 相对于 Σ的内在度量是凸的；也就是说，如果 Σ 中的一条最短线段的两个端点都位于 Δ中，那么整条线段也位于 Δ中。

将曲面的内径定义为其最短线段长度的上确界。

14.7. 练习。设 Σ 是位于单位球内的闭光滑曲面，且具有正高斯曲率。

(a) 证明，Σ 的内径不超过 π .
(b) 证明面积 Σ 不超过 $4\cdot\pi$。

第15章

测地线

A 定义

如果光滑曲线 γ 位于光滑曲面上，且其加速度 $\gamma''(t)$在任意 t处都垂直于切平面 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}$，则称该曲线为测地线。

15.1. 练习。 证明，在圆柱面 $x^2+y^2=1$上，螺旋线 $\gamma(t):=(\cos t, \sin t, t)$ 是一条测地线。

测地线描述了在 Σ 上滑动的粒子的轨迹，且没有摩擦和外力。因为没有摩擦，约束粒子在 Σ上的力必须垂直于 Σ，并且根据牛顿第二定律，加速度 γ'' 垂直于 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}$。

物理学家可以根据能量守恒定律推导出下面这个引理。

15.2. 引理。 设 γ 是光滑曲面 Σ 上的一条测地线。那么它的速度 $|\gamma'|$ 是常数。此外，对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，曲线 $\gamma_\lambda(t):=\gamma(\lambda\cdot t)$ 也是测地线。

换言之，测地线的速度是常数，将它的参数乘以一个常数后，仍然是测地线。

证明。 注意，$\gamma''(t)\perp\gamma'(t)$，因为 $\gamma'(t)$ 在点 $\gamma(t)$ 处与曲面相切，而 $\gamma''(t)$ 垂直于切平面。换言之，对于任意 t，$\langle\gamma'',\gamma'\rangle=0$。由此可得 $\langle\gamma',\gamma'\rangle'=2\cdot\langle\gamma'',\gamma'\rangle=0$。也就是说，量 $|\gamma'|^2=\langle\gamma',\gamma'\rangle$ 是常数。

由于 $\gamma_\lambda''(t)=\lambda^2\cdot\gamma''(\lambda t)$，我们得到了引理的第二部分。 □

下一个练习描述克莱罗关系；物理学家会从角动量守恒定律推导出它。

15.3. 练习。 设 γ 是旋转光滑曲面上的一条测地线， $r(t)$ 是从 $\gamma(t)$ 到旋转轴的距离，而 $\theta(t)$ 是 $\gamma'(t)$ 与经过 $\gamma(t)$的曲面纬线之间的夹角。

证明量 $r\,(t)\cdot\cos\theta\,(t)$ 不变。

回顾一下，渐近线是曲面上法向曲率为零的曲线。

15.4. 练习。 假设曲线 γ 同时是光滑曲面的测地线和渐近线。证明 γ 是直线线段。

15.5. 练习。 设光滑曲面 Σ 与其对称平面相交于光滑曲线 γ。证明按弧长参数化的 γ 是 Σ 上的测地线。

B 存在性与唯一性

下面的命题指出，无摩擦且无外力运动可以通过初始数据光滑地描述。表述中使用了映射的光滑性 w：该映射根据曲面 Σ上的点 p 、该点处的切向量 v 以及实参数 t，给出 $\mathbb{R}^3$ 中的一个点。若在 Σ上选取一张图 s ，那么点 p 在其中由一对坐标 (u,v) 表示，而向量 v 可以表示为 $a\cdot s_u+b\cdot s_v$之和。因此，在局部坐标 w 中，它由从子集 $\mathbb{R}^5$ 到 $\mathbb{R}^3$的映射 $(u,v,a,b,t)\ \mapsto\ w(p,\mathrm{v}\ t)$ 给出，因而可以直接应用通常的光滑性定义。若映射 $(p,\mathrm{v}\ t)\ \mapsto w(p,\mathrm{v}\ t)$ 在 Σ上的任意局部坐标中都可由光滑映射 $(u,v,a,b,t)\ \mapsto\ w(p,\mathrm{v}\ t)$ 描述，则称其为光滑映射。

15.6. 命题。 设 Σ 是一张无边光滑曲面。对于在点 p 处与 Σ 相切的向量 v ，存在唯一的测地线 $\gamma\colon \mathbb{I}\to\Sigma$，它从 p 出发，速度为 v （即 $\gamma(0)\ =p$ 和 $\gamma'(0)\ =\mathrm{v}$），并且定义在最大的开区间 $\mathbb{I}\ni 0$ 上。此外，

(a) 映射 w：$(p,\ \mathrm{v}\ t)\mapsto\gamma(t)$ 是光滑的，且其定义域是开集[1]。*(b)* 如果 Σ 是正则曲面，则 $\mathbb{I}=\mathbb{R}$；也就是说， γ 在整个实数直线上有定义。

[1]也就是说，如果 w 对三元组 $p\in\Sigma$、$\mathrm{v}\in\mathrm{T}_p$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 有定义，那么对于任意三元组 $q\in\Sigma$、$\mathrm{u}\in\mathrm{T}_q$ 和 $s\in\mathbb{R}$，只要 q、u和 s 分别充分接近 p、v和 t，它就有定义。

所有测地线都能向两个方向无限延伸的曲面，称为测地完备曲面。因此，根据*(b)*，任何无边界正则曲面都是测地完备的。这是霍普夫—里诺定理的一部分 [43]。

在证明中，我们将用微分方程重述测地线的定义，然后应用 A.30 和 A.29。

15.7. 引理。设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中某个开区域上的光滑函数。光滑曲线 $t \mapsto \gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是图像 $z = f(x, y)$ 上的测地线，当且仅当对于任意 t，$z(t) = f(x(t)\ y(t))$，且函数 $t \mapsto x(t)$ 和 $t \mapsto y(t)$ 满足如下形式的微分方程组

$$\begin{cases} x'' = g(x, y, x', y'), \\ y'' = h(x, y, x', y'), \end{cases}$$

其中，g 和 h 是由函数 f 唯一确定的四变量光滑函数。

证明。第一个方程 $z(t) = f(x(t)\ y(t))$ 表示，$\gamma(t)$ 位于图像 $z = f(x, y)$ 上。

接下来我们省略函数的参数；也就是说，使用简写 $x = x(t)$、$f = f(x, y) = f(x(t)\ y(t))$ 等等。

首先用 f、x 和 y 表示 z''。

$$\begin{aligned} z'' &= f(x, y)'' = \\ &= (f_x \cdot x' + f_y \cdot y')' = \qquad \text{❶} \\ &= f_{xx} \cdot (x')^2 + f_x \cdot x'' + 2 \cdot f_{xy} \cdot x' \cdot y' + f_{yy} \cdot (y')^2 + f_y \cdot y''. \end{aligned}$$

条件

$$\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$$

表示向量 γ'' 垂直于 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 中的两个基向量，也就是说，

$$\begin{cases} \langle \gamma'', s_x \rangle = 0, \\ \langle \gamma'', s_y \rangle = 0, \end{cases}$$

其中 $s(x, y) := (x, y, f(x, y))$、$x = x(t)$ 和 $y = y(t)$。请注意，$s_x = (1, 0, f_x)$ 和 $s_y = (0, 1, f_y)$。由于 $\gamma'' = (x'', y'', z'')$，我们的系统可改写为

$$\begin{cases} x'' + f_x \cdot z'' = 0, \\ y'' + f_y \cdot z'' = 0. \end{cases}$$

接下来将 z'' 从❶中表示出来，合并同类项并化简。 □

证明 15.6. 设 Σ 在 p 处的切向-法向坐标中表示为图像 $z = f(x, y)$。根据引理 15.7，条件 $\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 可写成一个二阶常微分方程组。由 A.30 和 A.29 可得，对于某个 $\varepsilon > 0$，测地线 γ 在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上存在且唯一。

将测地线 γ 延拓至最大的开区间 $\mathbb{I}$。设 γ_1 是具有相同初始数据的另一条测地线，定义在最大的开区间 $\mathbb{I}_1$ 上。假设 γ_1 在某个 $t_0 > 0$ 处分离于 γ；也就是说，γ_1 和 γ 在区间 $[0, t_0]$ 上重合，但当 $\delta > 0$ 时，它们在任何区间 $[0, t_0 + \delta)$ 上都不相同。由连续性，$\gamma_1(t_0) = \gamma(t_0)$，且 $\gamma_1'(t_0) = \gamma'(t_0)$。再次应用 A.30 和 A.29，我们得到 γ_1 在 t_0 的某个小邻域内与 γ 重合——矛盾。

类似的推理表明，γ_1 在 $t_0 < 0$ 时不能与 γ 分离。因此，$\gamma_1 = \gamma$，特别是 $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}$。

如果整个曲面 Σ 都是某个光滑函数的图像，那么部分 *(a)* 可由 A.30、A.29 和引理推出。在这种情况下，映射

$$\mathrm{W}(p, \mathrm{V}, t) := \frac{\partial}{\partial t} w(p, \mathrm{V}, t)$$

也光滑。注意，$\mathrm{W}(p, \mathrm{V}\ t_0) \in \mathrm{T}_{\gamma(t_0)}$ 是测地线 γ 在时刻 t_0 的速度向量：$t \mapsto w(p, \mathrm{V}\ t)$。

一般情况下，设 $w(p, \mathrm{V}\ b)$ 在 $b \geqslant 0$ 时有定义；也就是说，测地线 $\gamma\colon t \mapsto w(p, \mathrm{V}\ t)$ 在区间 $[0, b]$ 上有定义。那么存在区间 $[0, b]$ 的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，使得每条测地线 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 都被某个由给定的切向—法向坐标所确定的图覆盖。设 $p_i = \gamma(t_i)$ 和 $\mathrm{v}_i = \gamma'(t_i)$ 满足 $p_0 = p$ 和 $\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}$。由于 $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ 位于图像中，根据前面的推理，对于任意 i，映射 w 和 W 在三元组 $(p_{i-1},\ \mathrm{v}_{i-1},\ t_i - t_{i-1})$ 的某个邻域内有定义且光滑。注意，对于任意 i，$p_i = w(p_{i-1},\ \mathrm{v}_{i-1},\ t_i - t_{i-1})$ 以及 $\mathrm{v}_i = \mathrm{W}(p_{i-1},\ \mathrm{v}_{i-1},\ t_i - t_{i-1})$。由于光滑映射的复合仍然光滑，映射 w 在三元组 $(p,\ \mathrm{v}\ b)$ 的某个邻域内有定义且光滑。

情况 $b \leqslant 0$ 类似，我们在 *(a)* 中得到了一般情形。

假设 *(b)* 不成立；也就是说，最大区间 $\mathbb{I}$ 严格包含于 $\mathbb{R}$。不失一般性，可以认为 $b = \sup \mathbb{I} < \infty$。（若非如此，则反转曲线 γ 的参数化。）

根据 15.2，$|\gamma'|$ 为常数；特别地，函数 $t \mapsto \gamma(t)$ 一致连续。因此，极限点 $q := \lim_{t \to b} \gamma(t)$ 有定义，且 $q \in \Sigma$，因为 Σ 是正则曲线。

在 q 处应用上述切向—法向坐标中的论证，可得 γ 可沿测地线越过 q 延拓。因此，区间 $\mathbb{I}$ 不是极大的——矛盾。

□

15.8. 练习。 设 Σ 是一个光滑旋转环面；也就是说，它是由一条光滑闭合的生成曲线形成的旋转曲面。证明， Σ 上的任意闭测地线都不可收缩。

（换句话说，如果 $s\colon\ \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ 是自然的双周期参数化 Σ，那么在 $\mathbb{R}^2$中不存在这样的闭曲线 γ，使得 $s \circ \gamma$ 是测地线。）

C 指数映射

设 p 是光滑曲面 Σ上的一点。对于切向量 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}_p$，考虑曲面上从$p$ 出发、初速度为 v 的测地线 γ_{v}；也就是说， $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = \mathrm{v}$。

将点 p处的指数映射[2]定义为

$$\exp_p\colon \mathrm{v} \mapsto \gamma_{\mathrm{v}}(1).$$

根据 15.6，该映射是光滑的，并且定义在切平面 T_p的零点邻域内；此外，如果曲面 Σ 是完备的，那么 $\exp_p$ 定义在整个平面 T_p上。

指数映射 $\exp_p$ 将一个曲面映到另一个曲面；前者是切平面（或其开子集），后者是 Σ。平面 T_p 可以与自身的切平面 $\mathrm{T}_0\mathrm{T}_p$等同，因此微分 $d_0(\exp_p)\colon\ \mathrm{v} \mapsto D_{\mathrm{v}} \exp_p$ 将 T_p 映到自身。此外，根据引理 15.2，这个微分是恒等映射；也就是说，对于任意 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}_p$，都有 $(d_0\exp_p)(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$。由此得到如下结论。

15.9. 观察。设 p 是光滑曲面 Σ上的一点。

(a) 指数映射 $\exp_p$ 是光滑的，其定义域$\mathrm{Dom}(\exp_p)$ 包含 T_p 中零点的一个邻域。更进一步，若 Σ 是正则曲线，则 $\mathrm{Dom}(\exp_p) = \mathrm{T}_p$。

(b) 微分 $d_0(\exp_p)\colon\ \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_p$ 是恒等映射。

事实上，很容易验证，区域 $\mathrm{Dom}(\exp_p)$ 在 T_p 中是星形的；也就是说，如果 $\mathrm{v} \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$ 且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，那么 $\lambda \cdot \mathrm{v} \in \mathrm{Dom}(\exp_p)$。

[2]解释这一术语由来的原因会使我们偏离主题太远。

D 单射半径

曲面 Σ 在点 p 处的单射半径 $\operatorname{inj}(p)$ 称为最大半径 $r_p \geqslant 0$，使得指数映射 $\exp_p$ 在开球 $B_p := B(0, r_p)_{\mathrm{T}_p}$ 上有定义，且其限制 $\exp_p|_{B_p}$ 是 Σ 中 p 邻域的光滑正则参数化。

15.10. 命题。 光滑曲面 Σ（无边界）上任意一点处的单射半径都为正。更进一步，它与零局部分离；也就是说，对于任意 $p \in \Sigma$，存在这样的 $\varepsilon > 0$，使得若对于某个 $q \in \Sigma$ 有 $|p - q|_\Sigma < \varepsilon$，则 $\operatorname{inj}(q) \geqslant \varepsilon$。

本命题将通过应用 15.9 和反函数定理（A.25）来证明。事实上，函数 $\operatorname{inj}\colon \Sigma \to (0, \infty]$ 连续 [37, 5.4]。

证明。 设 $z = f(x, y)$ 是曲面 Σ 在 p 处切向-法向坐标中的一个局部表示。特别地，T_p 是水平平面。

设 h 为 $\exp_p$ 与投影 $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ 的复合映射。根据 15.9，$d_0 h$ 的微分是恒等的；换言之，h 在零点处具有单位雅可比矩阵。应用反函数定理 (A.25)，即得该命题的第一部分。

第二部分的证明与此类似，但更为技术性。

用 h_q 表示 $\exp_q$ 与正交投影 $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ 的复合映射。考虑坐标卡 $s\colon (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$。设

$$m\colon (u, v, a, b) \mapsto h_q(\mathrm{v}),$$

其中 $q = s(u, v)$，且 $\mathrm{v} = a \cdot s_u + b \cdot s_v$。由 15.6，$m$ 是定义在零点邻域上的光滑映射。过渡到更小的邻域后，可以认为 m 的一阶和二阶偏导数有界。由上文可知，映射 $(a, b) \mapsto m(0, 0, a, b)$ 在零点处具有单位雅可比矩阵。因此，当 u 和 v 较小时，映射 $(a, b) \mapsto m(u, v, a, b)$ 在零点处的雅可比矩阵接近单位矩阵。特别地，当 u 和 v 取较小的固定值时，反函数定理 (A.25) 的第二部分适用于映射 $(a, b) \mapsto m(u, v, a, b)$，证明至此完成。 □

下面命题的证明思路见 18.5。**15.11. 命题。** 设 p 是光滑曲面 Σ（无边界）上的点。如果 $\exp_p$ 在 $B_p = B(0, r)_{\mathrm{T}_p}$ 上是单射，那么 $\exp_p|_{B_p}$ 的限制是从 B_p 到其在 Σ 中的像的微分同胚。

也就是说，$\operatorname{inj}(p)$ 是使 $\exp_p|_{B(0,r)_{\mathrm{T}_p}}$ 的限制为单射的所有 $r > 0$ 的精确上确界（由此得名 单射半径）。

E 最短线与测地线

15.12.命题。 光滑曲面 Σ 上任意一条最短曲线 γ，若其参数与弧长成正比，则它是 Σ 上的测地线。特别地，γ 是一条光滑曲线。

反过来在局部成立；也就是说，对于 Σ 上的任意一点，都存在一个邻域 U，使得完全位于 U内的任何测地线都是最短的。

特别地，任何测地线上的足够短的线段都是最短的。如果一条测地线是最短的，就称它为极小测地线。我们马上会看到，并非所有测地线都是极小测地线。

15.13. 练习。 设 Σ 是由方程 $x^2 + y^2 = 1$定义的柱面。证明螺旋线$\gamma\colon [0, 2\cdot\pi] \to \Sigma$，定义为 $\gamma(t) := (\cos t,\ \sin t,\ t)$，是 Σ上的测地线，但不是最短线。

该命题的完整证明将在 18B 节给出，但下面的直观解释或许已经足够。假设 γ 光滑，就很容易将其改写为严格证明。

物理解释。 我们设想一根橡皮筋沿着最短的 γ 绷紧，并由支撑面的反作用力 $\mathbf{n}$ 托住。假设不存在摩擦，因此单位力 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ 与曲面在点 $\gamma(t)$ 处的法向量成正比。

设 τ 是橡皮筋的张力；它在所有点都应相同，否则橡皮筋就会来回滑动。

可以认为 γ 以弧长为参数；那么弧 $\gamma_{[t_0,t_1]}$ 上张力的合力等于 $\tau\cdot(\gamma'(t_1) - \gamma'(t_0))$。因此，它在 t_0 处的单位力为

$$\mathbf{F}(t_0) = \lim_{t_1\to t_0} \tau\cdot\frac{\gamma'(t_1) - \gamma'(t_0)}{t_1 - t_0} = \\ = \tau\cdot\gamma''(t_0).$$

根据牛顿第二定律，$\mathbf{f} + \mathbf{n} = 0$，因此，$\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$。 □

15.14. 推论。 设 Σ 是光滑曲面，$p \in \Sigma$ 和 $r \leqslant \mathrm{inj}(p)$。那么，指数映射$\exp_p$ 定义了一个微分同胚 $B(0,\ r)_{\mathrm{T}_p} \to B(p,\ r)_\Sigma$。

证明。 根据 15.11，$\exp_p$ 在 $B_p = B(0, r)_{\mathrm{T}_p}$ 上的限制是到其像 $\exp_p(B_p) \subset \Sigma$ 的微分同胚。

显然， $B(p,r)_\Sigma \supset \exp_p(B_p)$。根据 15.12， $B(p,r)_\Sigma \subset \exp_p(B_p)$，由此得出结果。 □

根据推论，$\exp_p|_{B(0,r)_{\mathrm{T}_p}}$ 的限制允许一个逆映射，称为对数映射；它将记作

$$\log_p\colon B(p,r)_\Sigma \to B(0,r)_{\mathrm{T}_p}.$$

根据上述命题，任何以弧长为参数的最短曲线都是光滑曲线。这将有助于解决下面一组练习。

15.15. 练习。 证明：如果两条最短曲线有两个不同的公共点 p 和 q，那么它们要么是各自的公共端点，要么这两条最短曲线有一段从 p 到 q的公共弧。

举例构造没有公共弧、但交点数量可以任意多的测地线。

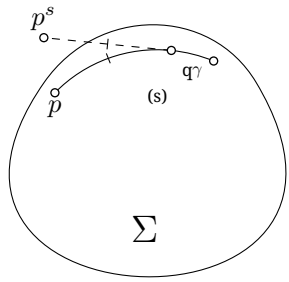
15.16. 练习。 假设光滑曲面 Σ关于平面 Π镜面对称。证明， Σ 上的最短曲线不能多于一次穿过 Π 。换句话说，沿着最短曲线前进时， Π两侧至多交换一次。

15.17. 进阶练习。
设 $\gamma\colon [0,\ell] \to \Sigma$ 是光滑闭的严格凸曲面 Σ上的一条单位速度极小测地线。

令 $p=\gamma(0)$，$q=\gamma(\ell)$ 和

$$p^s = \gamma(s) - s\cdot\gamma'(s).$$

证明：对于任意 $s\in(0,\ell)$，从 p^s 看不到 q；也就是说，线段 $[p^s,q]$ 与 Σ 相交于一点，该点不同于 q。



证明：若不假设 γ 是极小的，命题便不再成立。

15.18.练习。 设 Σ 是一张光滑的闭曲面。假设对于任意 $p,q\in\Sigma$，距离

$|p-q|_\Sigma$ 仅取决于距离 $|p-q|_{\mathbb{R}^3}$。证明 Σ 是球面。

15.19. 高级练习。设 Θ 是一条半径为2 、圆心位于 $0\in\mathbb{R}^3$ 的球面，且 Σ 是包含在由 Θ 界定的开球内的光滑闭合曲面。假设 Σ 的所有法曲率的绝对值均不超过1 。

(a) 证明存在一个微分同胚 $\rho\colon\ \Theta \to \Sigma$ （称为径向投影），它将点 $p \in \Theta$ 映射到 $\Sigma \cap [0,p]_{\mathbb{R}^3}$ 的唯一交点。特别地，Σ 界定一个星形区域。

(b) 证明 $\rho\colon\ \Theta \to \Sigma$ 不会增加曲线的弧长。*(c)* 设 $x \in \Sigma$ 是距原点最远的点。证明以 $[0,x]$ 为直径的球位于由 Σ围成的区域内。由此推出，该区域包含一个单位球。

F 利伯曼引理

下面这个引理的一个变体曾被约瑟夫·利伯曼使用过[64]。

15.20. 引理。 设 f 是定义在平面的一个开子集上的光滑局部凸函数，且 $t \mapsto \gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是图形 $z = f(x,y)$上的一条按弧长参数化的测地线。那么 $t \mapsto z(t)$ 是凸函数；也就是说，对于任意 t，都有$z''(t) \geqslant 0$ 。

证明。 我们选取图像的定向，使法向量ν始终朝上；也就是说，在每一点，z-坐标ν都为正。我们将用缩写 $\nu(t)$ 表示 $\nu(\gamma(t))$。

由于 γ 是测地线，$\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$；换句话说，对于任意 t，加速度 $\gamma''(t)$ 与 $\nu(t)$成正比。此外，

$$\gamma'' = k \cdot \nu,$$

其中 $k = k(t)$ 是图像在点 $\gamma(t)$、沿方向 $\gamma'(t)$ 的法曲率。

因此，

❷ $$z'' = k \cdot \cos\theta,$$

其中 $\theta = \theta(t)$ 是 $\nu(t)$ 与轴 z 之间的角。

由于 ν 朝上，$\theta(t) < \frac{\pi}{2}$，因此 $\cos\theta > 0$。

由于 f 凸，切平面在任意一点都从下方支撑图像；特别地，对于任意 t，都有 $k(t) \geqslant 0$ 。因此，❷ 中的右侧非负。引理得证。 □

15.21. 练习。 设 Σ —是定义在平面的开子集上的局部凸函数的图像。证明 Σ 不包含闭测地线。

15.22. 练习。 设 γ —是光滑凸曲面 Σ上的单位速测地线，且点 p 位于由 Σ围成的凸集内部。考察函数$\rho(t) = |p - \gamma(t)|^2$。证明对于任意 t， $\rho''(t) \leqslant 2$ 。

G 测地线的全曲率

回想一下， $\Phi(\gamma)$表示曲线 γ的全曲率，参见3E .

15.23. 练习。 设 γ 是光滑曲面 Σ 上的一条测地线，且该曲面具有法向量场 ν。证明，$\operatorname{length}(\nu \circ \gamma) \geqslant \Phi(\gamma)$。

15.24. 定理。 设 Σ 是凸的 ℓ-利普希茨函数 f的图像，该函数定义在平面(x, y)中的一个开集上。那么， Σ 上的任意测地线的全曲率不超过 $2 \cdot \ell$。

该定理由Vladimir Usov [99]证明。

证明。 设 $t \mapsto \gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是 Σ 上的一条单位速度测地线。根据 Lieberman 引理（15.20），函数$t \mapsto z(t)$是凸的。

由于斜率 f 不超过 ℓ， $|z'(t)| \leqslant \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$对任意 t均成立。可以认为 γ 定义在区间 $[a, b]$上。于是

$$\int_a^b z''(t)dt = z'(b) - z'(a) \leqslant 2 \cdot \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}. \tag{❸}$$

还要指出， z'' 是 γ'' 在轴 z上的投影。同时，对于任意 t，切平面 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$ 的斜率不超过 ℓ，并且

$$|\gamma''(t)| \leqslant z''(t) \cdot \sqrt{1+\ell^2},$$

因为 γ'' 垂直于该平面。

由❸可得，

$$\Phi(\gamma) = \int_a^b |\gamma''(t)| \cdot dt \leqslant \sqrt{1+\ell^2} \cdot \int_a^b z''(t) \cdot dt \leqslant 2 \cdot \ell.$$

□

根据下一个练习，定理中的估计是最优的。

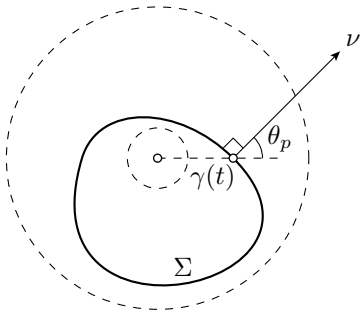
15.25. 练习。 设 Σ 是移去坐标原点后的 $z = \ell \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ 图像。证明，Σ 上的任意双向无限测地线 γ 的全曲率恰好为 $2 \cdot \ell$。

15.26. 练习。 假设 f 是定义在平面(x, y)上的光滑凸$_{3\,2}$-利普希茨函数。证明，图像(x, y) $z = f$上的任意测地线 γ都是简单曲线；也就是说，它没有自交。

构造一个定义在平面上的凸 2-利普希茨函数，使其图像上存在自相交测地线 γ 。

15.27. 定理。 设光滑曲面 Σ 界定一个凸集合 K，并且 $B(0, \varepsilon) \subset K \subset B(0, 1)$。那么， Σ 上任意最短线的全曲率都可以根据 ε进行估计。

15.28. 证明与练习。
设 Σ 如定理中所述， γ — Σ 上的一条单位速度最短线，$\nu(t)$ — Σ 在点 $\gamma(t)$处的法向量，方向指向外侧， $\theta(t)$— $\nu(t)$ 与从原点指向 $\gamma(t)$ 的方向之间的角，且 $k(t)$ — γ 在 t处的曲率。考虑函数 $\rho(t) = |\gamma(t)|^2$。



(a) 证明 $\cos(\theta(t)) \geqslant \varepsilon$对任意 t成立。*(b)* 证明 $|\rho'(t)| \leqslant 2$ 对任意 t成立。*(c)* 证明

$$\rho''(t) = 2 - 2 \cdot k(t) \cdot \cos\theta(t) \cdot |\gamma(t)|$$

对任意 t成立。
(d) 利用从单位球面到 Σ 的短投影，证明

$$\operatorname{length} \gamma \leqslant \pi.$$

(e) 由此推导出 $\Phi(\gamma) \leqslant 100/\varepsilon^2$。

注。 所得的估计在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于无穷大，但也已知一个不依赖于 ε 的估计；这是妮娜·列别杰娃和第一作者的结果 [61]。Алексей Погорелов提出了一个猜想：存在一个关于最短曲线的球面像长度的估计 [83]。根据 15.23，这个猜想更强；然而，人们找到了反例以及它的各种变体 [69, 74, 99, 100]。

第16章

平行移动

A 平行场

设 $\gamma\colon\ [a,b]\to\Sigma$ 是光滑曲面 Σ 上的一条光滑曲线。光滑的向量值函数 $t\mapsto \mathbf{v}(t)\in\mathbb{R}^3$ 称为沿 γ 的切向量场，如果对于任意 t，向量 $\mathbf{v}(t)$ 都位于切平面 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$ 中。

曲线 γ上的切向场 $\mathbf{v}$ 称为平行场，如果对于任意 t，$\mathbf{v}'(t)\perp\mathrm{T}_{\gamma(t)}$。

一般来说，切平面族 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$ 并不平行。因此，不能指望存在一个真正的平行场，使 $\mathbf{v}'(t)\equiv 0$ 沿着 γ。条件 $\mathbf{v}'(t)\perp\!\!\!\perp\mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 意味着该场会尽可能平行地运动——它必须随着切平面一起转动，但不会在切平面内部转动。

根据测地线的定义，任意测地线的速度场 $\mathbf{v}(t)=\gamma'(t)$ γ 沿着 γ是平行的。

16.1. 练习。 设 $\gamma\colon\ [a,b]\to\Sigma$ 是光滑曲面 Σ 上的一条光滑曲线，而 $\mathrm{v}(t)$ 和 $\mathrm{w}(t)$ 是沿着 γ 的平行向量场。

(a) 证明量值 $|\mathrm{v}(t)|$ 为常数。*(b)* 证明角 $\theta(t)=\measuredangle(\mathrm{v}(t),\mathrm{w}(t))$ 为常数。

B 平行移动

16.2. 命题与定义。 设 $p=\gamma(a)$ 和 $q=\gamma(b)$是光滑曲面 Σ 上分段光滑曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to\Sigma$ 的端点。

对于给定的切向量 $\mathrm{w} \in \mathrm{T}_p$，存在唯一一个沿 γ 的平行场 $\mathrm{w}(t)$，使得 $\mathrm{w}(a) = \mathrm{w}$。

向量 $\mathrm{w}(b) \in \mathrm{T}_q$ 称为向量 $\mathrm{w}(a)$ 沿着 γ 在 Σ 上的平行移动。

沿着 γ 的平行移动记作 ι_γ；也就是说，可以写作 $\mathrm{w}(b) = \iota_\gamma(\mathrm{w}(a))$ 或 $\mathrm{w}(b) = \iota_\gamma(\mathrm{w}(a))_\Sigma$，如果需要强调 γ 位于曲面 Σ 上。由练习 16.1 可知，平行移动 $\iota_\gamma\colon \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_q$ 是等距变换。一般情况下，平行移动 $\iota_\gamma\colon \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_q$ 取决于 γ 的选择；也就是说，对于另一条从 p 到 q 的曲线 γ_1，平行移动 ι_{γ_1} 和 ι_γ 可能不同。

证明思路。假设曲线 γ 光滑曲线，并且它包含在曲面 Σ 的一张坐标图 $(u, v) \mapsto s(u, v)$ 中；那么 $\gamma(t) = s(u(t)\ v(t))$，其中 $t \mapsto u(t)$ 和 $t \mapsto v(t)$ 是光滑函数。定义

$$\mathrm{u}(t) = s_u(u(t), v(t)), \quad \mathrm{v}(t) = s_v(u(t), v(t)), \quad \text{и} \quad \nu(t) = \nu(\gamma(t)).$$

条件 $\mathrm{w}(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 和 $\mathrm{w}'(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 可写成方程组

$$\begin{cases} \langle \mathrm{w}(t), \nu(t) \rangle = 0, \\ \langle \mathrm{w}'(t), \mathrm{u}(t) \rangle = 0, \\ \langle \mathrm{w}'(t), \mathrm{v}(t) \rangle = 0. \end{cases}$$

将该方程组改写为关于分量 u、v、w 和 ν 的方程组，可得关于 w 分量的常微分方程组，再应用 A.29，便可得到解 $\mathrm{w}(t)$。根据 16.1，$|\mathrm{w}(t)|$ 保持不变；因此，A.29 推出解 w 在整个区间 $[a, b]$ 上都有定义。

如果 γ 仅为分段光滑曲线，和／或不能被一张图覆盖，那么可以将其表示为光滑弧 γ_1、……、γ_n 的乘积，使得每条 γ_i 都能被一张图覆盖。依次对每条 γ_i 应用该命题，便可得到关于 γ 的结论。 □

假设 γ_1 和 γ_2 是分别位于两个光滑曲面 Σ_1 和 Σ_2 上的两条光滑曲线，其球面映射分别为 $\nu_i\colon \Sigma_i \to \mathbb{S}^2$。如果对任意 t，都有 $\nu_1 \circ \gamma_1(t) = \nu_2 \circ \gamma_2(t)$，那么称曲线 γ_1 和 γ_2 在 Σ_1 和 Σ_2 上分别具有相同的法线。

在这种情况下，对于任意 t，切平面 $\mathrm{T}_{\gamma_1(t)}\Sigma_1$ 与切平面 $\mathrm{T}_{\gamma_2(t)}\Sigma_2$ 平行，因此可以将 $\mathrm{T}_{\gamma_1(t)}\Sigma_1$ 与 $\mathrm{T}_{\gamma_2(t)}\Sigma_2$ 视为相同。特别地，任何沿着 γ_1 切于 γ_2 的场 $\mathrm{v}(t)$，也沿着 γ_1 切于 γ_2。此外，$\mathrm{v}'(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma_1(t)}\Sigma_1$ 等价于 $\mathrm{v}'(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma_2(t)}\Sigma_2$；也就是说，如果 $\mathrm{v}(t)$ 沿着 γ_1 平行，那么它沿着 γ_2 也平行。

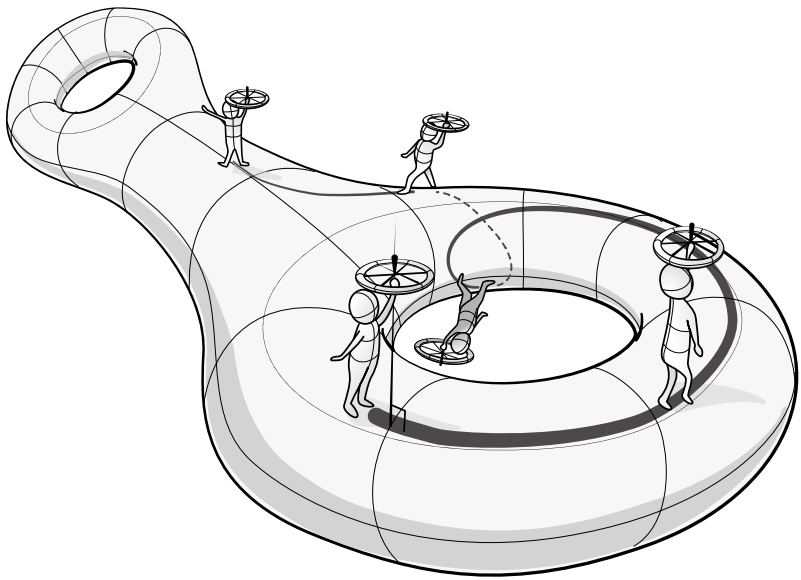
上述论证引出了以下观察，这一点很快就会显现出来。

16.3. 观察。设 γ_1 和 γ_2 是光滑曲面 Σ_1 和 Σ_2 上的光滑曲线。假设 γ_1 和 γ_2 的法向量完全相同（分别作为 Σ_1 和 Σ_2 上的曲线）。那么平行移动 ι_{γ_1} 和 ι_{γ_2} 完全相同。

16.4. 练习。设 Σ_1 和 Σ_2 是具有公共曲线 γ 的两个曲面。假设 Σ_2 位于由 Σ_1 围成的区域内。证明，沿 γ 在 Σ_1 上的平行移动与沿 γ 在 Σ_2 上的平行移动相同。

C 自行车轮与投影

以下关于平行移动的解释有助于建立正确的直觉，但无助于撰写证明。第一种解释基于对自行车车轮进行的物理实验，由马克·列维提出 [63]。第二种与之密切相关，通过彼此之间的切平面正交投影来说明。



设 $\gamma\colon [a,b] \to \Sigma$ 是光滑曲面 Σ 上的一条光滑曲线。设想我们沿着 γ 在曲面上行走，同时携带一个完美平衡的自行车轮。此时，车轮的轴始终

方向与 Σ 垂直，而我们不触碰车轮本身，只握住它的轴。如果车轮在起点 $p=\gamma(a)$ 处没有旋转，那么它在终点 $q=\gamma(b)$ 停下后也不会旋转，因为对轴施力无法使车轮获得扭矩。于是，将车轮的初始位置变换为最终位置的映射，就是平行移动 ι_γ。

物理直觉应当提示我们，如果不改变轴的方向，那么辐条的方向也不会改变；本质上，这是对观察16.3的重新表述。

对于第二种解释，选择 $a=t_0<\ldots<t_n=b$线段 $[a,b]$ 的划分，并考虑正交投影 $\varphi_i\colon \mathrm{T}_{\gamma(t_{i-1})}\to \mathrm{T}_{\gamma(t_i)}$。对于足够细的分割，其复合

$$\varphi_n\circ\cdots\circ\varphi_1\colon \mathrm{T}_p\to\mathrm{T}_q$$

会接近 ι_γ。

每个投影 φ_i 都不会增加向量的长度，其复合也同样如此。然而，对于足够细的分割，该复合几乎是等距的。因此，极限 ι_γ 是等距$\mathrm{T}_p\to\mathrm{T}_q$。

16.5. 练习。 构造一个这样的环路 γ，使得在 $\mathbb{S}^2$上的平行移动 ι_γ 不是恒等映射。

D 完全测地曲率

回顾一下，测地曲率在 11A 中定义，记作 k_g，用于度量曲线 γ 在定向曲面上偏离测地线的程度；如果 γ 向左转，曲率为正；如果向右转，则为负。特别地，测地线的测地曲率为零。

设 $\gamma\colon \mathbb{I}\to\Sigma$ 是定向光滑曲面 Σ上的一条单位速度光滑曲线。完全测地曲率γ 通过积分定义为

$$\Psi(\gamma)=\Psi(\gamma)_\Sigma:=\int_{\mathbb{I}} k_g(t)\cdot dt.$$

如果 Σ — 是一个平面，那么测地曲率 γ 与其有向曲率相同（参见 6C ）。特别是，其总测地曲率等于其总有向曲率。因此，我们采用了相同的记号 $\Psi(\gamma)$；如果需要注明曲面，则写作 $\Psi(\gamma)_\Sigma$。

如果 γ— 是 Σ 上的分段光滑曲线，那么它的总测地曲率定义为其各弧段的总测地曲率之和，再加上各连接处的有向外角之和 γ 。也就是说，如果 γ— 是光滑曲线 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 的乘积，那么

$$\Psi(\gamma) := \Psi(\gamma_1) + \dots + \Psi(\gamma_n) + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1},$$

其中， θ_i — γ_i 与 γ_{i+1}连接处的有向外角；当 γ 向左旋转时为正，向右旋转时为负，而当 γ 完成一整圈旋转时无定义。如果 γ 闭合，则

$$\Psi(\gamma) := \Psi(\gamma_1) + \dots + \Psi(\gamma_n) + \theta_1 + \dots + \theta_n,$$

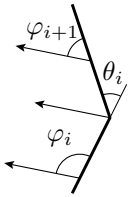
其中， θ_n — γ_n 与 γ_1连接处的有向外角。

如果乘积中的每条 γ_i 弧都是极小化测地线，则 γ称为测地折线。在这种情况下，对于每个 i， $\Psi(\gamma_i) = 0$ 。因此， γ 的总测地曲率等于其有向外角之和。

16.6. 命题。 设 γ 是光滑定向曲面 Σ上的闭测地折线，在点 p处开始并结束。那么平行移动 ι_γ: $\mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_p$表示平面$\mathrm{T}_p$ 的顺时针旋转，旋转角为 $\Psi(\gamma)$。

该命题对于光滑闭曲线和分段光滑曲线仍然成立。

证明。 设 γ 是测地 γ_1，...， γ_n的循环乘积。我们在点 p 处选取一个切向量 v，并将其延拓为沿 γ的平行向量场。由于场 $\mathsf{t}_i(t) = \gamma_i'(t)$沿 γ_i平行，有向角 φ_i 从 t_i 到 v 在每条弧 γ_i上均保持不变。



设 θ_i 是 γ_i 与 γ_{i+1}连接处的外角。则

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \theta_i \pmod{2\cdot\pi}.$$

因此，遍历所有顶点后，我们得到

$$\varphi_{n+1} - \varphi_1 = -\theta_1 - \dots - \theta_n = -\Psi(\gamma) \pmod{2\cdot\pi},$$

第一个命题得证。

对于单位速度的光滑曲线 γ： $[a, b] \to \Sigma$ 证明类似。记 $\varphi(t)$ 为从 $\mathsf{t}(t) = \gamma'(t)$ 到 $\mathsf{v}(t)$ 的有向角，并证明：

❶ $$\varphi'(t) + k_g(t) \equiv 0$$

回想一下，$\mu = \mu(t)$ 是将 $\mathrm{t} = \mathrm{t}(t)$ 在 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 中逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。记 $\mathrm{w} = \mathrm{w}(t)$ 为将 $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t)$ 在 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}$ 中逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{T} &= \cos\varphi\cdot\mathrm{V} - \sin\varphi\cdot\mathrm{W},\\ \mu &= \sin\varphi\cdot\mathrm{V} + \cos\varphi\cdot\mathrm{W}.\end{aligned}$$

向量场 v 和 w 沿 γ 平行；也就是说，$\mathrm{v}'(t)$，$\mathrm{w}'(t)$ $\perp\!\!\!\perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$。因此，$\langle \mathrm{v}', \mu\rangle = \langle \mathrm{w}', \mu\rangle = 0$。由此可得

$$\begin{aligned}k_g = \langle \mathrm{T}', \mu\rangle &= \\ &= -(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cdot\varphi'\\ &= -\varphi',\end{aligned}$$

这也就证明了 ❶。

应用 ❶，得到

$$\begin{aligned}\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\cdot dt &= \\ &= -\int_a^b k_g\cdot dt =\\ &= -\Psi(\gamma)\end{aligned}$$

如果 γ 是分段光滑的，那么结论可通过将上述两种情况的证明直接结合起来得出。 □

第17章

高斯—博内公式

A 表述

下述定理由卡尔·弗里德里希·高斯 [35] 针对测地三角形证明；皮埃尔·博内和雅克·比内则分别将其推广到了任意曲线。

17.1. 定理。 设 Δ 是光滑有向曲面 Σ 上的一个拓扑圆盘，其边界 $\partial\Delta$ 是一条分段光滑曲线，定向方式使得 Δ 位于其左侧。则

$$\Psi(\partial\Delta) + \iint_{\Delta} K = 2\cdot\pi, \tag{❶}$$

其中 K 是高斯曲率。

本章将证明这一公式的一个特殊情形；它可以推广，但完整证明将基于另一种思路，见 18E。首先，让我们练习运用这个公式。

17.2.练习。 设 γ 是光滑闭曲面 Σ 上一条测地曲率恒定的简单闭曲线[1] ，且具有正高斯曲率。证明$\operatorname{length}\gamma < 2\cdot\pi$；也就是说，$\gamma$ 短于单位圆。

17.3. 练习。 假设圆盘 Δ *лежит*在$z = f$图像上$(x,\ y)$ 的光滑函数上，且其边界 $\partial\Delta$ *леж*于平面 $(x,\ y)$中，并且 Δ 以固定角度 α与该平面相交。证明 $\iint_{\Delta} K = 2\cdot\pi\cdot(1-\cos\alpha)$。

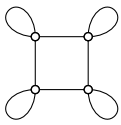
17.4. 练习。 设 γ —光滑闭合曲面 Σ 上的简单闭测地线，该曲面具有正的高斯曲率，并带有球面映射 $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{S}^2$。证明，曲线 $\alpha = \nu \circ \gamma$ 将球面分成面积相等的两个区域。

由此推出长度 $\alpha \geqslant 2\cdot\pi$.

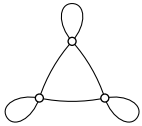
17.5. 练习。 设 γ 是光滑闭曲面 Σ 上的一条闭测地线（可能有自交），且该曲面的高斯曲率为正。假设 R 是 γ 从 Σ 中切出的区域之一。证明 $\iint_R K \leqslant 2\cdot\pi$。

由此推出， Σ 上任意两条闭合测地线都有一个公共点。

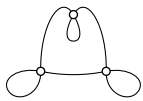
17.6. 练习。 设 Σ 是高斯曲率为正的闭光滑曲面。证明： Σ 上的闭测地线在任何一张图中都不可能呈现为下列图形中的任一条曲线。



（简单）



（困难）



（无望）

下面的练习 уточняет 15.26 中的估计。

17.7. 练习。 假设 $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — 光滑凸的 $\sqrt{3}$-利普希茨函数。证明，图 $z = f\,(x,\ y)$ 上的任意测地线都没有自交。

如果曲面 Σ上的任意简单闭曲线都围成一个圆盘，则称曲面 Σ是单连通的。等价地， Σ上的任意闭曲线都可以连续变形为平凡曲线；也就是说，变形为始终停留在同一点的曲线。

平面和球面是单连通曲面的例子；环面和圆柱面不是单连通的。

17.8. 练习。 假设 Σ 是一张具有非正高斯曲率的开曲线单连通曲面。

(a) 证明 Σ 上任意两点都由唯一一条测地线连接。此外， Σ 上的测地线没有自交。*(b)* 推导出，对于任意点 $p \in \Sigma$，指数映射$\exp_p$ 是从切平面T_p 到 Σ 的微分同胚。特别地，曲面 Σ 与平面微分同胚。

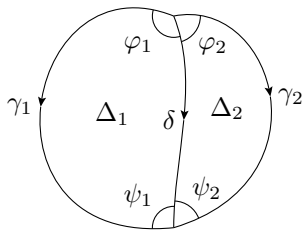
B 可加性

设 Δ 是光滑定向曲面 Σ 上的一个拓扑圆盘，其边界是一条简单的分段光滑曲线 $\partial\Delta$。和之前一样，我们认为 $\partial\Delta$ 是定向的，且 Δ 位于其左侧。引入记号

❷ $$\mathrm{GB}(\Delta) := \Psi(\partial\Delta) + \iint\limits_{\Delta} K - 2\cdot\pi,$$

其中， K —高斯曲率。记号 GB 旨在提醒我们，高斯—博内公式可以写成

$$\mathrm{GB}(\Delta) = 0.$$



17.9. 引理。 设圆盘 Δ 被曲线 δ 切割成两个圆盘 Δ_1 和 Δ_2。则

$$\mathrm{GB}(\Delta) = \mathrm{GB}(\Delta_1) + \mathrm{GB}(\Delta_2).$$

证明。 将 $\partial\Delta$ 分成两条曲线 γ_1 和 γ_2，它们分别与 δ 具有公共端点，使得 Δ_i 在 $i = 1$、2 时由弧 γ_i 和 δ 围成。

将 φ_1、φ_2、ψ_1 和 ψ_2 记为图中 δ 与 γ_i 之间的角。假设弧 γ_1、γ_2 和 δ 按图中的方向定向，得到

$$\begin{aligned}
\Psi(\partial\Delta) &= \Psi(\gamma_1) - \Psi(\gamma_2) + (\pi - \varphi_1 - \varphi_2) + (\pi - \psi_1 - \psi_2),\\
\Psi(\partial\Delta_1) &= \Psi(\gamma_1) - \Psi(\delta) + (\pi - \varphi_1) + (\pi - \psi_1),\\
\Psi(\partial\Delta_2) &= \Psi(\delta) - \Psi(\gamma_2) + (\pi - \varphi_2) + (\pi - \psi_2),\\
\iint\limits_{\Delta} K &= \iint\limits_{\Delta_1} K + \iint\limits_{\Delta_2} K.
\end{aligned}$$

接下来只需将结果代入 GB(Δ)、GB(Δ_1) 和 GB(Δ_2) 的公式中。

□

C 球面情形

如果我们的曲面 Σ 是一个平面，那么它的高斯曲率为零，高斯–博内公式 ❶ 可改写为

$$\Psi(\partial\Delta) = 2\cdot\pi,$$

因此，它由 6.5 推出。换句话说，对于任意边界分段光滑的平面圆盘 Δ，GB(Δ) $= 0$。

如果 Σ 是单位球面，那么 $K \equiv 1$；在这种情况下，17.1 等价于以下命题。

17.10.命题。设 P 是一个球面多边形，其边界是简单闭测地折线 ∂P。假设 ∂P 的定向使得 P 位于 ∂P 的左侧。那么

$$\mathrm{GB}(P) = \Psi(\partial P) + \operatorname{area} P - 2{\cdot}\pi = 0.$$

此外，同一公式对任何由分段光滑简单闭曲线围成的球面区域也成立。

这一命题将在下一节中使用。

证明概要。设 Δ 是一个内角分别为 α、β 和 γ 的球面三角形。根据 A.17，

$$\operatorname{area}\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

由于边界 $\partial\Delta$ 的定向使得 Δ 位于其左侧，它的有向外角为 $\pi - \alpha$、$\pi - \beta$ 和 $\pi - \gamma$。因此，

$$\Psi(\partial\Delta) = 3{\cdot}\pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

由此 $\Psi(\partial\Delta) + \text{面积}\,\Delta = 2{\cdot}\pi$，这等价于 $\mathrm{GB}(\Delta) = 0$。

接下来，任意球面多边形 P 都可以经过几步划分为三角形：每一步沿测地折线将多边形切成两部分。根据（17.9）的可加性，我们得到：

$$\mathrm{GB}(P) = 0$$

对任意球面多边形 P。

第二个命题通过逼近来证明。需要证明，分段光滑简单曲线的总测地曲率可以由内接折线的总测地曲率逼近。论证与解 4.11 类似；细节从略。

□

17.11. 练习。设 γ 是单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一条简单分段光滑闭曲线。假设 γ 将 $\mathbb{S}^2$ 分成面积相等的两个区域。用 p 表示 γ 的基点。证明，平行移动 $\iota_\gamma\colon \mathrm{T}_p\mathbb{S}^2 \to \mathrm{T}_p\mathbb{S}^2$ 是恒等映射。

D 直观的半证明

下面这个高斯—博内公式的特殊情形是关键。一般情形可以类似地证明，只需使用带重数的定向面积；但我们将采用另一种方法，见 18E。

对于具有正高斯曲率的开曲面和闭曲面的证明 17.1。设 $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{S}^2$—球面映射。由 10.7，

$$\text{❸}\qquad \mathrm{GB}(\Delta) = \Psi(\partial\Delta) + \mathrm{area}(\nu(\Delta)) - 2{\cdot}\pi.$$

选择环路 α，使其沿着 $\partial\Delta$ 通过，并且使 Δ 位于其左侧；设 $p \in \partial\Delta$ 为它的基点。考虑沿着 α的平行移动 $\iota_\alpha\colon \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_p$。根据 16.6，$\iota_\alpha$ —按顺时针方向旋转角度 $\Psi(\alpha)_\Sigma$。

设 $\beta = \nu\circ\alpha$。根据 16.3，$\iota_\alpha = \iota_\beta$，其中将 β视为单位球面上的曲线。

接下来，ι_β —顺时针旋转角度 $\Psi(\beta)_{\mathbb{S}^2}$。根据 17.10，

$$\mathrm{GB}(\nu(\Delta)) = \Psi(\beta)_{\mathbb{S}^2} + \mathrm{area}(\nu(\Delta)) - 2{\cdot}\pi = 0.$$

因此，ι_β —逆时针旋转角度 $\mathrm{area}(\nu(\Delta))$。

也就是说，顺时针旋转角度 $\Psi(\alpha)_\Sigma$ 与逆时针旋转角度 $\mathrm{area}(\nu(\Delta))$相同。如果旋转的角度相差 $2{\cdot}\pi$ 的整数倍，则这两个旋转相同。因此，

$$\text{❹}\qquad \mathrm{GB}(\Delta) = \Psi(\partial\Delta)_\Sigma + \mathrm{area}(\nu(\Delta)) - 2{\cdot}\pi = 2{\cdot}n{\cdot}\pi$$

对于某个整数 n。

还需证明 $n = 0$。根据 6.5，这对平面上的拓扑圆盘成立。一般而言，圆盘 Δ 可以看作平面圆盘连续变形的结果。整数 n 在变形过程中不会改变，因为 ❹ 中的左边连续变化，而且如果开始时 $n = 0$，那么变形结束时也有 $n = 0$。

□

E 简单测地线

下一个定理展示了高斯—博内公式的一个有趣应用；该定理由斯特凡·科恩-福森证明 [23, Satz 9]。

17.12. 定理。任意具有正高斯曲率的开光滑曲面都存在一条简单的双向无限测地线。

证明。 设 Σ 是具有正高斯曲率的开曲面。选取一条双向无限测地线 γ，位于 Σ 上。

如果曲线 γ 有自交，那么它包含一个简单闭环；也就是说，对于某个区间 $[a, b]$，其限制 $\ell = \gamma|_{[a,b]}$构成一个简单闭环。

根据12.17， Σ 由平面上的开凸区域Ω参数化。根据Jordan定理（A.12）， ℓ 在 Σ上围成一个拓扑圆盘；将其记为 Δ。如果 φ 是环路基点处的内角，那么根据高斯—博内公式

$$\iint\limits_{\Delta} K = \pi + \varphi.$$

回顾一下，

❺ $$\iint\limits_{\Sigma} K \leqslant 2\cdot\pi,$$

参见12.20b。因此， $0 < \varphi < \pi$；也就是说， γ 没有凹的简单闭环。

假设 γ 有两个简单闭环， ℓ_1 和 ℓ_2；它们分别围成圆盘 Δ_1 和 Δ_2。那么圆盘 Δ_1 和 Δ_2 必定相交；否则， Σ 的曲率将超过 $2\cdot\pi$，这与❺矛盾。

也就是说，离开 Δ_1 测地线 γ 后，必须再次进入其中，才能形成新的环路。我们来看看这时刻，即——



当 γ 再次进入 Δ_1时；图中展示了两种可能的情形。左图中，我们得到两个互不重叠的圆盘，而我们知道这是不可能的。右图同样不可能——这种情况下，我们得到一个凹陷的简单闭环。

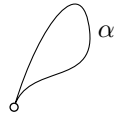
因此， γ只包含一个简单闭环。这个环路从 Σ 中切出一个圆盘，并从它的右侧或左侧绕过。因此，所有自相交测地线都分为两种：右旋和左旋。

如果测地线 $t \mapsto \gamma(t)$是右行的，那么反转参数化 $t \mapsto \gamma(-t)$会使它成为左行的。从点 $p = \gamma(0)$沿每个方向发出一条测地线。这给出一个单参数测地线族 γ_s， 对于 $s \in [0, \pi]$， 它将测地线$t \mapsto \gamma(t)$与 $t \mapsto \gamma(-t)$连接起来；也就是说， $\gamma_0(t) = \gamma(t)$， 而 $\gamma_\pi(t) = \gamma(-t)$。

当 s 从一个开集到 $[0,\pi]$时，测地线 γ_s 是右行的（或左行的）。也就是说，如果 γ_s 是右行的，那么对于接近 s的 t，所有 γ_t 也都是右行的。[1]

由于区间 $[0,\pi]$ 连通，它不会分解成两个开集。因此，对于某个 s，测地线 γ_s 既不是右侧的，也不是左侧的；也就是说，γ_s 没有自交。 □

17.13.练习。 设 Σ 为具有正高斯曲率的开光滑曲面，且α: $[0,1] \to \Sigma$ 为一条满足 $\alpha'(0) == -\alpha'(1)$ 的光滑闭曲线。证明存在一条简单的双向无穷测地线与 α相切。



17.14. 练习。 图中的哪些曲线可能在开口光滑曲面上给出测地线?



正高斯曲率曲面，为什么?

F 一般区域

高斯—博内公式的下一个推广由瓦尔特·冯·迪克 [27]得到。

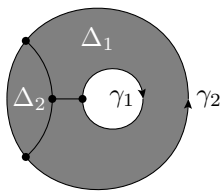
17.15. 定理。 设 Λ 是光滑曲面上的紧区域。假设 Λ 由有限个（可能为空的）闭分段光滑曲线 γ_1，.....γ_n限定，并且每条 γ_i 都定向为使得 Λ 位于其左侧。那么

$$\iint_{\Lambda} K = 2\cdot\pi\cdot\chi - \Psi(\gamma_1) - \cdots - \Psi(\gamma_n) \qquad ❻$$

对于整数 $\chi = \chi(\Lambda)$。

此外，如果一个具有 v 个顶点和 e 条边的图将 Λ 划分为f 个圆盘，并包含所有 γ_i，那么 $\chi = v - e + f$。

数值 $\chi = \chi(\Lambda)$ 称为区域 Λ 的欧拉特征。它不依赖于分割的选择，因为公式 ❻ 中的其他项都不依赖于分割。公式 ❻ 可由标准的高斯—博内公式（17.1）推导出来。几何学与 17.9 中相同，但组合学更为复杂。



[1]通俗地说，这意味着自交不可能突然消失。试着验证一下这一点。

在开始证明之前，请尝试按照 17.9 中的推理，推导出图中环面的分割公式 A。这个图有 4 个顶点和 6 条边（其中一条是环路），并将 A 分割成两个圆盘 Δ_1 和 Δ_2。因此，$\chi(A) = 4 - 6 + 2 = 0$，并且

$$\iint\limits_A K = -\Psi(\gamma_1) - \Psi(\gamma_2).$$

证明。设一个有 v 个顶点和 e 条边的图将区域 Λ 分割成 f 个圆盘 $\Delta_1, \ldots, \Delta_f$。对每个圆盘应用高斯-博内公式，并将结果相加：

$$\iint\limits_\Lambda K = \iint\limits_{\Delta_1} K + \cdots + \iint\limits_{\Delta_f} K = 2\cdot f\cdot\pi - \Psi(\partial\Delta_1) - \cdots - \Psi(\partial\Delta_f).$$

剩下要证明的是，

❼ $$\Psi(\gamma_1) + \cdots + \Psi(\gamma_n) - \Psi(\partial\Delta_1) - \cdots - \Psi(\partial\Delta_f) = 2\cdot\pi\cdot(v - e).$$

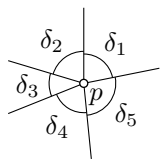
为此，我们分别计算每条边和每个顶点的贡献，并将它们相加。

设 σ 是图的一条边。如果 σ 不属于任何一个 γ_i，那么它会在圆盘的边界上出现两次，例如分别出现在 $\partial\Delta_i$ 和 $\partial\Delta_j$ 上。在这种情况下，可以认为 Δ_i 位于 σ 的左侧，而 Δ_j 位于右侧，因此 σ 在 $\Psi(\partial\Delta_i)$ 中增加 $\Psi(\sigma)$，并在 $\Psi(\partial\Delta_j)$ 中增加 $-\Psi(\sigma)$；所以，σ 对公式 ❼ 的左侧没有贡献。也可能出现 $i = j$ 的情况（如上图中的一条边）；这时 σ 两侧是同一个圆盘，但它仍然不会对 ❼ 作出贡献。如果边 σ 沿着边界延伸，那么它只在某个圆盘的边界上出现一次，例如出现在 $\partial\Delta_j$ 上。可以认为 Λ 和 Δ_j 都位于 σ 的左侧，因此它在 $\Psi(\gamma_i)$ 和 $\Psi(\partial\Delta_j)$ 中都贡献 $\Psi(\sigma)$，而这两项在公式 ❼ 左侧相互抵消。

因此，在公式 ❼ 的左侧，边的测地曲率贡献彼此抵消。

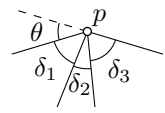
现在来讨论顶点处的外角。选取顶点 p，设其度数为 d，也就是从 p 出发的边数。

假设 p 位于 Λ的内部。设 δ_1，...，δ_d是与 p相邻的 p 个圆盘处的内角，$\varphi_i = \pi - \delta_i$ 是相应的外角。那么 p 对总和的贡献为$-\varphi_1 - \cdots - \varphi_d$。由于 $\delta_1 + \cdots + \delta_d = 2\cdot\pi$，$p$ 对公式❼左侧的贡献为



$$-\varphi_1 - \cdots - \varphi_d = (\delta_1 + \cdots + \delta_d) - d\cdot\pi = (2 - d)\cdot\pi.$$

若 p 位于 Λ的边缘上，则它是第（$d-1$）个内角 δ_1, ..., δ_{d-1}的顶点，而 $\varphi_i = \pi - \delta_i$ 是相应的外角。注意，



$$\delta_1 + \dots + \delta_{d-1} = \pi - \theta,$$

其中 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 是区域 Λ 在 p处的外角。因此， p 对公式 ❼ 左侧的贡献仍等于

$$\theta - \sum \varphi_i = (2-d)\cdot\pi.$$

因此，如果 $p_1, \dots, p_v$ 是图的顶点，而 $d_1, \dots, d_v$ 是它们的度，那么外角对公式 ❼ 左侧的总贡献等于

❽ $$2\cdot v\cdot\pi - (d_1 + \dots + d_v)\cdot\pi.$$

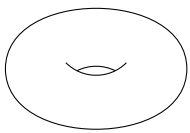
由于边没有贡献任何东西，公式 ❼ 的左侧等于 ❽ .

还剩下验证 $d_1+\dots+d_v = 2\cdot e$。确实， $d_1+\dots+d_v$ 是图中所有边的端点数，而它们的数量是 $2\cdot e$，因为每条边都有两个端点。由此得到 ❼ 和 ❻。

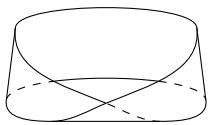
□

17.16. 练习。求以下各曲面的高斯曲率积分:

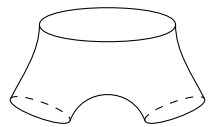
(a) 环面。



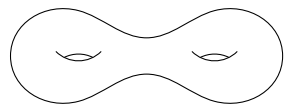
(b) 带有测地边界的莫比乌斯带。



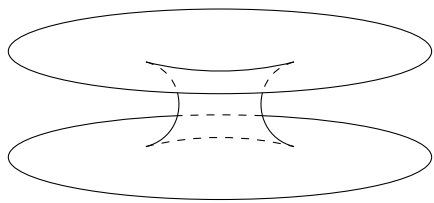
(c) 带有测地边界分支的裤子曲面。



(d) 带两个把手的球面。



(e) 两端邻域位于平面内的圆柱。



第18章

半测地坐标

这是计算性章节，将推导若干前文讨论过的结论，包括注入半径的等价定义（15.11）、最短线是测地线（15.12），以及高斯-博内公式（17.1）。此外，我们还将讨论曲面之间的内等距，并证明高斯的一个著名定理：高斯曲率是一个内蕴不变量。

A 极坐标

15.10 中描述的指数映射性质，可用于在光滑曲面上定义极坐标。

具体来说，设 p 是光滑曲面 Σ 上的点，$(r,\theta) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{S}^1$ 是切平面 T_p 上的极坐标。若 $\mathrm{v} \in \mathrm{T}_p$ 的坐标为 (r,θ)，则称 $s(r,\theta) = \exp_p \mathrm{v}$ 是 Σ 上一个极坐标为 (r,θ) 的点。

从点 p 到给定点 x 可能有多条测地线，也可能一条也没有。因此，一个点在极坐标下可能有多种表示，也可能完全没有表示。不过，由 15.10 可得如下结论。

18.1. 观察。 设 $s\colon (r,\theta) \mapsto s(r,\theta)$ 给出了光滑曲面 Σ 上以点 p为原点的极坐标。那么存在这样的 $r_0 > 0$，使得对于满足 $0 < r < r_0$的任意一对 (r,θ)，s 都是正则的。

此外，若 $0 \leqslant r_1, r_2 < r_0$，则 $s(r_1, \theta_1) = s(r_2, \theta_2)$ 当且仅当 $r_1 = r_2 = 0$ 或 $r_1 = r_2$ 且 $\theta_1 = \theta_2 + 2 \cdot n \cdot \pi$ 对于某个整数 n成立。

接下来我们将始终假设，曲面上的极坐标仅在 $r < r_0$ 时有定义，因此它们的表现与通常情况相同。

下一命题将在严格证明最短线是测地线这一点时发挥关键作用，参见18B。

18.2. 高斯引理。设$(r, \theta) \mapsto s(r, \theta)$ 是光滑曲面上以点 p 为原点的极坐标。那么，对于任意r 和 θ， $s_\theta \perp s_r$ 。

证明。选取 $\theta \in \mathbb{S}^1$。根据指数映射的定义，曲线 $\gamma(t) = s(t, \theta)$ 是一条以单位速度从 p 出发的测地线。

(i) 由于 γ 的速度为单位速度， $|s_r| = |\gamma'| = 1$，特别是 ，

$$\tfrac{\partial}{\partial \theta} \langle s_r, s_r \rangle = 0.$$

(ii) 由于 γ 是测地线， $s_{rr}(r, \theta) = \gamma''(r) \perp \mathrm{T}_{\gamma(r)}$，因此，

$$\langle s_\theta, s_{rr} \rangle = 0.$$

由此可得，

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial r} \langle s_\theta, s_r \rangle &= \langle s_{\theta r}, s_r \rangle + \cancel{\langle s_\theta, s_{rr} \rangle} = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\partial}{\partial \theta} \langle s_r, s_r \rangle = \\ &= 0. \end{aligned} \tag{❶}$$

此外， $s_\theta(0, \theta) = 0$，因为对于任意 θ， $s(0, \theta) = p$ 。特别是，$\langle s_\theta, s_r \rangle = 0$ 当 $r = 0$时。根据❶，固定 θ时， $\langle s_\theta, s_r \rangle$ 的值不依赖于 r。因此，

$$\langle s_\theta, s_r \rangle = 0$$

对于任意 r 和 θ。 □

B 再谈最短线与测地线

在本节中，我们将利用极坐标和高斯引理（18.2）来证明命题 15.12。

证明 15.12. 设 $\gamma\colon [0, \ell] \to \Sigma$ 是一条以弧长参数化的最短曲线，且 $p = \gamma(0)$。假设 $\ell = \operatorname{length} \gamma$

足够小，因此 γ 可以用以 p 为原点的极坐标来描述；设 $\gamma(t) = s(r(t)\ \theta(t))$，其中 $t \mapsto \theta(t)$ 和 $t \mapsto r(t)$ 是函数，且 $r(0) = 0$。

根据复合函数的求导法则，

❷ $$\gamma' = s_\theta \cdot \theta' + s_r \cdot r'$$

如果左边有定义且 $t > 0$。根据高斯引理 18.2，$s_\theta \perp s_r$，并根据极坐标的定义，$|s_r| = 1$。因此，由 ❷ 可得

❸ $$|\gamma'(t)| \geqslant r'(t).$$

对于任意 $t > 0$，其中 $\gamma'(t)$ 有定义。

由于 γ 以弧长为参数，

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leqslant |t_2 - t_1|.$$

特别地，γ 是利普希茨的，并且根据拉德马赫定理（A.21），导数 γ' 几乎处处有定义。由 2.6a 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{length}\gamma = \int_0^\ell |\gamma'(t)| \cdot dt \geqslant \\ \geqslant \int_0^\ell r'(t) \cdot dt = \\ = r(\ell).\end{aligned}$$

根据极坐标的构造，存在一条从 $p = \gamma(0)$ 到 $q = \gamma(\ell)$、长度为 $r(\ell)$ 的测地线。由于 γ 是最短曲线，$r(\ell) = \ell$，而且对于任意 t，$r(t) = t$。当且仅当在 ❸ 中几乎处处 t 都取等式时，这个等式才成立。后者意味着 γ 是测地线。

剩下要验证几乎逆命题的正确性。

固定一点 $p \in \Sigma$。设 $\varepsilon > 0$，如 15.10 中所述。假设从 p 到 q 的短测地线 γ（长度小于 ε）并非其端点之间的最短曲线。那么存在一条不同于 γ、从 p 到 q 的最短曲线。若以弧长对它进行参数化，就会得到另一条测地线。也就是说，存在两条从 p 到 q、长度小于 ε 的测地线。换言之，存在两个向量 $\mathsf{v},\mathsf{w} \in \mathsf{T}_p$，使得 $|\mathsf{v}| < \varepsilon$、$|\mathsf{w}| < \varepsilon$，且 $q = \exp_p \mathsf{v} = \exp_p \mathsf{w}$。然而，根据 15.10，指数映射 $\mathsf{T}_p \to \Sigma$ 在零点的 ε-邻域内是单射，这就产生了矛盾。

□

C 高斯曲率

设 s 是从平面 (u,v) 上一个（可能无界的）坐标矩形到光滑曲面 Σ 的光滑映射。如果对任意固定的 v，映射 $u \mapsto s(u,v)$ 都是按弧长参数化的测地线，并且对于任意 (u,v) 都有 $s_u \perp s_v$，则称映射 s 为沿测地线的。

根据高斯引理（18.2），Σ 上的极坐标由半测地映射给出。

设 $\nu = \nu(u,v)$是 Σ 在点 $s(u,v)$处的法向量。对于每一对(u,v)，向量 ν、$\mathrm{U} = s_u$和 $\mathrm{V} = \nu\times\mathrm{U}$ 构成标准正交基。回想一下，$s_v \perp \mathrm{U}$ 和 $s_v \perp \nu$，因为向量 $s_v(u,v)$在 $s(u,v)$处与Σ 相切。因此，对于某个光滑函数(u,v)，有 $s_v = b\cdot\mathrm{V} \mapsto b(u,v)$。[1]

18.3. 命题。设$(u,v) \mapsto s(u,v)$ 是光滑曲面 Σ上的半测地映射，其中 ν、U、V和 b如上所定义。那么

$$b\cdot K + b_{uu} = 0,$$

其中 $K = K(u, v)$ — Σ 点 $s(u, v)$ 处的高斯曲率。

此外，

$$\langle \mathrm{U}_u, \mathrm{U}\rangle = \langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}\rangle = \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{U}\rangle = 0, \quad u \quad \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle = b_u.$$

证明需要进行冗长但并不复杂的计算。

证明。设 $\ell = \ell(u,v)$、$m = m(u,v)$ 和 $n = n(u,v)$ 是在基 U、V 下描述形算子的矩阵的分量；也就是说

❹ $$\operatorname{Shape}\mathrm{U} = \ell\cdot\mathrm{U} + m\cdot\mathrm{V}, \quad \operatorname{Shape}\mathrm{V} = m\cdot\mathrm{U} + n\cdot\mathrm{V}.$$

回顾一下，（见 10C）

$$K = \ell\cdot n - m^2.$$

首先，让我们根据以下恒等式推导出这个命题

❺ $$\begin{aligned} \mathrm{U}_u &= \ell\cdot\nu, \quad & \mathrm{U}_v &= \quad b_u\cdot\mathrm{V} + b\cdot m\cdot\nu, \\ \mathrm{V}_u &= m\cdot\nu, & \mathrm{V}_v &= -b_u\cdot\mathrm{U} + b\cdot n\cdot\nu. \end{aligned}$$

[1]对于 v_0 的固定值，向量场 $s_v = b\cdot\mathrm{V}$ 描述了 γ_0 与无穷小邻近的 测地线 γ_1之间的差异：$u \mapsto s(u, v_1)$。具有这一性质的场称为沿 γ_0的雅可比场。

确实,

$$\begin{aligned} b{\cdot}K &= b{\cdot}(\ell{\cdot}n - m^2) = \\ &= \langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}_v\rangle - \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}_u\rangle = && (\text{по } ❺)\\ &= \big(\tfrac{\partial}{\partial v}\langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}\rangle - \cancel{\langle \mathrm{U}_{uv}, \mathrm{V}\rangle}\big) - \big(\tfrac{\partial}{\partial u}\langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle - \cancel{\langle \mathrm{U}_{uv}, \mathrm{V}\rangle}\big) = \\ &= 0 - b_{uu}. && (\text{по } ❺) \end{aligned}$$

命题中的其余恒等式都直接由❺推出。还需证明❺中的四个恒等式。

推导 $\mathbf{u}_u = \ell{\cdot}\nu$。由于基 ν、$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是正交归一的，这个向量恒等式可以改写为三个标量

$$\langle \mathrm{U}_u, \mathrm{U}\rangle = 0, \quad \langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}\rangle = 0, \quad \langle \mathrm{U}_u, \nu\rangle = \ell.$$

由于 $u \mapsto s(u, v)$ 是测地线，$\mathbf{u}_u = s_{uu}(u, v) \perp \mathrm{T}^{s(u,v)}$。由此得到前两个恒等式。接下来,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{U}_u, \nu\rangle &= \langle s_{uu}, \nu\rangle = && (\text{по } 10.4)\\ &= \langle \mathrm{Shape}\, s_u, s_u\rangle = && (\text{поскольку } \mathrm{U} = s_u)\\ &= \langle \mathrm{Shape}\, \mathrm{U}, \mathrm{U}\rangle = && (\text{по } ❹)\\ &= \ell. \end{aligned}$$

推导 $\mathbf{u}_v = b_u{\cdot}\mathbf{v} + b{\cdot}m{\cdot}\nu$。将其改写为标量恒等式:

❻ $$\langle \mathrm{U}_v, \mathrm{U}\rangle = 0, \quad \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle = b_u, \quad \langle \mathrm{U}_v, \nu\rangle = b{\cdot}m.$$

由于 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 1$，有 $0 = \frac{\partial}{\partial v}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 2{\cdot}\langle \mathbf{u}_v, \mathbf{u}\rangle$。由此得到❻中的第一个恒等式。接下来,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle &= \langle s_{vu}, \mathrm{V}\rangle = && (s_v = b{\cdot}\mathrm{V})\\ &= \langle \tfrac{\partial}{\partial u}(b{\cdot}\mathrm{V}), \mathrm{V}\rangle = \\ &= b_u{\cdot}\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle + b{\cdot}\langle \mathrm{V}_u, \mathrm{V}\rangle = && (\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle = 1 \text{ и}\\ &= b_u. && 0 = \tfrac{\partial}{\partial u}\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}\rangle = 2{\cdot}\langle \mathrm{V}_u, \mathrm{V}\rangle) \end{aligned}$$

得到了❻中的第二个恒等式。最后,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{U}_v, \nu\rangle &= \langle s_{uv}, \nu\rangle = && (\text{по } 10.4)\\ &= \langle \mathrm{Shape}\, s_u, s_v\rangle = && (\mathrm{U} = s_u \text{ и } s_v = b{\cdot}\mathrm{V})\\ &= \langle \mathrm{Shape}\, \mathrm{U}, b{\cdot}\mathrm{V}\rangle = && (\text{по } ❹)\\ &= b{\cdot}m. \end{aligned}$$

推导 $\mathrm{v}_u = m\cdot\nu$ 和 $\mathrm{v}_v = -b_u\cdot\mathrm{u} + b\cdot n\cdot\nu$。提醒一下，$\mathrm{v} = \nu\times\mathrm{u}$。因此，

$$\text{❼}\qquad \mathrm{V}_u = \nu_u\times\mathrm{U} + \nu\times\mathrm{U}_u, \qquad\qquad \mathrm{V}_v = \nu_v\times\mathrm{U} + \nu\times\mathrm{U}_v.$$

❺ 中关于 u_u 和 u_v 的表达式已经证明。接下来，

$$\begin{aligned} -\nu_u = \operatorname{Shape} s_u = \qquad & -\nu_v = \operatorname{Shape} s_v = \\ = \operatorname{Shape}\mathrm{U} = \qquad & = b\cdot\operatorname{Shape}\mathrm{V} = \\ = \ell\cdot\mathrm{U} + m\cdot\mathrm{V}, \qquad & = b\cdot(m\cdot\mathrm{U} + n\cdot\mathrm{V}), \end{aligned}$$

只需将 u_u、u_v、ν_u 和 ν_v 的表达式代入 ❼。 □

如果映射 $(u,v)\mapsto s(u,v)$ 是半测地的，那么坐标图 $(u,v)\mapsto s(u,v)$ 及其局部坐标就称为半测地坐标。注意，函数 $b = b(u,v)$ 在半测地坐标中符号恒定。因此，改变 ν 的符号后，可以（也应该）认为 $b > 0$；换言之，$b = |s_v|$。

18.4. 练习。 证明，在光滑曲面 Σ上，任意点 p 都可以用半测地坐标图覆盖。

18.5. 练习。 设 p 是光滑曲面 Σ上的点。假设映射 $\exp_p$ 在球 $B = B(0,r_0)^{\mathrm{T}_p}$ 中是单射。设半测地映射 $(r,\theta)\mapsto s(r,\theta)$ 给出以 p 为起点的极坐标，而函数 $(r,\theta)\mapsto b(r,\theta)$ 与上文中的相同。

证明下列断言：
(a) $b(r,\theta)$ 在 $0\leqslant r < r_0$ 处不改变符号。*(b)* $b(r,\theta)\neq 0$，如果 $0 < r < r_0$。*(c)* 应用 *(a)* 和 *(b)* 证明 *15.11*。

坐标图 $(u,v)\mapsto s(u,v)$ 称为正交的，如果 $s_u\perp s_v$ 对任意 (u,v) 都成立。例如，任何半测地坐标图都是正交的。

下一道练习的解法与 18.3 类似。

18.6. 练习。 设 $(u,v)\mapsto s(u,v)$ 是光滑曲面 Σ的正交参数网。记 $K = K(u,v)$ 为 Σ 在点 $s(u,v)$处的高斯曲率。定义

$$\begin{aligned} a = a(u,v) &:= |s_u|, & b = b(u,v) &:= |s_v|,\\ \mathrm{U} = \mathrm{U}(u,v) &:= \tfrac{s_u}{a}, & \mathrm{V} = \mathrm{V}(u,v) &:= \tfrac{s_v}{b}. \end{aligned}$$

设 $\nu = \nu(u,\ v)$ 是点 $s(u,\ v)$处的单位法向量。

(a) 证明

$$\mathrm{U}_u = -\tfrac{1}{b}\cdot a_v\cdot \mathrm{V} + a\cdot\ell\cdot\nu, \qquad \mathrm{V}_u = \tfrac{1}{b}\cdot a_v\cdot \mathrm{U} + a\cdot m\cdot\nu$$
$$\mathrm{U}_v = \tfrac{1}{a}\cdot b_u\cdot \mathrm{V} + b\cdot m\cdot\nu, \qquad \mathrm{V}_v = -\tfrac{1}{a}\cdot b_u\cdot \mathrm{U} + b\cdot n\cdot\nu,$$

其中 $\ell = \ell(u,v)$、 $m = m(u,v)$ 和 $n = n(u,v)$ 是描述基 U,V下形算子的矩阵的分量。

(b) 证明

$$K = -\frac{1}{a\cdot b}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_u}{a}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_v}{b}\right)\right).$$

18.7. 练习。 假设$(u,v) \mapsto s(u,v)$是一个共形坐标图；也就是说，存在一个函数$(u,v) \mapsto b(u,v)$，使得对任意(u,v)， $b = |s_u| = |s_v|$ 和 $s_u \perp s_v$ 成立。（函数 b称为坐标图的共形因子。）

利用 *18.6*，证明

$$K = -\frac{\triangle(\ln b)}{b^2},$$

其中 $\triangle$是拉普拉斯算子；也就是说， $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$，而 $K = K(u,v)$是 Σ 在点 $s(u,v)$处的高斯曲率。

值得注意的是，任意光滑曲面上的点都可以用保角图覆盖，相应的局部坐标称为等温坐标。

D 向量场的旋转

设 $\gamma\colon\ [0,1] \to \Sigma$ 是光滑定向曲面 Σ上的一条简单闭曲线，且 $\mathbf{u}$ 是定义在 γ的邻域内、取值于 Σ的单位切向量场。记 $\mathbf{v}$ 为 $\mathbf{u}$ 在每一点的切平面内沿逆时针方向旋转角度 $\frac{\pi}{2}$ 所得的向量场；也可将 $\mathbf{v}$ 定义为 $\mathbf{v} := \nu\times\mathbf{u}$，其中 ν 是 Σ的法向量场。那么，$\mathbf{u}$ 沿着 γ的旋转定义为以下积分

$$\mathrm{rot}_\gamma \mathrm{U} := \int_0^1 \langle \mathrm{U}'(t), \mathrm{V}(t)\rangle\cdot dt.$$

18.8. 引理。设 $\gamma\colon\ [0,1] \to \Sigma$ 是光滑定向曲面 Σ上以 p 为基点的简单闭曲线，且 U 是在 γ 的邻域内定义的、在 Σ上的切单位向量场。

则平行移动 $\iota_\gamma\colon \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_p$ 是按顺时针方向旋转 $\mathrm{rot}\gamma\mathrm{U}$ 角。

特别地，沿着 γ 的不同向量场的旋转量之差只能是 $2\cdot\pi$ 的整数倍。

证明。和之前一样，设 $\mathrm{V} = \nu \times \mathrm{u}$。我们用 $\mathrm{u}(t)$ 和 $\mathrm{v}(t)$ 表示向量场 u 和 v 在点 $\gamma(t)$ 处的向量。

设 $t \mapsto \mathrm{x}(t) \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}$ ——这是沿γ 的平行向量场，且 $\mathrm{x}(0) = \mathrm{u}(0)$，并且 $\mathrm{y} := \nu \times \mathrm{x}$。

注意，存在一个连续函数 $t \mapsto \varphi(t)$，使得 $\mathrm{u}(t)$ 是将 $\mathrm{x}(t)$ 逆时针旋转角度 $\varphi(t)$ 得到的。由于 $\mathrm{x}(0) = \mathrm{u}(0)$，可以认为 $\varphi(0) = 0$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{U} &= \cos\varphi\cdot\mathrm{X} + \sin\varphi\cdot\mathrm{Y},\\ \mathrm{V} &= -\sin\varphi\cdot\mathrm{X} + \cos\varphi\cdot\mathrm{Y}.\end{aligned}$$

由此

$$\langle \mathrm{U}', \mathrm{V}\rangle = \varphi'\cdot\Big((\sin\varphi)^2\cdot\langle \mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle + (\cos\varphi)^2\cdot\langle \mathrm{Y}, \mathrm{Y}\rangle\Big) = \varphi'.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_\gamma\,\mathrm{U} &= \int_0^1 \langle \mathrm{U}'(t), \mathrm{V}(t)\rangle\cdot dt =\\ &= \int_0^1 \varphi'(t)\cdot dt =\\ &= \varphi(1).\end{aligned}$$

注意到

$\diamond$ $\iota_\gamma(\mathrm{x}(0)) = \mathrm{x}(1)$，$\diamond$ $\mathrm{x}(0) = \mathrm{u}(0) = \mathrm{u}(1)$，$\diamond$ $\mathrm{u}(1)$ — 将 $\mathrm{x}(1)$ 逆时针旋转 $\varphi(1) == \mathrm{rot}\gamma\mathrm{u}$ 角，

由此可得，$\mathrm{x}(1)$ 是将 $\mathrm{x}(0)$ 顺时针旋转 $\mathrm{rot}\gamma\mathrm{u}$ 角所得的结果，结论得证。

最后一个命题由 16.6 得出。 □

下面的引理将在证明高斯—博内公式时派上用场。

18.9. 引理。 设$(u,\ v) \mapsto s(u,\ v)$ 是光滑曲面 Σ上的半测地坐标图。假设简单闭合曲线 γ 围成一个圆盘 Δ，且该圆盘完全由坐标图 s覆盖。那么

$$\mathrm{rot}_\gamma \mathrm{U} + \iint\limits_{\Delta} K = 0,$$

其中 $\mathrm{U} = s_u$，而 K 表示曲面 Σ的高斯曲率。

下面的计算使用所谓的格林公式，其表述如下。

设 D 是 (u,v)-平面上的紧区域，其边界是由分段光滑的简单闭合道路 $\alpha\colon\ t \mapsto (u(t)\ v(t))$构成。假设 α 的定向方式使得 D 位于其左侧。那么

$$\iint\limits_{D} (Q_u - P_v)\cdot du\cdot dv = \int\limits_{\alpha} (P\cdot du + Q\cdot dv) := \int\limits_{0}^{1} (P\cdot u' + Q\cdot v')\cdot dt$$

对于定义在 D上的任意两个光滑函数 P 和 Q。

格林公式与高斯—博内公式很相似：二者都将区域上的积分与其边界上的积分联系起来，因此其中一个能够帮助证明另一个也就不足为奇了。

证明。 设 U、V 和 b 如 18C 中所定义。将 γ写成 (u,v)-坐标形式： $\gamma(t) = s(u(t)\ v(t))$。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_\gamma \mathrm{U} &= \int\limits_{0}^{1} \langle \mathrm{U}', \mathrm{V}\rangle \cdot dt = && (\text{поскольку } \mathrm{U}' = \mathrm{U}_u\cdot u' + \mathrm{U}_v\cdot v')\\
&= \int\limits_{0}^{1} [\langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}\rangle \cdot u' + \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle \cdot v']\cdot dt = && (\text{по 18.3})\\
&= \int\limits_{0}^{1} b_u\cdot v'\cdot dt = \int\limits_{s^{-1}\circ\gamma} b_u\cdot dv = && (\text{по формуле Грина})\\
&= \iint\limits_{s^{-1}(\Delta)} b_{uu}\cdot du\cdot dv = && (s_u \perp s_v \Longrightarrow \mathrm{jac}\, s = |s_u|\cdot|s_v| = b)\\
&= \iint\limits_{\Delta} \frac{b_{uu}}{b} = && (\text{по 18.3})\\
&= -\iint\limits_{\Delta} K.
\end{aligned}$$

□

E 高斯—博内公式的推导

回顾一下，高斯–博内公式写作 GB(Δ) $= 0$，其中

$$\mathrm{GB}(\Delta) := \Psi(\partial\Delta) + \iint_{\Delta} K - 2\cdot\pi,$$

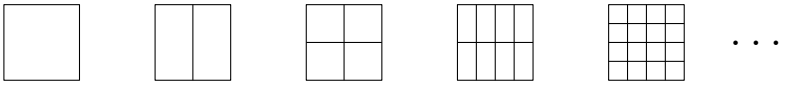
Δ —光滑定向曲面上的一个拓扑圆盘，其边界由分段光滑曲线组成，
$\partial\Delta$ 的定向方式使得Δ 位于其左侧。

高斯—博内公式（17.1）的推导。 假设 Δ可由半测地坐标图覆盖。由 16.6、18.8 和 18.9 可得，

❽ $$\mathrm{GB}(\Delta) = 2\cdot n\cdot\pi,$$

其中 $n = n(\Delta)$ 是整数。

根据 18.4，曲面的任意一点都可以由半测地坐标图覆盖。因此，应用 GB 的可加性（17.9）有限次，我们得到对于 Σ上的任意圆盘 Δ，均有 ❽。更准确地说，我们可以用一条从边界到边界的光滑曲线将 Δ 切开，并对所得圆盘递归地重复这种划分；见图。经过若干次这样的步骤后，每个小



圆盘将被半测地线坐标图覆盖。特别地，❽对每个小圆盘都成立。然后，重复应用 17.9 数次，便可得到原圆盘上的 ❽。

剩下要证明的是 $n = 0$。假设 Δ 位于曲面的一个局部实现中，该曲面可表示为图像 $z = f(x, y)$。考虑图像的单参数族 $z = t\cdot f(x, y)$；用 Δ_t 表示 Σ_t上的对应圆盘，使得 $\Delta_1 = \Delta$，而 Δ_0是它在平面 (x, y) 上的投影。函数 $h\colon t \mapsto \mathrm{GB}(\Delta_t)$ 连续。根据 ❽，对于任意 t， $h(t)$都是 $2\cdot\pi$ 的整数倍。因此， h 是常数。于是，

$$\mathrm{GB}(\Delta) = \mathrm{GB}(\Delta_0) = 0;$$

最后一个等式由 6.5 得出。

因此，我们证明了

❾ $$\mathrm{GB}(\Delta) = 0$$

如果 Δ 位于某个坐标系（x, y, z）中的图 $z = f(x, y)$ 上。曲面 Σ 的每个点都有一个邻域，该邻域可由这样的图覆盖，并且像上面一样应用 GB 的可加性（17.9）后，我们得到：对于 Σ 上的任意圆盘 Δ，❾ 都成立。 □

F Rauch 比较定理

下述命题是所谓 Rauch 比较定理的一个特例。

18.10. 命题。设 p 是光滑曲面 Σ 上的一点，且 $r \leqslant \mathrm{inj}(p)$。此外，设 $\tilde{\gamma}$ 是切平面 T_p 的零点邻域中的一条曲线，而 γ 是 Σ 上由下式定义的曲线：

$$\gamma = \exp_p \circ \tilde{\gamma}, \quad \textit{что эквивалентно} \quad \log_p \circ \gamma = \tilde{\gamma}.$$

(a) 若曲面 Σ 的高斯曲率非正，则对数映射 $\log_p$ 在点 p 的 r 邻域内不会增加长度；也就是说，

$$\operatorname{length} \gamma \geqslant \operatorname{length} \tilde{\gamma}$$

对开球 $B(p, r)_\Sigma$ 内的任意曲线 γ，均有：

(b) 如果曲面 Σ 具有非负高斯曲率，那么指数映射 $\exp_p$ 在 T_p 中零点的 r-邻域内不会增加长度；也就是说

$$\operatorname{length} \gamma \leqslant \operatorname{length} \tilde{\gamma}$$

对于开球 $B(0, r)^{\mathrm{T}_p}$ 内的任意曲线 $\tilde{\gamma}$。

证明。设 $(r(t)\ \theta(t))$ 是 $\tilde{\gamma}(t)$ 的极坐标。那么，$(r(t)\ \theta(t))$ 是以 p 为原点、在 Σ 上的 $\gamma(t)$ 的极坐标；也就是说，$\gamma(t) = s(r(t)\ \theta(t))$，其中 s 与 18A 中相同。

证明，对于任意 θ，$b(0, \theta) = 0$ 且 $b_r(0, \theta) = 1$。不妨设 $\theta = 0$。选取 T_p 中的标准基 v、w，使 v 的方向与曲线 $t \mapsto s(t, 0)$ 相同。注意到 [2]

$$b(r, 0) = r \cdot |(D_{\mathrm{w}} \exp_p)(r \cdot \mathrm{v})|.$$

特别地，$b(0, 0) = 0$。根据15.9，$|(D_{\mathrm{w}} \exp_p)(0)| = 1$，因此，当 r较小时，$|(D_{\mathrm{w}} \exp_p)(r \cdot \mathrm{v})| \neq 0$。由此可知，函数$r \mapsto |(D_{\mathrm{w}} \exp_p)(r \cdot \mathrm{v})|$ 在 $r = 0$处可微。对 $b(r, 0)$的表达式求偏导，得到 $b_r(0, 0) = 1$。

[2]Напомним, что $(D_{\mathrm{w}} \exp_p)(r \cdot \mathrm{v}) := h'(0)$, где $h(t) = \exp_p(r \cdot \mathrm{v} + t \cdot \mathrm{w})$; см. 9B.

设 $b(r,\theta) := |s_\theta|$。根据18.3,

$$b_{rr} = -K\cdot b.$$

如果 $K \geqslant 0$，那么对于固定的 θ，函数 $r \mapsto b(r,\theta)$ 是凹的；如果 $K \leqslant 0$，那么 $r \mapsto b(r,\theta)$ 是凸的。由于 $b(0,\theta) = 0$ 且 $b_r(0,\theta) = 1$,

❿
$$\begin{aligned} b(r,\theta) &\geqslant r \quad \text{если} \quad K \leqslant 0;\\ b(r,\theta) &\leqslant r \quad \text{если} \quad K \geqslant 0. \end{aligned}$$

可以认为 $\tilde\gamma\colon\ [a,b] \to \mathrm{T}_p$ 按弧长参数化；特别地，它是利普希茨的。注意,

$$\operatorname{length}\tilde\gamma = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\cdot\theta'(t)^2}\cdot dt.$$

应用 18.2，得到

$$\operatorname{length}\gamma = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + b(r(t),\theta(t))^2\cdot\theta'(t)^2}\cdot dt.$$

现在，命题*(a)* 和*(b)* 由❿得出。 □

G 内蕴等距变换

设 Σ 和 Σ^* 是两个光滑曲面。如果映射 $f\colon\ \Sigma \to \Sigma^*$ 对 Σ 上的任意曲线γ 都保持长度，即其在 Σ^* 上的像曲线 $\gamma^* = f\circ\gamma$ 具有相同的长度，我们就称该映射保持长度。如果 f 还是光滑双射，则称其为内在等距映射。

通过映射 $s\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$将平面卷成圆柱面，可以得到一个保持长度的映射，该映射定义为 $s(x,y) = (\cos x, \sin x, y)$。

18.11. 练习。 证明，光滑曲面之间的任意内在等距映射都会将测地线映射为测地线。

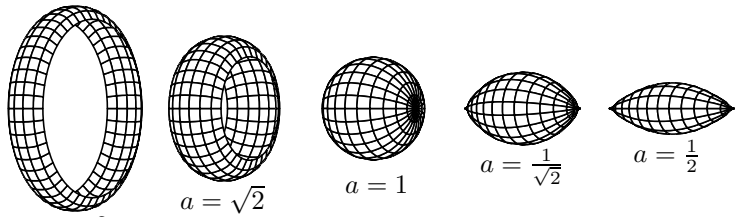
18.12. 练习。 设光滑曲面 Σ 的高斯曲率等于零。证明，Σ 是局部平面曲面；也就是说，Σ 上任意一点的某个邻域都允许一个到欧几里得平面的开集的内在等距映射。

18.13. 练习。 设光滑曲面的高斯曲率 Σ 在每一点都等于 1。证明，足够小的邻域

Σ 上任意一点的邻域都存在到单位球面某个开子集的内等距映射。

18.14. 练习。 给定 $a > 0$，证明存在一条单位速度光滑曲线 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t))$，使得 $y(t) = a \cdot \cos t\, \boldsymbol{u}\ \ y > 0$。求它的定义区间。

设 Σ_a 是曲线 γ 绕轴 x 旋转所得的旋转曲面。证



明曲面 Σ_a 在每一点的高斯曲率均为 *1*。

利用这一构造和 *18.13*，构造圆盘 Δ 到 $\mathbb{S}^2$ 的光滑保长度形变；也就是说，构造一个单参数族 Δ_t 带边界曲面，使得 $\Delta_0 = \Delta$，且对于 $t \neq 0$，Δ_t 与 Δ_0 不全等。[3]

下面的练习阐明了证明“任意高斯曲率为零的开曲面都是圆柱面”的最后一步。参见 10.12 后的讨论。

18.15. 进阶练习。 设$(u, v) \mapsto f(u, v)$ 给出了从具有标准(u, v)坐标的平面到曲面 Σ 中的内蕴等距映射。假设 f 将 v-轴等距映射到 z-轴。证明 Σ 是圆柱面；更确切地说，Σ 是由一族平行于 z-轴的直线组成的并集。

H 一个精彩的定理

18.16. 定理。 假设 $f\colon\ \Sigma \to \Sigma^*$ 是两个光滑曲面之间的内在等距映射；$p \in \Sigma$ 且

[3]事实上，$\mathbb{S}^2$ 上的任意圆盘都允许保持长度的光滑变形。不过，如果圆盘大于半球，证明就需要额外的努力；该证明可由亚历山大·亚历山德罗夫的两个结果推出：粘合定理和关于存在具有抽象给定度量的凸曲面 [83, c. 44]的定理。

$p^* = f\,(p) \in \Sigma^*$。那么

$$K(p)_\Sigma = K(p^*)_{\Sigma^*};$$

也就是说，在点 p 处， Σ 的高斯曲率与点 p^* 处 Σ^* 的高斯曲率相同。

请记住，高斯曲率定义为主曲率的乘积，而主曲率在点 p 和 p^* 处可能不同；然而，根据定理，它们的乘积相同。换句话说，高斯曲率是内蕴不变量。这一理论由卡尔·弗里德里希·高斯 [35]，证明，因此被恰当地称为绝妙定理（Theorema Egregium）。

事实上，曲率 $K(p)$ 可以通过内蕴测量得到。例如，它出现在下面这个关于曲面上以点 p 为圆心的测地线圆的长度 $c(r)$ 的公式中：

$$c(r) = 2\cdot\pi\cdot r - \tfrac{\pi}{3}\cdot K(p)\cdot r^3 + o(r^3).$$

由定理可知，例如，不存在一种保持长度的光滑映射，能将单位球面上的开区域映射到平面上。[4] 这是因为平面的高斯曲率等于零，而单位球面的高斯曲率等于 1。特别地，任何地理地图都必然存在失真。

证明。 我们选取坐标图 $(u, v) \mapsto s(u, v)$ 于 Σ 上，并令 $s^* = f \circ s$。注意，s^* 是 Σ^*上的坐标图，并且

$$\langle s_u, s_u\rangle = \langle s^*_u, s^*_u\rangle, \qquad \langle s_u, s_v\rangle = \langle s^*_u, s^*_v\rangle, \qquad \langle s_v, s_v\rangle = \langle s^*_v, s^*_v\rangle$$

在任意点 (u, v) 处均成立。事实上，由于 f 保持坐标线 γ 的长度：$t \mapsto s(t, v)$ 和 γ： $t \mapsto s(u, t)$，我们得到第一个和第三个等式。现在，由于 f 保持曲线 γ 的长度：对于任意常数 c， $t \mapsto s(t, c - t)$，第一个和第三个等式推出第二个等式。

由 15.12 可知，如果 s 是半测地坐标图，那么 s^* 也是如此。接下来应用 18.3 和 18.4。 □

[4] 光滑性至关重要——存在许多从球面到平面且保持长度的非光滑映射；参见 [77] 及其中的参考文献。

第19章

比较定理

比较定理是一种强大的工具，使我们能够在微分几何中运用欧几里得直觉。

A 三角形与扇形

回顾一下， $[x,y]$ 和 $[x,y]_\Sigma$ 表示曲面 Σ上点 x与 y之间的最短距离，而 $|x-y|_\Sigma$表示 Σ上从 x 到 y 的内在距离。

曲面 Σ上的测地三角形定义为点 x、 y、 $z\in\Sigma$组成的三元组，并选定最短线段 $[x,y]_\Sigma$、 $[y,z]_\Sigma$和 $[z,x]_\Sigma$。点 x、 y、 z称为三角形的顶点，而最短线段 $[x,y]_\Sigma$、 $[y,z]_\Sigma$和 $[z,x]_\Sigma$则是它的边；三角形本身记作 $[xyz]$ 或 $[xyz]_\Sigma$；与往常一样，若要强调三角形位于曲面 Σ上，则使用后一种记法。

平面 $[\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}]$上的三角形 $\mathbb{R}^2$称为三角形 $[xyz]$的全等三角形，如果它们的对应边相等；也就是说

$$|\tilde{x}-\tilde{y}|_{\mathbb{R}^2}=|x-y|_\Sigma,\quad |\tilde{y}-\tilde{z}|_{\mathbb{R}^2}=|y-z|_\Sigma,\quad |\tilde{z}-\tilde{x}|_{\mathbb{R}^2}=|z-x|_\Sigma.$$

$\tilde{}$在这种情况下记作$[\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}]=\triangle xyz$。

从同一点 x 出发的两条最短线段 $[x,y]$ 和 $[x,z]$ 称为扇形，记作 $[x\,{}^{y}_{z}]$。这两条测地线在点 x处的夹角记作 $\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}]$。模型三角形 $[\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}]=\triangle xyz$ 的角 $\measuredangle[\tilde{x}\,{}^{\tilde{y}}_{\tilde{z}}]$ $\tilde{}$记作 $\measuredangle(x\,{}^{y}_{z})$，称为三角形 $[xyz]$ 在 x处的模型角。

根据三边确定三角形全等的判定定理，模型三角形 $[\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}]$ 在全等意义下唯一确定。因此，模型角 $\theta = \measuredangle(x\,{}^{y}_{z})$也唯一确定。根据余弦定理，

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cdot a\cdot b},$$

其中 $a = |x-y|_\Sigma$, $b = |x-z|_\Sigma$ 和 $c = |y-z|_\Sigma$。

19.1. 练习。 设 $[x_n y_n z_n]$ 是光滑曲面 Σ 上由边 $a_n = |x_n - y_n|_\Sigma$, $b_n = |x_n - z_n|_\Sigma$, $c_n = |y_n - z_n|_\Sigma$ 构成的三角形序列，并设 $\theta_n = \measuredangle(x_n\,{}^{y_n}_{z_n})$。假设数列 a_n 和 b_n 与零分离；也就是说，对于固定的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 n，有 $a_n > \varepsilon$ 和 $b_n > \varepsilon$。证明：

$$(a_n + b_n - c_n) \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{\theta}_n \to \pi$$

当 $n \to \infty$ 时。

B 定理陈述

以下定理的 *(a)*部分称为卡坦–阿达马定理；该部分由汉斯·冯·曼戈尔特证明 [65]，并由 Élie Cartan [16] 和雅克·阿达马 [40]推广。*(b)* 部分称为托波诺戈夫比较定理，有时也称为亚历山德罗夫比较定理；该部分由 Paolo Pizzetti [82], 证明，后由亚历山大·亚历山德罗夫 [2], 重新发现，并由维克托·托波诺戈夫 [97]推广。

回顾一下，如果曲面上的任意简单闭曲线都围成一个圆盘，就称该曲面为单连通曲面。

19.2. 比较定理。

(a) 设 Σ 是一个具有非正高斯曲率的开单连通光滑曲面。那么

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \leqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z})$$

对于 Σ 上的任意测地三角形 $[xyz]$。

(b) 设 Σ 是一个具有非负高斯曲率的闭合（或开）光滑曲面。那么

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z})$$

对于任意测地三角形 $[xyz]$ 在 Σ 上。

部分 *(a)* 和 *(b)* 的证明分别见第 19D 节和第 19E 节。

19.3. 练习。证明，*19.2a* 中的不等式对双曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$ 不成立。特别地，如果没有单连通性的假设，*19.2a* 不正确。

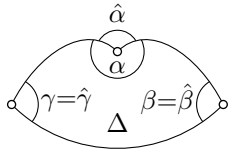
让我们将高斯-博内公式与比较定理进行比较。考虑由测地三角形 $[xyz]$ 围成的圆盘 Δ，其内角为 α、β 和 γ。根据高斯-博内公式，

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\iint\limits_{\Delta} K;$$

特别地，等式两边的符号相同：

◇ 如果 $K_\Sigma \geqslant 0$，那么 $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \pi$，并且

◇ 如果 $K_\Sigma \leqslant 0$，那么 $\alpha+\beta+\gamma \leqslant \pi$。



现在设 $\hat\alpha = \measuredangle[y\,{}^{z}_{x}]$，并且 $\hat\gamma = \measuredangle[z\,{}^{x}_{y}]$。注意，$\hat\alpha$、$\hat\beta$、$\hat\gamma \in [0,\pi]$。由于任意平面三角形的内角和等于 π，因此由比较定理可得

◇ 如果 $K_\Sigma \geqslant 0$，那么 $\hat\alpha+\hat\beta+\hat\gamma \geqslant \pi$，并且

◇ 如果 $K_\Sigma \leqslant 0$，那么 $\hat\alpha+\hat\beta+\hat\gamma \leqslant \pi$。

由此可见，高斯–博内公式与比较定理密切相关，但这种联系并非那么直接。

例如，假设 $K \geqslant 0$。那么，高斯–博内公式并不排除内角 α、β 和 γ 同时接近 $2\cdot\pi$。然而 $\hat\alpha=\alpha$，如果 $\alpha \leqslant \pi$；若非如此，则 $\hat\alpha=\pi-\alpha$；也就是说

$$\hat\alpha=\min\{\alpha, 2\cdot\pi-\alpha\}, \quad \hat\beta=\min\{\beta, 2\cdot\pi-\beta\}, \quad \hat\gamma=\min\{\gamma, 2\cdot\pi-\gamma\}.$$

因此，如果 α、β 和 γ 接近 $2\cdot\pi$，那么 $\hat\alpha$、β 和 $\hat\gamma$ 将接近 0，而这显然不可能，因为比较定理。

19.4. 练习。设点 p 和 q 使光滑闭凸曲面 Σ 上的距离达到最大值；也就是说，对于任意 $x, y \in \Sigma$，都有 $|p-q|_\Sigma \geqslant |x-y|_\Sigma$。证明，对于任意点 $x \in \Sigma \setminus \{p,q\}$，都有 $\measuredangle[x\,{}^{p}_{q}] \geqslant \frac{\pi}{3}$。

19.5. 练习。设 Σ 是具有非负高斯曲率的闭合（或开）曲面。证明：

$$\tilde\measuredangle(p\,{}^{x}_{y})+\tilde\measuredangle(p\,{}^{y}_{z})+\tilde\measuredangle(p\,{}^{z}_{x}) \leqslant 2\cdot\pi$$

对于平面上的任意四个不同的点 p，x，y，z。

C 局部定理

下面的定理是证明比较定理（19.2）的第一步；它将由劳赫比较定理（18.10）推导得出。

19.6. 定理。 比较定理（*19.2*）在任意点的小邻域内成立。

此外，若 Σ 是无边光滑曲面，则对任意点 $p \in \Sigma$，存在这样的 $r > 0$，使得若 $|p - x|_\Sigma < r$，则$\operatorname{inj}(x)_\Sigma > r$，并且以下结论成立：

(a) 若 Σ 的高斯曲率非正，则

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \leqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z})$$

对于 $B(p, \frac{r}{4})_\Sigma$中的任意测地三角形 $[xyz]$。

(b) 如果 Σ 具有非负高斯曲率，则

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z})$$

对于 $B(p, \frac{r}{4})_\Sigma$ 中的任意测地三角形 $[xyz]$。

证明。 存在性 $r > 0$ 由 15.10 得出。设$[xyz]$ 是 $B(p, \frac{r}{4})$ 中的一个测地三角形。

由于 $r < \operatorname{inj}(x)_\Sigma$，存在向量 v、$\mathrm{w} \in \mathrm{T}_x$，使得

$$y = \exp_x \mathrm{v}, \qquad z = \exp_x \mathrm{w},$$
$$|\mathrm{v}|_{\mathrm{T}_x} = |x - y|_\Sigma, \qquad |\mathrm{w}|_{\mathrm{T}_x} = |x - z|_\Sigma, \qquad \measuredangle[0\,{}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{w}}]_{\mathrm{T}_x} = \measuredangle[x\,{}^{y}_{z}]_\Sigma;$$

特别地，$|\mathrm{v}|$、$|\mathrm{w}| < \frac{r}{2}$。

(a). 设 γ 是从 y 到 z 的极小测地线。由于$|x - y|_\Sigma, |x - z|_\Sigma < \frac{r}{2}$，根据三角不等式，$\gamma$ 位于 r邻域 x内。特别地，曲线 $\tilde{\gamma} := \log_x \circ \gamma$ 有定义，并且位于 T_x 中零点的 r邻域内。注意，$\tilde{\gamma}$ 在 T_x 中连接 v 和 w。

根据劳赫比较定理 (18.10*a*)，

$$\operatorname{length} \tilde{\gamma} \leqslant \operatorname{length} \gamma.$$

由于 $|\mathrm{v} - \mathrm{w}|_{\mathrm{T}_x} \leqslant$ 长度 $\tilde{\gamma}$ 和 长度$\gamma = |y - z|_\Sigma$，得到

$$|\mathrm{v} - \mathrm{w}|_{\mathrm{T}_x} \leqslant |y - z|_\Sigma.$$

根据角单调性 (A.15)，

$$\measuredangle[0\,{}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{w}}]_{\mathrm{T}_x} \leqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{z}_{y}),$$

由此即可得到结果。

(b). 考虑切平面 T_x 中连接 v 和 w 的线段 $\tilde{\gamma}$，并设 $\gamma := \exp_x \circ \tilde{\gamma}$。根据劳赫定理（18.10$b$），

$$\operatorname{length} \tilde{\gamma} \geqslant \operatorname{length} \gamma.$$

由于 $|\mathrm{v} - \mathrm{w}|_{\mathrm{T}_x} =$ 长度 $\tilde{\gamma}$ 和长度 $\gamma \geqslant |y - z|_\Sigma$,

$$|\mathrm{v} - \mathrm{w}|_{\mathrm{T}_x} \geqslant |y - z|_\Sigma.$$

根据角单调性 (A.15),

$$\measuredangle[0 \overset{\mathrm{v}}{\mathrm{w}}]_{\mathrm{T}_x} \geqslant \tilde{\measuredangle}(x \overset{z}{y}),$$

由此得到结果。 □

D 非正曲率

证明 19.2*a*. 由于 Σ 是单连通的，由 17.8 得到,

$$\operatorname{inj}(p)_\Sigma = \infty$$

对于任意点 $p \in \Sigma$。因此，19.6a 推出 19.2a。 □

E 非负曲率

现在我们将证明紧致曲面的 19.2b 。一般情形只需稍作修改；相关内容见本节末尾的练习 19.9。证明取自 [5], , 类似的证明由 Urs Lang 和 Victor Schroeder 独立发现[60]。

证明 19.2*b* 在紧致情形下。 假设Σ 是紧致的。根据 19.6，存在这样的 $\varepsilon > 0$, 使得不等式

$$\measuredangle[x \overset{p}{q}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x \overset{p}{q})$$

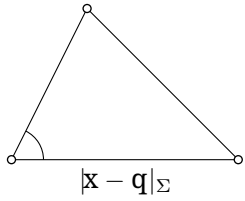
当 $|x - p|_\Sigma + |x - q|_\Sigma < \varepsilon$ 时成立。下面的引理说明，在这种情况下，当 $|x - p|_\Sigma + |x - q|_\Sigma < \frac{3}{2} \cdot \varepsilon$ 时结论也成立。反复应用该引理，便可得到任意扇形的比较结果，从而证明 19.2b。 □

19.7. 基本引理。 设 Σ 是光滑曲线开曲线或闭曲面。假设在 Σ 上满足比较

❶ $$\measuredangle[x \overset{y}{z}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x \overset{y}{z})$$

如果 $|x - y|_\Sigma + |x - z|_\Sigma < \frac{2}{3} \cdot \ell$。那么在 $|x - y|_\Sigma + |x - z|_\Sigma < \ell$ 的情况下，比较 ❶ 也成立。

对于给定的扇形 $[x\,{}^{p}_{q}]$，我们来考虑平面上的一个三角形，它有一个角 $\measuredangle[x\,{}^{p}_{q}]$ 以及两条邻边 $|x-p|_\Sigma$ 和 $|x-q|_\Sigma$。用 $\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{q}]$ 表示这个三角形的第三条边；它将被称为该扇形的模型边。



接下来的计算练习将在引理的证明中用到。

19.8. 练习。 假设扇形 $[x\,{}^{p}_{q}]$ 和 $[x\,{}^{p}_{y}]$ 有一条公共边 $[x,p]$，且 $[x,y]\subset[x,q]$。证明，

$$\frac{|x-p|+|x-q|-\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{q}]}{|x-q|}\leqslant\frac{|x-p|+|x-y|-\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{y}]}{|x-y|}.$$

证明。 根据角单调性 (A.15)

$$\measuredangle[x\,{}^{p}_{q}]\geqslant\tilde\measuredangle(x\,{}^{p}_{q})\qquad\Longleftrightarrow\qquad\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{q}]\geqslant|p-q|_\Sigma.$$

因此，只需证明，

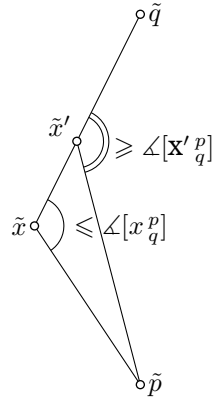
❷ $$\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{q}]\geqslant|p-q|_\Sigma$$

在满足 $|x-p|_\Sigma+|x-q|_\Sigma<\ell$ 的条件下。

下面描述如何根据给定的扇形 $[x\,{}^{p}_{q}]$ 构造一个新的扇形 $[x'\,{}^{p}_{q}]$，其中

$$\tfrac{2}{3}\cdot\ell\leqslant|p-x|_\Sigma+|x-q|_\Sigma<\ell.$$

我们假设 $|x-q|_\Sigma\geqslant|x-p|_\Sigma$；否则交换 p 和 q 的角色。选取 $x'\in[x,q]$，使得



❸ $$|p-x|_\Sigma+3\cdot|x-x'|_\Sigma=\tfrac{2}{3}\cdot\ell$$

接下来选取测地线 $[x',p]$，并考察由 $[x',p]$ 和 $[x',q]\subset[x,q]$形成的扇形 $[x'\,{}^{p}_{q}]$。

根据三角不等式，

❹ $$|p-x|_\Sigma+|x-q|_\Sigma\geqslant|p-x'|_\Sigma+|x'-q|_\Sigma.$$

我们将证明，

❺ $$\tilde\Upsilon[x\,{}^{p}_{q}]\geqslant\tilde\Upsilon[x'\,{}^{p}_{q}]$$

由❸可知，

$$|p-x|_\Sigma + |x-x'|_\Sigma < \tfrac{2}{3}\cdot\ell,$$
$$|p-x'|_\Sigma + |x'-x|_\Sigma < \tfrac{2}{3}\cdot\ell.$$

因此，根据假设

❻ $$\measuredangle[x\,{}_{x'}^{p}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}_{x'}^{p}) \quad \text{и} \quad \measuredangle[x'\,{}_{x}^{p}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x'\,{}_{x}^{p}).$$

考虑模型三角形 $[\tilde{x}\tilde{x}'\tilde{p}] = \triangle xx'p$。在 x'之外的 $[\tilde{x},\tilde{x}']$ 线段延长线上选取一点 $\tilde{q}$，使得 $|\tilde{x}-\tilde{q}|_\Sigma = |x-q|_\Sigma$，因此 $|\tilde{x}'-\tilde{q}|_\Sigma = |x'-q|_\Sigma$。

Из ❻

$$\measuredangle[x\,{}_{q}^{p}] = \measuredangle[x\,{}_{x'}^{p}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}_{x'}^{p}).$$

因此，

$$\tilde{\Upsilon}[x\,{}_{p}^{q}] \geqslant |\tilde{p}-\tilde{q}|_{\mathbb{R}^2}.$$

接下来，由于 $\measuredangle[x'\,{}_{x}^{p}] + \measuredangle[x'\,{}_{q}^{p}] = \pi$，❻中的不等式意味着 o

$$\pi - \tilde{\measuredangle}(x'\,{}_{x}^{p}) \geqslant \pi - \measuredangle[x'\,{}_{x}^{p}] \geqslant \measuredangle[x'\,{}_{q}^{p}].$$

因此，

$$|\tilde{p}-\tilde{q}|_{\mathbb{R}^2} \geqslant \tilde{\Upsilon}[x'\,{}_{p}^{q}]$$

由此可得 ❺。

设 $x_0 = x$；应用上述构造，得到一列扇叶 $[x_n\,{}_{q}^{p}]$，其中 $x_{n+1} = x'_n$。根据 ❺ 和 ❹，这两列

$$s_n = \tilde{\Upsilon}[x_n\,{}_{q}^{p}] \quad \text{и} \quad r_n = |p-x_n|_\Sigma + |x_n-q|_\Sigma$$

均单调不增。

序列只有在 x_n 且 $r_n << \frac{2}{3}\cdot\ell$时才会停止。于是，根据引理的假设，

$$s_n = \tilde{\Upsilon}[x_n\,{}_{q}^{p}] \geqslant |p-q|_\Sigma.$$

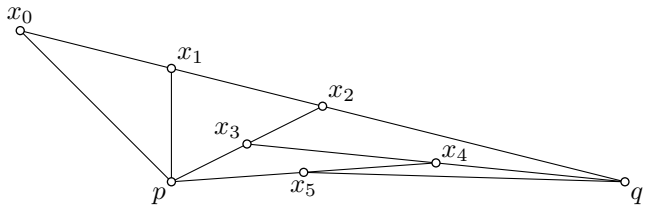
又因为序列 s_n 单调不增，所以得到

$$\tilde{\Upsilon}[x\,{}_{q}^{p}] = s_0 \geqslant s_n \geqslant |p-q|_\Sigma;$$

由此可得 ❷。

还需证明❷在序列 x_n 无穷的情况下成立。由❸

❼ $$|x_n - x_{n-1}|_\Sigma \geqslant \tfrac{1}{100}\cdot\ell.$$



根据❹，对于任意 n，$|x_n-p|, |x_n-q| < \ell$。若 $x_{n+1} \in\in [x_n, q]$，则对扇形 $[x_n\,{}^{p}_{q}]$ 和 $[x_n\,{}^{p}_{x_{n+1}}]$应用19.8。根据❻，$|p \text{—} x_{n+1}| \leqslant \tilde{\Upsilon}[x_n\,{}^{x_{n+1}}_{p}]$。因此，

$$\text{❽} \qquad r_n - s_n \leqslant 100\cdot(r_n - r_{n+1})$$

如果 $x_{n+1} \in [x_n, p]$，则对扇形 $[x_n\,{}^{p}_{q}]$ 和 $[x_n\,{}^{x_{n+1}}_{q}]$应用 19.8，即可得到不等式 ❽。

数列 r_n 和 s_n 单调不增且非负；因此它们必定收敛。特别地，$(r_n \text{—} r_{n+1}) \to 0$ 当 $n \to \infty$时。因此，由 ❽可得

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

根据三角不等式，$r_n \geqslant |p-q|_\Sigma$ 对于任意 n。由于序列 s_n 不增，我们得到

$$\tilde{\Upsilon}[x\,{}^{p}_{q}] = s_0 \geqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} r_n \geqslant |p-q|_\Sigma,$$

这就完成了证明 ❷。 □

19.9. 练习。 设 Σ 是具有非负高斯曲率的开曲面。对于给定的 $p \in \Sigma$，记 R_p（点 p 处的比较半径）为满足比较关系的最大值（可能为 ∞），其中

$$\measuredangle[x\,{}^{p}_{y}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{y})$$

对于任意扇形 $[x\,{}^{p}_{y}]$，当 $|p-x|_\Sigma + |x-y|_\Sigma < R_p$ 时该关系成立。

(a) 证明：对于任意紧致子集 $K \subset\subset \Sigma$，存在这样的 $\varepsilon > 0$，使得对于任意点$p \in K$都有 $R_p > \varepsilon$ 。

(b) 利用 *(a)* 部分，证明存在一点 $p \in\in \Sigma$，使得

$$R_q > (1 - \tfrac{1}{100})\cdot R_p,$$

对于任意点 $q \in B(p, 100\cdot R_p)_\Sigma$。

（*c*）说明如何利用（*b*）将 *19.2b*（第 *167* 页）的证明推广到开曲面上。（也就是说，证明对于任意点 $p \in \Sigma$，$R_p = \infty$ 。）

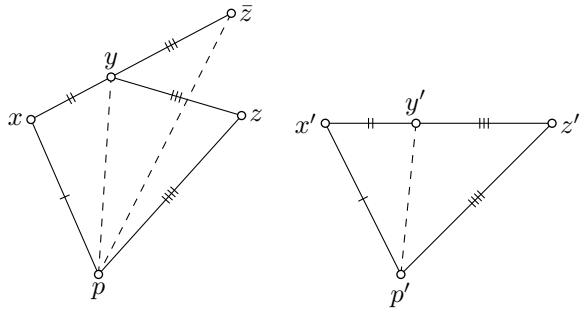
F 亚历山德罗夫引理

下面的引理（19.12）将有助于得出比较定理的几种有用改述。

19.10. 引理。 设 $pxyz$ 和 $p'x'y'z'$ 是欧几里得平面上的两个四边形，它们对应的边相等。假设边 $[x',y']$ 和 $[y',z']$ 互为延长线；也就是说，点 y' 在线段 $[x',z']$上。那么以下表达式的符号相同：

(i) $|p-y|-|p'-y'|$;
(ii) $\measuredangle[x\,{}^{p}_{y}]-\measuredangle[x'\,{}^{p'}_{y'}]$;
(iii) $\pi-\measuredangle[y\,{}^{p}_{x}]-\measuredangle[y\,{}^{p}_{z}]$.

证明。 考虑点 $\bar z$，它位于线段 $[x,y]$越过点 y 的延长线上，并且满足 $|y-\bar z|=|y-z|$（因此，$|x-\bar z|=|x'-z'|$）。



根据角单调性（A.15），以下表达式的符号相同：

(i) $|p-y|-|p'-y'|$;
(ii) $\measuredangle[x\,{}^{y}_{p}]-\measuredangle[x'\,{}^{y'}_{p'}]=\measuredangle[x\,{}^{\bar z}_{p}]-\measuredangle[x'\,{}^{z'}_{p'}]$;
(iii) $|p-\bar z|-|p'-z'|=|p-\bar z|-|p-z|$;
(iv) $\measuredangle[y\,{}^{\bar z}_{p}]-\measuredangle[y\,{}^{z}_{p}]$.

$\amalg$因为

$$\measuredangle[y'\,{}^{z'}_{p'}]+\measuredangle[y'\,{}^{x'}_{p'}]=\pi \quad \text{и} \quad \measuredangle[y\,{}^{\bar z}_{p}]+\measuredangle[y\,{}^{x}_{p}]=\pi,$$

命题得出。 □

G 改写

对于曲面 Σ 上的任意三角形 $[xyz]$ 及其模型三角形 $[\tilde x\tilde y\tilde z]$，存在自然映射 $p\mapsto\tilde p$,

它将测地线 $[x,y]$、$[y,z]$、$[z,x]$ 分别等距映射为线段 $[\tilde{x},\tilde{y}]$、$[\tilde{y},\tilde{z}]$、$[\tilde{z},\tilde{x}]$。如果不等式成立，则三角形 $[xyz]$ 称为厚三角形（或薄三角形），

$$|p-q|_\Sigma \geqslant |\tilde{p}-\tilde{q}|_{\mathbb{R}^2} \qquad (\text{или, соответственно,} \quad |p-q|_\Sigma \leqslant |\tilde{p}-\tilde{q}|_{\mathbb{R}^2})$$

对于三角形边上的任意两点 p 和 q $[xyz]$，均成立。

19.11. 命题。 设 Σ 是开或闭合的光滑曲面。那么以下三个条件等价：

(a) 对于 Σ 上的任意测地三角形 $[xyz]$，不等式均成立

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z}).$$

(b) 对于 Σ 上的任意测地三角形 $[pxz]$，以及边 $[x,z]$ 上的点 y，不等式均成立

$$\tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{y}) \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{z}).$$

(c) Σ 上的任意测地三角形都是厚的。

类似地，以下三个条件等价：

(A) 对任意测地三角形 $[xyz]$ 在 Σ 上，不等式成立

$$\measuredangle[x\,{}^{y}_{z}] \leqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{y}_{z}).$$

(B) 对任意测地三角形 $[pxz]$ 在 Σ 上，以及边 $[x,z]$ 上的任意点 y，不等式成立

$$\tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{y}) \leqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{z}).$$

(C) Σ 上的任意测地三角形都是薄的。

让我们用模型三角形和角的语言重述亚历山德罗夫引理 (19.10)。

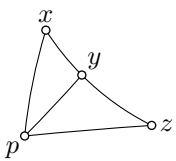
19.12. 亚历山德罗夫引理的重述。 设 $[pxz]$是曲面 Σ上的一个三角形，且 $y \in [x,z]$。考虑它的模型三角形 $[\tilde{p}\tilde{x}\tilde{z}] = \triangle pxz$，并设 $\tilde{y}$ 是边 $[\tilde{x},\tilde{z}]$上相应的点。

那么，以下表达式的符号相同：

(i) $|p-y|_\Sigma - |\tilde{p}-\tilde{y}|_{\mathbb{R}^2}$;

(ii) $\tilde{\measuredangle}(x\,{}^{p}_{y}) - \measuredangle(x\,{}^{p}_{z})$;

(iii) $\pi - \measuredangle(y\,{}^{p}_{x}) - \measuredangle(y\,{}^{p}_{z})$;



证明 19.11. 我们将证明序列蕴含关系*(a)*⇒*(b)*⇒*(c)*⇒*(a)*。蕴含关系*(A)*⇒*(B)*⇒*(C)*⇒*(A)* 也可以通过替换不等式中的符号来证明。

(a)⇒**(b)**。 注意到， $\measuredangle[y\,{}_x^p] + \measuredangle[y\,{}_z^p] = \pi$。根据*(a)*,

$$\tilde{\measuredangle}(y\,{}_x^p) + \tilde{\measuredangle}(y\,{}_z^p) \leqslant \pi.$$

只需应用亚历山德罗夫引理（19.12）。

(b)⇒**(c)**。 将*(b)* 应用两次，先对 $y \in [x,z]$，再对$w \in [p,x]$，得到

$$\tilde{\measuredangle}(x\,{}_y^w) \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}_y^p) \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}_z^p).$$

因此,

$$|w-y|_\Sigma \geqslant |\tilde{w}-\tilde{y}|_{\mathbb{R}^2},$$

˜ ˜其中， w 和 y 是模型三角形的边上分别与 w 和 y 相对应的点。

(c)⇒*(a)*. 由于三角形是厚的，因此有

$$\tilde{\measuredangle}(x\,{}_y^w) \geqslant \tilde{\measuredangle}(x\,{}_z^p)$$

˜对任意 $w \in [x,p] \setminus \{x\}$ 和 $y \in [x,z] \setminus \{x\}$。注意，当 w、$y \to x$ 时，$\measuredangle(x\,{}_y^w) \to\!\!\to \measuredangle[x\,{}_z^p]$，由此即可得出蕴含关系。 □

19.13. 练习。 设 γ 是光滑开曲面 Σ 上单位速度的测地线，且 $p \in \Sigma$。

考虑函数

$$h(t) = |p-\gamma(t)|_\Sigma^2 - t^2.$$

(a) 证明：若 Σ 是单连通的且其高斯曲率非正，则函数 h 是凸的。

(b) 证明：若高斯曲率 Σ 非负，则函数 h 是凹的。

19.14. 练习。 设 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是光滑开曲面 Σ 上最短线段 $[p,x]$ 和 $[p,y]$ 的中点。

(a) 证明：如果 Σ 是单连通的，且其高斯曲率非正，那么

$$2\cdot|\bar{x}-\bar{y}|_\Sigma \leqslant |x-y|_\Sigma.$$

（***b***）证明：如果高斯曲率 Σ 非负，则

$$2\cdot|\bar{x}-\bar{y}|_\Sigma \geqslant |x-y|_\Sigma.$$

19.15. 练习。 设 γ_1 和 γ_2 是单连通开集光滑曲面 Σ 上的两条测地线，该曲面具有非正的高斯曲率。证明，函数 $h(t) := |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|_\Sigma$是凸的。

19.16. 练习。 设 Σ 是一张高斯曲率非负的开曲面或闭合光滑曲面。证明，在内蕴度量 Σ 下，任意一个 R-球的面积都不超过 $\pi \cdot R^2$。

19.17. 练习。 设 Δ 是一张高斯曲率非正的开、单连通光滑曲面 Σ上的内蕴度量 R-球。

(a) 证明边界 Δ 是一条测地曲率不小于 $\frac{1}{R}$ 的光滑曲线。*(b)* 证明面积 Δ 不小于 $\pi \cdot R^2$。

下一道练习推广了水坑中的月亮问题（7.14）。

19.18. 进阶练习。 设 Δ 是光滑曲面 Σ 上的一个拓扑圆盘，且该曲面的高斯曲率非正。假设 Δ 的边界是光滑曲线 γ，其测地曲率的绝对值不超过 1 。证明： Δ 在内蕴度量 Σ下包含一个单位圆。

由此推出，面积 Δ 不小于 π。

附录 A

最好将本应用用作参考手册。这里主要给出所需结果的表述及其证明的链接。

A 度量空间

本节将介绍我们后续会使用的记号。德米特里·布拉戈、尤里·布拉戈和谢尔盖·伊万诺夫的著作 [13] 的导论部分对所有这些主题进行了详细讨论。假定读者熟悉欧几里得空间上的度量。

定义

度量是一个函数，对于给定集合 $\mathcal{X}$ 中的任意一对元素 x、y，返回实数值 $\operatorname{dist}(x, y)$，并且对任意三元组 x、y、$z \in \mathcal{X}$ 满足以下性质：

(a) 正定性：

$$\operatorname{dist}(x, y) \geqslant 0.$$

(b) $x = y$ 当且仅当

$$\operatorname{dist}(x, y) = 0.$$

(c) 对称性：

$$\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x).$$

(d) 三角不等式：

$$\operatorname{dist}(x, z) \leqslant \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z).$$

选定了度量的集合称为度量空间，而集合中的元素称为它的点。

度量的记号

通常，我们只考虑集合上的一种度量，因此可以用同一个字母表示度量空间及其底层集合，例如 $\mathcal{X}$。此时，我们也使用简写 $|x - y|$ 或 $|x - y|_{\mathcal{X}}$ 表示 $\mathcal{X}$ 中从 x 到 y 的距离 $\operatorname{dist}(x, y)$。例如，三角不等式可以写作

$$|x - z|_{\mathcal{X}} \leqslant |x - y|_{\mathcal{X}} + |y - z|_{\mathcal{X}}.$$

在欧几里得空间中（和在平面及实直线上一样），可以认为距离 $|x - y|$ 从 x 到 y 等于向量 $x - y$ 的范数。尽管在度量空间中，点之差没有意义，我们仍将距离记为 $|x - y|$。

更多示例

通常，如果我们说平面或空间，

指的是欧几里得平面或空间。不过，平面（和空间一样）还可以采用许多其他度量；例如，下面这道练习中提到的所谓街区度量。

A.1. 练习。 考虑函数

$$\operatorname{dist}(p,q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

其中 $p = (x_1, y_1)$ 和 $q = (x_2, y_2)$ 是坐标平面 $\mathbb{R}^2$上的点。证明这是 $\mathbb{R}^2$上的度量。

另一个例子：离散空间是一个任意的非空集合 $\mathcal{X}$，其度量定义为：当 $x = y$时为 $|x-y|_{\mathcal{X}} = 0$，否则为$|x-y|_{\mathcal{X}} = 1$。

子空间

任何度量空间的子集，只要将原度量限制在该子集上，本身也会成为度量空间；所得的度量空间称为子空间。特别地，欧几里得空间的所有子集都是度量空间。

Шары

对于度量空间 $\mathcal{X}$ 中的点 p 和实数 $R \geqslant 0$，所有到 p的距离小于R（不大于 R）的点 x组成的集合，称为以 p为中心、半径为 R 的开球（相应地，闭球）。开球记作 $B(p, R)$ 或 $B(p, R)_{\mathcal{X}}$；如果想强调这个球属于 $\mathcal{X}$，则使用第二种记法。严格来说，

$$B(p,R) = B(p,R)_{\mathcal{X}} = \\ = \{\, x \in \mathcal{X} : |x-p|_{\mathcal{X}} < R \,\}.$$

闭球记作 $\bar{B}[p, R]$ 或 $\bar{B}[p, R]_{\mathcal{X}}$，并且

$$\bar{B}[p,R] = \bar{B}[p,R]_{\mathcal{X}} = \\ = \{\, x \in \mathcal{X} : |x-p|_{\mathcal{X}} \leqslant R \,\}.$$

A.2. 练习。

(a) 设 p和 q是度量空间 $\mathcal{X}$中的点。证明：若 $\bar{B}[p,2] \subset \bar{B}[q,1]$，则 $\bar{B}[p,2] = \bar{B}[q,1]$。

(b) 构造度量空间 $\mathcal{X}$以及其中的两个球 $B(p, 3\,2)$和 $B(q,1)$，使 $B(p, 3\,2)$严格包含于 $\subsetneq B(q,1)$。 ∎

等距变换

设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是度量空间。映射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 保持距离，如果

$$|f(x) - f(y)|_{\mathcal{Y}} = |x-y|_{\mathcal{X}}$$

对于任意 $x, y \in \mathcal{X}$.

等距定义为保距离的双射。两个度量空间称为等距的，如果它们之间存在等距映射。

A.3. 练习。 证明，如果映射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 保距离，那么它是单射；也就是说，对于任意一对不同的点 $x, y \in \mathcal{X}$，有 $f(x) \neq f(y)$。

连续性

A.4. 定义。 设 $\mathcal{X}$ 是一个度量空间。点列 $x_1, x_2, \ldots$ 在 $\mathcal{X}$ 中收敛，如果存在一点 $x_\infty \in \mathcal{X}$，使得 $|x_\infty - x_n| \to 0$ 当 $n \to \infty$ $\varepsilon > 0$ 时成立。也就是说，对于任意给定的，都存在一个自然数 N，使得

$$|x_\infty - x_n|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$$

对所有 $n \geqslant N$.

在这种情况下，我们称序列 x_n 收敛于 x_∞，或者称 x_∞ —序列 x_n的极限，并记作 $x_n \to x_\infty$ 当 $n \to \infty$ 时，或 $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$。

A.5. 定义。 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是度量空间。映射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 称为连续的，如果 $x_n \to x_\infty$ 在 $\mathcal{X}$ 中的收敛性蕴含 $f(x_n) \to f(x_\infty)$ 在 $\mathcal{Y}$中的收敛性。

等价地，$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 连续，当且仅当对任意 $x \in \mathcal{X}$ 和任意$\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得$|x-y|_{\mathcal{X}} < \delta \implies |f(x) - f(y)|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$

A.6. 练习。设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是度量空间之间的短映射，度量空间，也就是说

$$|f(x) - f(y)|_{\mathcal{Y}} \leqslant |x-y|_{\mathcal{X}}$$

对于任意 x，$y \in \mathcal{X}$。证明 f连续。

B 拓扑学

本节内容在任何拓扑学入门教材中都有讨论；例如，切萨·科斯涅夫斯基的经典教科书 [52]。

闭集与开集

A.7. 定义。度量空间 $\mathcal{X}$ 的子集C 称为闭集，如果 C 中任何收敛于 $\mathcal{X}$ 的点列，其极限都属于 C。

集合$\Omega \subset \mathcal{X}$ 称为开集，如果对于任意一点$z \in \Omega$，都存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(z, \varepsilon) \subset \Omega$。

A.8. 练习。设 Q 是度量空间 $\mathcal{X}$的子集。证明，Q 是闭集当且仅当其补集$\Omega = \mathcal{X} \setminus Q$ 是开集。

包含给定点 p的开集 Ω 称为 p的邻域。包含点 p 及其某个邻域的闭子集 C称为 p的闭邻域。

点 p位于集合 Q 的边界上（记作 $p \in \partial Q$），如果点 p的任意邻域都包含来自 Q及其补集的点。

紧集

如果度量空间的任意数列中，都能找到一个收敛的子数列，那么该度量空间的子集就称为紧致的。

由定义可得出两条性质。

◇ 紧集的闭子集是紧致的。◇ 对于连续映射，紧集的像也是紧集。

A.9. 海涅–博雷尔引理。欧几里得空间的子集紧致，当且仅当它是闭集且有界。

同胚与嵌入

度量空间之间的双射若连续且其逆映射也连续，则称为同胚。同胚到其像的映射称为嵌入。

如果存在同胚，那么我们称二者同胚，或者说二者彼此同胚。

如果一个度量空间与某个已知空间同胚，例如平面、球面、圆盘、圆等，那么它就可以称为拓扑平面、拓扑球面、拓扑圆盘、拓扑圆等。

下一个定理刻画了紧空间之间的同胚：

A.10. 定理。紧致度量空间之间的连续双射 f 具有连续的逆映射。特别地，以下结论成立。

(a) 紧致度量空间之间的任意连续双射都是同胚。

(b) 从一个紧致度量空间到另一个度量空间的任意连续单射映射都是嵌入。

连通集

回顾一下，从线段 $[0,1]$ 到欧几里得空间的连续映射 α 称为道路。若 $p=\alpha(0)$ 和 $q=\alpha(1)$，则称 α 用道路连接 p 和 q。

若欧几里得空间的非空集合 X 中任意两点 x、$y \in X$ 都能用一条完全包含在 X 中的道路连接，则称该集合道路连通。

若欧几里得空间的非空集合 X 不能被两个不相交的开集 V 和 W 覆盖，且与这两个开集的交集 $X\cap V$ 和 $X\cap W$ 均非空，则称该集合连通。

请注意，根据定义，连通空间和道路连通空间都非空。

A.11. 命题。 任何道路连通集都是连通集。

此外，欧几里得空间（或平面）中的任何开连通集都是道路连通的。

对于给定的点 $x \in X$，包含 x 的最大连通子集 X 称为 X 中 x 的连通分支。

乔丹定理

下面定理的第一部分由 Camille Jordan 证明，第二部分由 Arthur Schönflies 证明。

A.12. 定理。 任意简单闭曲线 γ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的补集恰好有两个连通分支。此外，存在一个同胚 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，将单位圆映射到 γ。特别地，γ 是拓扑圆盘的边界。

这个定理因表述简单而证明复杂而闻名。第一个断言的一个简短证明建立在稍微高深的技术之上，由 Patrick Doyle 给出 [25]，，但也存在完全初等的证明，其中一个由阿列克谢·菲利波夫给出 [30]。

我们主要会用这个定理来处理光滑曲线。这个情形更简单，其巧妙的证明由格里戈里·钱伯斯和 Eugene Liokumovich 找到 [20]。

C 初等几何

内角

多边形定义为由一条闭折线围成的紧集。回想一下，多边形 P 在顶点 v 处的内角，定义为 P 与以 v 为圆心的小圆的交集的角度测度。

A.13. 定理。 n $n-$ $-2\cdot\pi$ 边形所有内角之和等于()。

例如， [67]中给出了这个定理的严谨证明。它使用关于 n的归纳法，并基于以下一个并非完全显然的事实。

A.14. 事实。 设 P 是一个具有 $n \geqslant 4$ 的 n 边形。那么， P 的一条对角线完全位于 P 中。

角的单调性

边为 $[p,x]$ 和

$[p,y]$ 将表示为 $\measuredangle[p\,{}^{x}_{y}]$；其取值范围为区间 $[0,\pi]$。

余弦定理的下一个推论简单而有用。它指出，如果另外两边的长度不变，那么三角形的角会随其对边单调变化。

A.15. 引理。假设对于点 x、y、z、x^*、y^* 和 z^*，满足

$$|x-y|=|x^*-y^*|>0 \quad |y-z|= \text{和。那么} =|y^*-z^*|>0$$

$$\measuredangle[y\,{}^{x}_{z}]\geqslant\measuredangle[y^*\,{}^{x^*}_{z^*}] \iff |x-z|\geqslant|x^*-z^*|.$$

球面三角不等式

下一个定理断言，对于具有共同起点的射线之间的角，三角不等式成立。特别地，由此可知，带有角度度量的球面是一个度量空间。

A.16. 定理。对于欧几里得空间中的任意三条线段 $[o,a]$，$[o,b]$ 和 $[o,c]$，不等式成立

$$\measuredangle[o\,{}^{a}_{b}]+\measuredangle[o\,{}^{b}_{c}]\geqslant\measuredangle[o\,{}^{a}_{c}].$$

这个定理常常不加说明地直接使用，但它的证明并不简单。可以在安德烈·基谢廖夫的经典欧几里得几何教科书 [50, § 47]中找到证明。

球面三角形的面积

A.17.引理。设 Δ 为球面三角形，即三个闭半球的交集，这三个闭半球位于单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上。那么

❶ $$\operatorname{area}\Delta=\alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

其中 α, β 和 γ 是三角形 Δ的角。

$\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 称为三角形 Δ的盈量；也就是说，可以说球面三角形的面积等于它的盈量。

这个引理将在对高斯—博内公式的直观解释中发挥作用。因此，我们将给出它的证明。

证明。回想一下，



❷ $$\operatorname{area}\mathbb{S}^2=4\cdot\pi.$$

注意，两个经线之间的球面扇形面积 S_α 与

夹角为 α的经线所成的角成正比。由于S_π 是半球，由❷可得 $\operatorname{area} S_\pi=2\cdot\pi$。因此，系数为 2；也就是说，

❸ $$\operatorname{area} S_\alpha=2\cdot\alpha$$

对任意 α，均成立。

延长边 Δ，得到 6 个扇形：两个 S_α、两个 S_β 和两个 S_γ。它们几乎恰好覆盖整个球面一次，但三角形 Δ 及其中心对称图形 Δ^* 被覆盖了三次。由此可得，

$$2\cdot\operatorname{area}S_\alpha+2\cdot\operatorname{area}S_\beta+2\cdot\operatorname{area}S_\gamma=$$
$$=\operatorname{area}\mathbb{S}^2+4\cdot\operatorname{area}\Delta.$$

剩下的只需应用❷和❸。 □

D 凸几何学

欧几里得空间的集合 X 称为凸集，如果对于任意两点 $x,y\in X$，它们之间的任意一点 z 都属于 X。此外，如果对于任意两点 $x,y\in X$，它们之间的任意点 z 都位于 x和 y 的内部，X 则称为严格凸集。

从定义可知，任意曲线族的凸集的交集都是凸的。包含给定集合 X 的所有凸集的交集称为它的凸包；这是最小的

包含 X 的凸集。

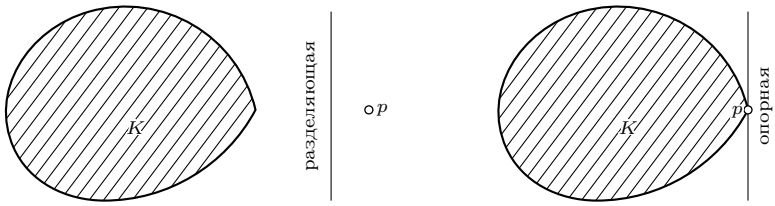
这些定义和接下来的论述，可以在任何凸几何入门教材的开篇找到；例如，Kurt Leichtweiß 的著作 [62]

分离平面与支撑平面

下面的引理是所谓分离超平面定理的一个特例。

A.18. 引理。设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是闭凸集。那么，对于任意点 $p \notin K$，都存在一个平面 Π，将 K 和 p 分开；也就是说，K 和 p 位于由平面 Π 分隔的两个相反的开半空间内。

此外，对于任意边界点 $p \in \partial K$，都存在一个在点 p 处与 K 相切的支撑平面[1] Π；也就是说，$\Pi \ni p$ 和 K 位于由平面 Π 限定的闭半空间内。



E 线性代数

以下定理在任何一本线性代数教科书中都能找到；例如，Sergei Treil 的书 [98] 就很合适。

A.19. 谱定理。任何对称矩阵都可以通过正交矩阵对角化。

我们只需要矩阵 2×2。在这种情况下，定理可以重新表述如下：

考虑函数

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ = \ell \cdot x^2 + 2 \cdot m \cdot x \cdot y + n \cdot y^2,$$

定义在坐标平面上。那么，经过适当的坐标旋转后，f 在新的 (x,y) 坐标中的表达式将具有如下形式

$$\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ = k_1 \cdot x^2 + k_2 \cdot y^2.$$

F 数学分析

以下定理在任何实分析入门课程中都会讲到。例如，在沃尔特·鲁丁的经典教科书中 [86]。

[1] 也可以说，Π 在点 p 处支撑着 K。

可测函数

如果任意博雷尔集的原像都是博雷尔集，则称该函数为可测函数。几乎所有自然出现在几何中的函数都是可测的。

下述定理可以将许多关于连续函数的论断推广到可测函数。

A.20. 卢津定理。设 $\varphi\colon\ [a,b]\ \to\ \mathbb{R}$ —可测函数。对于任意 $\varepsilon\ >\ 0$，都存在连续函数 $\psi_\varepsilon\colon\ [a,b]\ \to\ \mathbb{R}$，使其在一个测度不超过 ε 的集合之外与 φ 重合。此外，如果 φ在上方和/或下方有界，则可以认为 ψ_ε也具有同样的性质。

利普希茨条件

回顾一下，度量空间之间的函数 f 称为利普希茨函数，如果存在常数 L使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\cdot|x-y|$$

对于定义域 f 中的所有 x和 y 值。

下面的定理可以将许多关于光滑函数的结论推广到利普希茨函数。提醒一下，几乎处处是指除勒贝格零测集之外的所有点。

A.21. 拉德马赫定理。设 $f\colon\ [a,b]\ \to\ \mathbb{R}$ 是利普希茨函数。那么，它的导数 f' 是有界可测函数，几乎处处在 $[a,b]$上有定义。此外，还可以对它应用牛顿—莱布尼茨公式；也就是说，等式成立

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)\cdot dx,$$

如果将积分理解为勒贝格意义下的积分。

一致连续性与收敛性

设 $f\colon\ \mathcal{X}\ \to\ \mathcal{Y}$ — 是度量空间之间的映射。如果对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>>0$，使得

$$|x_1-x_2|_{\mathcal{X}}<\delta\implies|f(x_1)-f(x_2)|_{\mathcal{Y}}<\varepsilon,$$

那么，函数 f 称为一致连续函数。

显然，任何一致连续函数都是连续的；反之则不然。例如，函数 $f(x)\ =x^2$ 连续，但并非一致连续。

A.22. 定理。紧致度量空间上的任意连续函数都是一致连续的。

如果上述条件对序列 f_n 中的每个函数都成立，且 δ 只依赖于 ε，那么这样的序列 f_n 称为等度连续。更确切地说，函数序列 $f_n\ :\ \mathcal{X}\ \to\ \mathcal{Y}$ 称为等度连续，如果对于任意$\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得

$$|x_1-x_2|_{\mathcal{X}}<\delta\ \Rightarrow\ |f_n(x_1)-f_n(x_2)|_{\mathcal{Y}}<\varepsilon$$

对于任意 n。

我们称函数序列 $f_i\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 一致收敛于函数 $f_\infty\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$，如果对于任意 $\varepsilon\ >\ 0$，都存在自然数 N，使得对于所有....., $|f_\infty(x)\ -f_n\ x\ |<\varepsilon\qquad n\geqslant N\qquad$ ()。

A.23. 阿尔泽拉—阿斯科利定理。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是紧致度量空间。那么，在任意一个等度连续的函数序列 $f_n\colon\ \mathcal{X}\ \to\ \mathcal{Y}$ 中，都存在一个子序列，它一致收敛于某个连续函数 $f_\infty\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$。

截断与光滑化

这里我们将讨论如何构造光滑函数，使其表现得像某些特定的模型函数。这些

构造方法用于平滑模型几何对象。

首先，我们来考察以下两个函数

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{если } t \leqslant 0, \\ t & \text{если } t > 0; \end{cases}$$

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{если } t \leqslant 0, \\ \frac{t}{e^{1/t}} & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

它们的表现相似——当 $t \leqslant 0$ 时，两者都等于零；当正的 t 时，它们都趋于无穷大。函数h 不是光滑曲线——它在零点处的导数未定义。与此同时，函数 f 是光滑曲线。事实上，当 $x \neq 0$ 时，所有导数 $f^{(n)}(x)$ 的存在显而易见，而直接计算可得 $f^{(n)}(0) = 0$ 对所有 n 都成立。

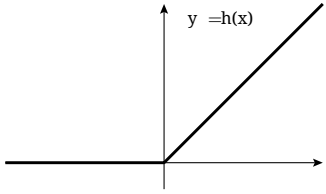
另一个例子：钟形函数是一种光滑函数，在零点的 ε-邻域内为正，在该邻域之外为零。这类函数可以由上面构造的函数 f 得到，例如

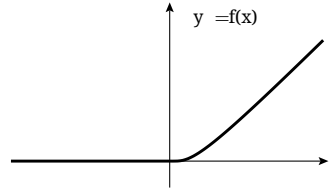
$$b_\varepsilon(t) := c \cdot f(\varepsilon^2 - t^2);$$

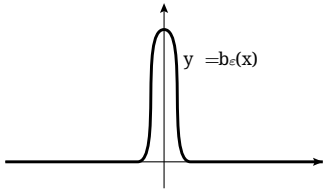
通常选取常数 c，使得 $\int b_\varepsilon = 1$。

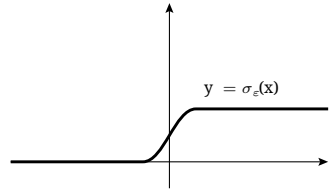
另一个有用的例子：sigmoid 函数是非递减函数，当 $t \leqslant -\varepsilon$ 时等于零，当 $t \geqslant \varepsilon$ 时等于一。它模拟阶跃函数；可以将其定义为

$$\sigma_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{t} b_\varepsilon(x) \cdot dx.$$









G 向量分析

以下定理在任何向量分析课程中都会讨论；例如，在前面提到的沃尔特·鲁丁教科书 [86] 中。

正则值

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — 为一个开集。任意映射 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$都可以视为一组坐标函数

$$f_1, \ldots, f_n \colon \Omega \to \mathbb{R};$$

$\boldsymbol{f}$ 称为光滑的，如果每个函数 f_i 都是光滑的；也就是说，函数 f_i的所有可能偏导数

都在区域 Ω 中有定义。

映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 处的雅可比矩阵定义为

$$\mathrm{Jac}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix};$$

假设右侧在点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ 处求值。

如果雅可比矩阵定义了一个满射线性映射 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$（也就是说，如果 $\mathrm{rank}(\mathrm{Jac}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f}) = n$），那么我们称 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的正则点。

如果每当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ 时，$\boldsymbol{x}$ 都是正则点，那么 $\boldsymbol{y}$ 就称为 $\boldsymbol{f}$ 的正则值。下面的引理指出，$\mathbb{R}^n$ 中大多数点都是 $\boldsymbol{f}$ 的正则值。

A.24. 萨德引理。 对于光滑映射 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$，它定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 上，$\mathbb{R}^n$ 中几乎所有值都是正则的。

“几乎处处”指的是除了一个勒贝格测度为零的集合之外的所有点。特别是，如果在任意小的球 $B \subset\subset \mathbb{R}^n$ 中均匀随机选取一个值，那么它以概率 1 是正则值 $\boldsymbol{f}$。

请注意，如果 $m \ll n$，那么任意点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 不是 $\boldsymbol{f}$ 的正则值。因此，$\boldsymbol{f}$ 正则值 $\boldsymbol{f}$ 不是值，也就是说，它们属于像 $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{f}$ 的补集。在这种情况下，定理断言，$\mathbb{R}^n$ 中的几乎处处不属于 $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{f}$。

反函数定理

反函数定理给出了映射 $\boldsymbol{f}$ 在给定点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域内可逆的条件。该条件用映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的 $\mathrm{Jac}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f}$ —— 雅可比矩阵来表述。

隐函数定理与它密切相关，也是它的推论。将曲线和曲面的参数描述转化为隐式描述，或反过来转换时，都需要用到这一理论。

这两个定理都将满足特定方程的映射的存在性归结为线性代数问题。我们只会在维数不超过 63 时用到它们。

A. 25 $\boldsymbol{f} = f_1 \ldots \to \mathbb{R}^n$ **定理。** 设 $(,, f_n)\colon \Omega$ 是定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑映射。假设 $\mathrm{Jac}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 处可逆。那么存在一个光滑映射 $\boldsymbol{h}\colon \Phi \to \mathbb{R}^n$，定义在点 $\Phi\ \boldsymbol{y} == \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的某个开邻域内，并且在点 $\boldsymbol{x}$ 处局部是 $\boldsymbol{f}$ 的逆映射；也就是说，存在一个邻域 $\Psi \ni \boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{f}$ 确定一个同胚 $\Psi \leftrightarrow \Phi$，且 $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{f}$ 在 Ψ 上是恒等映射。

此外，如果 $|\det[\mathrm{Jac}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{f}]| > > \varepsilon > 0$，区域 Ω 包含点 $\boldsymbol{x}$ 的 ε-邻域，且 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$、$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ 的一阶和二阶偏导数对所有 i、j 和 k 均有常数 C 作为界，那么可以假设 Φ 是点 $\boldsymbol{y}$ 的 δ-邻域，其中 $\delta > 0$ 仅依赖于 ε 和 C。

A.26. 隐函数定理。 设 $\boldsymbol{f} = (f_1, .., f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$—定义在开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 上的光滑映射，其中 $m, n \geqslant 1$。将 $\mathbb{R}^{n+m}$ 视为带有坐标 $(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} = = \ldots \ldots ,)$ $(x_1,, x_n, y_1,, y_m)$ 的笛卡尔积。接下来，考虑如下矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

由矩阵 $\mathrm{Jac}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\, \boldsymbol{f}$ 的前 n 列组成。假设 M 在点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega$ 处可逆，

且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$。那么存在光滑函数 $\boldsymbol{h}$: $\Phi \to \mathbb{R}^n$，它定义在 $\mathbb{R}^m$ 中 $\Phi \ni \boldsymbol{y}$ 的邻域上；并且存在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 中 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $\Psi \ni$ 的邻域，使得对于任意 $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in \Psi$，等式

$$\boldsymbol{f}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = \mathbf{0}$$

当且仅当

$$(x_1,\dots,x_n) = \boldsymbol{h}(y_1,\dots,y_m).$$

重积分

设 $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个光滑映射（可能只在部分区域上有定义）。定义

$$\operatorname{jac}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} := |\det[\operatorname{Jac}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}]|;$$

也就是说，$\operatorname{jac}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 处雅可比矩阵 $\boldsymbol{f}$ 的行列式的绝对值；我们称它为雅可比行列式。

下面的定理给出了重积分的变量替换公式。

博雷尔子集定义为这样一类子集：它由开集通过依次应用以下运算生成：可数并、可数交以及补集运算。由于闭集的补集是开集，反之亦然，因此也可以从所有闭集出发得到这些集合。这一类集合几乎包括几何学中自然出现的所有集合，但不包括那些会给积分带来问题的病态例子。

A.27. 定理。设 h: $K \to \mathbb{R}$ 是定义在博雷尔子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数。假设 $\boldsymbol{f}$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ 是定义在开集 $\Omega \supset K$ 上的单射光滑映射。那么

$$\int_{\boldsymbol{x}\in K} \cdots \int h(\boldsymbol{x}) \cdot \operatorname{jac}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} = \int_{\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{f}(K)} \cdots \int h \circ \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}).$$

凸函数

以下结论仅在 $n \leqslant 3$ 时需要。

函数 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为（严格）凸函数（相应地，凹函数），如果其上图集 $z \geqslant f(\boldsymbol{x})$（相应地，下图集 $z \leqslant f(\boldsymbol{x})$）是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 中的（严格）凸集合。

设 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是光滑曲线函数（可能只在部分区域有定义）。取向量 $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^n$。对于给定点 $p \in \mathbb{R}^n$，考虑函数 $\varphi(t) = f(p + t\cdot \mathrm{w})$。函数 f 在点 p 沿向量 w 方向的导数 $(D_{\mathrm{w}} f)(p)$ 定义为

$$(D_{\mathrm{w}} f)(p) = \varphi'(0).$$

A.28.定理。定义在凸子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑曲线函数f: $K \to \mathbb{R}$ 是凸函数，当且仅当满足以下等价条件之一：

(a) 任意点沿任意方向的二阶导数 f 非负，也就是说

$$(D^2_{\mathrm{w}} f)(p) \geqslant 0$$

对任意 $p \in K$ 和 $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^n$。

(b) 所谓的詹森不等式

$$f((1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1) \leqslant \leqslant (1-t)\cdot f(x_0) + t\cdot f(x_1)$$

对于任意 x_0 $x_1 \in K$ $t \in [0,1]$ 和 都成立。

(c) 对于任意 $x_0, x_1 \in K$，不等式成立

$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

H 微分方程

以下内容会在任何常微分方程课程的开篇讨论；例如，弗拉基米尔·阿诺德的经典教科书 [6]。

一阶方程

下一个定理保证柯西问题解的存在性与唯一性，其中所讨论的是一阶常微分方程组

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(x_1,\dots,x_n,t),\\ &\vdots\\ x_n' &= f_n(x_1,\dots,x_n,t), \end{cases}$$

其中每个函数 $t \mapsto x_i = x_i(t)$ 都定义在实数区间 $\mathbb{J}$ 上，并取实值；而每个函数 f_i 都是光滑曲线，且定义在开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上。

函数组 $(f_1,\dots,f_n)$ 可以合并为一个向量值函数 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$；类似地，函数组 $(x_1,\dots,x_n)$ 可以合并为一个向量值函数 $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{J} \to \mathbb{R}^n$。因此，该方程组可以改写为一个向量方程

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t).$$

A.29. 定理。设 $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上的光滑函数。则对于任意初始数据 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{u}$，满足 $(\boldsymbol{u},t_0) \in \Omega$，微分方程

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

具有唯一解 $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$，其定义在包含 t_0 的最大区间 $\mathbb{J}$ 上。此外，

(a) 若 $\mathbb{J} \neq \mathbb{R}$，也就是说，$\mathbb{J}$ 的一端（假设为 b）是有限的，那么 $(\boldsymbol{x}(t)\ t)$ 在 $t \to b$ 时在 Ω 中没有极限点；[2]

(b) 函数 $w\colon (\boldsymbol{u},t_0,t) \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ 在 $\Omega \times \mathbb{R}$ 中有一个开放定义域，其中包含所有形如 $(\boldsymbol{u},t_0,t_0)$ 的点，其中 $(\boldsymbol{u},t_0) \in$ 属于 Ω，并且 w 是该区域上的光滑函数。

高阶

考虑阶数为 k 的常微分方程

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\dots,\boldsymbol{x}^{(k-1)},t), \tag{❹}$$

其中 $t \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 是定义在实区间上的函数，并取值于 $\mathbb{R}^n$。

该方程可以改写为 k 个一阶方程，只需添加一个新的向量变量（$k-1$）$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}'',\dots,\boldsymbol{y}_{k-1} = \boldsymbol{x}^{(k-1)}$：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) &= \boldsymbol{y}_1(t),\\ \boldsymbol{y}_1'(t) &= \boldsymbol{y}_2(t),\\ &\vdots\\ \boldsymbol{y}_{k-2}'(t) &= \boldsymbol{y}_{k-1}(t),\\ \boldsymbol{y}_{k-1}'(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_{k-1},t). \end{cases} \tag{❺}$$

因此，我们得出了以下定理。

A.30. 定理。k 阶方程 ❹ 等价于由 k 个一阶方程组成的系统❺。

这个技巧将高阶常微分方程的存在性与唯一性问题，归结为相应的一阶方程问题。也就是说，定理 A.29 可以推广到高阶方程；只需假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\cdot k} \times \mathbb{R}$，且初始数据由 $\boldsymbol{x}(t_0)$、$\boldsymbol{x}'(t_0)$.....、$\boldsymbol{x}^{(k-1)}(t_0)$ 组成。

[2] 换句话说，如果 $\boldsymbol{x}(t_n)$ 对数列 $t_n \to b$ 收敛，那么它的极限不在 Ω 中。

提示

1.2; *(a)*. 利用这样一个事实：在紧致集合上定义的连续单射映射是嵌入（A.10）。

(b). 图像 γ 可能看起来像数字 8 或 9。

1.3. 将端点的邻域压缩到它们的端点上。

1.4. 设 α 是连接 p 和 q 的路径。可以假设，对于 $t \neq 0,\ 1,\ \alpha(t) \neq p, q$。

如果对于 Ω 中的任意连通分支 (a, b)，都有 $\alpha(a) = \alpha(b)$，则称 $(0, 1)$ 中的开集 Ω 是适当的。证明，嵌套的适当集合之并仍是适当的。因此，存在一个极大适当集合 $\hat{}\Omega$。

对于 $\hat{}\Omega$ 中连通分支 (a, b) 内的任意 t，定义 $\beta(t) = \alpha(a)$；对于 $\hat{}\Omega$，定义 $\beta(t) = \alpha(t) t \notin$。注意，对于任意 $x \in [0, 1]$，集合 $\beta^{-1}\{\beta(x)\}$ 是连通的。

剩下的就是对 β 重新参数化，从而得到一条简单路径。为此，需要构造一个单调函数 $\tau\colon [0, 1] \to [0, 1]$，使得 $\tau(t_1) = \tau(t_2)$ 当且仅当存在一个连通分支 $(a, b) \subset \hat{}\Omega$，使得 $t_1, t_2 \in [a, b]$。

函数 τ 类似于所谓的魔鬼阶梯；请研究它的构造方法，并利用它来构造 τ。

1.5. 我们将两条半轴的并集记作 L。

注意，当 $t \to \infty$ 时，$f(t) \to \infty$。由于 $f(0) = 0$，根据介值定理，$f(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 时取遍所有非负值。利用这一点证明，L 是 α 的像。

接下来，证明函数 f 在 $t > 0$ 时严格递增。由此推出映射 $t \mapsto \alpha(t)$ 是单射。

因此，α 是光滑参数化 L。

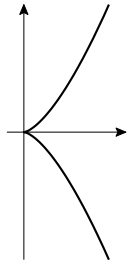
现在从任意的光滑参数化 L 开始，设为 $\beta\colon t \mapsto (x(t)\ y(t))$。不妨设 $x(0) = y(0) = 0$。注意到，对于任意 t，$x(t) \geqslant 0$，因此 $x'(0) = 0$。同样可得，$y'(0) = 0$ $\beta'\ 0\ = 0$ L 。

也就是说，（ ）。因此，不存在光滑正则 参数化。

1.6. 应用定义。在 *(b)* 中需要验证 $\gamma'_\ell \neq 0$。在 *(c)* 中需要验证，$\gamma_\ell(t_0)$ 仅当 $t_0 = t_1$ 时 $= \gamma_\ell(t_1)$。

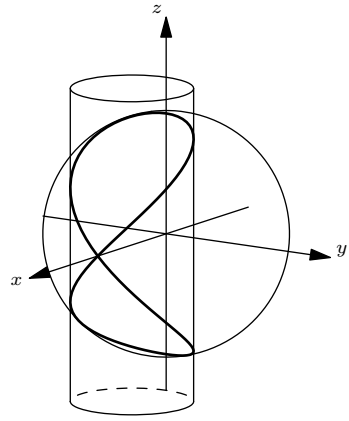
1.7. 请注意，参数化 $t \mapsto (t, t^3)$ 是光滑曲线且正则。请修改它，使得某一点的速度为零。

1.8. 这是半三次抛物线；它如图所示。试着像 1.5 那样推理。



1.9. 当 $\ell = 0$ 时，系统描述一对点 $(0,0,\pm 1)$，因此可以认为 $\ell \neq 0$。

第一个方程描述的是一个以坐标原点为中心的单位球面，第二个方程描述的是平面 (x, y) 中以点 $(-\frac{\ell}{2}, 0)$ 为圆心、半径为 $|\frac{\ell}{2}|$ 的圆上方的圆柱面。



求函数 ∇f 和 ∇h 的梯度

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$
$$h(x, y, z) = x^2 + \ell \cdot x + y^2.$$

证明当 $\ell \neq 0$ 时，梯度仅在 x轴上呈线性相关。由此推出，对于 $\ell \neq \pm 1$，解集合的每个连通分支都是一条光滑曲线。

证明，令

◇ 如果 $|\ell| < 1$，则该集合有两个连通分支，分别具有 $z > 0$ 和 $z < 0$。

◇ 如果 $|\ell| \geqslant 1$，则集合是连通的。

梯度的线性无关性仅提供了充分条件。因此，必须手动检验 $\ell = \pm 1$ 这一情形。在这种情况下，点（± 1, 0, 0）的邻域不允许进行光滑的正则参数化——请尝试证明这一点。$\ell = 1$ 这一情形如图所示。

注。当 $\ell = \pm 1$ 时，得到所谓的维维亚尼曲线。它有如下光滑正则参数化，并在点（$\pm 1, 0, 0$）处自交

$$t \mapsto (\pm(\cos t)^2, \cos t \cdot \sin t, \sin t).$$

1.10. 假设当 $t \to \pm\infty$ 时，$|\gamma(t)| \to \infty$。选取紧集 $K \subset \mathbb{R}^3$。证明，原像 $\gamma^{-1}(K)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界且闭。接着应用海涅—博雷尔引理（A.9）。由此推出 γ 是正则曲线。

现在假设 $\gamma(t_n)$ 对某个数列 $t_n \to \pm\infty$ 收敛；设 p 是它的极限，K 是以 p 为中心的闭球。证明原像 $\gamma^{-1}(K)$ 非紧致。由此推出 γ 是非真映射。

1.11. 证明集合 $C \subset \mathbb{R}^3$ 是闭的，当且仅当它与任意紧致 $K \subset \mathbb{R}^3$ 的交集 $K \cap C$ 都是紧致的，并运用这一点。

1.12. 不失一般性，可以认为坐标原点不在曲线上。

证明平面 $(x, y) \mapsto\!\!\!\to \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 的反演将我们的曲线映射为一条删去了坐标原点的闭曲线。对所得曲线应用 Jordan 定理，然后再次运用反演。

2.2. 证明，对于所有序列 $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$，在 2.1 中取上确界，结果都相同。

假设 γ_2 —通过 τ 进行的重新参数化γ_1：$[a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$；不失一般性，可以假设 τ非递减。令 $\theta_i = \tau\, t_i$ $a_2 = \theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \ldots \leqslant \theta_k = b_2$ ()。注意，当且仅当 $a_1 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b_1$ 时，情况才是如此。完成最后一步。

2.3. 证明，对于任意内接折线 β 和任意 $\varepsilon > 0$，都有

$$\operatorname{length} \beta_n > \operatorname{length} \beta - \varepsilon$$

对所有充分大的 n。由此推出

$$\varliminf_{n\to\infty} \operatorname{length} \beta_n \geqslant \operatorname{length} \gamma.$$

利用长度定义，证明

$$\varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{length} \beta_n \leqslant \operatorname{length} \gamma.$$

确认由所得不等式可以推出所需的一切。

2.4. 对于给定的线段 $0 = t_0 < \ldots < t_n == 1$ $[0,1]$, 划分，令 $\tau_0 = 0$ 并且

$$\tau_i = \max\{\, \tau \in [0,1] \,:\, \beta(\tau) = \gamma(t_i) \,\}$$

当 $i > 0$ 时。证明 (τ_i) 是 $[0,1]$ 的一个划分；也就是说，$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = 1$。

根据构造

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| + \ldots \\ \cdots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| = \\ = |\beta(\tau_0) - \beta(\tau_1)| + |\beta(\tau_1) - \beta(\tau_2)| + \ldots \\ \cdots + |\beta(\tau_{n-1}) - \beta(\tau_n)|.$$

由于划分 (t_i) 是任意的，我们得到

$$\operatorname{length} \beta \geqslant \operatorname{length} \gamma.$$

注释。建议将此练习与 2.22 进行比较。

不等式可能是严格不等式。当 β 沿着 γ 来回运动时，就会发生这种情况。在这种情况下，上面的划分（τ_i）不能任意选取。

在假设 $\beta([0,1]) \supset \gamma([0,1])$ 的情况下，应用以下不等式 [13, 2.6.1+2.6.2] 即可解决该问题：

$$h \leqslant \operatorname{length} \gamma,$$

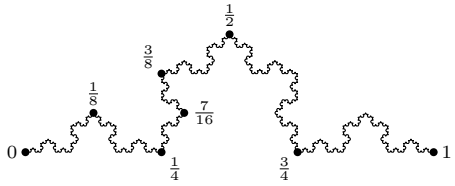
其中，h 是像 $\gamma([0,1])$ 的一维豪斯多夫测度。此外，当且仅当 γ 是简单的时，等式才成立。

2.5; *(a)*. 对划分中的每条线段应用牛顿—莱布尼茨公式。

(b). 考虑这样一个划分，使得速度向量 $\alpha'(t)$ 在每条线段上几乎保持不变。

2.6. 利用拉德马赫定理和卢津定理（A.21 和 A.20）。

2.7; *(a)*。观察图，猜想如何将线段 $[0,1]$ 的雪花弧参数化。将参数化扩展到整个雪花图形。确认它确实描述了将圆嵌入平面中的情形。



(b)。设 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 是一条可求长曲线，而 γ_k 是其系数为 $k > 0$ 的位似变换；也就是说，对于任意 t，$\gamma_k(t) = k \cdot \gamma(t)$。证明

$$\operatorname{length} \gamma_k = k \cdot \operatorname{length} \gamma.$$

现在假设图中所示的科赫雪花弧 γ 是可求长的，且 ℓ 是其长度。注意，γ 可以分成 4 条弧，其中每一条都与系数为 $1\,3$ 的位似变换 γ 全等。因此，$\ell = \frac{4}{3} \cdot \ell$，但 $\ell > 0$ ——矛盾。 –

2.10. 应用 2.9，证明 s 半连续下；也就是说，如果 $t_n \to t_\infty$ 当 $n \to \infty$时，那么

$$\varliminf_{n\to\infty} s(t_n) \geqslant s(t_\infty).$$

请证明

$$s(t) = s(b) - \operatorname{length}(\gamma|_{[t,b]}).$$

应用 2.9 中的这个等式，证明 s 上半连续。由此推出函数 s 连续。最后证明 s 非递减，并利用这一点。

2.12. 可以假设 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$，否则问题显然成立。

证明 $|\gamma'(t)| \equiv \sqrt{a^2+b^2}$；特别地，速度是常数。因此，$s = t/\sqrt{a^2+b^2}$ 是弧长参数。剩下的工作是用 $s\cdot\sqrt{a^2+b^2}$ 替换 t。

2.16. 设 $p_1 \dots p_n$ 是内接于 β的闭折线。根据 2.15，可以认为其长度与 β的长度任意接近；也就是说

$$\operatorname{length}(p_1 \dots p_n) > \operatorname{length}\beta - \varepsilon$$

对于任意预先给定的 $\varepsilon > 0$。

请确认，在这种情况下可以假设每个点 p_i 都位于 α 上。

由于 α 是简单的，点 p_1、.....、p_n 在 α 上按相同的循环顺序排列；也就是说，折线 $p_1 \dots p_n$ 也内接于 α。特别地，

$$\operatorname{length}\alpha \geqslant \operatorname{length}(p_1 \dots p_n).$$

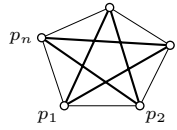
因此，

$$\operatorname{length}\alpha > \operatorname{length}\beta - \varepsilon$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。由此

$$\operatorname{length}\alpha \geqslant \operatorname{length}\beta.$$

如果 α 有自交，那么点 p_1、.....、p_n 在 α 上可能按另一种循环顺序排列，例如 p_{i_1}、.....、p_{i_n}。应用三角形不等式，证明



$$\operatorname{length}(p_{i_1} \dots p_{i_n}) \geqslant \operatorname{length}(p_1 \dots p_n)$$

并利用这一点来推广证明。

2.18. 用 ℓ_{U} 表示将 γ 沿 u 方向正交投影到直线 b 上所得的线段。由于 γ_{U} 沿着 ℓ_{U}来回移动，我们得到

$$\operatorname{length}\gamma_{\mathrm{U}} \geqslant 2\cdot\operatorname{length}\ell_{\mathrm{U}}.$$

根据克罗夫顿公式，

$$\operatorname{length}\gamma \geqslant \pi\cdot\overline{\operatorname{length}\ell_{\mathrm{U}}}.$$

等号成立时，曲线 γ_{U} 恰好沿着 ℓ_{U} 来回经过，不会出现额外的锯齿；这对几乎所有方向 u 都成立（因此也对所有方向都成立）。

设 K 是由 γ限定的闭集。最后一个命题意味着，如果一条直线与 K相交，那么交集是一个线段或一个点。由此可知，K 是凸的。

2.19. 证明与通常的克罗夫顿公式相同。要确定系数，只需在单位区间上验证，而这可以通过积分完成

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{\operatorname{area}\mathbb{S}^2}\cdot\iint\limits_{\mathbb{S}^2}|x|;$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{\operatorname{area}\mathbb{S}^2}\cdot\iint\limits_{\mathbb{S}^2}\sqrt{1-x^2}.$$

答案：$k_1 = 2$ 和 $k_2 = \frac{4}{\pi}$。

2.20. 设 d是 $\mathcal{X}$上的原度量。设 $\gamma\colon [a,b] \to (\mathcal{X},\ell)$ 连续。证明：$\gamma\colon [a,b] \to (\mathcal{X},d)$ 也连续。

取曲线 γ，位于 $(\mathcal{X},\ell)$ 中。设 r 和 s 分别为它的 d-长度和 ℓ-长度。证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $s \geqslant r \geqslant s - \varepsilon$。由此推出，$(\mathcal{X},\ell)$ 中任意曲线的 d-长度和 ℓ-长度相等。再进一步。

注。第一个断言的逆命题一般不成立。例如，考虑上半平面上的如下度量：

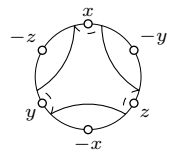
$$d(x,y) = \min\{|x| + |y|, ||x| - |y|| + \sqrt{\measuredangle(x,y)}\}.$$

2.21. 必要性显然。为证明充分性，假设 A 不是凸集；也就是说，存在点 x、$y \in A$，以及一点 $z \notin A$，它位于 x 和 y之间。

由于 A 是闭集，其补集是开集。换言之，存在一个球 $B(z,\varepsilon)$，对于某个 $\varepsilon > 0$，它与 A 不相交。

证明存在这样的 $\delta > 0$，使得从 x到 y的任意曲线，其长度不超过 $|x-y|_{\mathbb{R}^3}+\delta$，都会碰到 $B(z,\varepsilon)$。由此可得 $|x-y|_A \geqslant |x-y|_{\mathbb{R}^3}+\delta$；特别是$|x-y|_A \neq |x-y|_{\mathbb{R}^3}$。

2.24. 图中所示的球面曲线没有对径点对。然而，在它的一侧有三个点 x, y, z，它们位于同一个赤道上；另一侧则有它们的对径点 $-x, -y, -z$。（我们假设点 $x, -y, z, -x, y, -z$ 按此顺序位于



同一个赤道上。）

证明这条曲线不可能位于任何一个半球内。

2.25. 假设 γ 位于一个开半球（2.23）内。特别是，它不会将 $\mathbb{S}^2$ 分成面积相等的两个区域——矛盾。

2.26. 第一句话就是错误的——仅仅不充分 地证明直径不超过 2。例如，如果等边三角形的外接圆半径略大于 1，那么它的直径（定义为其各点之间的最大距离）就会略大于 $\sqrt{3}$，因此小于 2。

另一方面，可以调整半球引理（2.23）的证明，以得到正确的解答。具体而言：(1) 取 p 和 q 两个点，它们将 γ 分成两条等长弧；(2) 设 z 是 p 和 q 之间的中点；(3) 证明 γ 位于以 z 为中心的单位圆内。

2.27；*(a)*。论证与克罗夫顿通常公式（2F）的证明相似。

(b). 假设 $\operatorname{length}\gamma < 2\cdot\pi$。根据*(a)*,

$$\overline{\operatorname{length}\gamma^*_{\mathrm{U}}} < 2\cdot\pi.$$

因此,

$$\operatorname{length}\gamma^*_{\mathrm{U}} < 2\cdot\pi$$

对于某个 u。

注意，$\gamma^*{}_{\mathrm{U}}$ 沿着某个半圆 h运动。因此，γ 位于以 h 为直径构造的半球面上。

3.2. 设曲线 γ 具有单位速度且曲率为零。那么 $\gamma'' \equiv 0$，因此，速度向量 $\mathrm{v} = \gamma'$ 保持不变。由此，$\gamma(t) = p + (t - t_0)\cdot\mathrm{v}$，其中 $p = \gamma(t_0)$。

3.3. 注意，$\alpha(t) := \gamma_\lambda(t/\lambda)$ 是曲线 γ_λ 的单位速度参数化，并两次应用复合函数的求导法则。

3.4. 将恒等式 $\langle\gamma(s)\ \gamma(s)\rangle = 1$ 求导若干次。

3.5. 设 $\mathrm{t} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$。推导恒等式

$$\gamma'' - (\gamma'')^{\perp} = \kappa\cdot\langle\gamma'', \mathrm{n}\rangle, \quad |\gamma'| = \sqrt{\langle\gamma', \gamma'\rangle},$$

并运用它们。

3 6 3 5 $t \mapsto$ .. 将 $.a$ 应用于参数化 $(, f())$。

3.7. 不失一般性，可以假设 γ 的速度为单位速度。

请注意，切向指标曲线 $\mathrm{t}(s) = \gamma'(s)$ 是球面曲线，并且 $|\mathrm{t}'| \leqslant 1$。利用这一点构造一列单位速度球面曲线 t_n: $\mathbb{I} \to \mathbb{S}^2$，使得 $\mathrm{t}_n(s) \to \mathrm{t}(s)$ 当 $n \to \infty$ 对任意 s 时。证明以下曲线序列给出了一个解

$$\gamma_n(s) = \gamma(a) + \int_a^s \mathrm{n}_n(t)\cdot dt.$$

3.8. 利用 2.24 中的构造，得到一条闭合光滑简单的球面曲线 $\mathrm{t}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$，它不包含反极点对，且平均值为零。然后构造一条切线指示曲线为 t 的曲线。

来源：这条曲线由贝尼亚米诺·塞格雷´创作´ [89]。

3.10. 证明$\gamma''_{a,b} \perp \gamma'_{a,b}$，并应用 $3.5a$。

3.12. 应用芬切尔定理。

3.13. 可以假设 γ速度为单位速度。于是 $\langle \mathrm{t},\ \mathrm{t}\rangle = 1$和 $\mathrm{t}' \perp \mathrm{t}$。设$\theta(s) = \measuredangle(\gamma(s)\ \gamma'(s))$，因此 $\langle \mathrm{t}\ \sigma\rangle = \cos\theta$。所以

$$\begin{aligned}\kappa\cdot\sin\theta = |\mathrm{n}'|\cdot\sin\theta \geqslant -\langle \mathrm{n}', \sigma\rangle = \\ = \langle \mathrm{n}, \sigma'\rangle - \langle \mathrm{n}, \sigma\rangle' = \\ = (|\sigma'| + \theta')\cdot\sin\theta.\end{aligned}$$

因此，当 $\theta \neq 0, \pi$时，$\kappa \geqslant |\sigma'| + \theta'$。剩下的工作是对这个不等式积分，并证明满足 $\theta \neq 0$ 或 π的集合不会造成问题。

另一种解 基于 4.5 构造。

3.15; *(a)*. 由于 $|\gamma(s)| \leqslant 1$,

$$\langle\gamma''(s), \gamma(s)\rangle \geqslant -|\gamma''(s)|\cdot|\gamma(s)| \geqslant -\kappa(s)$$

对所有 s均成立。

(b). 由于 γ $\ell =$以弧长参数化，$\operatorname{length}\gamma$和 $\langle\gamma', \gamma'\rangle \equiv 1$。因此,

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \langle\gamma(s), \gamma'(s)\rangle'\cdot ds = \\ = \int_0^\ell \langle\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle\cdot ds + \int_0^\ell \langle\gamma(s), \gamma''(s)\rangle\cdot ds \geqslant \\ \geqslant \operatorname{length}\gamma - \Phi(\gamma).\end{aligned}$$

(c). 根据牛顿-莱布尼茨公式,

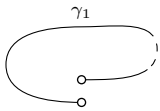
$$\int_0^\ell \langle\gamma(s), \gamma'(s)\rangle'\cdot ds = \langle\gamma(s), \gamma'(s)\rangle\Big|_0^\ell.$$

由于 $\gamma(0) = \gamma(\ell)$ 且 $\gamma'(0) = \gamma'(\ell)$，等式右边为零。

可以认为，3.14 中的曲线由闭合回路 $\gamma\colon\ [0,\ell]\to\mathbb{R}^3$ 描述，并以弧长为参数；还可以认为球心位于坐标原点，即 $|\gamma|\leqslant 1$。由于 γ 光滑且闭合，$\gamma'(0)=\gamma'(\ell)$ 且 $\gamma(0)=\gamma(\ell)$。因此，*(b)* 和 *(c)* 推出 3.14。

3.16. 证明，除 ℓ 以外的任何直线都不能在点 p 处支撑 F。应用 A.18，证明存在一条直线在点 p 处支撑 F。得出结论。

3.20. 从图中所示的曲线 γ_1 开始。要得到 γ_2，稍微拉直虚线圆弧（也就是减小它的曲率）。

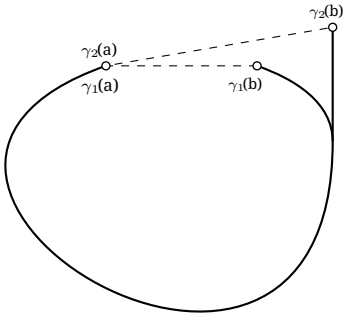


3.21; *(a)*. 不失一般性，可以假设 $p=\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$ 是坐标原点，向量 $\mathrm{u}=\mathrm{t}_1(a)=\mathrm{t}_2(a)$ 沿着 x 轴方向，而点 $q_1=\gamma_1(b)$ 和 $q_2=\gamma_2(b)$ 位于上半平面 (x,y)。

假设 $\alpha_1<\alpha_2$。找一个点 x，使得 $|x-q_1|<|x-q_2|$，并且 γ_1 与线段 $[p,x]$ 和 $[x,q_1]$ 共同围成 (x,y) 平面中的一个凸区域。（这里需要用到 $\beta_1\leqslant\frac{\pi}{2}$。）

验证关于弧的引理（3.19）的证明对于 $[x,p]$ 与 γ_1、γ_2的乘积仍然成立，并由此导出矛盾。

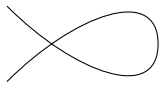
（*b*）。看图并思考。



注。不妨将此练习与弦引理（4.2）进行比较。

3.22; *(a)*. 选择一个值 $s_0\in[a,b]$，使它将全曲率 γ 平分。注意，对于任意 s，$\measuredangle(\gamma'(s_0)\ \gamma'(s))\leqslant\theta$。像证明弓形引理时那样，利用这个不等式。

(b). 利用 *(a)*，并看图。



(c). 从一条由两条等长线段组成的折线开始
以及使用切割与平滑（AF）处理外角 $2\cdot\theta$ 并将顶点光滑化。

3 23 $\ell=\gamma_1$ $\ell_1<\ldots<\ell<\ell_2$ 设 length。假设，并设 — 为长度为 ℓ 的单位圆弧。

证明两端之间的距离γ_1 大于 $|p-q|$，并应用弓形引理（3.19）。

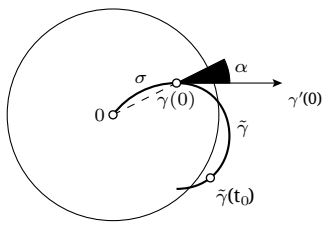
来源：这一命题归功于赫尔曼·施瓦茨 [90]。

3.24. 假设 length $\gamma<2\cdot\pi$。将弓形引理 (3.19) 应用于 γ 以及长度相同的单位圆弧。

3.25. 选取一条光滑球面曲线 α，使它始终靠近同一个点；例如，取以该点为圆心的小球面圆。考虑曲线 t，它以速度 $\kappa(s)$ 沿着 α 运动，其中任意 $s\in[0,\ell]$ 都成立。证明，具有 t 作为切向指标曲线的曲线满足题设。

3.26. 可以假设 γ 的速度为单位速度。假设当 $t=0$ 时不等式不成立。可以假设 $\alpha(0)\leqslant\frac{\pi}{2}$；否则就反向参数化。

在由向量 $\gamma(0)$和$\gamma'(0)$张成的平面内，选择一段圆弧（或一条线段）σ，以单位速度从 0 运动到 $\gamma(0)$，并沿着与 $\gamma'(0)$相反的方向到达 $\gamma(0)$。考察一段以单位速度运动且曲率为 2 的半圆 $\tilde\gamma$，它从 $\gamma(0)$出发，沿 $\gamma'(0)$方向运动，使得乘积 $\sigma*\tilde\gamma$ 是一段凸平面曲线的圆弧；见图。



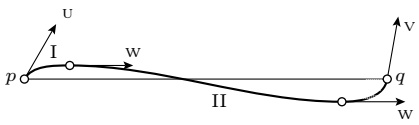
证明：如果 $|\gamma(0)|>\sin(\alpha(0))$，那么 $\tilde\gamma$会超出单位球的范围；也就是说，对于某个 t_0，有$|\tilde\gamma(t_0)|>1$。

乘积 $\sigma*\gamma$ 和 $\sigma*\tilde\gamma$ 在接合处不光滑，但在该点可微。请验证，弓形引理的证明在这个更一般的情形下也成立。

将弓形引理的这个变体应用于 $\sigma*\gamma$和 $\sigma*\tilde\gamma$，得到 $|\gamma(t_0)|\geqslant|\tilde\gamma(t_0)|$，从而导出矛盾。

来源：这是第一作者 [81] 使用的命题。

4.3. 设 $\alpha=\measuredangle(\mathrm{u},\mathrm{w})$ 和 $\beta=\measuredangle(\mathrm{w},\mathrm{v})$。试着根据图猜出一个例子。



所示曲线分为三段弧：I、II 和 III。弧 I 从 u 转向 w；它的全曲率等于 $\alpha_\circ$。同理，弧 III 从 w 转向 v，全曲率为 β。弧 II 与弦 pq 十分接近，几乎平行，而且可以使它的全曲率任意小。

4.4. 利用三角形的外角等于另外两个顶点处内角之和这一性质。第二部分按顶点数进行归纳。

4.6. 假设 x 是一个自交点。证明可以在自交点之间的 γ 上选取两个点 y 和 z，使三角形 xyz 非退化。特别地，$\measuredangle[y\,{}^{x}_{z}] + \measuredangle[z\,{}^{y}_{x}] < \pi$，或者等价地，$\Phi(xyzx) > \pi$，对于非闭集内接折线 $xyzx$ 成立。剩下的只需应用 4.5。

4.7. 考虑闭折线 $acbd$。验证 $\Phi(acbd) = 4\cdot\pi$，并应用 4.5。

注记。像本练习中的这类与曲线相交的直线，称为交替四重割线。已知每个非平凡纽结 [24] 都存在这样的割线；根据本练习，这证明了所谓的法里—米尔诺定理——任意纽结的总曲率大于 $4\cdot\pi$；参见 [76] 及其中的参考文献。

4.11. 根据 4.5，$\Phi(\gamma) \geqslant \Phi(\beta)$；目前还需证明 $\Phi(\gamma) \leqslant \sup\{\Phi(\beta)\}$。换句话说，对于任意 $\varepsilon > 0$ 和内接于曲线 γ 的切向指标曲线 t 的折线 $\sigma = \mathrm{u}_0 \dots \mathrm{u}_k$，我们需要构造一条内接于 γ 的折线 β，使得

❶ $$\operatorname{length}\sigma < \Phi(\beta) + \varepsilon.$$

假设 $\mathrm{u}_i = \mathrm{t}(s_i)$。选择内接折线 $\beta = p_0 \dots p_{2\cdot k+1}$，使得点 $p_{2\cdot i}$ 和 $p_{2\cdot i+1}$ 充分接近于 $\gamma(s_i)$；由此可以做到，对于每个 i，向量 $p_{2\cdot i+1} - p_{2\cdot i}$ 的方向都充分接近向量 u_i。证明对于所构造的折线 β，❶成立。

4.12. 证明，对于任意位于半径为 R 的球内的折线 β，不等式成立

$$\Phi(\beta) + 2\cdot\pi \geqslant \frac{\operatorname{length}\beta}{R}.$$

确认 γ 位于某个球内，并应用这个不等式。

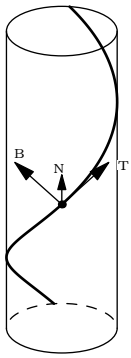
第二部分的例子可以在对数螺线中找到。

5.1. 长度参数 s 已在 2.12 中求得。剩下的就是计算弗雷内标架、曲率和挠率。

应得到

$$\mathrm{t}(t) = \frac{(-a\cdot\sin t, a\cdot\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\mathrm{n}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$
$$\mathrm{b}(t) = \frac{(b\cdot\text{正弦}\ t, -b\cdot\text{余弦}\ t, a)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\kappa(t) \equiv \frac{a}{a^2+b^2},$$
$$\tau(t) \equiv \frac{b}{a^2+b^2}.$$

剩下要证明的是，d 映射 $(\mapsto \quad\quad , b)$ $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2})$ 将半平面 $a > 0$ 双射到自身。



5.2. 根据乘积法则，得到

$$\mathrm{B}' = (\mathrm{T}\times\mathrm{N})' = \mathrm{T}'\times\mathrm{N} + \mathrm{T}\times\mathrm{N}'.$$

只需代入❷和❸中的值并化简。

5.3. 使用方程 $\mathrm{b}' = -\tau\cdot\mathrm{n}$。

5.4. 可以认为 γ_0 是以弧长为参数的。证明 $|\gamma_1'| = |\mathrm{t} - \tau\cdot\mathrm{n}| \geqslant 1$，并使用这一结论。

5.5. $\frac{\gamma'\times\gamma''}{|\gamma'\times\gamma''|}$ 是一个单位向量，垂直于由 γ' 和 γ'' 张成的平面。因此，除符号外，它等于 b。只需确定符号。

5.6. 应用 3.5b 和 5.5。

5.7. 可以认为，$t_0 = 0$ 和 $\gamma_i(0) = 0$。考察函数

$$\rho_i(t) := |\gamma_i(t)|^2 = \langle\gamma_i(t), \gamma_i(t)\rangle.$$

注意，$\rho_1 \geqslant \rho_2$ 和 $\rho_i(0) = 0$。确认

$$\rho_i'(0) = 0, \qquad \rho_i''(0) = 2,$$
$$\rho_i'''(0) = 0, \qquad \rho_i''''(0) = -2\cdot\kappa(0)^2_{\gamma_i}.$$

作出结论。（与 5.16 比较。）

5.8. 假设切向指标曲线没有自交。证明它位于某个开半球内，并按照芬歇尔定理中的方法进行推理。

5.10; *(a)*。注意，$\langle \mathrm{w}, \mathrm{t}\rangle' = 0$。由此推出，$\langle \mathrm{w}, \mathrm{n}\rangle = 0$。接下来，证明 $\langle \mathrm{w}, \mathrm{t}\rangle^2 + \langle \mathrm{w}, \mathrm{b}\rangle^2 = \langle \mathrm{w}, \mathrm{w}\rangle$，并利用这一点。在证明最后一个恒等式时，对 n′ 应用弗雷内公式。

(b). 证明 $\mathrm{w}' = 0$；这意味着 $\langle \mathrm{w},\ \mathrm{t}\rangle = \frac{\tau}{\kappa}$。特别是，速度向量与 w 形成恒定的角；也就是说，γ —斜坡线。

5.11. 设 α 是曲线 γ 的渐伸线，w 是一个固定向量。证明，若 γ 以与 w 成定角的方向运动，则标量积 $\langle \mathrm{w}\ \alpha\rangle$ 为常数，

并利用这一点。

5.13. (a) 部分可由 (t, n, b) 是标准正交基这一事实得出。对于 (*b*)，对恒等式 $\langle\gamma,\gamma\rangle = 1$ 求一阶和二阶导数，并利用弗雷内公式化简。(c) 部分由 (*b*) 和弗雷内公式推出。根据 (*c*)，$\int \frac{\tau}{\kappa} = 0$，因此 (d) 成立。(e) 部分可通过代数运算证明。在 (f) 中，利用弗雷内公式证明 $(\gamma + \frac{1}{\kappa}\cdot \mathrm{n} + \frac{\kappa'}{\kappa^2\cdot\tau}\cdot \mathrm{b})' = 0$。

注。由 (*c*) 可得，$\int \frac{\tau}{\kappa} = 0$ 对于任意闭合光滑球面曲线。已知这一性质刻画了球面和平面；这一点由本雅米诺·塞格雷证明 [89]。

5.15. 请使用 5.1 的第二部分。

5.16. 根据条件，

$$\rho(\ell) = |\gamma(t+\ell) - \gamma(t)|^2 = \\ = \langle \gamma(t+\ell) - \gamma(t), \gamma(t+\ell) - \gamma(t)\rangle$$

— 是一个与 t 无关的光滑函数。用导数 $\rho^{(n)}(0)$ 表示速度、曲率和挠率 γ。请耐心一些：求速度需要两阶导数，求曲率需要四阶导数，而求挠率需要六阶导数。然后应用 5.15。

6.1. 可以认为 γ_0 按弧长参数化。那么

$$|\gamma_1'| = |\gamma_0' + \mathrm{T}'| = |\mathrm{T} + \kappa\cdot\mathrm{N}|.$$

由此

$$|\gamma_1'(t)| \geqslant |\gamma_0'(t)| \quad \text{и} \quad |\gamma_1'(t)| \geqslant |\kappa(t)\gamma_0|$$

对任意 $t \in [a,b]$ 都成立。对这些不等式积分，并应用 2.5。

6.4. 请注意，

$$\gamma_a'(t) = (1 + a\cdot\cos t, -a\cdot\sin t);$$

也就是说，γ_a' 沿着以点 (1,0) 为圆心、半径为 $|a|$ 的圆顺时针运动。

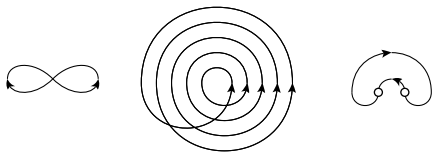
情形 $|a| > 1$。请注意，$\mathrm{t}_a = \gamma_a'/|\gamma_a'|$ (*t*) 顺时针运动，并在时间 $2\cdot\pi$ 内完成整周。因此，$\Psi(\gamma_a) = -2\cdot\pi$，且 $\Phi(\gamma_a) = |\Psi(\gamma_a)| = 2\cdot\pi$。

情况 $|a| < 1$。设 $\theta_a = \arcsin a$。证明 $\mathrm{t}_a(t) = \gamma_a'/|\gamma_a'|$ 从水平方向 $\mathrm{t}_a(0) = (1,0)$ 出发，随后单调转至角度 θ_a，再单调转至 $-\theta_a$，最后单调返回 t = 1, 0。$\Psi(\gamma_a) = 0$ $\Phi(\gamma_a) = 4\cdot\theta_a$ $(2\cdot\pi)$ ( )。由此，( ) 和 ( )。

情况 $a = -1$。速度 $\gamma_{-1}'(t)$ 在 $t = 0$ 和 $2\cdot\pi$ 处变为零。尽管如此，该曲线允许光滑正则参数化——请找出它。应得到 $\Phi(\gamma_{-1}) = -\Psi(\gamma_1) = \pi$)。

情形 $a = 1$。$\gamma_1'(t)$ 的速度在 $t = \pi$ 时变为零。当 $t = \pi$ 时，曲线上有一个回返点；也就是说，γ_1 在此处反向。因此，$\gamma_1(t)$ 的有向总曲率未定义。曲线由两条光滑弧组成，外角为 π，每条弧的总曲率等于 $\frac{\pi}{2}$，因此，$\Phi(\gamma_1) = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\cdot\pi$。

6.6. 答案见图。最后一幅图假定标记点处的切线彼此平行。



6.7; *(a)*. 证明

$$\gamma_\ell'(t) = (1 - \ell\cdot k(t))\cdot\gamma'(t).$$

由于 γ 是正则的，$\gamma' \neq 0$。因此，若 $\gamma_\ell'(t) = 0$，则 $\ell\cdot k(t) = 1$。

(b). 可以假设 γ 按弧长参数化，因此 $\gamma'(t) = \mathrm{t}(t)$。假设 $|\ell| < \frac{1}{\kappa\ t()} = \frac{1}{|k\ t()|}$ 对任意 t 都成立。那么

$$|\gamma_\ell'(t)| = (1 - \ell\cdot k(t)).$$

因此，

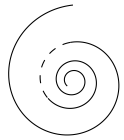
$$L(\ell) = \int_a^b (1 - \ell\cdot k(t))\cdot dt = \\ = \int_a^b 1\cdot dt - \ell\cdot\int_a^b k(t)\cdot dt = \\ = L(0) - \ell\cdot\Psi(\gamma).$$

(c). 考虑单位圆 γ t $t \in [0, 2\cdot\pi]$ γ_ℓ $\ell = 2$ (*t*) (cos , sin)，当且仅当。

6.10. 利用接触阶的定义来刻画密切圆，并利用反演将圆映为圆或直线这一性质。

6.12. 假设 γ 以弧长为参数。证明 $\omega' = \frac{k'}{k^2}\cdot \mathrm{n}$。由此推出，$\omega$ 的弗雷内标架要么是 (n, −t)，要么是 (−n, t)，并且它的曲率等于 $|\frac{k^3}{k'}|$。

6.14. 从图中所示的平面螺旋线开始。应用 5.14，在不改变曲率的情况下，逐渐增大虚线弧的扭转，直到出现自交。



可以认为，虚线弧很短，切向量 t 在这段弧上几乎不变。增大扭转可以使法向量 n 绕 t 任意旋转。如果 n 转过

一个接近 π 的角度，就会出现交点。（与 3.7 比较。）

6.15. 请注意，如果直线或圆与曲线 γ 相切，那么它也会在同一点与密切圆相切，并应用螺旋线引理（6.11）。

6.16. 验证球面曲线的密切圆都位于球面上。证明这些圆也满足 6.11 的类似结论。（与 5.13d 比较。）

7.2. 应用螺旋引理（6.11）。

计算解。 假设曲率在点 p 处不为零，另一种情况更简单。不妨设 γ 以弧长参数化，$p = \gamma(0)$，且坐标原点是 p 处的曲率中心；换言之，$\kappa(0)\cdot\gamma(0) + \mathrm{n}(0) = 0$。

考虑函数 $f\colon t \mapsto \langle \gamma(t)\ \gamma(t)\rangle$。直接计算得

$$f' = \langle \gamma, \gamma\rangle' = 2\cdot\langle \mathrm{T}, \gamma\rangle,$$
$$f'' = 2\cdot\langle \mathrm{T}, \gamma\rangle' = 2\cdot\kappa\cdot\langle \mathrm{N}, \gamma\rangle + 2,$$
$$f''' = 2\cdot\kappa'\cdot\langle \mathrm{N}, \gamma\rangle + 2\cdot\kappa\cdot\langle \mathrm{N}', \gamma\rangle + \cancel{2\cdot\kappa\cdot\langle \mathrm{N}, \mathrm{T}\rangle}.$$

注意，$\mathrm{n}'(0) \perp \gamma(0)$。因此，$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$，且 $f'''(0) = -2\cdot\kappa'/\kappa$。

如果密切圆在点 p 处支撑 γ，那么函数 f 在点 0 处有局部极大值或极小值。因此，$f'''(0) = 0$ 和 $\kappa' = 0$。

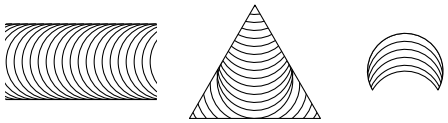
7.4. 我们选取一个坐标系，其原点位于点 p，轴 x 与 γ_1 相切，且与 γ_2 相切。可以假设 γ_1 和 γ_2 在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上有定义，其中 $\varepsilon > 0$ 很小，并且它们几乎是水平的。

对于给定的 $t \in [0, 1]$，考虑曲线γ_t，它在点 γ_t 处与轴 x 相切且同向，$\gamma_t(0) = p$，并具有有向曲率 $k_t(s) := (1-t)\cdot k_0(s) + t\cdot k_1(s)$。根据 6.2，这样的曲线存在。

选择 $s \approx 0$。考虑曲线 $\alpha_s\colon t \mapsto \gamma_t(s)$。证明 α_s 几乎垂直向上移动。利用这一点，由于 γ_t 几乎水平移动，证明在点 p 的一个小邻域内，曲线 γ_1 位于 γ_0上方，由此命题得证。

7.5. 将单位圆沿直线移动，直到其中心到达闭环的基点，然后将圆的半径缩小至零。当圆第一次触及闭环时，它会在一个不同于基点的点处支撑住闭环。应用 7.3。

7.6 + 7.7 + 7.8. 确认图示族中曲率为 1 的某段弧会支撑住 γ，并应用 7.3。

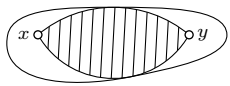


利用图示的族和另一个朝相反方向弯曲的弧族，可以将 7.6 的第二部分归结为 7.5。

注。 比较 7.16。

7.11. 只需考虑 γ 围成一个凸图形的情形，例如 F。否则，根据 7.9，其曲率会变号。因此，γ 在某一点的曲率为零。

在内部选择这样两个点 F x y $|x-$ 和，使得。$- y| > 2$ 考虑由具有公共弦 F 的两条弧所围成的最大透镜，它位于 x y $|x -$ 中。$y| > 2$ 它由两条具有公共弦 xy的弧所围成，且位于 F中。应用支撑判据（7.3）。



7.12. 应用透镜引理（7.10），证明 γ 位于直线 pq的一侧。由此推出，弧 γ 与其弦 $[p, q]$ 的并集构成一条简单闭曲线；根据Jordan定理，它围成一个图形，记作 F。

假设 F 不是凸的，并像在7.9中那样导出矛盾。

7.13. 选择距离最大的两个点 p、$q \in \gamma$。将7.12应用于从 p 到 q的弧 γ。之后使用弧引理（3.19），或像在7.11中那样推理。

对于练习的第二部分，考虑包围 γ 的最小圆 σ，并对 γ 中连接与 σ 的公共点的一条弧，重复上述推理。

注。 如果允许自交，那么曲线直径可以任意大。请根据图猜一个例子。事实上，直径可以任意接近曲线长度。



7.16. 证明 γ 包含一个简单闭环 γ_1。将 7.14 应用于 γ_1。

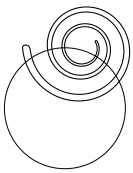
7.19. 不妨设较小的正方形位于 γ 的左侧。利用 7.18，证明 γ 上有两个点，其有向曲率分别为 $\geqslant 1$ 和 $6\,1$。应用有向曲率的介值定理，证明存在一个曲率为 1 的点。

更复杂的问题：这些点的最少数量是多少?

7.20. 应用位似变换，可以假设 $a = \pi$；也就是说，我们的环路所围成的图形面积等于单位圆的面积。应用 7.15，证明某一点处的曲率不小于 1。仿照证明 7.18 结尾的推理，证明某一点处的曲率不大于 1。

应用介值定理，证明某一点处的曲率恰好为 1。

7.21. 对从 p_i 到 p_{i+3} 的弧 γ 与包含点 $p_{i+4}, \dots, p_{i-1}$ 的圆弧所构成的每一个循环乘积，重复 7.15 的证明。



第二部分中的例题可以从图中猜出。

7.22. 必要性显然；下面证明充分性。选取两点 $p, q \in \gamma$，使得 $|p-q| \geqslant 4$。记 σ_p, σ_q, r_p, r_q 为点 p 和 q处的内切圆及其半径。

假设 $r_p \geqslant 1$ 和 $r_q \geqslant 1$。证明：在点 p 和 q处从内部与 γ 相切的两个单位圆盘满足题设。

假设 $r_p < 1$ 和 $r_q < 1$。验证 σ_p 和 σ_q 不相交。注意，我们可以在曲线 γ上选取两条互不相交的弧 γ_p 和 γ_q，其端点分别落在 σ_p 和 σ_q 上。从这两条弧开始，按照 7.15 中的方法推理。证明所得的支撑密切圆互不相交；完成最后一步。

在剩余情况下，$r_p \geqslant 1$ 和 $r_q < 1$ 结合这两种论证。

来源：这是伯克-塞兰问题 [17]。目前尚不清楚，任意一条曲率不超过1 且弧长不小于 $4\cdot\pi$ 的简单闭平面曲线，是否会围成两个互不相交的单位圆盘。

7.23. 证明曲线 γ 的切向指标曲线 t 是一条光滑的简单闭合球面曲线。证明曲线 γ 上的每个挠率为零的点都对应于 t 上的一个拐点；也就是说，该点的测地曲率为零（见 11A）。

试着证明：如果指示曲线 t 的拐点少于 4 个，那么它位于某个开半球内；或者阅读网球定理的证明 [7, § 20]。之后，按 3.11 中的方法推理。

8.3. 设 Σ_ℓ 是一个等值集。

证明 $\nabla_p f = 0$ 当且仅当 p =(0,0,0)。利用 8.2，证明当 $\ell \neq 0$ 时，Σ_ℓ 中的每个连通分支都是光滑曲面。

证明，Σ_ℓ 连通当且仅当 $\ell \geqslant 0$。由此可知，当 $\ell > 0$时，Σ_ℓ 是光滑曲面；而当 $\ell < 0$ 时则不是。

$\ell = 0$ 的情形需要手动分析——虽然 8.2 中的充分条件不成立，但这并不意味着 Σ_0 不是光滑曲面。

证明，在 Σ_0 中，坐标原点的任意邻域都无法在任何坐标系下表示为图像。因此，根据定义（见 8B），Σ_0 不是光滑曲面。

8.5. 例子类似于 $1.2b$。

8.7. 证明充分性时，请利用光滑函数的复合仍然光滑这一事实。

接下来，设图像 $z = f(x, y)$ 在点 p 的邻域内定义了 Σ。注意，当且仅当函数$\hat{g}$: $(x, y) \mapsto g(x, y, f(x, y))$ 在其定义域内光滑时，g 在此邻域内才是光滑的。定义 $h(x, y, z) := \hat{g}(x, y)$，由此即可得到充分性。

对于最后一部分，请考虑定义在去掉坐标原点的 x、y 平面上的函数 g: $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$。注意，$g$ 不能延拓为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数。

注。如果 Σ 是光滑正则曲面，那么任意光滑函数 g: $\Sigma \to \mathbb{R}$ 都能延拓为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。证明使用了所谓的单位分解；请阅读相关内容并证明这个命题。

8.8. 验证像 s 位于以点 (0,0,1) 为圆心的单位球面上；也就是说，对于任意 u, v，$\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2v}{1+u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+u^2+v^2} - 1\right)^2 = 1$。

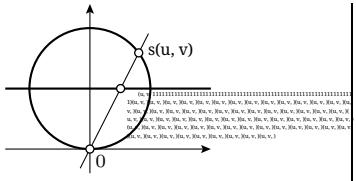
证明映射 $(x\ y\ z) \mapsto \frac{2\cdot(x\ y)}{x^2+y^2+z^2}$ 是 s 的逆映射，并且在坐标原点以外连续。特别地，s 是一个嵌入，其像覆盖了除坐标原点外的整个球面。

证明 s 是正则的；也就是说，对于所有 u 和 v，s_u 与 s_v 线性无关。

注。可以认为，s 定义了一个立体投影

$$(u, v, 1) \mapsto \left(\frac{2\cdot u}{1+u^2+v^2}, \frac{2\cdot v}{1+u^2+v^2}, \frac{2}{1+u^2+v^2}\right)$$

从平面 $z = 1$ 到以点 (0, 0, 1) 为圆心的单位球面。注意，点 $(u, v, 1)$ 及其像位于同一条从坐标原点出发的射线上。



8.9. 考虑映射

$$s\colon (t,\theta)\mapsto (x(t), y(t)\cdot\cos\theta, y(t)\cdot\sin\theta).$$

证明它是正则的；也就是说，s_t 和 s_θ 线性无关。（这里 $s_t\perp s_\theta$ 会派上用场。）

验证 s 是一个嵌入；也就是说，平面上任意一点 (t_0,θ_0) 都有一个邻域 U，使得 $s|_U$ 的限制在 (t,θ) 平面上具有连续逆映射。剩下的只需应用 8.6。

8.10. 在两个曲面的坐标图中应用反函数定理（A.25）。

8.11. 这些练习的解基于以下一般构造，它被称为Moser技巧。

假设 $\mathbf{u}_t$ 是平面上一个依赖于时间的光滑向量场。考虑常微分方程 $x'(t) = \mathbf{u}_t(x(t))$ 以及映射 $\iota\colon x(0)\mapsto x(1)$，其中 $t\mapsto x(t)$ 是该方程的解。映射 ι 称为向量场 $\mathbf{u}_t$ 在时间区间 $[0,1]$上的流。根据 A.29，它在其定义域内是光滑的。此外，其逆映射也具有同样的性质 ι^{-1}；事实上，ι^{-1} 是向量场 $-\mathbf{u}_{1-t}$的流。也就是说，ι 是从其定义域到其像的微分同胚。

因此，要构造从一个平面开子集到另一个平面开子集的微分同胚，只需构造一个光滑向量场，使其流将一个集合映到另一个集合；这样的映射自动就是微分同胚。

(a). 考虑两个集合 $\mathbb{R}^2\setminus\{p_1,\dots,p_n\}$ 和 $\mathbb{R}^2\setminus\{q_1,\dots,q_n\}$。选取光滑轨迹 $\gamma_i\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$，使得 $\gamma_i(0)=p_i$，$\gamma_i(1)=q_i$，并且当 $i\ne j$ 时，$\gamma_i(t)\ne\gamma_j(t)$。

选取光滑向量场 $\mathbf{v}_t$，使得对任意 i 和 t，$\mathbf{v}_t(\gamma_i(t)) = \gamma_i'(t)$。我们还可以进一步假设，$\mathbf{v}_t$ 在一个足够大的圆盘之外为零；这可以通过将向量场乘以一个适当的函数来实现；例如，$\sigma_1(R-|x|)$，其中 R 很大，而 σ_1 是 S 形函数（第 182 页）。

接下来只需对构造出的向量场应用 Moser技巧。

(b)–(d)。在*(b)–(c)*中，可以认为坐标原点属于这两个集合，而在*(d)*中，图形相对于坐标原点是星形的。

在每种情况下，请证明存在一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $\mathbf{v}$，它将一个曲面映射到另一个曲面。事实上，可以选取这类径向场，但要小心处理问题 *(c)* 和*(d)* ——它们比看起来要难。

9.3. 设 γ 是 Σ 上的一条光滑曲线。注意，$f\circ\gamma(t)\equiv 0$。对这个恒等式求导，并应用切向量的定义（9.1）。

9.4. 假设 Σ 上点 p 的邻域由图像 $z = f(x,y)$ 给出。在这种情况下，$s\colon (u,v)\mapsto (u,v,f(u,v))$ 是一个覆盖 p 的光滑坐标图。请证明，由 s_u 和 s_v 张成的平面不是竖直的；结合 9.2，这就证明了充分性。

设 $s\colon (u,v)\mapsto (x(u,v)\ y(u,v)\ z(u,v))$ 是一张坐标图。将反函数定理应用于 $(u,v)\mapsto (x(u,v)\ y(u,v))$，并推出必要性。

9.5. 选择 (x,y,z) 坐标，使得 Π 是 (x,y) 平面，而 p 是坐标原点。设 $(u,v)\mapsto s(u,v)$ 是 Σ 上这样一张坐标图，满足 $p = s(0,0)$，并设 $\mathbf{k}$ 是沿 z 轴方向的单位向量。

验证可以假设，在点 0 的去心邻域内，$\langle s(u,v),$ 且 $\mathbf{k}\rangle > 0$。由此推出，$s_u\perp\mathbf{k}$ 和 $s_v\perp\mathbf{k}$ 在 0 处；练习结论随即成立。

9.7. 利用 A.29，构造曲线 α 在 Σ上，使得 $\alpha(0) = p$ 且 $\alpha'(x) = \mathbf{x}^{\alpha(x)}$。同样地，构造曲线 β_x 在 Σ 上，使得 $\beta_x(0) = \alpha(x)$ 且 $\beta_x'(y) = \mathbf{y}^{\beta_x(y)}$。应用 A.25，证明映射 $(x,y)\mapsto\beta_x(y)$ 描述了点 p 的一个小邻域 W 的坐标图。

证明 $u\colon \beta_x(y) = x$ 在 W满足所要求的条件。用同样的方法构造 v。最后再次应用 A.25 即可。

9.10. 证明对于环面 Σ 上的任意光滑曲线 γ，函数 $t\mapsto\langle\nu_0,\gamma(t)\rangle$ 为常数，并利用这一点。

9.11. По 9.3, $\nu = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$ — поле нормалей.

9.14. 利用截线和平滑化（AF），在平面 $(x,\ y)$ 上构造一个光滑的非负函数 f，使得

$f\ x\ y\ = 0$ $\qquad$ $x\ y\ \in(,\ )$

A

当且仅当 $(,\ )$。图像 $z = f(,\ y)$ 描述了所需的曲面。

10.1. 取 γ上的点 p。请验证 $\mathrm{T}_p\perp\Pi$，因为 Σ 关于 Π镜面对称。

在 T_P 上选择 (x,y)-坐标，使轴 x 沿着 $\Pi\cap\mathrm{T}_P$ 的交线。假设密切抛物面由图像 $z = \frac{1}{2}\cdot($ $\ell\cdot x^2+2\cdot m\cdot x\cdot y+n\cdot y^2)$ 描述。由于 Σ 镜面对称，抛物面也镜面对称；也就是说，将 y 替换为 $(-y)$ 不会改变 $\ell\cdot x^2+2\cdot m\cdot x\cdot y+n\cdot y^2$。换言之

，$m = 0$，也就是说，轴 x 指向曲率方向。

10.2. 注意，每一点处的主曲率符号相同。因此，可以在每一点选取法向量 ν，使两个主曲率均为正。证明这确定了曲面上的一个整体场。

10.3. 计算函数 $g(x, y) = \lambda \cdot f(x/\lambda, y/\lambda)$ 的泰勒级数。

10.5. 将 10.4 应用于映射 s，使得 $s_u(0, 0) = \mathrm{u}$ 且 $s_v(0, 0) = \mathrm{v}$。

10.8; *(a).* 注意，Σ 在每一点处的海森矩阵都是单位矩阵，并应用形算子的定义。

(b). 在 Σ 上选取一个映射 s。证明

$$\tfrac{\partial}{\partial u}(s + \nu) = \tfrac{\partial}{\partial v}(s + \nu) = 0.$$

完成最后一步。

10.9. 这个问题看似微不足道，直到你意识到连通集可能非常奇特。例如，其中可能不存在非平凡曲线。

应用 Sard 引理（A.24），证明 ν 在 Z_0上为常数。设 ν_0 —为 Z_0处的法向量值。再次应用 Sard 引理，证明函数 $x \mapsto \langle \nu_0, x\rangle$ 在 Z_0上为常数。得出结论。

注。这一结果曾被 Richard Saxton [87, 引理 6]使用。尝试解决下面稍微复杂一些的问题：设 Σ —为一个带有由法向量场 ν所给定定向的光滑曲面，且 $Z_1 \subset \Sigma$ —为具有单位形算子的连通集。证明 Z_1 位于单位球面上。

10.10. 可以认为，γ 是按弧长参数化的。用 $\nu_1(s)$ 和 $\nu_2(s)$ 表示 Σ_1 和 Σ_2 在点 $\gamma(s)$ 处的单位法向量。

根据假设，对于某个常数 c，$\langle \nu_1, \nu_2\rangle = c$。我们知道，$\nu_1'$ 与 γ'成正比，而需要证明的是 ν_2' 与 γ'成正比。如果 $c = \pm 1$，那么 $\nu_1 \equiv \pm\nu_2$，由此即可得出结论。

请验证 $\langle \nu_1', \nu_2\rangle = 0$。利用等式 $c' = 0$，证明$\langle \nu_1, \nu_2'\rangle = 0$。接着证明 $\langle \nu_2, \nu_2'\rangle = 0$，并由此推出导数 ν_2'与 γ'成正比。

来源：这一结果由费迪南·约阿希姆施塔尔 [48]，得到，并由奥西安·博内 [12]推广。

10.11; *(a).* 对于给定的 t，考虑映射 f_t：$p \mapsto p + t\cdot\nu(p)$；它将 Σ 映射到Σ_t。

应用形算子的定义，证明 $d_p f_t(\mathrm{v}) = \mathrm{v} - t\cdot \mathrm{Shape}_p(\mathrm{v})$。因此由于 Σ 闭合，算子 Shape 的范数有界。因此 f_t 在 $t \approx 0$处正则。

接下来证明，当时 f_t $t \approx$ 是单射；由此推出 f_t 是光滑嵌入。

(b). 根据面积公式（9.8），

$$\operatorname{area}\Sigma_t = \int\limits_{p\in\Sigma} \operatorname{jac}_p f_t.$$

证明$\operatorname{jac}_p f_t = 1 - t\cdot H + t^2\cdot K$，并利用这一点。

10.12; *(a).* 利用主方向彼此正交这一事实；参见10B。

(b). 应用 10.6，证明 $\nu_u = 0$，并利用这一点证明 ν 只取决于 v。

验证 $\nu_{uv} = \nu_{vu} = 0$。利用 10.6，证明 $\nu_v = -k\cdot s_v$。由此推导出 $\mathrm{v}_u = 0$，因此 v 只取决于 v。

应用*(a)*，证明 u 只取决于 v，并完成证明。

(c). 第一部分由此即得出 *(b)*.

根据*(a)*，$\langle s_u, s_v\rangle = 0$。由于$s_{uu}$ 与 s_u成正比，我们还得到$\langle s_v, s_{uu}\rangle = 0$。因此，

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial}{\partial v}\langle s_u, s_u\rangle &= 2\cdot\langle s_{vu}, s_u\rangle = \\ &= 2\cdot\tfrac{\partial}{\partial u}\langle s_v, s_u\rangle - 2\cdot\langle s_v, s_{uu}\rangle = 0.\end{aligned}$$

完成最后一步。

(d). 由于 $\langle s_u, s_u\rangle = 1$，

$$0 = \tfrac{\partial}{\partial u}\langle s_u, s_u\rangle = 2\cdot\langle s_{uu}, s_u\rangle.$$

根据 *(c)*，$s_{uu} \parallel s_u$；因此，$s_{uu} = 0$。

由此推出，s_v 关于 u是线性的。利用这一点和方程

$$\nu_v = -k\cdot s_v, \quad \nu_{uv} = 0.$$

注。这个证明见谢尔盖·伊万诺夫第 [47, 3 学期的讲座。讲座 13]。另一种证明可通过应用彼得森–科达齐公式得到。

11.3. 应用 11.2 和平均曲率的定义。

11.4. 回想一下，$H = k_1 + k_2$ 和 $K = k_1\cdot k_2$，其中 k_1 和 k_2 是主曲率。根据欧拉恒等式，我们需要求平均值

$$(k_1\cdot(\cos\theta)^2 + k_2\cdot(\sin\theta)^2)^2.$$

证明3 8、3 8和1 8分别是 $(\cos\theta)^4$、$(\sin\theta)^4$ 和 $(\cos\theta\cdot\sin\theta)^2$ 的平均值，并利用这一点。

11.6. 利用梅尼耶定理（11.5），求出中心和曲率半径 γ 通过其

在点 p 处的法曲率。完成最后一步。

来源：这个命题与 11.5 一样，是由让·巴蒂斯特·梅尼耶证明的 [68]。

11.7. 利用 10.1 和梅尼耶定理（11.5）。

11.8. 利用 11.7a、3.6 和 11.5。

11.9. 应用梅尼耶定理（11.5），证明坐标曲线 $\alpha_v\colon u \mapsto s(u,v)$ 和 $\beta_u\colon v \mapsto s(u,v)$ 是渐近线；也就是说，它们的法曲率为零。

验证这两个曲线族彼此正交。应用 11.3。

11.10. 根据 11.7a，纬线和子午线都是曲率线。主曲率之一是母线曲率。利用 3.5a，证明它不大于 $a\cdot\sin x$。注意，纬线曲率等于 $a\cdot\frac{1}{\sin x}$；应用梅尼耶定理，证明沿其方向的主曲率不可能更大。完成最后一步。

11.11. 应用 11.7b。

11.13. 使用 10.1 和 7.14。

11.14. 再钻几个孔，或者把两个例子合并起来。在第二部分合并 V_2 和 V_3。

注。可以构造出一个具有环面边界的例子，但这是一个非常高级的练习。由球面围成的区域必然包含一个半径略大于$r_3=\sqrt{3/2}-1>r_2$的球；见 [55—58]。

12.1. 可以认为，Σ_1 在点 p的一个小邻域内由光滑函数 f 隐式定义，其中 U。由于 Σ_1 在点 p处局部支撑着 Σ_2，可以认为，对于所有 $x\in\Sigma_2\cap U$，$f(x)\geqslant 0$，同时 $f(p)=0$。

证明，对于任意光滑曲线 $\gamma_2\colon(-\varepsilon,\varepsilon)$，满足 $\gamma_2(0)=p$，有 $(f\circ\gamma_2)'(0)=0$。由此推出速度向量 $\gamma_2'(0)$ 与 Σ_1 在 p 处相切，并完成最后一步。

12.3. 选择曲率，使得

$$k_2(p)_{\Sigma_1}>k_2(p)_{\Sigma_2}>k_1(p)_{\Sigma_1}>k_1(p)_{\Sigma_2},$$

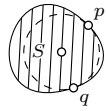
并假设第一主方向 Σ_1 与第二主方向 Σ_2 重合，反之亦然。

12.5 + 12.6. 像在 7.6–7.8 中那样，利用球面族进行推理。

12.7. 证明任意切平面 T_p 在点 p 处支撑 Σ，并应用 12.2。

12.8. 假设区域 R 内的最大球半径为 r，并在点 p 和 q 处与边界 R 相切。

设 S 是区域 R 在经过 p、q 和球心的平面上的投影。证明 S 由一条光滑的闭凸曲线围成，且曲率不超过 1。仿照 7.6 中的推理，证明 $r\geqslant 1$。



12.10. 选取平面 Π。P

设点 p 位于 $\Pi\cap\Sigma$的交线上。

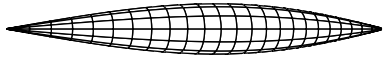
证明：若 Π 在点 p处与曲面相切，则 p 是 $\Pi\cap\Sigma$的一个孤立交点。

由此可知，若 γ 是 $\Pi\cap\Sigma$的一个连通分支，且不是孤立点，则 Π 沿着 γ与 Σ横截地相交；也就是说，对于任意点 $p\in\gamma$，都有 $\mathrm{T}_p\Sigma\neq\Pi$。应用隐函数定理证明 γ 是光滑曲线。

最后，γ 的曲率不小于 Σ 在同一方向上的法曲率。因此，γ 没有曲率为零的点。所以它的有向曲率符号恒定。

12.12. 反设结论不成立。根据 12.11，我们的曲面是凸的。证明该曲面从内部由一个球形穹顶支撑，其边界是我们的单位圆。由此导出与 12.4 矛盾。

12.13. 我们可以假设曲面的高斯曲率为正；否则命题显然成立。根据 12.11，该曲面围成一个凸区域，其中包含一条长度为 π 的线段。



根据 11.10，旋转曲面的高斯曲率（其图像为 $y=a\cdot\sin x$，其中 $x\in$ 属于 $(0,\pi)$）不超过 1。试着从内部用上述类型的旋转曲面支撑曲面 Σ。（与 7.11 比较。）

注。这个练习可以由下述更深刻的结果推出：如果闭集曲面的高斯曲率 Σ 不小于 1，那么内径 Σ 不大于 π。这意味着，在 Σ 上的任意两点都可以通过 Σ上的道路连接起来，且道路长度不超过 π。这一 teorema 由海因茨·霍普夫和维利·里诺夫证明 [43]，并以推广了它的萨姆纳·迈尔斯 [71]命名。

12.15；*(a)*。利用 R的凸性。

(b)。注意，映射 $\Sigma\to\mathbb{S}^2$ 光滑且正则。然后应用反函数定理，证明它的逆映射也光滑。

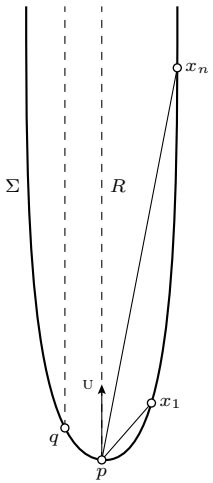
12.17; *(a)* (推理与 3.17b 类似。) 可以假设坐标原点位于 Σ 上。考虑点序列 $x_n\in\Sigma$，使得当 $n\to\infty$时，$|x_n|\to\infty$。

用 u_n 表示沿 x_n 方向的单位向量；也就是说，$\mathrm{u}_n = \frac{x_n}{|x_n|}$。

由于单位球面是紧致的，因此存在子序列 x_n，使得 u_n 收敛到一个单位向量，例如 u。证明可以将从原点出发、方向为 u 的射线取作 ℓ。

(b) + (c) + (d). 由于 R 是凸的，其投影 Ω 也凸。

验证对于任意方向 $\mathrm{v}_n = \frac{x_n - q}{|x_n - q|}$ 也都收敛到 u，并利用这一点。



证明 Σ没有垂直切平面。由此推出，从 Σ 到（x, y）平面的投影是正则的。利用反函数定理，证明集合 Ω 是开集。

(e). 反证法，假设存在某个数列 $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty) \in \partial\Omega$，序列 $f(x_n, y_n)$ 从上方有界。那么存在一个子序列，使得 $f(x_n, y_n)$ 收敛到某个有限值，比如 z_∞，或者发散到 $-\infty$。

在第一种情况下，请证明点 $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$ 不在 Σ 上，但在 Σ 上有任意接近它的点。也就是说，Σ 是非正规的——矛盾。

如果 $f(x_n, y_n) \to -\infty$，利用 f 的凸性证明 $f(\frac{x_n}{2}, \frac{y_n}{2}) \to -\infty$。注意，坐标原点属于 Ω；利用这一点证明 $(\frac{x_\infty}{2}, \frac{y_\infty}{2}) \in \Omega$，并导出矛盾。

12.18. 根据 12.17d，Σ 可由平面上的开凸区域 Ω 参数化。剩下要证明的是，Ω 可以参数化整个平面。

可以假设平面的坐标原点位于 Ω 内。请验证，在这种情况下，Ω 的边界用极坐标表示为 $(\theta, f(\theta))$，其中 $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 是正的连续函数。这样，在极坐标下，只改变径向坐标即可描述从 Ω 到平面的同胚；例如可表示为 $(\theta \mapsto \theta \frac{r}{1 - r/f(\theta)})$。

第二部分请运用 8.11c。

12.19. 选择坐标，使平面 (x, y) 在原点处从下方托住 Σ。

证明：对于某个 $\varepsilon > 0$，任何一条从原点出发、倾斜角不超过 ε 的直线，都只能在以原点为中心的单位球内与 Σ相交；可以假设 ε 很小，例如 $\varepsilon < 1$。考虑由从原点出发、倾斜角为 ε 的射线形成的圆锥，并将其向下平移 1。验证整个表面都位于这个圆锥内部。

12.20。选取不同的点 $p, q \in \Sigma$。应用 12.11，证明角 $\measuredangle(-q, \nu(p), \nu(q), p - q)$ 是锐角，而 $(\,(\,)\,)$ 是钝角。由此推出 $\nu(p) \neq \nu(q)$；也就是说，映射 ν: $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是单射。

(a). 对于给定的单位向量 u，考虑使内积 $\langle p, \mathrm{u}\rangle$ 取得最大值的点 $p \in \Sigma$。证明 $\nu(p) = \mathrm{u}$。由此推出映射 ν: $\Sigma \to \mathbb{S}^2$ 是满射，因此也是双射。

应用 10.7，得到我们的积分等于 $4 \cdot \pi = \operatorname{area} \mathbb{S}^2$。

(b). 选取在 12.17d 中得到的 (x, y, z) 坐标。验证对于任意点 p，法向量 $\nu(p)$ 与轴 z 形成钝角。因此，像 $\nu(\Sigma)$ 位于南半球。

应用 10.7，得到我们的积分不超过 $2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{area} \mathbb{S}^2$。

注。这个练习类似于推论 3.18。

13.1. 应用 11.7。

13.2. 证明曲面上的每个点都有一个法向曲率为零的方向，并利用这一点。

13.3. 假设 $p \in \Sigma$ 是局部极大值点 f。证明 Σ 在 p 处由其切平面支撑，并由此导出矛盾。

13.4. 设 Π_t 是在点 $\gamma(t)$ 处与 Σ 相切的仿射平面，而 ℓ_t 是 γ 在时刻 t 处的切线。

注意，Π_t 是函数图像，例如，是定义在 (x, y)-平面上的函数 h_t 的图像。记 ℓ_t 在 (x, y)-平面上的投影为 $\bar{\ell}_t$。证明导数 $\frac{d}{dt} h_t(w)$ 在点 w 处为零，当且仅当 $w \in \bar{\ell}_t$；并且当 w 从 $\bar{\ell}_t$ 的一侧移到另一侧时，该导数改变符号。

如果 $\bar{\gamma}$ 相对于点 w呈星形，那么 w 就不能与 $\bar{\ell}_t$ 相交。因此，函数 $t \mapsto h_t(w)$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上单调。请证明该函数不是常数，并由此得出矛盾。

来源：这是加琳娜·科瓦廖娃的结果 [53]，，由德米特里·帕诺夫重新发现 [75]。

13.5. 这是所谓莫尔斯引理的一个特例。我们将简述其证明。更具概念性的证明 [1] 基于莫泽技巧；见习题 8.11 的解。

在 p 处选取切向—法向坐标，使坐标轴沿主方向。假设 Σ 局部由图像 $z = f(x,y)$给出。需要证明，解 $f(x,y) = 0$ 是两条在 p相交的光滑曲线的并集。

证明以下命题：设$x \mapsto h(x)$ 是定义在开区间 $\mathbb{I} \ni 0$ 上的光滑函数，满足$h(0) = h'(0) = 0$ 且 $h''(0) > 0$。那么，在较小的区间 $\mathbb{J} \ni 0$ 上，存在唯一的光滑函数 $a\colon \mathbb{J} \to \mathbb{R}$，使得$h = a^2$，$a(0) = 0$ 且 $a'(0) > 0$。

注意，将区域缩小到一个小正方形 $|x|, |y| < \varepsilon$，就可以认为 $f_{xx} > 0$，和 $f_{yy} < 0$。证明，若 ε 足够小，则对每个 x，存在唯一的 $y(x)$，使得 $f_x(x, y(x)) = 0$；此外，函数 $x \mapsto y(x)$ 是光滑的。

设 $h(x) = f(x, y(x))$。请确保 $h(0) = h'(0) = 0$ 且 $h'' > 0$。应用上述命题，可得到如下函数 a，使得 $h = a^2$，其中 $a(0) = 0$ 且 $a'(0) > 0$。

请确保 $g(x,y) = h(x) - f(x,y) \geqslant 0$，$g_y(x,y) = 0$，以及 $g_{yy}(x,y) > 0$。将命题应用于每个函数 $x \mapsto g(x,y)$，固定 y，我们得到，对于某个光滑函数 $b(x,y)$，且 $b(x, y(x)) = 0$ 且 $b_y(x, y(x)) > 0$。

由此可知，

$$f(x,y) = a(x)^2 - b(x,y)^2 = \\ = (a(x) - b(x,y)) \cdot (a(x) + b(x,y)).$$

也就是说，$f(x,y) = 0$ 意味着 $a(x) = \pm b(x,y)$。

剩下要验证的是，两个函数 $g_\pm(x,y) = a(x) \pm b(x,y)$ 在原点处的梯度均非零且彼此不同，因此，每个方程 $a(x) \pm b(x,y) = 0$ 都确定了 p 邻域内的一条光滑曲线；参见 1E。

13.7. 请看 11.7c 中的伪球面。

13.8. 利用 13.6 和半球引理（2.23）。

在第二部分中，构造一根由两条闭合球面曲线围成的细管。

13.9. 设 Σ 是位于圆锥 K 内的开鞍面。证明存在一个平面 Π，它与 Σ 相交，并从 K 中截出一个紧区域。由此推出，Π 也从 Σ 中截出一个紧区域。

利用 9.13，稍微平移平面 Π，使它从 Σ 中截出一个带边界的紧曲面，然后应用 13.6。

13.11. 考虑 F_ε 到球面 Σ 的径向投影，其中球心为点 $p = (0,0,\varepsilon)$；也就是说，点 $q \in F_\varepsilon$ 映射为球面上的点 $s(q)$，该点位于射线 pq 上。

证明 s 给出了从 F_ε 到 Σ中南半球的微分同胚。只需注意，单位圆盘与半球微分同胚。

13.12. 根据仿射几何基本定理，仿射变换是光滑的。只需应用鼓包判据（13.10）。

13.14. 试着从旋转曲面中寻找一个例子；应用 11.7。

13.15. 考察图像被平行于（x，y）平面和（x，z）平面的平面所截得的截面，并应用梅尼耶定理（11.5）。

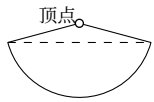
13.16. 假设Σ 到（x，y）平面的正交投影不是单射。证明存在一个点 $p \in \Sigma$，其切平面为竖直切平面；也就是说，$\mathrm{T}_p\Sigma$ 垂直于（x，y）平面。

设 Γ_p 是 Σ 与仿射切平面$\mathrm{T}_p\Sigma$的交集中包含点 p 的连通分支。利用13.5，证明 Γ_p 是若干条光滑曲线的并集，这些曲线可能彼此横截地相交。此外，其中两条曲线经过 p，且 Γ_p 在 Σ上不界定一个紧区域。

证明集合 Γ_p 至少有 4 个趋于无穷远的方向。另一方面，Σ 在紧致集合 K 之外是一个图像。因此，$\Gamma_p \setminus K$ 是一个单变量实函数的图像，它只有两个趋于无穷远的方向——矛盾。

14.1. 沿着从牛仔到顶点的线段剪开山的侧曲面，并将其展开到平面上（见图）。想一想，绷紧的套索的像可能是什么样子。

来源：我们从乔尔·法恩那里得知这道题，他将其归功于弗雷德里克·布尔茹瓦 [31]；另见 [49, Problem 12]。



14.5. 根据 12.11，Σ 围成一个严格凸区域。因此可以假设 $\nu(p) \neq \nu(q)$；否则，$p = q$，不等式显然成立。

还可以假设 $\nu p + \nu q \neq 0$（）；否则，右侧无定义。

在剩下的情况下，平面 $\mathrm{T}p$ 和 $\mathrm{T}q$ 的切平面沿一条直线相交，记为 ℓ。令 $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \angle(\nu(p), \nu(q))$。验证 $2 \cdot \cos \alpha = |\nu(p) + \nu(q)|$。设点 $x \in \ell$ 使总和 $|p - x| + |x - q|$ 取最小值。证明 $\angle[x\ {}^{p}_{q}] \geqslant \pi - 2 \cdot \alpha$。由此推出

$$|p - x| + |x - q| \leqslant \tfrac{|p-q|}{\cos \alpha}.$$

应用 14 4，$|p-q|_\Sigma \leqslant |p-x| +$ 。证明 。$+ |x - q|$

14 6 $\gamma \not\subset$ .. 假设找到了端点为 和 $\not\subset \Delta$ 的最短曲线。 $p \quad q \quad \Delta$

可以假设，只有一段弧 γ 位于 Δ之外。将这段弧关于 Π 反射，再与 γ 的剩余部分合在一起，就得到一条从 p 到 q的另一条曲线$\hat\gamma$ ；它的一部分沿着 Σ延伸，另一部分从外部绕过 Σ，但绝不会进入其内部。请注意，

$$\operatorname{length}\hat\gamma = \operatorname{length}\gamma.$$

用 $\bar\gamma$ 表示点$\hat\gamma$ 在 Σ上的最近投影。曲线 $\bar\gamma$ 位于 Σ中，端点与 γ 相同，并且根据 14.4

$$\operatorname{length}\bar\gamma < \operatorname{length}\gamma.$$

这意味着 γ 不是最短的——矛盾。

14.7. 证明短投影 $\mathbb{S}^2 \to \Sigma$ 是满射。应用 14.3 和 9.9b。

15.1. 证明 $\gamma''(t)$ 与 $\nabla_{\gamma(t)} f$ 成比例，其中 $f = x^2 + y^2$。应用 9.3。

15.3. 我们可以假设坐标原点位于旋转轴上，且向量 i 沿该轴方向。利用 15.2，证明只需证明 $\langle\gamma' \times \gamma$ 的值恒定，$\mathrm{i}\rangle$ 。

由于 $\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$，三个向量 i、 γ 和 γ'' 共面。特别地，$\langle\gamma'' \times \gamma,\ \mathrm{i}\rangle = 0$。因此，

$$\langle\gamma' \times \gamma, \mathrm{i}\rangle' = \langle\gamma' \times \gamma', \mathrm{i}\rangle + \langle\gamma'' \times \gamma, \mathrm{i}\rangle = 0.$$

15.4. 根据引理 15.2，可以认为 γ 按弧长参数化。根据测地线的定义， $\gamma''(s) \perp \mathrm{T}_{\gamma(s)}$。因此，

$$\gamma''(s) = k_n(s)\cdot\nu(\gamma(s)),$$

其中 $k_n(s)$ 是曲线 γ 在时刻 s的法曲率。由于 γ 是渐近线， $k_n(s) \equiv 0$；也就是说， $\gamma''(s) \equiv 0$。因此， γ' 是常数，所以 γ 沿直线运动；参见 3.2。

15.5. 用 μ 表示垂直于对称平面的单位向量 Π。既然 γ 位于 Π内，它的加速度 γ'' 沿着 Π，换句话说， $\gamma'' \perp \mu$。由 3.1 可知， $\gamma'' \perp \gamma'$，因为 γ 按弧长参数化。

由于 Σ 关于平面 Π对称，切平面 $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$ 也关于 Π对称。由此可知，$\mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$ 由 μ 和 $\gamma'(t)$张成。因此，$\gamma'' \perp \mu$ 和 $\gamma'' \perp \gamma'$ 意味着 $\gamma'' \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}\Sigma$；也就是说，$\gamma$ 是一条测地线。

15.8. 根据 15.5，任意一条子午线 Σ 都是闭合测地线。考虑一条任意的闭合测地线 γ。

如果 γ 在某一点与子午线相切，那么根据 15.6 的唯一性，曲线 γ 沿着这条子午线延伸；特别地，它不可收缩。

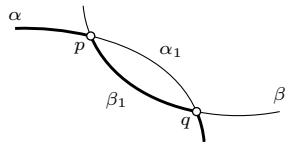
在剩下的情形中， γ 只能与经线横截相交。因此，经度 γ 是单调的，并且 γ 仍不可收缩。

15.13. 验证 $\nu(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$。接下来，计算加速度 $\gamma''(t)$，并确认它与 $\nu(\gamma(t))$成比例，因此 $\gamma''(t) \perp \mathrm{T}_{\gamma(t)}$。

确认从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(2\cdot\pi)$ 的线段包含在 Σ中，并利用这一点。

15.15. 假设两条最短线 α 和 β 有一对公共点 p 和 q。用 α_1 和 β_1 分别表示从 p 到 q的弧 α 和 β 。假设 α_1 与 β_1不重合。

注意， α_1 和 β_1 是端点相同的最短线；特别是，它们长度相同。将 α 中的 α_1 替换为 β_1 ，得到一条最短线，例如$\hat\alpha$，它不同于 α。根据 15.12，$\hat\alpha$ 是测地线。



假设 α_1 是 α的一条正则子弧；也就是说， $\alpha_1 \neq \alpha$，换句话说， p 或 q 不是曲线 α的端点。那么 α 和$\hat\alpha$ 有一个公共点，并且在该点有相同的速度向量。根据 15.6，

α α 与 ˆ重合——矛盾。

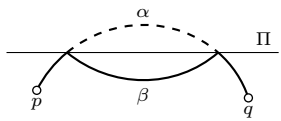
因此， p 和 q 是 α的端点。同理， p 和 q 是 β的端点。

对于第二部分，可以考虑圆柱面上的两条不同的测地线

$$\gamma_b(t) = (\cos t, \sin t, b\cdot t), t \in \mathbb{R}$$

$x^2 + y^2 = 1$。

15.16. 假设最短曲线 α 两次或更多次穿过 Π 。这种情况下，可以找到 α中一段圆弧 α_1 ，它严格位于 Π的一侧，只有其端点落在Π上，而且这两个端点不同于 α的端点。



从 α 中去掉圆弧 α_1 ，并用它关于 Π的反射 α_1 替换它。所得曲线，记作 β，位于曲面上；它的长度与 α相同，并连接同一对点，例如p 和 q。因此， β 是在 Σ上从 p 到 q 的最短曲线，且不同于 α。

我们可以假设 α 和 β 都按弧长参数化。根据 15.12， α 和 β 是测地线。由于 α 和 β 有一段公共圆弧，因此它们有一个公共点，并且在该点有相同的速度向量；根据 15.6 α 与 β 重合——这就产生了矛盾。

15.17. 设 W 是 Σ 外部的闭区域。请验证 $|p^s-q|_W$ 不依赖于 s。换句话说，线段 $[p^s,\gamma(s)]$ 与圆弧 $\gamma|_{[s,\ell]}$ 的并集，是 W 中从 p^s 到 q 的最短曲线。

由于 Σ严格凸，

$$|\gamma(s)-q|_W > |\gamma(s)-q|_{\mathbb{R}^3}$$

对所有 $s<\ell$均成立。因此，

$$\begin{aligned}|p^s-q|_W &= |p^s-\gamma(s)|_W + |\gamma(s)-q|_W > \\ &> |p^s-\gamma(s)|_{\mathbb{R}^3} + |\gamma(s)-q|_{\mathbb{R}^3} \geqslant \\ &\geqslant |p^s-q|_{\mathbb{R}^3}.\end{aligned}$$

然而，如果线段 $[p^s,q]$ 完全包含在 W 中，那么 $|p^s-q|_W=|p^s-q|_{\mathbb{R}^3}$，这就导致矛盾。

15.18. 仿照 5.16 中的论证，证明曲面上的所有测地线都具有恒定曲率。由此推出曲面的所有法曲率都相等，并仿照 10.8 中的论证。

来源：题目出自阿里·塔加维 [94]。

15.19; *(a).* 设γ 是 Σ上的测地线。验证其曲率不超过 1。仿照 3.26 中的论证，证明存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\varepsilon < |\gamma(t)| < 2\cdot\sin(\measuredangle(\gamma'(t),\gamma(t)))$$

对任意 t。由此推出，存在一个法向量场 ν 在 Σ 上，使得

❶ $$\varepsilon < |x| < 2\cdot\cos(\measuredangle(\nu(x),x))$$

对任意点 $x\in\Sigma$。

利用 ❶，证明映射 $\Sigma\to\Theta$（定义为 $x\mapsto 2\cdot\frac{x}{|x|}$）局部可逆。由此得出它可逆。其逆映射就是径向投影 $\rho\colon \Theta\to\Sigma$。

(b). 假设 $x=\rho(p)$ 且 $\mathrm{v}\in \mathrm{T}_p\Theta$。证明

$$2\cdot\cos(\measuredangle(\nu(x),x))\cdot|d_p\rho(\mathrm{v})| \leqslant |x|\cdot|\mathrm{v}|.$$

应用 ❶，验证 $|d_p\rho(\mathrm{v})|\leqslant|\mathrm{v}|$，并据此得出 ρ 不会增加长度。

(c). 假设 $y\in\Sigma$ 使到 $\frac{x}{2}$ 的距离最小。设 $x=\rho(p)$ 且 $y=\rho(q)$。

反证法，假设

$$|\tfrac{x}{2}-y| < |\tfrac{x}{2}|.$$

请确保 $\nu\colon \Sigma\to\mathbb{S}^2$ 不会增加曲线的长度。利用这一切以及 *(b)*，得出以下结论：

$$\begin{aligned}\measuredangle(\nu(x),\nu(y)) &= \measuredangle(x,y-\tfrac{x}{2}) > \\ &> 2\cdot\measuredangle[0\,{}_q^p] = \\ &= |p-q|_\Theta \geqslant \\ &\geqslant |x-y|_\Sigma \geqslant \\ &\geqslant \measuredangle(\nu(x),\nu(y));\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

最后，注意到可以平移曲面 Σ，使点 x 任意接近 Θ。应用上述推理可得，我们的区域包含一个与 Σ 在点 x 处相切的单位球。

来源：摘自邱洪达的文章 [85]。

15.21. 设 $t\mapsto\gamma(t)=(x(t)\ y(t)\ z(t))$ 是图形 $z=f(x,y)$ 上一条单位速度的闭测地线。由 Lieberman 引理，函数 $t\mapsto z'(t)$ 单调。由此推出坐标 z 在 γ上为常数，即 γ 位于水平面内。证明 γ 是直线，并由此得出矛盾。

15.22. 为 Σ 配备一个指向内侧的法向量场 ν。用 $k(t)$ 表示点 $\gamma(t)$ 处沿方向 $\gamma'(t)$ 的法向曲率 Σ。由于 Σ 是凸的，对任意 t，都有 $k(t)\geqslant 0$。

由于 γ 是一条单位速度的测地线，

$$\gamma''_t = k_t\cdot\nu_\gamma{}_t \qquad \langle\gamma'_t\ \gamma'_t\rangle = (\,)\,(\,) = 1$$

$(\,)$ 和 $(\,)\,(\,)$ 对任意 都成立。可以假设 p 是 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标原点。由于 p 位于 Σ内部，可得 $\langle\gamma(t)\ \nu(\gamma(t))\rangle\leqslant 0$，并且

$$\langle\gamma''(t),\gamma(t)\rangle = k(t)\cdot\langle\gamma(t),\nu(\gamma(t))\rangle \leqslant 0$$

对任意 t。由此推出

$$\begin{aligned}\rho''(t) &= \langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle'' = \\ &= 2\cdot\langle\gamma''(t),\gamma(t)\rangle + 2\cdot\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle \leqslant 2.\end{aligned}$$

15.23. 可以认为 γ 是按弧长参数化的。定义 $\nu(t):=\nu(\gamma(t))$。于是$\langle\gamma'(t)\ \nu(t)\rangle\equiv 0$，并且由于 γ 是测地线，$\gamma''(t)\parallel\nu(t)$。由此

$$\begin{aligned}|\gamma''(t)| &= |\langle\gamma''(t),\nu(t)\rangle| = \\ &= |\langle\gamma'(t),\nu(t)\rangle' - \langle\gamma'(t),\nu'(t)\rangle| = \\ &= |\langle\gamma'(t),\nu'(t)\rangle| \leqslant \\ &\leqslant |\gamma'(t)|\cdot|\nu'(t)| = |\nu'(t)|.\end{aligned}$$

对 t 积分，得到

$$\Phi(\gamma)\leqslant \operatorname{length}(\nu\circ\gamma).$$

15.25. 设 $\gamma(t)=(x(t)\ y(t)\ z(t))$。证明

❷ $$|\gamma''(t)| = z''(t)\cdot\sqrt{1+\ell^2}$$

适用于任何 t。

确保当 时，

$z'\ t\ \to \pm\frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$ $t\to 0$。由此得出 $\to\pm\infty$

❸ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z''(t)\cdot dt=\frac{2\cdot\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}.$$

由 ❷ 和 ❸，

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\gamma''(t)|\cdot dt=\\&=\sqrt{1+\ell^2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z''(t)\cdot dt=\\&=2\cdot\ell.\end{aligned}$$

15.26. 使用 15.24 和 4.6。

在第二部分，考虑圆锥上斜率为 2 的测地线，并将它的顶点磨圆。

注。 该断言对于 $\sqrt{3}$-利普希茨函数仍然成立，并且 $\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ 是最优常数；参见 17.7。这与牛仔和套索问题（14.1）中的斜率相同。

15.28; *(a)*. 请验证

$$|\gamma|\leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad \langle\nu,\varepsilon\cdot\nu-\gamma\rangle\leqslant 0,$$

并运用这一点。

(b). 证明

$$|\gamma|\leqslant 1,\quad |\gamma'|=1\quad\text{и}\quad \rho'=2\cdot\langle\gamma,\gamma'\rangle,$$

并运用这一点。

(c). 证明

$$\begin{aligned}&|\gamma'|=1, && \langle\gamma,\nu\rangle=|\gamma|\cdot\cos\theta,\\&\gamma''=-k\cdot\nu, && \rho''=2\cdot\langle\gamma',\gamma'\rangle+2\cdot\langle\gamma,\gamma''\rangle,\end{aligned}$$

并运用这一点。

(d). 设 x,y 是单位球面上投影到 γ 两端的点。用球面上长度为 $\leqslant\pi$ 的弧连接 x 和 y，并将其投影到 Σ 上。应用 14.3，并利用 γ 是最短曲线这一事实。

(e). 设 $\gamma\colon[0,\ell]\to\Sigma$ 是弧长参数化。利用 *(d)*，证明 $\leqslant$ $\leqslant\pi$ 。利用 *(a)*、*(b)*、*(c)* 以及 $|\gamma|\geqslant\varepsilon$，推导出

$$2\cdot\ell-2\cdot\varepsilon^2\cdot\Phi(\gamma)\geqslant\int\limits_0^{\ell}\rho''(t)\cdot dt.$$

由 *(b)* 推导出 $\int\rho''\geqslant -4$。完成最后一步。

16.1; *(a)*. 证明 $\langle \mathrm{v}(t),\ \mathrm{v}'(t)\rangle=0$，并利用这一点。

(b) 证明 $|\mathrm{v}(t)|$、$|\mathrm{w}(t)|$ 和 $\langle\mathrm{v}(t),\mathrm{w}(t)\rangle$ 均不变；证明方法与 *(a)* 相同。然后利用 $\langle\ t\ ,\ \ t\ \rangle=\mathrm{v}(\ )\ \mathrm{w}(\ )\ \mathrm{v}(\ )\ \mathrm{w}(\ )\cos$ $=|\ \ t\ |\cdot|\ \ t\ |\cdot\ \ \theta$。

16.4. 注意到 Σ_1 在曲线 γ的每一点都支撑着 Σ_2。由此推出，γ 作为 Σ_1 上的曲线和作为 Σ_2 上的曲线具有相同的法向量。应用 16.3。

16.5. 几乎任意闭曲线都能解决这个问题。例如，考虑球面上由八分体 $\mathbb{R}^3$ 截出的直角球面三角形。证明，沿它进行平行移动会使切平面旋转角度 $\frac{\pi}{2}$。

17.2. 根据 12.15，Σ 是一个光滑球面。根据 Jordan 定理（A.12），曲线 γ 将 Σ 分成两个圆盘。用 Δ 表示位于 γ左侧的圆盘。

验证 $\Psi(\gamma)=\operatorname{length}\gamma$，并将高斯-博内公式（17.1）应用于 Δ。

17.3. 证明 $k=\cos\alpha\cdot k_0$，其中 k 是 $\partial\Delta$ 在 Δ处的测地曲率，而 k_0 是 $\partial\Delta$ 在 (x,y) 平面上的测地曲率。应用 6.5 和高斯-博内公式（17.1）。

注。 根据 10.10，$\partial\Delta$ 是图像中的曲率线。

17.4. 利用 10.7、12.20a 以及高斯—博内公式（17.1）。

在最后一部分应用 2.25。

17.5. 在第一部分应用高斯—博内公式（17.1）。

在第二部分中，假设两条闭合测地线 γ_1 和 γ_2 不相交，那么 γ_2 就位于其中一个区域内，设为 R_1，该区域是 γ_1 从 Σ中切出的。类似地，γ_1 也位于其中一个区域内，设为 R_2，该区域是 γ_2 从 Σ中切出的。

注意，R_1 和 R_2 覆盖了 Σ，且彼此有重叠。由第一部分可知，高斯曲率在 Σ 上的积分严格小于$4\cdot\pi$，这与 12.20a矛盾。

17.6；（简单）。考察由闭环界定的 4 个区域。应用高斯-博内公式（17.1），证明每个区域上的高斯曲率积分都超过 π。由此与 12.20a 矛盾。

（困难）。设 α、β 和 γ 为三角形的角。应用高斯-博内公式（17.1），证明三个环路围成的区域上的高斯曲率积分分别等于 $\pi+\alpha$、$\pi+\beta$ 和 $\pi+\gamma$。

将高斯-博内公式应用于三角区域，验证 $\alpha+\beta+\gamma>\pi$。利用 12.20a 并导出矛盾。

（无望的）。这确实很难。基于 19.2b 的解答见 [80]。

17.7. 只需证明曲面上不存在测地线环路。假设存在一个环路，估算整个曲面上的高斯曲率积分，以及由测地线环路围成的圆盘上的高斯曲率积分。

17.8; *(a)*. 由 14.2 和 15.12 可知，Σ 上的任意两点都可以用测地线连接。假设点 p 和 q 可以用两条不同的测地线 γ_1 和 γ_2连接。转而考虑它们的弧，可以认为 γ_1 和 γ_2 除端点外没有公共点。由于曲面是单连通的，γ_1 和 γ_2 共同围成一个圆盘，例如 $\Delta \subset \Sigma$。剩下的就是对 Δ 应用高斯-博内公式并得出结论。

(b)。使用 *(a)* 和 15.11。

17.11. 应用 16.6 和 17.10。

17.13. 对于由条件 $\gamma_\tau(0) = \alpha(\tau)$ 和 $\gamma'_\tau(0) = \alpha'(\tau)$ 给出的单参数测地线曲线族 γ_τ，按照 17.12 证明的结尾部分进行推理。

17.14. 第一条曲线对应于光滑化圆锥上的测地线。请确认，第二条和第三条曲线可通过定理证明中的推理排除。

17.16. 将曲面划分为圆盘，统计所得划分中的边、顶点和圆盘数。计算欧拉示性数，并应用 17.15。对于莫比乌斯带和裤子曲面，利用边界曲线的测地曲率为零这一事实。对于圆柱面，利用边界曲线是平面闭曲线这一事实，并应用 6.5。

18.4. 根据高斯引理（18.2），以点 q 为原点的极坐标在附近的点处给出半测地坐标图。因此，只需找到点 $q \neq p$，使得以 q 为原点的极坐标覆盖 p 上的 Σ。根据 15.10，任取一个充分接近 p 的点 q 即可。

18.5; *(a)*。请注意，可以在 Σ 上选择定向，使得对于任意 θ，$b_r(0,\theta) = 1$。此后，可以认为对于所有足够小的 $r > 0$，$b(r,\theta) > 0$。

假设对于某一对 (r_1,θ_1)，其中 $0 < r_1 < r_0$，$b(r_1,\theta_1) < 0$。请验证，如果 θ_2 充分接近 θ_1，则在区间 $(0,r_1)$ 上定义的径向曲线 $r \mapsto b(r,\theta_1)$ 和 $r \mapsto b(r,\theta_2)$ 相交。因此，$\exp_p$ 在 B 处不是单射——矛盾。

(b). 假设 $b(r_1,\theta_1) = 0$。应用 *(a)*，证明 $b_r(r_1,\theta_1) = 0$。应用 18.3，推出对于任意的 r，$b(r,\theta_1) = 0$。这与 $b_r(0,\theta_1) = 1$ 矛盾。

(c). 需要证明 $\exp_p$ 在 B 中正则。假设向量 $v \in B$ 的极坐标为 (r,θ)，其中 $r > 0$。证明 $\exp_p$ 在点 v 处正则，当且仅当 $b(r,\theta) \neq 0$。推出 $\exp_p$ 在 $B \setminus \{0\}$ 中正则。

根据 15.9，$\exp_p$ 在零点正则。因此，$\exp_p|_B$ 的限制是一个正则的单射光滑映射。利用反函数定理（A.25），证明 $\exp_p|_B$ 的限制是到其像上的微分同胚。

18.6; *(a)*. 由于基 u,v ν 是正交归一的，前两个向量恒等式等价于以下六个实数恒等式:

$$\text{❶}\quad \begin{aligned} &\langle \mathrm{u}_u, \mathrm{u}\rangle = 0, && \langle \mathrm{v}_u, \mathrm{v}\rangle = 0,\\ &\langle \mathrm{u}_u, \mathrm{v}\rangle = -\tfrac{1}{b}\cdot a_v, && \langle \mathrm{v}_u, \mathrm{u}\rangle = \tfrac{1}{b}\cdot a_v,\\ &\langle \mathrm{u}_u, \nu\rangle = a\cdot \ell, && \langle \mathrm{v}_u, \nu\rangle = a\cdot m. \end{aligned}$$

对恒等式$\langle$u、u$\rangle = 1$和 $\langle$v、v$\rangle = 1$关于 u求偏导数，可得 ❶ 中的前两个恒等式。

此外，请注意，

$$\text{❷}\quad \mathrm{v}_u = \tfrac{\partial}{\partial v}(\tfrac{1}{b}\cdot s_v) = \tfrac{1}{b}\cdot s_{uv} + \tfrac{\partial}{\partial u}(\tfrac{1}{b})\cdot s_v.$$

由于 $s_u \perp s_v$，可得

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{v}_u, \mathrm{u}\rangle &= \tfrac{1}{a\cdot b}\cdot\langle s_{vu}, s_u\rangle = \\ &= \tfrac{1}{2\cdot a\cdot b}\cdot\tfrac{\partial}{\partial v}\langle s_u, s_u\rangle = \\ &= \tfrac{1}{2\cdot a\cdot b}\cdot\tfrac{\partial a^2}{\partial v} = \\ &= \tfrac{1}{b}\cdot a_v. \end{aligned}$$

对 $\langle$u, v$\rangle = 0$ 关于 u 求偏导，得到

$$\langle \mathrm{v}_u, \mathrm{u}\rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{u}_u\rangle = 0.$$

由❶还可得到另外两个恒等式。

由于 u 和 v 是正交归一的，由 10.4 可知

$$\text{❸}\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{a^2}\cdot\langle s_{uu}, \nu\rangle = \ell, && \tfrac{1}{a\cdot b}\cdot\langle s_{uv}, \nu\rangle = m,\\ &\tfrac{1}{a\cdot b}\cdot\langle s_{vu}, \nu\rangle = m, && \tfrac{1}{b^2}\cdot\langle s_{vv}, \nu\rangle = n. \end{aligned}$$

应用❷、❸以及 $s_v \perp \nu$，得到

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{u}_u, \nu\rangle &= \tfrac{1}{a}\cdot\langle s_{uu}, \nu\rangle = a\cdot\ell,\\ \langle \mathrm{v}_u, \nu\rangle &= \tfrac{1}{a}\cdot\langle s_{uv}, \nu\rangle = a\cdot m. \end{aligned}$$

我们得到了❶中的最后两个恒等式。

至此，我们证明了 *(a)* 中的前两个恒等式；其余的也可同样证明。

(b). 回顾一下，高斯曲率等于矩阵 $\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$ 的行列式；也就是说，$K = \dfrac{\ell\cdot n - m^2}{\ldots}$。因此，

$$\begin{aligned} a\cdot b\cdot K &= a\cdot b\cdot(\ell\cdot n - m^2) = \\ &= \langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}_v\rangle - \langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}_u\rangle = \\ &= \Big(\tfrac{\partial}{\partial v}\langle \mathrm{U}_u, \mathrm{V}\rangle - \cancel{\langle \mathrm{U}_{uv}, \mathrm{V}\rangle}\Big) - \\ &- \Big(\tfrac{\partial}{\partial u}\langle \mathrm{U}_v, \mathrm{V}\rangle - \cancel{\langle \mathrm{U}_{uv}, \mathrm{V}\rangle}\Big) = \\ &= \tfrac{\partial}{\partial v}(-\tfrac{1}{b}\cdot a_v) - \tfrac{\partial}{\partial u}(\tfrac{1}{a}\cdot b_u). \end{aligned}$$

18.7. 在 $a = b$ 的条件下应用 18.6，并化简。

18.11. 验证内等距会将最短线映射为最短线，并应用 15.12。

18.12. 应用 18.10，验证 $\exp_p$ 保持长度，并利用这一点。

18.13. 改写 18.10 的证明，得出 $K \equiv 1$ 意味着，对于所有足够小的 $r \geqslant 0$，$b(\theta, r) = \sin r$。

18.14. 解微分方程 $x'(t) = \sqrt{1 - |y'(t)|^2}$，即可求得 $x(t)$。只要 $y\ t\ > 0\quad |y'\ t\ | = = |a\cdot\quad t| < 1$ ( ) 和 ( ) sin，解就有定义。

应用 11.7b，求曲面 Σ_a 的高斯曲率。

根据 18.13，Δ_a 上的小圆盘与单位球面上的圆盘内等距。要证明 Δ_a 在 $a \neq 1$ 处与球面圆盘 Δ_1 不全等，请证明它在某一点的主曲率不等于 1。

18.15. 验证，对于 (u, v) 平面上的任意两点 p 和 q，$|f(p) - f(q)| \leqslant |p - q|$。

设 $f(u, v) = (x(u, v)\ \ y(u, v)\ \ z(u, v))$ 可以假设，对于任意 v，$z(0, v) = v$。

将此观察结果和三角不等式应用于 $a \to \infty$ 时的点 $(0, -a)$、(u, v_1)、(u, v_2) 和 $(0, a)$，证明

$$\begin{aligned} z(u, v_1) &= v_1, & z(u, v_2) &= v_2, \\ x(u, v_1) &= x(u, v_2), & y(u, v_1) &= y(u, v_2). \end{aligned}$$

得出结论。

19.1. 由三角形不等式 $c_n \leqslant a_n + b_n$ 和条件 a_n，$b_n > \varepsilon$，推出数列

$$s_n = \frac{a_n + b_n + c_n}{2\cdot a_n\cdot b_n}$$

有界。验证

$$\frac{(a_n + b_n)^2 - c_n^2}{2\cdot a_n\cdot b_n} = s_n\cdot(a_n + b_n - c_n) \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。利用这一点和余弦定理

$$a_n^2 + b_n^2 - 2\cdot a_n\cdot b_n\cdot\cos\tilde{\theta}_n - c_n^2 = 0,$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$证明 $\cos\theta_n \to -1$，因此当 $n \to \infty$ 时，$\theta_n \to \pi$。

19.3. 考虑双曲面上的一个三角形，其顶点为 (1, 0, 0)、$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$。验证它的所有角都等于 π，所有模型角都等于 $\frac{\pi}{3}$。

19 4 $|p - x|_\Sigma \leqslant |p - q|_\Sigma \quad |q - ..$ 验证 和。推出 $- x|_\Sigma \leqslant |p - q|_\Sigma$

$$\tilde{\angle}(x\ {}^{p}_{q}) \geqslant \frac{\pi}{3},$$

并应用 19.2b。

19 5 $\leqslant 2\cdot\pi$ b。 $\angle[p\ {}^{x}_{y}] + \angle[p\ {}^{y}_{z}] + \angle[p\ {}^{z}_{x}] \leqslant ..$ 证明，并应用 . 19 2

19 8 $| \ | = ..$ $= |p - x| \ \ | \ | = 1 \quad \angle \quad , \quad = \angle[x\ {}^{p}_{q}]$

选取向量 u 和 w，使得 w，u，且 (u w)。考虑函数 f：$t \mapsto t + |\mathrm{w}| - |\mathrm{w} - t\cdot\mathrm{u}|$。注意，$f(0) = 0$，

$$f(|x - y|) = |x - p| + |x - y| - \Upsilon[x\ {}^{p}_{y}],$$
$$f(|x - q|) = |x - p| + |x - q| - \Upsilon[x\ {}^{p}_{q}].$$

证明 f 是凹函数，并利用这一点。

19.9；*(a)*。利用 Rauch 比较定理（18.10）以及 15.10 中指数映射的性质。

(b). 反证法，假设对于任意点 $p \in \Sigma$，都存在一点 $q = q(p) \in \Sigma$，使得 $|q - p|_\Sigma < 100\cdot R_p$ 且 $R_q < (1 - \frac{1}{100})\cdot R_p$。

从任意点 p_0 出发，构造这样一个点列 p_n，使得 $p_{n+1} := q(p_n)$。证明 p_n 收敛，并证明当 $n \to \infty$ 时 $R_{p_n} \to 0$。由此导出与 *(a)* 矛盾。

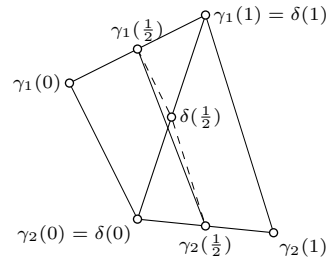
(c). 重复该定理的证明，假设点 p 满足 *(b)*。

19.13. Примените 19.11b и 19.11B.

19.14. 将 19.11b 或 19.11B 应用两次：先用于三角形 $[pxy]$ 和 $\bar{x} \in [p, x]$，再用于三角形 $[p\bar{x}y]$ 和 $\bar{y} \in [p, y]$。然后应用角的单调性 (A.15)。

19.15. 只需证明詹森不等式：

$$\begin{aligned} |\gamma_1(\tfrac{1}{2}) - \gamma_2(\tfrac{1}{2})| \leqslant\ & \tfrac{1}{2}\cdot|\gamma_1(0) - \gamma_2(0)| + \\ & + \tfrac{1}{2}\cdot|\gamma_1(1) - \gamma_2(1)|. \end{aligned}$$



设 δ 是从 $\gamma_2(0)$ 到 $\gamma_1(1)$ 的测地路径。由 19.14

$$|\gamma_1(\tfrac{1}{2}) - \delta(\tfrac{1}{2})| \leqslant \tfrac{1}{2}\cdot|\gamma_1(0) - \delta(0)|,$$
$$|\delta(\tfrac{1}{2}) - \gamma_2(\tfrac{1}{2})| \leqslant \tfrac{1}{2}\cdot|\delta(1) - \gamma_2(1)|.$$

将它们相加，并应用三角形不等式。

注。 根据比较定理，欧几里得平面的情形并不更简单。

19.16. 设 $B = \bar{B}[p, R]_\Sigma$。对于给定的点$x \in B$，选取一条测地线 $[p, x]$，并将 T_p 中沿 $[p, x]$ 方向、距 p 为 $|p - x|_\Sigma$ 的点记为 $\tilde{x}$。映射 $x \mapsto \tilde{x}$ 将 B 映入 T_p 中的 R-球；根据 19.11a，此映射不会缩短距离，命题得证。

19.17. Пусть $p \in \Sigma$ — центр Δ.

(a)。 考虑带有 $|p-x|_\Sigma = |p-y|_\Sigma = R$ 的测地三角形 $[pxy]_\Sigma$。设 $\alpha = \measuredangle[x\,{}^p_y]$、$\beta = \measuredangle[y\,{}^p_x]$ $\ell = |x - y|_\Sigma$ 19 11 和 。利用 。A，证明

$$\pi - \alpha - \beta > \tfrac{\ell}{R} + o(\ell).$$

设 σ —从 x 到 y的弧 $\partial\Delta$ 。验证 $[x, y]_\Sigma$ 位于由 $[p, x]$、$[p, y]$ σ 和所围成的区域内。应用高斯-博内公式，证明 $\Psi(\sigma) > \pi - \alpha - \beta$。令 $\ell \to 0$趋于极限，并得出结论。

(b). 根据 19.11A，映射 exp$\to$ Σ 15 ^{p} ^{p} $\to$: T 不会缩短距离。由 .12 可知，它将以零为圆心的 R-球映射到 T_p 上的 Δ。由此得出该命题。

19.18. 重复 7.14 的证明，使用 19.17a。对于最后一个结论，应用 19.17b。

来源： 这道题由德米特里·布拉戈提出。

A.1. 检查第 175 页上度量定义的所有条件。

A.2; *(a)*。注意， $|p - q|_{\mathcal{X}} \leqslant 1$。应用三角不等式，证明对于任意，$- x|_{\mathcal{X}} \leqslant 2$ $x \in B[q, 1]$ $|p$ 。得出结论。

(b). 取带标准度量的 $\mathcal{X}$射线 $[0, \infty)$； $p = 0$ 和$q = \frac{4}{5}$。

A.6. 证明当 $\delta = \varepsilon$时，A.5 中的条件成立。

A.8. 假设 Ω 的补集 $= \mathcal{X} \setminus Q$ 是开集。那么，对每个点 $p \in \Omega$，都存在这样的 $\varepsilon > 0$，使得 $|p - q|_{\mathcal{X}} > \varepsilon$ 对任意$q \in Q$均成立。因此， p 不可能是Q中任何数列的极限点。由此，Q 中的任意序列的极限都属于 Q，并且根据定义， Q 是闭集。

现在假设 $\Omega = \mathcal{X} \setminus Q$ 不是开集。证明存在一点 $p \in \Omega$ 和一个序列 $q_n \in Q$ $|p -$, $- q_n|_{\mathcal{X}} < \frac{1}{n}$ n 使得对任意 。由此推出 $q_n \to p$ 当 $n \to \infty$时，并因此 Q 不是闭集。

后记

如果读完这本书后，你开始学习黎曼几何，那么该区域的半数内容你都会感到熟悉。不过，你得先弄懂张量分析；例如，可以参考 Richard Bishop 和 Samuel Goldberg [9]的著作。

下面列出我们所知且喜爱的黎曼几何导论，从简明详尽的入门书到精炼而深奥的著作：

◇ Manfredo do Carmo 的《黎曼几何》 [15]。◇ 尤里·布拉戈和维克多·扎加勒尔的《黎曼几何导论》 [14]。◇ Detlef Gromoll、Wilhelm Klingenberg 和 Werner Meyer 的《整体黎曼几何》 [37, 38]。◇ Jeff Cheeger 和 David Ebin 的《比较几何》 [21]。◇ Mikhail Gromov 的《曲率的符号与几何意义》[39]。祝你好运。

安东·彼得鲁宁和Sergio Zamora Barrera，宾夕法尼亚州立学院，宾夕法尼亚州，2021年5月11日。

主题索引

$|x-y|$, $|x-y|_{\mathcal{X}}$（距离），175$|x-y|_A$（内度量），25$\tilde{\angle}[y\,{}^{x}_{z}]$ 179（角度量），$\angle\,(y\,{}^{x}_{z})$（模型角），163$[p,q]$, $[p,q]_\Sigma$（最短曲线），119$[y\,{}^{x}_{z}]$（扇形），163$[xyz]$, $[xyz]_\Sigma$（测地三角形），163$\tilde{\triangle}$ 163（模型三角形），$\bar{B}\,p\;R_{\mathcal{X}}\;\bar{B}[p,R]_{\mathcal{X}}$ 176（, ），（球），$D_{\mathrm{W}}f$（方向导数），83d_pf（微分），86f_x（偏导数），14 GB（高斯–博内公式），142H（平均曲率），93 i, j, k（标准基），95 Jac（雅可比矩阵），183 jac（雅可比行列式），184K（高斯曲率），93κ（曲率），29k（有向曲率），54k_1, k_2（主曲率）92k_g（测地曲率），98k_n（法曲率），98k_{V}（法曲率），99ℓ, m, n（海森矩阵分量），92 M_p（海森矩阵），92ν（法向量场），88$\Phi(\gamma)$（全曲率），41$\Psi(\gamma)$（全有向曲率），57$\Psi(\gamma)_\Sigma$（总测地曲率），137σ_s（密切圆），62τ（挠率），48 t, μ, ν（达布标架），98 t, n, b（弗雷内标架），47 拉古诺夫水族馆，101 渐近方向与渐近线，111 仿射变换，113

达布基，98；弗雷内标架，48、54；基点，12

副法向量，48 博雷尔子集，184 转向总变差，31 速度向量，13 向量积，30 曲线顶点，65 螺旋线，20 嵌入，177 外角，40 外在几何，118 内径，122 内在几何，118 内等距，160 内度量，24，163 凹函数，184 内接折线，16 旋转，155 凸曲线，20，67 包络，22，179 曲面，106 函数，184 凸集，122，179 高斯曲率，93 高斯映射，89 螺旋面，101 测地线，123 曲率，98 测地完备，125 测地三角形，163 主曲率和方向，92 光滑曲线，13 参数化，13，79 曲面，76 函数，13，76，80 光滑映射，85，124，182 同胚，177 帽状区域，112 边界，177

直径，27 微分同胚，81 微分，86 曲线长度，16 经度，80 弧，12 自然参数化，19 闭曲线，12 曲面，78 闭集，177 闭球，176 星形集，111,127 三角形超额，179 可测函数，181 等距空间，176 等距，176 等温坐标，155 反演，61 诱导内度量，24 区间，11 单射，176 坐标图，79 切向量，30 指标曲线，29 曲线，31 平面，82 直线，30 切平面，82 切向-法向坐标，91 切向场，134 切曲面，104 切向量，48，82 悬链面，101 钟形函数，182 紧集，177 保角坐标图，155 短投影，120 边界，77 最短曲线，119 曲线，12 维维亚尼曲线，186 矩曲线，50 单位速度曲线，19 曲率，29，57，93，98 有向曲率，54 无符号曲率，54 挠率，48 分段光滑曲线，41 拉普拉斯算子，155 亚历山德罗夫引理，171 利伯曼引理，131 莫尔斯引理，198 弓形引理，36 螺旋引理，61 道路连通集，178 直纹曲面，110 曲率线，93 斜坡线，50 利普希茨函数，181 对数，130 局部支撑，104 局部同胚，11 局部平坦曲面，160 局部坐标，79 分段测地线，138 海森矩阵，92 子午线，80 度量空间，175 极小曲面，94 极小测地线，129 模型边，168 模型三角形与角，163 单调映射，12 自然参数化，19 连续，176 连续辐角，56 詹森不等式，184 非扩张映射，88 隐式曲线，14 法向量，88 法曲率，98 法向量，47,48 母线，80 单连通曲面，141, 164 邻域，177 形算子，94 支撑曲线，65 平面，180 曲面，104 直线，33 支撑曲线，65 有向曲率，54 定向曲面，88 正交坐标图，154 开曲线，15 曲面，78 开集，177 开球，176 纬线，80 平行曲线，60 平行场与平行移动，134, 135 参数化，11，78,81

弧长，19 参数化曲线，11 环路，12 曲面，76 旋转，80 带边界，77 Jacobi场，152 法向量场，88 总测地曲率，138 曲率，31 有向曲率，57 半测地线，152, 154 半三次抛物线，186 极坐标，149 接触阶，30,48, 52, 61, 82,92 流，195 几乎处处，183 曲线乘积，40 方向导数，84, 184 简单曲线，11 反向接触，64 伪球面，101 路径，12,178 一致连续，181 一致收敛，181 等度连续序列，181 单射半径，128 曲率半径，61 划分，16 正则参数化，13, 78 正则点，183 正则值，14, 183 重新参数化，12 自伴算子，95 连通集，178 鞍面，110 S 形函数，182 内积，28 科赫雪花，17 本征曲线，15 曲面，77 同向接触，64 同向与反向曲面，104 克莱罗关系，123 密切圆，61 平面，48 球面，52 密切抛物面，92 保长度，160 保距离，176 可求长曲线，16 平均曲率，93 扇形，163 顶点度，147 立体投影，194 球面曲线，25 球面映射，89 伯恩斯坦定理，113 若尔当定理，178 Ionin–Pestov定理，69 Meusnier定理，100 芬歇尔定理，31 Hopf–Rinow定理，125 隐函数定理，183 分离超平面定理，180 四顶点定理，71 反函数定理，183 比较定理，164 Rauch比较定理，159 胖/瘦三角形，172 拓扑曲面，76，177 点，175 返回，40 相切，64 曳物线，101 横截性，111，197 平凡曲线，141 旋轮线，57 Moser技巧，195 高斯–博内公式，140，146 Green公式，157 克罗夫顿公式，22 欧拉公式，99 余面积公式，112 Frenet公式，49，55 基本形式，94 弦，21 曲率中心，61 柱面，97 部分极限，120 四重割线，191 纬度，80 渐伸线，51 渐屈线，63 欧拉示性数，146 指数映射，127 雅可比行列式，86，184

参考文献

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu。《流形、张量分析及其应用》。第二版。第 75 卷。应用数学科学。Springer-Verlag，纽约，1988，x+654.[2] A. Д. Александров。《凸曲面的内在几何》。1948 年。[3] А. Д. Александров，Ю. Г. Решетняк。《在 n 维欧几里得空间中的曲线转动》。西伯利亚数学杂志 29.1（1988），3—22。[4] S. Alexander, V. Kapovitch, A. Petrunin。《Alexandrov几何导论：CAT(0)空间》。Springer数学丛书。2019。[5] S. Alexander, V. Kapovitch, A. Petrunin。《Alexandrov几何——基础》。第 236 卷。数学研究生教材。2024。[6] В. И. Арнольд。《常微分方程》。1984 年。[7] V. I. Arnold。《平面曲线及焦散的拓扑不变量》。第 5 卷。大学讲义系列。1994。[8] S. N. Bernstein。《关于一个几何定理及其在椭圆型偏微分方程中的应用》。哈尔科夫数学学会通报 15.1（1915），38—45。 [德译见《数学杂志》26；俄译见《俄罗斯数学科学进展》第 VIII 期（1941），75—81 页，以及 С. Н. Бернштейн，《文集》第 3 卷（1960），第 251—258] 页。[9] R. Bishop, S. Goldberg。《流形上的张量分析》。1980 年。[10] В. Бляшке。《微分几何导论》。1957 年。[11] W. Blaschke。《圆与球》。1916 年。 [俄译本：Бляшке，В.《圆与球》，1967 年。][12] O. Bonnet。《关于曲率线为平面曲线或球面曲线的曲面回忆录》。巴黎综合理工学院学报 20（1853），117—306。[13] D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov。《度量几何教程》。第 33 卷。数学研究生教材。2001 年。 [俄译本：Д. Ю. Бураго，Ю. Д. Бураго，С. В. Иванов，《度量几何教程》，2004 年。][14] Ю. Д. Бураго，В. А. Залгаллер。《黎曼几何导论》。1994 年。[15] M. do Carmo。《黎曼几何》。数学：理论与应用。1992 年。 [俄译本：М. до Кармо，《黎曼几何》，2015 年。][16] É. Cartan。《黎曼空间几何讲义》。1928 年。[17] B. Ceylan。《水洼中的两轮月亮》。《数学情报员》（2023），1—2。[18] G. D. Chakerian。《关于闭空间曲线的一个不等式》。《太平洋数学杂志》12（1962），53—57。[19] G. D. Chakerian。《关于若干几何不等式》。《美国数学学会会刊》15（1964），886—888。

[20] G. Chambers, Y. Liokumovich.《将同伦转化为同痕，并以有效方式将同伦一分为二》。《几何与泛函分析》24.4 (2014), 1080—1100。[21] J. Cheeger, D. Ebin.《黎曼几何中的比较定理》。2008。[22] A. B. Чернавский。《微分几何：二年级课程》。2012。[23] S. Cohn-Vossen。《总曲率与单连通开完备曲面上的测地线》。数学文集 1(43).2 (1936), 139—164。[24] E. Denne.《纽结的交替四割线》。博士论文—伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校。2004。[25] P. H. Doyle.《平面分离》。剑桥哲学学会会刊 64 (1968), 291。[26] V. Dubrovsky.《探寻表面积的定义》。《量子》1.4 (1991), 6—9。[27] W. von Dyck.《位置分析的若干贡献》。数学年刊 32.4 (1888), 457—512。[28] I. Fary.《论若干几何不等式》。《塞格德数学科学学报》12。献给 Leopoldo Fejér 与 Frederico Riesz 七十寿辰，A辑 (1950), 117—124。[29] H. Federer.《几何测度论》。数学科学基础丛书，第153卷。1969。[30] A. Ф. Филиппов。《若尔当定理的初等证明》。《俄罗斯数学科学进展》5.5(39) (1950), 173—176。[31]J. Fine.《几何中的单步问题》。MathOverflow。电子版：https://mathoverflow.net/q/8378。[32] R. Foote, M. Levi, S. Tabachnikov.《牵引线、自行车轮胎轨迹、斧式求积仪与一个百年猜想》。美国数学月刊 120.3 (2013), 199—216。[33] D. Fuchs, S. Tabachnikov.《数学大观：经典数学三十讲》。2007。[34] D. Gale.《数学教学：1维流形的分类：一份带回家的考试题》。美国数学月刊 94.2 (1987), 170—175。[35] K. F. Gauss.《关于曲面的普遍研究》。哥廷根皇家科学学会新论丛 6（数学类）(1828), 99—146。[英文译本见《曲面的普遍研究》，1902年。[36] J. Gomes.《关于具有半定第二基本形式的等距浸入》。巴西科学院年刊 55.2 (1983), 145—146。[37] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer.《整体黎曼几何》。数学讲义，第55号。1968。[38] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер。《整体黎曼几何》。1971。[39] M. Gromov.《曲率的符号与几何意义》。《米兰数学与物理研讨会报告》61 (1991), 9—123 (1994)。[俄译本：Громов М.《曲率的符号与几何意义》。—伊热夫斯克：“规则与混沌动力学”科学研究中心，2000年。[40] J. Hadamard.《论动力学中轨迹的某些性质》。纯粹与应用数学杂志 3 (1897), 331—387。[41] P. Hartman, L. Nirenberg.《论雅可比行列式不变号的球面像映射》。美国数学杂志 81 (1959), 901—920。[42] A. Hatcher.《代数拓扑》。2002。[43] H. Hopf, W. Rinow.《关于完备微分几何曲面的概念》。数学评论 3.1 (1931), 209—225。[44] H. Hopf.《关于平面曲线切线与弦的转动》。Compositio Mathematica 2 (1935), 50—62。[45] H. Hopf.《整体微分几何》。第1000卷。数学讲义。1989。

[46] B. K. Ионин, Г. Г. Пестов.《关于内接于闭曲线的最大圆》。苏联科学院通报 127 (1959), 1170—1172。[47] C. B. Иванов.《几何学与拓扑学》。电子版：https://www.pdmi.ras.ru/~svivanov/uni/uni.html。[48] F. Joachimsthal.《关于曲面定理的证明》。纯粹与应用数学杂志 30 (1846), 347—350。[49] B. Khesin, S. Tabachnikov.《几何及其他领域中的趣味问题》。SIGMA：对称性、可积性、几何与应用方法 15 (2019), 第097号，21页。[50] A. P. Kiselev.《基谢廖夫几何学：立体几何》。2008。 [译者：A. Givental]。[51] A. Kneser.《关于闭曲线上曲率极值的个数及非欧几何中的相关问题的若干备注》。海因里希·韦伯纪念文集。1912。[52] C. Kosniowski.《代数拓扑入门》。1980。[53] Г. А. Ковалева.《一个与曲面的管同伦、且具有闭渐近线的例子》。数学札记 3.4 (1968), 403—413。[54] J. Lagarias, T. Richardson.《凸性与平面曲线的平均曲率》。奉献几何 67.1 (1997), 1—30。[55] В. Н. Лагунов.《关于内接于闭曲面的最大球》。西伯利亚数学杂志 1 (1960), 205—232。[56] В. Н. Лагунов.《关于内接于闭曲面的最大球。II》。西伯利亚数学杂志 2 (1961), 874—883。[57] В. Н. Лагунов, А. И. Фет.《给定拓扑类型曲面的极值问题。I》。西伯利亚数学杂志 4 (1963), 145—176。 [R. L. Bishop 英译本，arXiv:1903。[58] В. Н. Лагунов, А. И. Фет.《给定拓扑类型曲面的极值问题。II》。西伯利亚数学杂志 6 (1965), 1026—1036。[59] M. A. Lancret.《关于双重弯曲曲线的回忆录》。由科学、文学与艺术研究院的多位学者提交并在其会议上宣读的回忆录。数学与物理科学。1 (1802), 416—454。[60] U. Lang, V. Schroeder.《论 Alexandrov 空间的 Toponogov 比较定理》。数学教学 59.3-4 (2013), 325—336。[61] N. Lebedeva, A. Petrunin.《论凸曲面上极小测地线的总曲率》。圣彼得堡数学杂志 29.1 (2018), 139—153。[62] K. Лейхтвейс。《凸集》。1985。[63] M. Levi.《数学力学家：运用物理推理解决问题》。2009。[64] J. Liberman.《凸曲面上的测地线》。苏联科学院通报（新辑）32 (1941), 310—313。[65] H. von Mangoldt.《正曲率曲面上这样一些点：从这些点出发的测地线永远不会停止成为最短线》。纯粹与应用数学杂志 91 (1881), 23—53。[66] W. S. Massey.《欧几里得三维空间中高斯曲率为零的曲面》。东北数学杂志（第二辑）14 (1962), 73—79。[67] G. H. Meisters.《多边形都有耳朵》。美国数学月刊 82 (1975), 648—651。[68] J. B. Meusnier.《关于曲面的曲率的回忆录》。外国学者回忆录 10.1776 (1785), 477—510。

[69] A. Д. Милка。《最短曲线及其不可求长的球面像》。乌克兰几何学文集 16 (1974), 35—52.[70] S. Mukhopadhyaya。《平面弧几何学的新方法》。加尔各答数学会通报 1 (1909), 31—37.[71] S. B. Myers。《平均曲率为正的黎曼流形》。Duke 数学杂志 8 (1941), 401—404.[72] A. I. Nazarov, F. V. Petrov。《关于 S. L. Tabachnikov 的一个猜想》。圣彼得堡数学杂志 19.1 (2008), 125—135.[73] R. Osserman。《四个或更多顶点定理》。美国数学月刊 92.5 (1985), 332—337.[74] J. Pach。《凸曲面上沿测地线折叠与转动》。几何组合学 7.2 (1997), 61—65.[75] D. Panov。《抛物曲线与梯度映射》。斯捷克洛夫数学研究所论文集 2(221) (1998), 261—278.[76] A. Petrunin, S. Stadler。《F´ary-Milnor 定理的六种证明》。美国数学月刊 131.3 (2024), 239—251.[77] A. Petrunin, A. Yashinski。《分片等距映射》。圣彼得堡数学杂志 27.1 (2016), 155—175.[78] A. Petrunin, S. Zamora Barrera。《水洼中的月亮与四顶点定理》。美国数学月刊 129.5 (2022), 475—479.[79] A. Petrunin。PIGTIKAL（我所知道并喜爱的几何谜题）。第 2 卷。Assoc. Math. Res. Monogr. 2020.[80] A. Petrunin。《自交测地线》。数学智者 43.4 (2021), 16—18.[81] A. Petrunin。《Gromov环面是最优的》（2023）。arXiv: 2304.00886 [math.DG].[82] P. Pizzetti。《两组三边相等的三角形之比较》。林琴科学院院刊，物理、数学与自然科学部报告（第 5 辑）16 (1) (1907), 6—11.[83] A. B. Погорелов。《凸曲面的外在几何学》。1969.[84] A. B. Погорелов。《有界曲率曲面》。ХГУ, 1956.[85] H. Qiu。《实数集上的有界曲率球面问题》。2025。arXiv: 2507. $\mathbb{R}^3$math.DG06245 [.] W. Rudin。《数学分析原理》。1976.[86] R. Sacksteder。《关于没有负截面曲率的超曲面》。美国数学杂志 82 (1960), 609—630.[87] E. Schmidt。《关于空间曲线弧长在其曲率受限条件下的极值》。普鲁士科学院会议录，物理数学部 (1925), 485—490.[88] B. Segre。《关于一条闭合空间曲线上的平行切线对》。献给 Lucien Godeaux 教授的纪念文集。1968, 141—167. ¨A. Schur。《关于圆在曲率恒定曲线中的施瓦茨极值性质》。数学年刊 83.1-2 (1921), 143—148.¨J. J. Stoker。《三维空间中正曲率开曲面的形状》。Compositio Mathematica 3 (1936), 55—88.¨J. Sullivan。《有限全曲率曲线》。离散微分几何。Oberwolfach 研讨会。2008, 137—161.¨S. Tabachnikov。《几何不等式的故事》。MASS 选集。2003, 257—262.

[94]A. Taghavi。《圆球面的一个刻画》。MathOverflow。电子版: https://mathoverflow.net/q/348289.[95] P. G. Tait。《关于平面曲线的曲率圆的注记》。爱丁堡数学会会刊14 (1896), 26.[96] V. Toponogov。《曲线与曲面的微分几何：简明指南》。2006.[97] B. A. Топоногов。《正曲率黎曼空间的凸性性质》。苏联科学院报告115.4 (1957), 674—676.[98] S. Treil。《不太对劲的线性代数》。2016.[99] V. V. Usov。《凸曲面上测地线的球面像长度》。西伯利亚数学杂志17.1 (1976), 185—188.[100] B. A. Залгаллер。《关于最短曲线的球面像问题》。乌克兰几何学文集10 (1971), 12.