arXiv:2601.02326v1 [math.AP] 5 Jan 2026

再探输运-交换子估计中的正则性

ELIAS HESS-CHILDS、MATTHEW ROSENZWEIG 和 SYLVIA SERFATY

This article is dedicated to the memory of Haïm Brezis whose life and work were a great source of inspiration.

Abstract. 我们关注的是，输运速度场需要具备多高的正则性，才能控制 Riesz 型交换子。这些交换子估计在分析具有成对 Riesz 相互作用的粒子系统的平均场极限与涨落时发挥着核心作用，我们将先回顾相关背景。我们的第一个新结果表明，通常对速度场梯度所作的 L^∞ 假设一般不能放宽为 BMO 假设。我们在所有维数以及除一维对数端点 $\mathsf{s} = 0$ 之外的所有 Riesz 奇异性 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 情形下构造了反例。在这一特殊端点，确实可以作此放宽，这与希尔伯特变换的经典 Coifman-Rochberg-Weiss 交换子界有关。我们的第二个结果揭示了相互作用势的奇异性与速度场所需正则性之间的权衡。粗略地说，若要在由势函数确定的自然能量半范数中获得交换子估计，相互作用越平滑（奇异性越弱），所需的速度控制就越强。我们针对一大类势函数阐述了这一原则，并证明在次库仑 Riesz 区域，已知交换子不等式中所要求的速度正则性是尖锐的。尽管有这些否定性结论，我们的第三个结果表明，对于近似 Lipschitz 输运场，*defective*交换子估计仍然成立。这种带有缺陷的估计是著名的 Brezis-Wainger-Hansson 不等式的推论，并使我们能够在平均场密度属于尺度临界 Sobolev 空间时证明收敛速率。

1. Introduction

1.1. 平均场极限。 近年来，相互作用粒子系统的平均场极限 研究取得了显著进展。一个基本模型是一阶系统[1]

$$\dot{x}_i^t = \frac{1}{N} \sum_{1 \le j \le N : j \neq i} \mathbb{M} \nabla \mathsf{g}(x_i^t - x_j^t) - \mathsf{V}^t(x_i^t), \qquad i \in [N]. \tag{1.1}$$

这里，g 是一个待指定的相互作用势，V^t 是一个（可能随时间变化的）外场。 $\mathbb{M}$ 是一个具有实数元素的 $\mathsf{d} \times \mathsf{d}$ 矩阵，用于指定动力学类型，其中 $\mathbb{M} = -\mathbb{I}$（梯度／耗散型）和 $\mathbb{M}$ 反对称型（哈密顿／保守型）是最常见的选择。平均场极限指当 $N \to \infty$ 时经验测度的收敛

$$\mu_N^t := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i^t} \tag{1.2}$$

与系统（ X_N^t1.1=）的一个解$x_1^t(, \dots, x_N^t)$ 相关。假设初始点 X_N^0满足 μ_N^0 收敛到一个足够正则的测度 μ^0，形式计算使人预期，当 $t > 0$时， μ_N^t 会收敛到平均场方程

$$\partial_t \mu^t = \operatorname{div}(\mu^t(\mathsf{V}^t - \mathbb{M} \nabla \mathsf{g} * \mu^t)). \tag{1.3}$$

E.H.C 获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2342349、DMS-2424139。M.R. 获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2441170、DMS-2345533、DMS-2342349。S.S. 获得了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2247846，并获得法国大学研究院资助。[1]更一般的动力学包括正温度、非成对相互作用、非平移不变核以及二阶／动力学模型。

经验测度的收敛在定性上等价于分子混沌传播（参见 [Gol16、HM14] 及其中的参考文献）。后一概念意味着，若 $f_N^0(x_1,\dots,x_N) = \mathrm{Law}(X_N^0)$ 是 μ^0-混沌的（即，k点边缘分布 $f_{N;k}^0 \rightharpoonup (\mu^0)^{\otimes k}$ 当 $N\to\infty$时，对每个固定的 k均成立），那么 $f_N^t = \mathrm{Law}(X_N^t)$ 就是 μ^t-混沌的。

对于形如（1.1）的系统，平均场极限的研究历史悠久，最初研究的是正则漂移（通常为 Lipschitz），随后数年来逐渐扩展到越来越奇异的相互作用。为简洁起见，我们请读者参阅姊妹论文 [HCRS25] 的引言，其中对相关文献及这些进展作了恰当综述。

本文转而聚焦于近来对奇异相互作用的研究，其典型例子是对数/*Riesz* 势[2]，其形式为

$$\mathsf{g}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mathsf{s}}|x|^{-\mathsf{s}}, & \mathsf{s}\neq 0 \\ -\log|x|, & \mathsf{s}=0. \end{cases} \tag{1.4}$$

我们考虑任意维数 $\mathsf{d}\geq 1$，并假设 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$。除去归一化常数 $\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}$，势函数 g 是分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} = |\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$ 的基本解，即 $|\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\mathsf{g} = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}\delta_0$。由于 g 在原点处的行为，情形 $0\leq \mathsf{s}<\mathsf{d}$ 和 $-2<\mathsf{s}<0$ 分别称为奇异区域和非奇异区域。限制 $\mathsf{s}>-2$ 是自然的，因为当 $\mathsf{s}=-2$ 时，Riesz 势不再是条件正定的。将势限制在 $\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 的区域，是为了排除超奇异情形；在该区域内 g 局部可积，而超奇异情形不属于本文考虑的平均场类型（例如参见 [HLSS18, HSST21]）。情形 $\mathsf{s}=\mathsf{d}-2$ 对应于静电学/引力学中的经典库仑势。基于这一阈值，若 $\mathsf{s}<\mathsf{d}-2$，称相互作用为亚库仑；若 $\mathsf{s}>\mathsf{d}-2$，则称为超库仑。更一般地，形如 (1.4) 的长程相互作用在物理学 [DRAW02]、、逼近理论 [BHS19]、和机器学习 [AHS23, HWAH23, HBGS23, HHA+23] 等诸多领域都发挥着重要作用。关于考虑形如 (1.1) 的系统的动机，文献 [Ser24] 已作了详尽综述。

在过去几年中，才解决了整个范围 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 下的平均场收敛问题：非奇异情形 $-2<\mathsf{s}<0$ [RSW]、，次库仑情形 $\mathsf{s}<\mathsf{d}-2$，[Hau09、CCH14]、；库仑/超库仑情形 $\mathsf{d}-2\leq\mathsf{s}<\mathsf{d}$ [Due16、CFP12、Bn19、Ser20]、；以及整个奇异情形 $0\leq\mathsf{s}<\mathsf{d}$ [NRS22]。另请参见 [BJW19a、Ros20、RS23、HC23]，了解纳入噪声的进一步推广。这些进展在很大程度上得益于调制能量方法，我们将在下一小节回顾这一方法。

1.2. **调制能量与交换子**。由于经验测度 μ_N^t（与微观系统（1.1）相关）是平均场方程（1.3）的弱解，因此证明平均场收敛的一种自然方法，是对（1.3）建立弱-强稳定性估计。对于 Riesz 相互作用，这种稳定性可以方便地用基于能量的距离来表述

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu) := \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} \mathsf{g}(x-y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)(x)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)(y), \tag{1.5}$$

其中我们从 $\triangle := \{(x,y)\in(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2 : x=y\}$ 积分域中去除对角线，以消除每个粒子的无穷自相互作用。调制能量（1.5）最初源于对库仑/黎兹气体统计力学的研究 [SS15a、SS15b、RS16、PS17]，后来被用于推导平均场动力学 [Due16、Ser20、NRS22] 及后续工作中。在

[2]由于对数情形可以理解为黎兹情形的 $\to 0$ 极限，我们始终将“黎兹”一词理解为包括对数情形。[3]我们称核 $k:\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}$ 为 *conditionally positive definite (CPD)*，当且仅当对于任意零质量有符号博雷尔测度 ρ，均有 $\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})_2} k(x,y)d\rho(x)d\rho(y)\geq 0$。当对于任意非零的 ρ，上述不等式均为严格不等式时，称 k 为 *strictly* CPD（SCPD）。

非奇异情形下，对角贡献为零，调制能量等于统计学文献中所谓的最大均值差异（*MMD*）[GBR+06、GBR+07、GBR+12]的平方；最大均值差异是一类积分概率度量 [M¨u97]。对于不同核的选择，最大均值差异被广泛用于统计学和机器学习领域，作为概率测度之间的距离（例如参见 [MD24、KNSS22、HWAH23]）。关于调制能量的全面讨论，参见 [Ser24，第 4]章。

调制能量方法通过建立一个关于¨的格隆沃尔关系来实现平均场收敛，其中$\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)$ 是X_N^t 微观系统（1.1）的解，而 μ^t 是平均场方程（1.3）的解。这种方法的一个关键点，是控制F_N 沿输运 v 的导数： $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$，即

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathsf{F}_N((\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}(X_N),(\mathbb{I}+tv)\#\mu)=\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle}\nabla\mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))d(\mu_N-\mu)^{\otimes 2}(x,y), \tag{1.6}$$

其中，对于任意构型 $X_N=(x_1,\dots,x_N)$， μ_N表示 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}$，$\mathbb{I}$： $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\to\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$是恒等式，而 $(\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}(X_N)$: $=(x_1+tv(x_1)\dots,x_N+tv(x_N))$。在平均场极限的应用中， v 是极限演化（1.3）的速度场。在关于涨落的中心极限定理（CLTs）应用中（这是超越平均场极限的下一阶描述）， v 是沿伴随线性化平均场流 [HRS, CN25]演化的测试函数的梯度。这些不等式是典范吉布斯系综涨落“输运”方法的核心，见 [LS18, BLS18, Ser23, PS25]，同时也出现在随机矩阵理论文献的环（Dyson–Schwinger）方程中，例如 [BG13, BG24, BBNY19]。调制能量的高阶变分也很重要，我们将在第 5.3 节回到这一点。

所需的控制是一种如下形式的泛函不等式

$$|(1.6)|\le C_1(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_2N^{-\alpha}), \tag{1.7}$$

其中 $\alpha>0$取决于 d、s， $C_1>0$是一个取决于 d、s v的常数，而 $C_2>0$取决于 d、s μ。这种形式的控制最初由 Lebl´e 和第三作者在二维库仑情形下于 [LS18] 中证明，随后在 [Ser20]中推广到超库仑情形。证明依赖于识别出 (1.6) 中的应力-能量张量结构，并运用分部积分。之后，第二作者 [Ros20] 指出，表达式 (1.6) 也可以看作一个交换子的二次型，类似于著名的 Calder´on 交换子 [Cal80, CM78, CJ87, SSS19]。事实上，若忽略对角线的排除，

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)dxdy=\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}\Big\langle f,\Big[v\cdot,\nabla|\nabla|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}}\Big]g\Big\rangle_{L^2}, \tag{1.8}$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2}$ 表示 L^2 内积。因此，形如 (1.7) 的估计称为交换子估计。

最后两位作者与 Q.H. Nguyen [NRS22]采用了这一交换子视角，证明了整个奇异区域以及包括 Lennard-Jones 型势在内的更广泛的 Riesz 型相互作用所需的泛函不等式。 [NRS22]的论证也已扩展到非奇异区域 [RSW]。正如 [RSb], 所指出的，应力—能量视角与交换子视角实际上是同一枚硬币的两面。这些泛函不等式不仅对于证明 Riesz 气体涨落的中心极限定理 [LS18, Ser23, PS25], 至关重要，而且对于推导平均场极限 [Ser20, Ros22b, Ros22a, NRS22, CdCRS23, RSb, PCJ25] 和大偏差原理 [HC23]也至关重要。它们还被用于证明量子粒子系统的经典极限与平均场极限的联合结果 [GP22], ， 以及经典[HKI21, Ros23, M´e24, RS25a] 和量子粒子系统 [Ros21, Por23]的超临界平均场极限。

还要提及的是，对于正温度下的梯度动力学（即微观动力学中含有布朗噪声（1.1））， 调制能量与先前使用的相对熵 [JW18、GBM24、FW24、RS24] 自然结合，构成调制自由能

[BJW19b、BJW19a、BJW23、CdCRS23、RS25b、RS24、CFGW24], 它非常适用于证明熵混沌传播，甚至能够处理对数吸引相互作用 [BJW19b、BJW23、CdCRS25]。在正温度情形下，交换子估计也发挥着同样关键的作用。

这些泛函不等式的主要问题一直是确定加性误差的最佳大小，即 (1.7) 中的指数 α，该指数先验地取决于 d 和 s。在表述最优性时，恰当的比较对象是 $\mathsf{F}_N(X_N,\mu)$ 的最小大小。当 $0\le \mathsf{s}<\mathsf{d}$ 时，已知对于 $C=C(\mathsf{d},\mathsf{s})>0$，$\mathsf{F}(X_N,\mu)+\log(N\|\mu\|_{L^\infty})\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}\ge -C\|\mu\|_{L^\infty}N\mathsf{s}\,\mathsf{d}^{-1}$，且这一下界是尖锐的 [RSb, HCRS25]。[4] 在控制 (1.6) 的大小时，需要一个同样非负的右端项。因此，所能期望的最佳误差大小为 $N\mathsf{s}\,\mathsf{d}^{-1}$。当$-2<\mathsf{s}<0$时，调制能量是非负的（如上所述，它是平方最大均值差异），其最小值为$\propto N\mathsf{s}\,\mathsf{d}^{-1}$ [HCRS]。此外，由于相互作用是非奇异的 [RSW]，该泛函不等式无需加性误差即可成立。

直到最近，作者及其合作者才完成了证明精确 $N_{\mathsf{s}\,\mathsf{d}}^{-1}$ 误差率的研究计划：首先是库仑情形 [LS18，Ser23，Ros23]，；随后是整个（超）库仑情形 [RSb]，；最后是整个奇异黎兹情形 [HCRS25]。这一研究计划的完成给出了平均场极限在调制能量距离下的精确收敛速率。这对于研究热平衡内外围绕平均场极限的涨落也至关重要 [LS18，Ser23，PS25，HRS、RSa，Ros]。

以下定理总结了这些交换子估计的最新进展，并综合了 [NRS22、RS23、RSb、HCRS25、RSW]的结果。特别地，取下文（$p=\infty$ 中的（1.12）、（1.13），即可得到所述的精确 $N_{\mathsf{s}\,\mathsf{d}}^{-1}$ 加性误差。

为简化记号，给定点构型 X_N、参考测度 μ 和向量场 v，记作

$$\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]:=\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle}\nabla \mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)^{\otimes 2}(x,y). \tag{1.9}$$

下标1表示A_1 是一个一阶变分/交换子，其意义将在第5.3节中更加明了。

定理 1.1. 设 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$。设 $\mu\in L^1\cap L^p$ 对于$p>\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$，满足 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}d\mu=1$，且与 μ相关联，定义长度尺度

$$\lambda:=(N\|\mu\|_{L^p})^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}, \tag{1.10}$$

$$\kappa:=(N^{\frac{1}{\mathsf{s}+1}}\|\mu\|_{L^p})^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}, \tag{1.11}$$

当 $-2<\mathsf{s}\le 0$时，假设$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}|\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2}<\infty$。[5] 设 v 为一个 *Lipschitz* 向量场。那么对于任意两两不同的点构型 $X_N\in(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，以下结论成立。

[RSb] 若 $\mathsf{s}\ge\max(0,\mathsf{d}-2)$，则

$$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)-\frac{\log\lambda}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big). \tag{1.12}$$

[4] 在 $\mathsf{s}=0$ 情形下的项$\log(N\|\mu\|_{L^\infty})\,2\mathsf{d}N$ 并非像 $\|\mu\|_{L^\infty}^{\mathsf{s}\mathsf{d}}N^{\mathsf{s}\mathsf{d}}$那样的加性误差，而是因为应当考虑的恰当量为 $\mathsf{F}(X_N,\mu)+\log(N\|\mu\|_{L^\infty})\,2\mathsf{d}N\,\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0}$。[5] 这一条件是为了确保调制能量有限。当 $0<\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 时，它可由假设 $\mu\in L^1\cap L^p$ 对于 $p>\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$推出。当 $\mathsf{s}=0$时，它可由对数矩假设 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\log(1+|x|)d|\mu|<\infty$推出；而当 $-2<\mathsf{s}<0$时，它可由矩假设 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|/2}d|\mu|<\infty$推出。

[HCRS25] 若 $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}-2$，则对于任意 $\mathsf{a} \in (\mathsf{d}, \mathsf{d}+2)$，

(1.13) $$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \le C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + C_{\mathsf{a}}\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{a}>2})\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) - \frac{\log\lambda}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big),$$

[NRS22，RS23] 以及任意 $\mathsf{d}\,\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}{\mathsf{d}-\mathsf{s}} < p \le \infty$，

(1.14) $$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \le C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-s}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}})\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_p\|\mu\|_{L^p}\kappa^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}(1-(\log\kappa)\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0})\Big).$$

[RSW] 若 $-2 < \mathsf{s} < 0$，则

(1.15) $$|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \le C(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2})\mathsf{F}_N(X_N,\mu)$$

在所有情况下，常数 $C > 0$ 仅取决于d、s 以及常数 C_{a}；此外，$C_p > 0$ 还分别取决于a p。

给定一个在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 中具有密度且满足 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} d\nu = 1$ 的测度 ν，令 $f := \nu - \mu$，我们可以找到一列两两不同的点配置 X_N，使得当 $N \to \infty$ 时，

(1.16) $$\mathsf{F}_N(X_N,\mu) \to \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}(x-y)f(x)f(y)dxdy = \frac{\mathsf{C}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}{2}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}$$

and

(1.17) $$\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v] \to \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \nabla\mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y))f(x)f(y)dxdy = \frac{1}{2}\Big\langle f, \Big[v\cdot, \nabla|\nabla|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}}\Big]f\Big\rangle_{L^2}.$$

因此，带有涉及奇异零质量测度的加性误差的交换子估计 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu$ 蕴含了对正则零质量测度 f不带加性误差的交换子估计。更准确地说，定理 1.1 蕴含了以下标准的（或 未重整化的）交换子估计（见 [NRS22，命题 3。1]）。

命题 1.2。设 $\mathsf{d} \ge 1$ 且 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$。则存在 $C > 0$，仅依赖于 d 和s，使得对所有 f，$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$，[6] 我们有

(1.18) $$\Big|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)dxdy\Big| \le C\Big(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2}\Big)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}\|g\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}.$$

不难验证，右侧前述表达式与左侧具有相同的缩放方式，且右侧的两个 v 项也具有相同的缩放方式。此外，出现 $\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}$ 半范数是自然的，因为它对应于与 g 相关的能量的平方根。

事实上，[Ros20、NRS22、RSb], 的思想，以及在较隐含程度上，[LS18、Due16、Ser20、Ser23], 等著作的思想，采取了相反的顺序：首先证明命题 1.2 中的未重整化交换子估计，然后将其与重整化过程结合起来，通过电荷涂抹（即对 δ_{x_i}进行正则化）来处理不规则的测试测度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$。正是这一重整化步骤——它是证明中技术上最复杂的部分——导致了奇异情形 $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 中依赖于 N的加性误差。因此，有时将估计式 (1.12)、(1.13)、(1.14) 称为重整化交换子估计，以区别于未重整化估计 (1.18)。在非奇异情形 $-2 < \mathsf{s} < 0$中，无需进行重整化

[6] 若 $\mathsf{s} = 0$，则隐含的要求是 f和 g均为零均值，以避免 $\dot{H}^{-\frac{\mathsf{d}}{2}}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 中的低频发散。

，可以直接应用交换子估计，从而使式 (1.15) 中不出现加性误差。

1.3. 输运正则性。 本文探讨的问题是：在上述交换子估计中，输运速度 v 所需的最优正则性假设。与上文讨论的这些估计中加性误差的尖锐性相比，文献对这个问题关注甚少。

沿着这一思路，自然会问：在仍保持尺度关系的同时，是否可以弱化对 v 的 Lipschitz 假设？例如，有界平均振荡（BMO）[JN61] 空间是对 L^∞的一种常见放宽，因此可以问，是否能够用 $\|\nabla v\|_{BMO}$替代 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$。此外，在次库仑区域 $s < d-2$中，形如$\||\nabla|^{\frac{a}{2}} v\|_{L^2}$的附加项是否确有必要，以及指数 a 能取多小，这些问题也尚不清楚（根据索伯列夫嵌入，$\||\nabla|^{a/2} v\|_{L^2} \lesssim \||\nabla|^{\frac{a'}{2}} v\|_{L^2}$，当 $2(d+1) > a' \geq a$ 时）。此外，我们的两个次库仑估计 (1.13)、(1.14) 之间存在差距。前一个估计中的 N相关加性误差是尖锐的，但要求 v 满足更强的正则性条件（鉴于根据假设 $a > d$）；相比之下，后一个估计中的 N相关误差并不尖锐。

提出这一正则性问题，不仅是出于数学上的考虑，也受到应用的驱动。在偏微分方程中有一条普遍原理：如果一个方程具有尺度不变性，那么研究该方程时，一个自然的函数空间就是在该方程的缩放变换下保持不变的空间[Kla10]。这类尺度临界或尺度不变空间被认为是该方程适定性与不适定性的分界，其他现象亦然，例如有限时爆破与整体存在性。

对于 a，b，$c > 0$，令 $\tilde{\mu}(t, x) := a\mu(bt, cx)$。当$V^t = 0$时，读者可以验证，若 μ 是方程（1.3）的一个解，那么只要 $\tilde{\mu}$，它也是一个解。固定 $bc^{d-2-s} = a$，使解的存在时间在重新缩放下保持不变，我们得到关系式 $a = c^{d-2-s}$。我们寻求在变换 $\mu \mapsto \tilde{\mu}$下保持不变的（半）范数。

对于 $1 \leq p \leq \infty$，读者可以验证

$$\|\tilde{\mu}\|_{L^p} = c^{d-s-2-\frac{d}{p}} \|\mu\|_{L^p}, \tag{1.19}$$

这意味着 $p = \frac{d}{d-s-2}$ 是尺度临界指数。这样的 p 存在当且仅当 $s \leq d-2$。换句话说，为了使其存在临界 L^p 空间，势至多只能是库仑势。更一般地，令 $W^{a,p}$ 表示齐次贝塞尔势（分数阶 Sobolev）空间（例如参见 [Ste70，第 3 节。3] 或 [Gra14，第 1 节。3]），我们看到

$$\|\tilde{\mu}\|_{\dot{W}^{a,p}} = c^{d-s-2+a-\frac{d}{p}} \|\mu\|_{\dot{W}^{a,p}}, \tag{1.20}$$

这表明 $\dot{W}^{a,p}$是临界空间，当且仅当 $a = \frac{d}{p} + s + 2 - d$。其他尺度的函数空间，例如 H¨older-齐格蒙德空间（例如参见 [Ste70，第 4] 节），也值得作为临界空间加以考察。我们将在下一节回到这一点。

当 $\mu \in \dot{W}^{\frac{d}{p}+s+2-d,p}$ 时，对于 $1 < p < \infty$，一些基本的傅里叶分析表明，相应的平均场速度 $v = \mathbb{M}\nabla g * \mu$ 属于 $\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}$。遗憾的是，$\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}$ 并不嵌入齐次利普希茨空间 $\dot{W}^{1,\infty}$。若 $f \in \dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}$，则只能得到$\|\nabla f\|_{BMO} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}}$。即便 $s + 2 - d = k$ 是整数且取 $p = \infty$，有 $\mu \in \dot{W}^{k,\infty}$ 也并不意味着 $v \in \dot{W}^{1,\infty}$。这带来了问题，因为定理 1.1 中所有交换子估计的右端都包含 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$。因此，为了在平均场密度 μ^t 属于临界空间时证明平均场收敛，我们希望得到一种交换子估计，其正则性假设在 $\mu \in \dot{W}^{\frac{d}{p}+s+2-d,p}$ 时能够满足。

1.4. **我们的贡献**。 在阐明我们关注的问题——调制能量交换子估计中的输运正则性，并说明这类不等式在研究平均场极限及相关极限中的作用后，我们接下来介绍本文的新贡献。这里先从较高层次概述。主要结果（定理 2.1、2.3、2.6和2.8 以及推论 2.4）的精确陈述及关于证明的详细说明，将留待第2节介绍。

我们的首要贡献是证明，若弱化任一向量场范数，估计式（1.18）就可能失效（定理 2.1）。我们还为更广泛的一类相互作用势推导出类似交换子估计成立所需的必要条件（定理 2.3）。具体而言，控制 v 的范数必须包含足够多的导数，以补偿 ˆg的高频衰减。这表明，在交换子估计中，相互作用与输运之间存在更一般的正则性权衡。这些结果均通过显式反例得出。鉴于定理 1.1中的重整化交换子估计蕴含未重整化交换子估计，正如第 1.2 节所述，因此只需在将$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}-\mu$ 替换为零均值施瓦茨函数时证明这些反例即可。

—

我们的第二项贡献涉及平均场收敛，其中平均场方程的解 μ^t 属于临界空间 $\dot{W}^{1/p+1,p}$，适用于 $1<p<\infty$。若 $p\le 2$，则有 $\||\nabla|^{-1}u^t\|_{L^\infty}\lesssim\|\mu^t\|_{\dot{W}^{1/p+1,p}}$ 然而，由于一般而言，当$\mu^t\in\dot{W}^{1/p+1,p}$时， ∇u^t只属于有界平均振荡，上一段所述结果便对我们先前提出的问题给出了否定答案：在这种情况下，无论加性误差多大，交换子估计都不可能成立。尽管如此，情况也并非全无希望。正如 [Ros22b, Ros22a], 所指出的，即使在这种临界正则性情形下，只要有缺陷的交换子估计成立，仍然可以得到调制能量的 Gr¨onwall 型[7]估计。

更确切地说，如果存在一个局部可积函数ρ：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，称为缺陷，使得对所有 $\epsilon>0$，

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^2\setminus\triangle}(v(x)-v(y))\cdot\nabla g(x-y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}-\mu\Big)^{\otimes 2}(x,y)\le\rho(\epsilon)C_v\Big(F_N(X_N,\mu)+C_\mu N^{-\alpha}\Big)+\epsilon^\beta N^\gamma C_v'\Big(F_N(X_N,\mu)+C_\mu' N^{-\alpha}\Big),\tag{1.21}$$

其中 $\alpha>0$, β, $\gamma\ge 0$和 C_v, C_v', C_μ, $C_\mu'>0$是常数，分别依赖于 d，s 以及 v, μ 的范数（以定量方式）。

如果 $\rho(\epsilon)=O(|\log\epsilon|)$，当 $\epsilon\to 0^+$时，事实证明，有缺陷的交换子估计足以推出调制能量的一个估计，进而意味着平均场收敛，至少在某个时间 $T_*>0$ 之前成立；该时间与 N无关，但先验上小于 μ^t存在的最大时间。这些研究仅考虑了库仑情形，此时自然的尺度不变空间为 L^∞，当 $V^t=0$ 时，其范数是一个非增量（当 $\mathbb{M}$为反对称时则为守恒量）。本文将 Ros22b、Ros22a] 的结果推广到整个黎兹情形，对平均场收敛成立的时间区间不作任何限制（定理 2.8）。重要的是，在次库仑情形 $s<d-2$ 中，我们证明：若初始平均场密度$\mu^\circ\in L^{d-s-2}$，它是尺度临界的，则平均场方程 (1.3) 存在唯一的全局解，并且该解是微观系统 (1.1) 的一个（定量）平均场极限。

主要的技术成果是一项新的有缺陷的交换子估计（定理 2.6），其缺陷为$\rho(\epsilon)=O(|\log\epsilon|^\theta)$，适用于 $\theta\in(0,1)$，这与 $\theta=1$ Ros22b 中存在的缺陷 [Ros22b、Ros22a]形成对比。这一改进得益于著名的 *Brezis-Wainger-Hansson* 不等式 [BW80,

[7]更确切地说，是一种奥斯古德引理形式的估计，它是格朗沃尔引理的推广。¨参见[BCD11，第 3.1 节。1]。

Hansson79]: 若 $1<p<\infty$, $1\le q\le\infty$, 且 $aq>\mathsf{d}$, 则

$$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}}),\qquad \|f\|_{L^\infty}\le C\|f\|_{\dot W^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}\Big(1+\log^{\frac{p-1}{p}}\big(1+\frac{\|f\|_{\dot W^{a,q}}}{\|f\|_{\dot W^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}}\big)\Big), \tag{1.22}$$

其中 $C=C(\mathsf{d},p,a,q)>0$。注意，指数 $\frac{p-1}{p}$ 是尖锐的;此外，任何形如

$$\|f\|_{L^\infty}\le\varepsilon\|f\|_{\dot W^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}\Big(1+\log^{\frac{p-1}{p}}\big(1+\frac{\|f\|_{\dot W^{a,q}}}{\|f\|_{\dot W^{\frac{\mathsf{d}}{p},p}}}\big)\Big)+C_\varepsilon, \tag{1.23}$$

对任意 $\varepsilon>0$，都不可能成立。

Brezis 和 Wainger [BW80，定理 1]首次证明了估计式（1.22），这是对 Brezis 和 Gallou $=p=2$ et 提出的早期 d ¨不等式的推广 [BG80]。在偏微分方程文献中，这类不等式有时被称为 Brezis-Gallou¨et 不等式或对数插值。Hansson [Han79] 独立地证明了一个用势论语言表述的不等式，该不等式等价于（1.22），此外 [Eng89]中也给出了另一种证明。

Brezis-Wainger-Hansson 不等式是对错误的端点Sobolev嵌入$\|f\|_{L^\infty}\lesssim\|f\|_{\dot W^{\mathsf{d}p,\,p}}$的一种替代，除非 $\mathsf{d}=p=1$。尽管 $\dot W_{\mathsf{d}p}$ 中的函数不是有界的^p，但它们仍然具有定量意义下的指数函数可积性，这一点由著名的 Trudinger-Moser 不等式精确刻画 [Tru67，Mos70]。从某种意义上说，估计式（1.22）是 Trudinger-Moser 不等式的对偶（见 [BW80，定理 A]）。

1.5. **记号**。最后，我们回顾本文中通用的基本记号，主要遵循 [NRS22、RS23、RSb、HCRS25]中的惯例。

给定非负量 A 和 B，若存在一个与 A 和 B无关的常数 $C>0$，使得 $A\le CB$，则记作 $A\lesssim B$。若 $A\lesssim B$ 和 $B\lesssim A$，则记作 $A\sim B$。全文中，C 表示一个可能逐行变化的通用常数。

$\mathbb{N}$表示不含零的自然数。对于 $N\in\mathbb{N}$，我们简记 $[N]:=\{1,\dots,N\}$。$\mathbb{R}_+$ 表示正实数。给定 $x\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 和 $r>0$，$B(x,r)$ 和 $\partial B(x,r)$ 分别表示以 x为中心、半径为 r的球和球面。给定函数 f，用 supp f表示其支集。记号 $\nabla^{\otimes k}f$表示分量为 $(\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}f)_{1\le i_1,\,\dots,\,i_k\le\mathsf{d}}$ 的 k 阶张量场。对于 $x\in\mathbb{R}$，$\langle x\rangle:=(1+|x|^2)^{1/2}$ 是日式括号。

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$表示 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$上的博雷尔概率测度空间。如果 μ 相对于勒贝格测度绝对连续，我们将沿用一种记法，让 μ 同时表示测度及其勒贝格密度。当测度显然是勒贝格测度时，我们将简写为$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}f$，而不写 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}f\,dx$。

我们用记号$\hat{}$ f 或 $\widehat{f}$ 表示傅里叶变换$\hat{}$ $f(\xi):=\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx$，并令$\langle\nabla\rangle$和 $|\nabla|$分别表示符号为 $\langle 2\pi\xi\rangle$ 和 $|2\pi\xi|$的傅里叶乘子。

本文中会用到若干函数空间。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$和 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$分别表示施瓦茨函数空间和温和分布空间。对于 $s\in\mathbb{R}$ 和 $1<p<\infty$，$W^{s,p}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$表示由下式定义的非齐次贝塞尔势空间

$$W^{s,p}:=\{f\in\mathcal{S}':\langle\nabla\rangle^s f\in L^p\},\qquad \|f\|_{W^{s,p}}:=\|\langle\nabla\rangle^s f\|_{L^p}. \tag{1.24}$$

当 $s=k$ 为整数时，$W^{s,p}$ 与通常的索伯列夫空间一致

$$W^{k,p}=\{f\in L^p:\nabla^{\otimes j}f\in L^p,\ 0\le j\le k\},\qquad \|f\|_{W^{k,p}}:=\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^{\otimes j}f\|_{L^p}, \tag{1.25}$$

当然，后者在端点 $p=1,\infty$ 处也有意义。当 $p=2$时，我们使用惯用记号 $W^{s,2}=H^s$。齐次贝塞尔势空间 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 定义为

$$\dot{W}^{s,p}:=\{f\in\mathcal{S}'/\mathscr{P}:|\nabla|^s f\in L^p\},\qquad \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}:=\||\nabla|^s f\|_{L^p}, \tag{1.26}$$

其中 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的多项式空间，而 $\mathcal{S}'/\mathscr{P}$ 表示这样一个商空间：将差为多项式的任意两个温和分布视为相同。这样的等同使半范数 $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ 成为范数。类似地，对于 $s=k$ 整数， $W^{s,p}$ 与.....一致

$$\dot{W}^{k,p}=\{f\in\mathcal{S}'/\mathscr{P}:\nabla^{\otimes k}f\in L^p\},\qquad \|f\|_{\dot{W}^{k,p}}:=\|\nabla^{\otimes k}f\|_{L^p}. \tag{1.27}$$

一个基本事实是，对于 $s\geq 0$, $f\in W^{s,p}$ 当且仅当 $f\in L^p\cap\dot{W}^{s,p}$。对于 $\theta>0$，我们用 $\mathcal{C}^\theta(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$ 表示非齐次 H¨older-Zygmund 空间；当 $\theta\in(0,1]$ 时，该空间定义为满足以下条件的 $f\in C_{loc}$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\theta}:=\|f\|_{L^\infty}+\sup_{|h|>0}\frac{\|f(\cdot+h)+f(\cdot-h)-2f(\cdot)\|_{L^\infty}}{|h|^\theta}<\infty, \tag{1.28}$$

并且对于 $\theta>1$，我们归纳定义 $\|f\|_{\mathcal{C}^\theta}:=\|f\|_{L^\infty}+\|\nabla f\|_{\mathcal{C}^{\theta-1}}$。 $\mathcal{C}^\theta$ 与贝索夫空间 $B^\theta_{\infty,\infty}$一致，且范数等价（参见 [BCD11，第 2.11] 节）。对于非整数的 θ，有 $\mathcal{C}^\theta=C^{\lfloor\theta\rfloor,\{\theta\}}$，即 $\lfloor\theta\rfloor$次连续可微函数构成的空间，其中第 $\lfloor\theta\rfloor$阶导数是 $\{\theta\}$-H¨older 连续的；我们在该空间上赋予通常的范数。当 θ 为整数时， $\mathcal{C}^\theta$ 严格大于 $W^{\theta,\infty}=C^{\theta-1,1}$。齐次 H¨older-Zygmund 空间 $\dot{\mathcal{C}}^\theta$ 定义为所有满足以下条件的 $f\in C_{loc}$ 所构成的空间

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}:=\sup_{|h|>0}\frac{\|f(\cdot+h)+f(\cdot-h)-2f(\cdot)\|_{L^\infty}}{|h|^\theta}<\infty \tag{1.29}$$

当 $\theta\in(0,1]$ 并像之前一样对 $\theta>1$ 进行归纳。

按照文献中的惯例，上标 $\cdot$ 表示齐次空间/半范数。

1.6. **致谢**。 第二作者感谢纽约大学库朗数学科学研究所的热情接待。本项目的部分工作是在其于2021年11月访问期间完成的。本文基于美国国家科学基金会第 DMS-2424139 号资助所支持的研究成果；该基金资助期间，第一作者于2025年秋季学期驻留在加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所。

2. Main results

本节将给出我们在第 1.3 节中预先介绍的主要结果的精确表述，并对其证明作一些说明。

2.1. **BMO不等式**。 我们的第一个结果表明，一般而言，式（1.18）中对输运场的 Lipschitz 控制不能放宽为 $\|\nabla v\|_{BMO}$。下面的定理2.1 表明，除了一维对数端点（d，s）$=(1,0)$ 之外，这种替换均不成立。当（d，s）$=(1,0)$ 时，交换子估计 确实 成立。

定理 2.1。

(i) 设$\mathsf{d}\geq 1$且 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$，满足$(\mathsf{d},\mathsf{s})\neq(1,0)$。对于每个 $M>0$，都存在一个 C^∞ 紧支撑向量场 v 以及零均值施瓦茨函数 f 和 g，使得

$$\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)\right|}{\left(\|\nabla v\|_{BMO}+\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2}\right)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}\|g\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}}\geq M. \tag{2.1}$$

(ii) 若$(\mathsf{d},\mathsf{s}) = (1,0)$，则存在 $C > 0$，使得对于所有满足 $v' \in$ 有界平均振荡 的 v，以及所有零均值的 $f, g \in \mathcal{S}$，都有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x) - v(y)}{x - y} f(x) g(y) \right| \leq C \|v'\|_{BMO} \|f\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}} \|g\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}. \tag{2.2}$$

令 H表示希尔伯特变换 $Hf(x) := \mathrm{P.V.} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{y-x} dy$，(2.2) 等价于

$$\big\| [v, H] \big\|_{\dot{H}^{-1/2} \to \dot{H}^{1/2}} \lesssim \|v'\|_{BMO}. \tag{2.3}$$

因此，(2.2) 可视为 Sobolev 空间中的 Coifman–Rochberg–Weiss 型交换子定理[CRW76]，，其最基本的形式表明 $\|[v, H]\|_{L^p \to L^p} \lesssim \|v\|_{BMO}$。

定理2.1(i)、(ii)的证明分别见第 3.1 节和 3.2节。定理的第一个断言通过一个显式反例来证明。我们构造一个速度场 v，它具有 $\nabla v \in$有界平均振荡，并在原点处有轻微的对数奇异性；再用一族经过缩放、紧支集、零均值函数 f_r进行检验。交换子的大小按 $\log\log(1/r)$ 增长，而当 $r \to 0$ 时，(2.1) 中的分母仍一致有界，因此比值可以任意大。第二个断言的证明主要是通过恰当的分部积分，并将各项归并为若干部分；这些部分都可以分别用经典的 Kenig-Ponce-Vega 型交换子估计加以控制 [KPV93、Li19]。

2.2. **正则性权衡**。 有界平均振荡反例表明，利普希茨控制 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$在（1.18）中起着至关重要的作用，因此我们不再尝试进一步弱化这一条件。我们的第二个主要结果量化了相互作用势的正则性与输运场所需的高频正则性之间的权衡，后者用于在自然能量范数下控制交换子。由于这一现象并非 Riesz 势所特有，我们将研究范围扩展到一类更大的势函数，其中相互作用能定义了一个正定型。

假设 2.2 （可容许相互作用势）。 设 $\mathsf{g} : \mathbb{R}^{\mathsf{d}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

（1）$\mathsf{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^{\mathsf{d}} \setminus \{0\})$，（2）$\mathsf{g}$ 具有径向对称性，[8]（3）g 是条件正定的（见脚注 3），且 $\hat{}\mathsf{g}$ 单调不增。

与 g 相关联，我们定义能量半范数

$$\|f\|_{\mathsf{g}}^2 := \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}(x - y) f(x) f(y) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \hat{\mathsf{g}} |\hat{f}|^2, \tag{2.4}$$

我们注意到，对于零均值的 f，它是非负的（可能为 $+\infty$）。处理非齐次势时，引入记号 $\mathsf{g}_t(x) := \mathsf{g}(x/t)$ 表示 $t > 0$ 会很方便。

给定一个函数 $\sigma : [0, \infty) \to (0, \infty]$，我们用 $\sigma(|\nabla|) f := \mathcal{F}^{-1}\big(\sigma(|\xi|)\, \hat{}f(\xi)\big)$ 表示符号为 σ 的傅里叶乘子。下面的定理 2.3 表明，如果 σ 在高频处相对于 $\hat{}\mathsf{g}$ 增长得过慢，那么交换子就无法由能量范数 $\|\cdot\|_{\mathsf{g}_t}$ 和速度场范数 $\|\sigma(|\nabla|)v\|_{L^p}$ 控制。

定理 2.3. 设 g 满足假设 2.2。固定 $t > 0$ 和 $p \in [1, \infty]$。进一步假设

$$r^2 \hat{\mathsf{g}}(r) \to 0 \qquad as\ r \to \infty \tag{2.5}$$

[8]在全文中，我们利用径向对称性，滥用记号将 $\mathsf{g}(|x|) = \mathsf{g}(x)$ 写作 $\mathsf{g}(|x|) = \mathsf{g}(x)$。

以及 $\sigma:\ [0,\infty) \to [0,\infty]$ 满足

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{\hat{\mathsf{g}}(tr)}\|\sigma\|_{L^\infty([r-1,r+1])} = 0, \qquad 2 \le p \le \infty, \tag{2.6}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{\hat{\mathsf{g}}(tr)} \max_{n\le \mathsf{d}+1} \|\partial_r^n \sigma\|_{L^\infty([r-1,r+1])} = 0, \qquad 1 \le p < 2. \tag{2.7}$$

那么对于每个 $M \ge 0$，存在一个 C^∞ 向量场 v 以及零均值施瓦茨函数 f、g，使得

$$\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y) f(x) g(y)\right|}{\left(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|\sigma(|\nabla|)v\|_{L^p}\right)\|f\|_{\mathsf{g}_t}\|g\|_{\mathsf{g}_t}} \ \ge\ M. \tag{2.8}$$

衰减条件（2.5）迫使人们在两者之间作出真正的权衡：没有该条件时，可能处于仅凭 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ 就能成立交换子估计的情形。条件（2.6）意味着，在单位宽度的频率壳层 $|\xi| \sim r$上，乘子 $\sigma(r)$ 的增长严格慢于 $\hat{\mathsf{g}}(tr)^{-1/2}$；而（2.7）则将这一增长条件扩展到 σ 的导数，且阶数足够高。因此，定理 2.3 可以理解为：任何以 $\|\cdot\|_{\mathsf{g}_t}$ 衡量的交换子界，都迫使 v 至少拥有足以补偿高频处 $\sqrt{\hat{\mathsf{g}}}$ 所需的“同样多的导数”。

注意，由于 $\hat{\mathsf{g}}$ 是非增的，如果（2.6）对某个 $t_* > 0$成立，那么它对所有 $t \ge t_*$都成立。此外，如果 $\hat{\mathsf{g}}(\xi)$ 与 ξ中的某个多项式相当，那么如果（2.6）对某个 $t > 0$成立，则它对任意 $t > 0$都成立。当 $1 \le p < 2$时，对于 $\sigma(|\nabla|)\, v \in L^p$，需要对符号施加一定的正则性条件，但就导数的数量而言，条件（2.7）几乎肯定还可以进一步弱化（参见 H¨ormander-Mikhlin 乘子定理中对符号的假设）。最后，考虑单位宽度的频率壳层 $[r-1, r+1]$并非必需：同样可以考虑任意固定半径的壳层，只需作相应调整即可。

将定理2.3 专门应用于由（1.4）定义的 Riesz势 g，可得 $\hat{\mathsf{g}}(\xi) \propto |\xi|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}}$。条件（2.5）在 $\mathsf{s} < \mathsf{d}-2$ 时成立，即 g 是次库仑的。条件（2.6）等价于 $\sup_{\tau\in[r-1,r+1]} \sigma(\tau) \ll |r|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}$ as $r \to \infty$。特别地，取 $\sigma(\tau) = \tau_{\mathsf{a}2}$，可见在尺度不变范数 $\||\nabla|^{\mathsf{a}2} v\|_{L^p}$ with $p = \frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}$ 中，使交换子估计成立的最小指数为 $\mathsf{a} = \mathsf{d} - \mathsf{s}$。减小 a，等价于增大 p，会得到一个严格更弱的范数，而交换子估计对该范数不成立。

最后，为了强调这一正则性权衡，我们指出，定理 2.3 意味着，对于任意相互作用势 v若要使交换子估计成立，就必须是 C^∞，其中g 的 $\hat{\mathsf{g}}$ 按超多项式地衰减。事实上，如果对任意 $n \ge 0$，$|\hat{\mathsf{g}}(\xi)| \lesssim_n |\xi|^{-n}$，则（2.8）对任意 $\sigma(|\nabla|) = |\nabla|^n$均成立。特别地，如果 $\hat{\mathsf{g}}$ 按次指数地衰减，那么根据 Paley-Wiener-Schwartz 定理，v 至少必须是解析的，交换子估计才可能成立。当 $\hat{\mathsf{g}}$ 具有次高斯衰减时，正则性要求甚至更加严格：若交换子估计成立，则 v 必须是超解析的。

我们总结　　上述定理所述结论2.3如下推论　　y.

推论 2.4。

(i) 假设 g 由以下公式给出：(1.4) 其中 $< \mathsf{d}-2$。那么对于所有 $2 < \mathsf{a} < \mathsf{d} - \mathsf{s}$ 以及 $M > 0$，存在一个 C^∞ 向量场 v 和零均值施瓦茨函数 f 以及 g，使得

$$\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y) f(x) g(y)\right|}{\left(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\right)\|f\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}\|g\|_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}} \ge M. \tag{2.9}$$

(ii) 假设 g 是可容许的，且 $\hat{\mathsf{g}}$ 具有超多项式衰减。那么对于任意 n、M、$t>0$，存在一个 C^∞ 向量场 v 和零均值施瓦茨函数 f 以及 g，使得

$$\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)\right|}{\|\langle\nabla\rangle^n v\|_{L^1}\|f\|_{\mathsf{g}_t}\|g\|_{\mathsf{g}_t}}\geq M. \tag{2.10}$$

(iii) 假设 g 是可容许的，并且对某些 $c,m>0$，$|\hat{\mathsf{g}}(\xi)|\lesssim e^{-c|\xi|^m}$成立。那么对任意 $b<\frac{ct^m}{2}$ 和 $M>0$，存在一个 C^∞ 向量场 v 以及零均值施瓦茨函数 f,g，使得

$$\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)y\right|}{\|e^{b|\nabla|^m}v\|_{L^1}\|f\|_{\mathsf{g}_t}\|g\|_{\mathsf{g}_t}}\geq M. \tag{2.11}$$

注 2.5。假设 g 满足：存在 $t>0$，使得 $|x||\nabla\mathsf{g}(x)|\lesssim\mathsf{g}(x/t)$。显然，若 g 是多项式、指数函数或高斯函数，则该条件成立。于是利用 $|v(x)-v(y)|\leq\|\nabla v\|_{L^\infty}|x-y|$，对于 $f,g\geq 0$，可得如下界

$$\begin{aligned}\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)\right|&\lesssim\|\nabla v\|_{L^\infty}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\mathsf{g}\Big(\frac{x-y}{t}\Big)f(x)g(y)\\&\lesssim\|\nabla v\|_{L^\infty}\|f\|_{\mathsf{g}_t}\|g\|_{\mathsf{g}_t}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

这一观察表明，在假设 f,g 具有确定符号的情况下，要使交换子估计成立，只需要 Lipschitz 正则性。鉴于推论 2.4，对于 f,g，若其没有确定符号，一般的交换子估计必然要求 v 具有高得多的正则性。

定理 2.3 的证明见第 3.3节。我们构造 v、f、g，使它们的傅里叶支集位于几个经过精心选择且彼此充分分离的频率壳层上。这使得交换子的一个贡献成为“非共振”的，因而很小，而另一个贡献则是“共振”的，并且保持有正的下界。同时，相同的频率局部化使速度范数实质上取决于 $\sup_{r\in[k-1,k+1]}\sigma(r)$，当 $2\leq p\leq\infty$时，而 $\|f\|_{\mathsf{g}_t}$ 的尺度为 $\sqrt{\hat{\mathsf{g}}(tk)}$；用 $\|f\|_{\mathsf{g}_t}$ 归一化后，最终比值中便会出现因子 $1/\sqrt{\hat{\mathsf{g}}(tk)}$。令$k\to\infty$，即可得到所需的比值增长。

2.3. **有缺陷的交换子估计与平均场收敛**。现在我们来讨论最后一组关于平均场收敛的结果：当平均场方程（1.3）的解 μ^t（其中 g 如（1.4）所示）属于临界空间 $\dot{W}^{\mathsf{d}/p+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}$ 时，其中 $1<p<\infty$。

尽管当 v 不是 Lipschitz 函数时，交换子估计不成立（除了 $(\mathsf{d},\mathsf{s})=(1,0)$），由定理 2.1(i)可知；这正是 $v=\mathbb{M}\nabla\mathsf{g}*\mu^t$ 在 $\mu^t\in\dot{W}^{\mathsf{d}/p+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}$时的情形。不过，仍然成立一个有缺陷的交换子估计。这正是下文定理 2.6 的内容。我们在定理中排除 $\mathsf{s}=0$ 这一情形，是因为这样可以简化论述，而且此情形已由 [Ros22b]中的论证涵盖。[9]

定理 2.6。假设 $-2<\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 且 $\mathsf{s}\neq 0$。令 $v\in\dot{W}^{\mathsf{d}/p+1,p}$ 对 $1<p<\infty$ 和 $\mu\in L^1$，满足 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}d\mu=1$ 和 $\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}|\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2}<\infty$。此外，假设以下条件成立：

(a) 若 $-2<\mathsf{s}\leq -1$，则 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d|\mu|<\infty$；*(b)* 若 $-1<\mathsf{s}<0$，则 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^r d|\mu|<\infty$，对于某个 $r<\lfloor\mathsf{s}_2\rfloor$；[10] *(c)* 若 $-1\leq\mathsf{s}<\mathsf{d}-1$，则 $\mu\in\underline{L}^q$，对于某个 $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}<q\leq\infty$（若 $\mathsf{s}=-1$，则允许 $q=1$）；

[9]严格来说，[Ros22b] 只考虑了情形 $(\mathsf{d},\mathsf{s})=(2,0)$，但仔细考察其论证可知，将 L^∞ 替换为相应的临界空间后，该论证适用于所有对数情形。[10]显然，由插值可知，若 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{r'}d|\mu|<\infty$ 对某个 $r'\geq\frac{r}{2}$ 成立，则 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^r d|\mu|<\infty$ 对任意 $0\leq r\leq r'$都成立，尤其是对某个 $r<\lfloor\mathsf{s}_2\rfloor$ 成立。

(d) if $\mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1$, *then* $\mu \in \dot{\mathcal{C}}^\theta$ *for some* $\theta > \mathsf{s}+1-\mathsf{d}$.[11]

那么，对于任意两两不同构型 $X_N \in (\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$ 和 $\epsilon > 0$，以下结论成立：若 $\max(\mathsf{d}-2, 0) \leq \mathsf{s} < d$</style>}，则

$$
\begin{aligned}
(2.13)\quad |\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| &\leq C_p\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_q\|\mu\|_{L^q}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)\\
&+\epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\Big(C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}+CN^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\\
&+C_\theta\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}+1}{\theta+\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}}\|\mu\|_{L^\infty}^{\frac{\theta-\mathsf{d}+1}{\theta+\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1}+\epsilon^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{\mathsf{d}\,\mathsf{s}}{q-1}}\Big)^{\mathsf{d}}\Big).
\end{aligned}
$$

如果 $0 < \mathsf{s} < \mathsf{d}-2$, *L*则

$$
\begin{aligned}
(2.14)\ &|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]|\\
&\leq \Big(C_p\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}+C_a\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{a}>2}\Big)\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_q\|\mu\|_{L^q}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)\\
&+CN^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}+\epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
(2.15)\quad &|\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| \leq \Big(C_p\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}+C\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\Big)\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_q\|\mu\|_{L^q}\kappa^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)\\
&+CN^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}+\epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}.
\end{aligned}
$$

如果 $-2 < \mathsf{s} < 0$，则

$$
\begin{aligned}
(2.16)\quad |\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v]| &\leq \Big(C_p\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}+C\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\Big)\mathsf{F}_N(X_N,\mu)\\
&+\Big(C_{\vartheta,\vartheta'}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon^{\vartheta'}\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\Big)+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\Big)\mathbf{1}_{-1<\mathsf{s}<0}\\
&+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\Big)\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}\leq-1}\\
&+\epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu+\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}\leq-1}+C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\mathbf{1}_{-1\leq\mathsf{s}<0}\Big).
\end{aligned}
$$

上述的 $\vartheta \in [|\mathsf{s}|-r、\ |\mathsf{s}|)$、$0 < \vartheta' < \vartheta$、$C = C(\mathsf{d}、\mathsf{s}) > 0$ 以及 C_ϑ、C_p、C_q、C_a、$C_\theta > 0$ 还分别依赖于 ϑ、p、q、a、θ。

注 2.7。端点 $p = \infty$ 若将 $\dot{W}^{1、\infty}$ 替换为齐格蒙德空间 $\dot{\mathcal{C}}^1$，同样成立。读者应注意，按照我们的记号（回顾第 1.5 节），当 $p \to \infty$ 时，$\dot{W}^{\frac{d}{p}+1、p}$的极限并非齐次利普希茨空间，而是性质不佳的空间 $\{f \in \mathcal{S}' : \langle\nabla\rangle f \in L^\infty\}$，它与 Lipschitz 空间并不相同，而且在调和分析文献中通常不予讨论。关于这一点的进一步说明，请参见第5.4 节。

有了这个有缺陷的交换子估计，便可将其应用于 $v = \mu^t$，从而得到调制能量的 Gr¨onwall 型界（更精确的估计将在第 2.8 节中定理 4.4 的证明过程中给出）。该界表明，只要初始

[11]如果 $\mu \in L^1 \cap \dot{\mathcal{C}}^\theta$ 对某个 $\theta > 0$成立，那么由于插值估计$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p(\theta+p-1)}}\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{\theta+p}}$，则必然有 $\mu \in L^p$ 对任意 $1 \leq p \leq \infty$ 成立。

调制能量随 $N \to \infty$ 足够快地趋于零，这一假设对于初始粒子位置的大多数有意义的随机化选择几乎处处成立（见下文备注 2.9）。

定理 2.8。 设 $d \geq 1$ and $-2 < s < d$ and $s \neq 0$。假设对于 $T > 0$, $\int_0^T (\|V^t\|_{\dot{W}^{d_{p+1},p}} + \||\nabla|^{\frac{d-s}{2}} V^t\|_{L^2}^2 \mathbf{1}_{s<d-2}) dt < \infty$。令 μ 为平均场方程 (1.3) 在 $L^\infty([0,T], \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{W}^{d_{p+s+2-d^p}}(\mathbb{R}^d))$ 上的一个解，其中 $1 < p \leq \frac{2}{2-(d-s)}$。进一步假设对于每个 $t \in [0,T]$，都有 $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{|s|^2} d\mu^t < \infty$。[12]

对于 $q > \frac{d}{d-s-1}$, $\vartheta \in (\frac{|s|}{2}, |s|)$，以及 $0 < \vartheta' < \vartheta$，令

$$\mathscr{E}^t := \mathsf{F}_N(X_N^t, \mu^t) + \sup_{t \leq \tau \leq T} \zeta^\tau, \tag{2.17}$$

其中

$$\zeta^\tau := \epsilon \begin{cases} \Big(C_q \|\mu^\tau\|_{L^q} \lambda_\tau^{\frac{d(q-1)}{q} - s} + C_q \|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(s+1)q}{d(q-1)}} \mathbf{1}_{s<d-1} \\ + C(\|\mu^\tau\|_{\dot{C}^{s+2-d}}^{\frac{s+1-d}{s+2-d}} + \epsilon^{d-s-1} \|\mu^\tau\|_{L^\infty}^{\frac{s-d+1}{s+2-d}}) \mathbf{1}_{s \geq d-1} \Big), & \max(d-2, 0) \leq s < d \\ C_q \Big(\|\mu^\tau\|_{L^q} \kappa_\tau^{\frac{d(q-1)}{q} - s} + \|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(s+1)q}{d(q-1)}} \Big), & 0 < s < d-2 \\ C_{\vartheta,\vartheta'} \epsilon^{\vartheta'-1} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{|s|-\vartheta} d\mu^\tau + C(1 + C_q \|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(s+1)q}{d(q-1)}}), & -1 < s < 0 \\ C \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{|s|-1} d\mu^\tau, & -2 < s \leq -1, \end{cases} \tag{2.18}$$

并且对于 $\alpha, \delta > 0$,[13]

$$\epsilon := \begin{cases} \delta N^{-1 - \frac{2(s+1)}{s} - \alpha} (\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{s}}, & 0 < s < d \\ N^{-\alpha}, & -2 < s < 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

存在一个 $\delta > 0$ 仅依赖于 d、s p, α, $\int_0^T \|\mu^t\|_{\dot{W}^{d_p+s+2-d\,p}} dt$，使得对于微观系统 X_N 的任意解 (1.1)，对于 $t \in [0,T]$，若 $0 < s < d$，则以下结论成立：

$$\mathscr{E}^t \leq C\mathscr{E}^0 \exp\Big(\int_0^t C_p \|u^{t'}\|_{\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}} \Big(1 + |\log\Big(\delta N^{1 - \frac{2(s+1)}{s} - \alpha} (\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{s}} \Big)| \Big)^{1-\frac{1}{p}} dt' \Big), \tag{2.20}$$

若 $-1 < s < 0$，则

$$(\mathscr{E}^t)^{\frac{\vartheta}{|s|}} \leq \exp\Big(\frac{C_p \vartheta}{|s|} \int_0^t \|u^\tau\|_{\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}} (1 + |\log N^{-\alpha}|)^{1-\frac{1}{p}} d\tau \Big) \Big((\mathscr{E}^0)^{\frac{\vartheta}{|s|}} + \frac{\vartheta}{|s|} \int_0^t C_{\vartheta,\vartheta'} \|u^{t'}\|_{\dot{C}^1} \epsilon^\vartheta dt' \Big), \tag{2.21}$$

并且若 $-2 < s \leq -1$，则

$$(\mathscr{E}^t)^{\frac{1}{|s|}} \leq \exp\Big(\frac{C_p}{|s|} \int_0^t \|u^\tau\|_{\dot{W}^{\frac{d}{p}+1,p}} (1 + |\log N^{-\alpha}|)^{1-\frac{1}{p}} d\tau \Big) \Big((\mathscr{E}^0)^{\frac{1}{|s|}} + \frac{1}{|s|} \int_0^t C \|u^{t'}\|_{\dot{C}^1} \epsilon dt' \Big). \tag{2.22}$$

上文中，$C > 0$ 仅依赖于d、s，而 $C_{\vartheta,\ \vartheta'}$、$C_q$、$C_p$ 还分别依赖于(ϑ、ϑ') q、p。特别地，若$\mathsf{F}_N(X_N^0$、$\mu) = O(N^{-m})$ 当 $N \to \infty$ 时成立，其中某个 $m > 0$，则 $\mu_N^t \to \mu^t$ 当 $N \to \infty$ 时，在 $H^{-r}(\mathbb{R}^d)$ 中关于任意 $[0,T]$ 一致成立，其中 $r > d\,2$。

[12]此条件确保调制能量/MMD 有限（见 [MD24，例 4]），并且定理陈述中的所有矩假设均得到满足。通过 Gr¨onwall 论证，读者可以验证，若 μ^0 满足此矩条件，则 μ^t 也会在 $[0,T]$.[13]中一致满足该条件。当 $0 < s < d$ 时，ϵ 的定义是隐式给出的。关于该隐式方程为何有解，请参见定理 2.8 的证明。

注 2.9。 生成初始点配置 X_N使得 $|\mathsf{F}_N(X_N,\ \mu)| \leq CN^{-m}$对于 $C,\ m>0$与 N无关 的一种自然方法是，令服从 调制吉布斯测度 (该术语由 [RS25b]提出)

$$d\mathbb{Q}_{N,\beta}(\mu)(X_N) := \frac{e^{-\beta N\mathsf{F}_N(X_N,\mu)}d\mu^{\otimes N}(X_N)}{\mathsf{K}_{N,\beta}(\mu)},\quad \mathsf{K}_{N,\beta}(\mu) := \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N} e^{-\beta N\mathsf{F}_N(X_N,\mu)}d\mu^{\otimes N}(X_N), \tag{2.23}$$

其中， $\beta\in[0,\infty]$ 是一个参数，可解释为逆温度。极端情形$\beta=0$ 对应于 μ-iid 点，而极端情形 $\beta=\infty$ 在形式上对应于在 $X_N\mapsto \mathsf{F}_N(X_N,\mu)$的极小化点集合中均匀分布的点。当 $\beta=0$时，有$\mathbb{E}[\mathsf{F}_N(X_N,\mu)]=CN^{-1}$，事实上，这一标度以高概率成立。当 $\beta=\infty$时，有 $\min \mathsf{F}_N(X_N,\mu) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\mathsf{s})}C\mathsf{N}\mathsf{s}\ \mathsf{d}^{-1}$。通过改变 β，可以得到 N中介于这两种极端情形之间的标度律。更多细节请参见 [Ser24，第 5] 章。

注 2.10。 关于形如 (1.3) 的方程的适定性，已有大量文献。关于这一方向的一些评论，请参见 [Ser20] 的引言。这里我们简要指出，当 $\mathsf{s}<\mathsf{d}-2$ 时，平均场方程 (1.3) 对于临界空间 $L^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}$中的概率密度初始数据，解是唯一且全局存在的。这基本上可由与库仑情形 相同的论证得到，其中 $\mathsf{s}=\mathsf{d}-2$，初始密度属于 L^∞ （例如参见 [Yud63、LZ00、SV14]）。

第4节致力于定理 2.6 和 2.8 的证明。有缺陷的交换子估计是其中的核心，其推导沿用了与 [Ros22b、Ros22a]类似的思路。具体而言，我们在某个尺度 ϵ 下将向量场 v 磨光，并应用带有 v_ϵ 的定理 1.1。随后，我们需要分别用 $\mathsf{F}_N(X_N,\mu)$ ϵ来估计误差项 $\mathsf{A}_1[X_N,\mu,v-v_\epsilon]$ N。当然，由于定理 1.1 至少要求具备 Lipschitz 正则性，而当 $v\in \dot{W}^{\mathsf{d}_{p}+1,p}$时并不满足这一条件，因此我们必须在散度 $\epsilon\to 0$ （即缺陷）方面付出代价。简单重复 [Ros22b、Ros22a] 中的论证并不能得到定理 2.6 的估计，因而也不能得到定理 2.8。 [Ros22b]是专门针对对数情形，适用于 $W^{\mathsf{d}}_{p,\ p}$ 中向量场的对数 Lipschitz 正则性（更一般地，在齐格蒙德空间 $\mathcal{C}^1$ 中）。而 [Ros22a]，中为处理库仑势的非对数特性（当 $\mathsf{d}\neq 2$ 时）所设计的较粗略论证，会在 $\propto \log N$ 前引入因子 $\mathsf{F}_N(X_N^t,\ \mu^t)$。只有将时间限制在较短范围内，这类因子才可以接受。

如第 1.3 节所述，我们证明中的关键新要素是 Brezis-Wainger-Hansson 不等式（1.22）。更确切地说，通过经典的莫雷论证可得（1.22）的一个推论：若 $1<p<\infty$，则对任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})$，

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^{\mathsf{d}},\qquad |f(x)-f(y)|\leq C\|f\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}|x-y|\Big(1+|\log|x-y||\Big)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{2.24}$$

其中 $C=C(\mathsf{d}\ p)>0$.[14] 这个不等式也可以表述为： $L^\infty\cap \dot{W}^{\mathsf{d}_{p}+1,p}$ 嵌入到对数-Lipschitz 空间 $\mathrm{Lip}_{(1,-1+\frac{1}{p})}{}_{\infty,\infty}$ [Jan80, Har06, Har07]。在证明定理 1.1 时，我们需要将 v_ϵ 作为证明的一部分，并量化 $\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty}$ 在 $\epsilon\to 0^+$ 时的散度。在 [Ros22b, Ros22a]，中，利用 $\dot{\mathcal{C}}^1$ 函数具有对数 Lipschitz 正则性这一事实，来估计 $\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty}\lesssim \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}(1+|\log\epsilon|)$。注意，根据索伯列夫嵌入，$\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\lesssim \|v\|_{\dot{W}^{\mathsf{d}_{p}+1,p}}$。连续模估计 (2.24) 使我们能够将这一估计改进为 $\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty}\lesssim \|v\|_{\dot{W}^{\mathsf{d}_{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}$（见引理 4.1）。结合对磨光误差 $v-v_\epsilon$ 的更优估计（见引理 4.5），这一改进便可推出定理 2.6。完整证明见第4.3节。

为了从定理 2.6得到平均场收敛定理 2.8的结论，我们需要以可能依赖时间的方式适当选择$\epsilon=\epsilon_t$。 ϵ_t需要足够小，具体取决于

[14]严格来说， [BW80] 给出的不等式右侧使用的是非齐次索伯列夫范数$\|f\|_{W^{\mathsf{d}_{p}+1,\ p}}$。将 f替换为$f_\lambda:=f(\lambda\cdot)$和 $(x,\ y)$ 替换为 $\lambda^{-1}(x,\ y)$，然后令 $\lambda\to\infty$即可得到 (2.24)。

on $N, \mathrm{F}_N(X_N^t, \mu^t)$，以抵消定理 2.6 的估计中 N 的发散前因子以及指数为 >1 的 $\mathrm{F}_N(X_N^t, \mu^t)$ 的幂。得益于改进项 $(1+|\log \epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}$，这是可行的，而且仍足以闭合关于 $\mathrm{F}_N(X_N^t, \mu^t)$ 的微分不等式。详情请参见第 4.4 节。虽然这可能显得重复，但我们强调，如果用 1 替换 $1-\frac{1}{p}$，那么我们就会受到与 [Ros22a] 中相同的短时间限制。

注 2.11. 读者应注意，定理 2.6 和 2.8 不涵盖 $p=\infty$（它们也不涵盖 $p=1$，但这点不太重要）。我们将在第 5.4 节回到这个例外。

3. Counterexamples

本节专门证明我们的反例结果，即定理 2.1 和 2.3。我们已在第 2.2 节说明推论 2.4 如何由定理 2.3 得出，因此不再进一步讨论这一结果。

3.1. **定理 2.1(i) 的证明。** 设 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\mathsf{d})$ 使得 $0 \le \chi \le 1$，支撑 $\chi \subset B(0,1/2)$，且 $\chi \equiv 1$ 在 $B(0,1/4)$ 上。令 $v := (v_1, \dots, v_\mathsf{d})$，其中

$$v_1(x) := -x_1 \log(\log(1/|x|))\chi(x) \qquad \text{and} \qquad v_i(x) := 0,\ 2 \le i \le \mathsf{d}. \tag{3.1}$$

显然，v 具有紧支集。还可以通过与 χ_ϵ 卷积将其变为 C^∞，其中 $\epsilon = \epsilon(r) > 0$，参数 r 如下。我们省略这一步的具体实现。

我们断言 $v_1' \in$ 在 $\mathsf{d}=1$ 时属于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$，而在 $\mathsf{d} \ge 2$ 时属于 $_{\mathsf{d}\,\mathsf{d}-1}(\mathbb{R}^\mathsf{d})$。事实上，当 $\mathsf{d} = 1$

$$\frac{d}{dx}\Big(-x \log\big(\log(1/|x|)\big)\Big) = -\log\big(\log(1/|x|)\big) + \frac{1}{\log(1/|x|)} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}), \tag{3.2}$$

因此，v 也如此，因为乘以 χ 不会改变 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$。另一方面，当 $\mathsf{d} \ge 2$ 时，对所有 $k \ge 1$，都存在 $C_{\mathsf{d},k} > 0$ 使得

$$\forall |x| \le \frac{1}{2}, \qquad \big|\nabla^{\otimes k} \log\big(\log(1/|x|)\big)\big| \le \frac{C_{\mathsf{d},k}}{|x|^k \log(1/|x|)}. \tag{3.3}$$

由莱布尼茨法则以及 $\operatorname{supp} \chi' \subset B(0, \ _{1\,4})^c$ 这一事实，前面的估计蕴含

$$\forall |x| \le \frac{1}{2}, \qquad |\nabla^{\otimes \mathsf{d}} v(x)| \le \frac{C'_{\mathsf{d},k}}{|x|^{\mathsf{d}-1} \log(1/|x|)}. \tag{3.4}$$

由于 χ 的支集包含于 $B(0, \ _{1\,2})$，因此

$$\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |\nabla^{\otimes \mathsf{d}} v|^{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-1}} \le C \int_{B(0,1/2)} \frac{1}{|x|^{\mathsf{d}-1}\log(1/|x|)} = C \int_0^{1/2} \frac{1}{r \log(1/r)^{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-1}}} < \infty, \tag{3.5}$$

其中，在第一个等式中，我们使用了径向坐标变换。根据索伯列夫嵌入，这还意味着对于所有 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}-2$，$\nabla v \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^\mathsf{d})$ 且 $|\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} v \in L^{\frac{2}{-\mathsf{d}\,\mathsf{d}\mathsf{s}-2}}(\mathbb{R}^\mathsf{d})$。

接下来，假设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\mathsf{d})$ 是一个支集包含于 $B(0, 1/4)$ 的零均值函数，使得

$$\int_{(\mathbb{R}^\mathsf{d})^2} \frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}} f(x) f(y) > 0. \tag{3.6}$$

这样的 f 存在，因为如果 f 在坐标置换下是对称的，那么

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}^\mathsf{d})^2} \frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}} f(x) f(y) &= \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}} \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |\xi|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}-2} \Big(|\xi|^2 - (\mathsf{d}-\mathsf{s})|\xi^1|^2 \Big) |\hat{f}(\xi)|^2 \\ &= \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}\mathsf{s}} \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |\xi|^{\mathsf{s}-\mathsf{d}-2} |\xi^1|^2 |\hat{f}(\xi)|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

令 $f_r(x):=r^{-\mathsf{d}}f(r^{-1}x)$，其中 $r>0$，于是

$$\begin{aligned}(3.8)\quad &\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)f_r(x)f_r(y)\\ &=\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\log\big(\log(1/|x|)\big)\frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f_r(x)f_r(y)+\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\log\left(\frac{\log(1/|x|)}{\log(1/|y|)}\right)\frac{y^1(x-y)^1}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f_r(x)f_r(y).\end{aligned}$$

作坐标变换后，(3.8) 右端的第一项等于

$$(3.9)\qquad r^{-\mathsf{s}}\log(\log(1/r))\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\frac{\log\big(\log(1/|x|)-\log(r)\big)}{\log\big(\log(1/r)\big)}\frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f(x)f(y),$$

而第二项等于

$$(3.10)\qquad r^{-\mathsf{s}}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\log\left(\frac{\log(1/|x|)-\log(r)}{\log(1/|y|)-\log(r)}\right)\frac{y^1(x-y)^1}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f(x)f(y).$$

根据控制收敛定理，

$$(3.11)\qquad \lim_{r\to0}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\frac{\log\big(\log(1/|x|)-\log(r)\big)}{\log\big(\log(1/r)\big)}\frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f(x)f(y)=\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f(x)f(y)$$

and

$$(3.12)\qquad \lim_{r\to0}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\log\left(\frac{\log(1/|x|)-\log(r)}{\log(1/|y|)-\log(r)}\right)\frac{y^1(x-y)^1}{|x-y|^{\mathsf{s}+2}}f(x)f(y)=0.$$

结合 (3.8)-(3.12，可知存在 $C>0$，其仅依赖于 d、s f，使得

$$(3.13)\qquad \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)f_r(x)f_r(y)\geq C^{-1}r^{-\mathsf{s}}\log(\log(1/r))-Cr^{-\mathsf{s}}$$

对所有充分小的 r 均成立。

由于 $\|f_r\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}=r^{-\mathsf{s}}\|f\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}$，因此我们总共发现，对于所有充分小的 r

$$(3.14)\qquad \frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)f_r(x)f_r(y)\right|}{\Big(\|\nabla v\|_{\mathrm{BMO}}+\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-2}\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\Big)\|f_r\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}}\geq C^{-1}\log(\log(1/r))-C.$$

取 $r\to0$ 即可得出该结论。

Rem备注 3.1. 我们注意到，如果 $\mathsf{d}=1$ 且 $\mathsf{s}=0$，上述反例便不成立，因为 e

$$(3.15)\qquad \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}\frac{|(x-y)^1|^2}{|x-y|^2}f(x)f(y)=\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}f\right)^2=0$$

对于所有零均值函数 f。

3.2. 定理 2.1(ii)的证明。 我们对施瓦茨函数采用（1.18）的一个等价表述，其傅里叶变换的支集远离 0。若 F 和 G 是施瓦茨函数，且其傅里叶变换的支集远离原点，那么 $f:=|\nabla|F$ 和 $g:=|\nabla|G$ 也都是施瓦茨函数，且其傅里叶变换的支集远离原点。此外，由于 $|\nabla|\mathsf{g}=\mathsf{c}_{\mathsf{d},\,\mathsf{s}}\delta_0$，可得

$$(3.16)\qquad \int_{\mathbb{R}^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)=\mathsf{c}\int_{\mathbb{R}}v\cdot\Big(F'|\nabla|G+G'|\nabla|F\Big).$$

由于 $\|F\|_{\dot{H}^{\frac12}}=\mathsf{c}_{\mathsf{d},\,\mathsf{s}}\|f\|_{\dot{H}^{-\frac12}}$对于 G 和 g 也同样如此，因此只需证明存在 $C>0$ 使得

$$(3.17)\qquad \left|\int_{\mathbb{R}}v\big(F'|\nabla|G+G'|\nabla|F\big)\right|\leq C\|v'\|_{\mathrm{BMO}}\|F\|_{\dot{H}^{1/2}}\|G\|_{\dot{H}^{1/2}}$$

对于所有 Fourier 支集远离原点的 $F,\ G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。

为此，我们进行分部积分

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} v\big(F'|\nabla|G + G'|\nabla|F\big) &= -\int_{\mathbb{R}} \Big(v'\big(F|\nabla|G + G|\nabla|F\big) + vF\partial_x|\nabla|G + vG\partial_x|\nabla|F\Big)\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \Big(v'\big(F|\nabla|G + G|\nabla|F\big) - \partial_x|\nabla|^{\frac12}(vG)|\nabla|^{\frac12}F - \partial_x|\nabla|^{\frac12}(vF)|\nabla|^{\frac12}G\Big)\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \Big(v'F|\nabla|G - |\nabla|^{\frac12}v'F|\nabla|^{\frac12}G\Big) - \int_{\mathbb{R}} \Big(v'G|\nabla|F - |\nabla|^{\frac12}v'G|\nabla|^{\frac12}F\Big)\\ &\quad + \int_{(\mathbb{R})} \Big(v\big(|\nabla|^{\frac12}F'|\nabla|^{\frac12}G + |\nabla|^{\frac12}G'|\nabla|^{\frac12}F\big) + 3v'|\nabla|^{\frac12}F|\nabla|^{\frac12}G\Big)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \Big(T(v,F)|\nabla|^{\frac12}G + T(v,G)|\nabla|^{\frac12}F\Big), \qquad (3.18)\end{aligned}$$

其中 T 是双线性算子

$$T(v,H) := \partial_x|\nabla|^{\frac12}(vH) - |\nabla|^{\frac12}v'H - v|\nabla|^{\frac12}H' - \frac{3}{2}v'|\nabla|^{\frac12}H \qquad (3.19)$$

定义在 $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上。

首先，我们注意到分部积分后

$$\int_{\mathbb{R}} v\big(|\nabla|^{\frac12}F'|\nabla|^{\frac12}G + |\nabla|^{\frac12}G'|\nabla|^{\frac12}F\big) = -\int_{\mathbb{R}} v'|\nabla|^{\frac12}F|\nabla|^{\frac12}G. \qquad (3.20)$$

因此，我们可以将（3.18）拆分为由下式定义的三项之和

$$\mathrm{Term}_1 := -\int_{\mathbb{R}} \Big(v'F|\nabla|G - |\nabla|^{\frac12}v'F|\nabla|^{\frac12}G - v'|\nabla|^{\frac12}F|\nabla|^{\frac12}G\Big), \qquad (3.21)$$

$$\mathrm{Term}_2 := -\int_{\mathbb{R}} \Big(v'G|\nabla|F - |\nabla|^{\frac12}v'G|\nabla|^{\frac12}F - v'|\nabla|^{\frac12}F|\nabla|^{\frac12}G\Big), \qquad (3.22)$$

$$\mathrm{Term}_3 := \int_{\mathbb{R}} \Big(T(v,F)|\nabla|^{\frac12}G + T(v,G)|\nabla|^{\frac12}F\Big). \qquad (3.23)$$

我们分别估计这些项。

我们先看项$_1$。分部积分后可得

$$\mathrm{Term}_1 = -\int_{\mathbb{R}} \Big(|\nabla|^{\frac12}(v'F) - |\nabla|^{\frac12}v'F - v'|\nabla|^{\frac12}F\Big)|\nabla|^{\frac12}G. \qquad (3.24)$$

方括号内的表达式是 Kenig-Ponce-Vega 型交换子 [KPV93], 并且根据 [Li19，注 1.3，(1.7)] 其中 $s = \frac12,\ f = F,\ g = v'$，可得

$$\big\||\nabla|^{\frac12}(v'F) - |\nabla|^{\frac12}v'F - v'|\nabla|^{\frac12}F\big\|_{L^2} \le C\|v'\|_{\mathrm{BMO}}\|F\|_{\dot H^{1/2}} \qquad (3.25)$$

对某个 $C > 0$ 成立。因此，由柯西-施瓦茨不等式可得，

$$|\mathrm{Term}_1| \le C\|v'\|_{\mathrm{BMO}}\|F\|_{\dot H^{1/2}}\|G\|_{\dot H^{1/2}}. \qquad (3.26)$$

交换 F 和 G，我们可以同样地估计项$_2$ 。

对于项$_3$, ，注意到 T 是一个高阶交换子，且根据 [Li19，推论 1.4(2)]取$s = \frac32,\ f = H,$ $g = v,\ A^s = \partial_x|\nabla|^{\frac12},\ p = 2,\ s_2 = \bar 1,\ s_1 = \frac12$，可得

$$\|T(v,H)\|_{L^2} \le C\||\nabla|v\|_{\mathrm{BMO}}\|H\|_{\dot H^{1/2}}, \qquad (3.27)$$

对于某个 $C > 0$。注意到，由于希尔伯特变换在有界平均振荡空间上有界，可以估计 $\||\nabla|v\|_{\mathrm{BMO}} \le C\|v'\|_{\mathrm{BMO}}$。由柯西-施瓦茨不等式，进而得到

$$|\mathrm{Term}_3| \le C\|v'\|_{\mathrm{BMO}}\|F\|_{\dot H^{1/2}}\|G\|_{\dot H^{1/2}}. \qquad (3.28)$$

Comb代入（3.26）得到项$_1$,项$_2$ 以及将（3.28）代入项$_3$, 证明完成。

3.3. **定理2.3的证明**。 设 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的径向对称施瓦茨函数，其傅里叶变换 ϕ 满足 $0 \le \phi \le 1$，支集 $\phi \subset B(0,1/4)$，并且 $\phi \equiv 1$ 在 $B(0,1/8)$上。令$e_1 : = (1,0,\dots,0)$，并令 $k>2$，定义（实）向量场 v 为

$$\hat{v}(\xi) \coloneqq \imath e_1 \Big(\hat{\phi}(\xi + k e_1) - \hat{\phi}(\xi - k e_1) \Big). \tag{3.29}$$

以及（实）函数 f、g 如下定义

$$\hat{f}(\xi) \coloneqq \Big(\hat{\phi}\big(\xi + (k+1)e_1\big) + \hat{\phi}\big(\xi - (k+1)e_1\big) \Big), \tag{3.30}$$

$$\hat{g}(\xi) \coloneqq \Big(\hat{\phi}(\xi + e_1) + \hat{\phi}(\xi - e_1) \Big). \tag{3.31}$$

显然， f 和 g 都是施瓦茨函数，且其傅里叶变换的支集都避开 0。接着注意到

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x)-v(y)) \cdot \nabla \mathsf{g}(x-y) f(x) g(y) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * fg + \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * gf. \tag{3.32}$$

由Plancherel定理,

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * fg = \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{v}(\xi_1) \cdot 2\pi i (\xi_1 - \xi_2) \hat{\mathsf{g}}(\xi_1 - \xi_2) \hat{f}(\xi_1 - \xi_2) \hat{g}(\xi_2). \tag{3.33}$$

展开 v、 f 和 g的定义，前述右端等于 to

$$\begin{aligned} &- \sum_{\epsilon_i \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\xi_1 + \epsilon_1 k e_1) e_1 \cdot (\xi_1 - \xi_2) \hat{\mathsf{g}}(\xi_1 - \xi_2) \hat{\phi}\big(\xi_1 - \xi_2 + \epsilon_2 (k+1) e_1\big) \hat{\phi}(\xi_2 + \epsilon_3 e_1) \\ &\quad = - \sum_{\epsilon_i \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\zeta_1) \hat{\phi}(\zeta_2) \hat{\phi}\big(\zeta_1 - \zeta_2 + ((\epsilon_3 + \epsilon_2) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) k) e_1\big) \\ &\qquad\qquad \times e_1 \cdot \big(\zeta_1 - \zeta_2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1 k) e_1\big) \hat{\mathsf{g}}\big(\zeta_1 - \zeta_2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1 k) e_1\big), \end{aligned} \tag{3.34}$$

ˆ 最后的等式由变量替换得到。由于 $\mathsf{supp}\ \phi \subset B(0,\ 1/4)$，上面求和中的积分仅在以下情形下非零:

$$|\zeta_1 - \zeta_2 + ((\epsilon_3 + \epsilon_2) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) k) e_1)| \le \frac{1}{4} \tag{3.35}$$

对于某个 $\zeta_i \in B(0,\ 1/4)$。由于 $k>2$，我们必有 $(\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3) = \pm(1,\ 1,\ -1)$。利用对称性，我们证明了

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * fg = 2 \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\zeta_1) \hat{\phi}(\zeta_2) \hat{\phi}(\zeta_1 - \zeta_2) \big((\zeta_2 - \zeta_1) \cdot e_1 + 1 + k \big) \hat{\mathsf{g}}\big(\zeta_2 - \zeta_1 + (1+k) e_1\big). \tag{3.36}$$

由于 $|\zeta_i| \le \frac{1}{4}$ 在 ˆ 的支集上 $\phi(\zeta_i)$，且 ˆg 根据假设2.2是递减的，我们可以利用杨氏卷积不等式对上面的右端作粗略估计，得到

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * fg \right| \le C k \hat{\mathsf{g}}(k) \|\hat{\phi}\|_{L^{3/2}}^3, \tag{3.37}$$

其中 $C>0$ 是一个仅依赖于 d 的常数。

根据上述相同的推理,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v \cdot \nabla \mathsf{g} * gf = &- \sum_{\epsilon_i \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\zeta_1) \hat{\phi}(\zeta_2) \hat{\phi}\Big(\zeta_1 - \zeta_2 + \big((\epsilon_2 + \epsilon_3) + (\epsilon_3 - \epsilon_1) k\big) e_1\Big) \\ &\times e_1 \cdot \Big(\zeta_1 - \zeta_2 + \big(\epsilon_3 + (\epsilon_3 - \epsilon_1) k\big) e_1\Big) \hat{\mathsf{g}}\Big(\zeta_1 - \zeta_2 + \big(\epsilon_3 + (\epsilon_3 - \epsilon_1) k\big) e_1\Big). \end{aligned} \tag{3.38}$$

现在，若前一个右侧求和中的某个积分不为零，则必须满足（ϵ_1， ϵ_2，{v7> $= \pm(1,\ -1,\ 1)$。利用对称性，我们由此证明了

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v\cdot\nabla \mathsf{g} * gf = 2\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\zeta_1)\hat{\phi}(\zeta_2)\hat{\phi}(\zeta_1-\zeta_2)\big(1-e_1\cdot(\zeta_1-\zeta_2)\big)\hat{\mathsf{g}}(\zeta_2-\zeta_1+e_1). \tag{3.39}$$

由于在 ˆ $\phi(\zeta_1)$ ˆ$\phi(\zeta_2)$ 的支集上有 $(1-e_1\cdot(\zeta_1-\zeta_2))\geq \frac{1}{2}$ and $|\zeta_2-\zeta_1+e_1|\leq 2$，我们得到了下界

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} v\cdot\nabla \mathsf{g} * gf \geq \hat{\mathsf{g}}(2)\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \hat{\phi}(\zeta_1)\hat{\phi}(\zeta_2)\hat{\phi}(\zeta_1-\zeta_2) \geq C^{-1}\hat{\mathsf{g}}(2), \tag{3.40}$$

其中 ˆ 最后一个不等式利用了 $\phi = 1$ 在 $B(0,\ 1/8)$ 上成立，且 $C>0$ 仅依赖于 ϕ .

另一方面，由 Plancherel定理和傅里叶支撑的相关性质可立即得到

$$\|g\|_{\mathsf{g}_t} \lesssim \|\phi\|_{L^2}, \tag{3.41}$$

$$\|f\|_{\mathsf{g}_t} \lesssim \hat{\mathsf{g}}(tk)^{1/2}\|\phi\|_{L^2} \tag{3.42}$$

其中隐含常数依赖于 d，g t；而傅里叶反演表明

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \lesssim k\|\phi\|_{L^1}. \tag{3.43}$$

另一方面，由于 supp $\widehat{v}\subset\{k-1\leq|\xi|\leq k+1\}$，我们有 $\sigma(|\xi|) \leq \sup^{r\in[k-1,k+1]}{}^{\sigma}(r)$ 在 supp $\widehat{v}$ 上。若 $2\leq p\leq\infty$，则由豪斯多夫–杨不等式以及 v 的傅里叶支撑可得，

$$\|\sigma(|\nabla|)v\|_{L^p} \lesssim \Big(\sup_{r\in[k-1,k+1]}\sigma(r)\Big)\|\hat{\phi}\|_{L^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{3.44}$$

对任意 $p\in[1,\infty]$，常数仅依赖于 d p。若 $1\leq p<2$，则在假设 $\partial_x^n\sigma$ 对于 $n\leq \mathsf{d}+1$ 与原点保持本质距离的情况下，由杨氏不等式可得

$$\|\sigma(|\nabla|)v\|_{L^p} \lesssim \max_{n\leq\mathsf{d}+1}\sup_{r\in[k-1,k+1]}|\partial_r^n\sigma(r)|\|\phi\|_{L^p}. \tag{3.45}$$

结合 (3.37) 和 (3.40)-(3.45)，总共得到

$$\begin{aligned}\frac{\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)f(x)g(y)\right|}{\Big(\|\nabla v\|_{L^\infty}+\|\sigma(|\nabla|)v\|_{L^p}\Big)\|f\|_{\mathsf{g}_t}\|g\|_{\mathsf{g}_t}} \\ \geq \frac{C^{-1}-Ck\hat{\mathsf{g}}(k)}{C\Big(k+\mathbf{1}_{1\leq p<2}\max_{n\leq\mathsf{d}+1}\|\partial_r^n\sigma\|_{L^\infty([k-1,k+1])}+\mathbf{1}_{2\leq p\leq\infty}\|\sigma\|_{L^\infty([k-1,k+1])}\Big)\hat{\mathsf{g}}(tk)^{1/2}},\end{aligned} \tag{3.46}$$

对于某个 $C=C(\mathsf{d},\ \mathsf{s}\ \phi)>0$。由 (2.5)，可知 kˆ$g(k)$ 和 kˆ$\mathsf{g}(tk)^{1/2}$ 当 $k\to\infty$时趋于零，而根据假设，

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\mathbf{1}_{1\leq p<2}\max_{n\leq\mathsf{d}+1}\|\partial_r^n\sigma\|_{L^\infty([k-1,k+1])}+\mathbf{1}_{2\leq p\leq\infty}\|\sigma\|_{L^\infty([k-1,k+1])}\Big)\hat{\mathsf{g}}(tk)^{1/2}=0. \tag{3.47}$$

取 $k\to\infty$ 即可完成证明。

4. 缺陷交换子估计与平均场收敛

本节旨在证明第2.6 和2.8 号定理，这些定理分别在第2.3 节中介绍，内容分别涉及有缺陷的交换子估计和尺度临界调制能量估计。本节其余部分安排如下：在第4.1节中，我们给出关于 mollifier 的一些初步收敛速率。在第4.2节中，我们回顾后文将用到的调制能量的一些性质。在第4.3节中，我们证明有缺陷的交换子估计定理2.6，这是主要的技术结果。最后，在第4.4节中，我们证明定理2.8。

关于记号的几点说明。给定 $\mu \in L^p$，本节中我们始终使用记号 λ，κ见（1.10）、（1.11）。当 $\mu = \mu^t$ 时，我们写作 λ_t，κ_t 以表示时间依赖性。

4.1. 磨光。 令 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 为一个偶凸起函数，它在 $B(0, 1/4)$ 上取 1，在$B(0, 1)$ 外为零，并满足 $1 \geq \chi \geq 0$ 和 $\int_{\mathbb{R}^d} \chi dx = 1$。令 $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为一个向量场，并设

$$v_\epsilon(x) := (v * \chi_\epsilon)(x), \qquad \chi_\epsilon(x) := \epsilon^{-d}\chi(x/\epsilon), \tag{4.1}$$

其中卷积按分量进行。因此有 v_ε 为 C^∞，并且

$$\forall k \geq 0, \qquad \|\nabla^{\otimes k} v_\epsilon\|_{L^\infty} \lesssim_k \epsilon^{-k}\|v\|_{L^\infty}. \tag{4.2}$$

此外，如果 若 $\|\cdot\|_X$ 是任意平移不变半范数，则我们还有 $\|v_\epsilon\|_X \leq \|v\|_X$.

本小节旨在为磨光误差 $v - v_\epsilon$ 建立估计，并估计在对 v作出某些正则性假设的条件下，v_ϵ 的 Lipschitz半范数如何随 $\epsilon \to 0$ 趋于.....而发散。主要结果如下引理所示。

引理 4.1。 对于任意整数 $k \geq 0$ 和实数 $0 < b \leq a \leq 1$，存在常数 $C = C(a) > 0$，使得

$$\|\nabla^{\otimes k} v - \nabla^{\otimes k} v_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla^{\otimes k} v\|_{\dot{C}^a}\epsilon^a, \tag{4.3}$$

$$\|\nabla^{\otimes k} v - \nabla^{\otimes k} v_\epsilon\|_{\dot{C}^b} \leq C\|\nabla^{\otimes k} v\|_{\dot{C}^a}\epsilon^{a-b}. \tag{4.4}$$

假设存在 $\delta_k > 0$ 和一个递增函数 $\omega_k: [0, \delta_k] \to [0, \infty)$，使得$|\nabla^{\otimes k} v(x) - \nabla^{\otimes k} v(y)| \leq \omega_k(|x - y|)$。那么存在常数 $C > 0$，使得

$$\|\nabla^{\otimes k} v - \nabla^{\otimes k} v_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C\omega_k(2\epsilon), \qquad 0 \leq \epsilon \leq \frac{\delta_k}{2}, \tag{4.5}$$

$$\|\nabla^{\otimes k} v_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C\epsilon^{-1}\omega_{k-1}(2\epsilon), \qquad 0 < \epsilon \leq \frac{\delta_{k-1}}{2}. \tag{4.6}$$

证明。 注意，由于 χ 是偶数且 $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned} v(x) - v_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (v(x) - v(x - y))\chi_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} (v(x) - v(x + y))\chi_\epsilon(-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (v(x) - v(x + y))\chi_\epsilon(y)dy. \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此,

$$v(x) - v_\epsilon(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (2v(x) - v(x - y) - v(x + y))\chi_\epsilon(y)dy, \tag{4.8}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty} &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\|\frac{(2v(\cdot)-v(\cdot-y)-v(\cdot+y))}{|y|^a}\right\|_{L^\infty}|y|^a\chi_\epsilon(y)dy\\ &\le \frac{\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^a}}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|y|^a\chi_\epsilon(y)dy\\ &= \frac{\epsilon^a\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^a}}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|y|^a\chi(y)dy, \end{aligned}\tag{4.9}$$

其中倒数第二个不等式由变量替换 $y/\epsilon\mapsto y$ 得出。在前面的论证中，将 v 替换为 $\nabla^{\otimes k}v$，则对任意 $k\ge 0$，可得所需结论（4.3）。

设 $0<b\le a\le 1$。利用 $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ 和$t=\frac{\theta_2-\theta}{\theta_2-\theta_1}$的插值估计$\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}\le\|\cdot\|^t_{\dot{\mathcal{C}}^{\theta_1}}\|\cdot\|^{1-t}_{\dot{\mathcal{C}}^{\theta_2}}$，得到

$$\|v-v_\epsilon\|_{\dot{\mathcal{C}}^b}\le\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty}^{\frac{a-b}{a}}\|v-v_\epsilon\|_{\dot{\mathcal{C}}^a}^{\frac{b}{a}}\le(C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^a}\epsilon^a)^{\frac{a-b}{a}}(2\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^a})^{\frac{b}{a}}=C'\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^a}\epsilon^{a-b},\tag{4.10}$$

我们利用（4.3）得到第二个不等式。将 v 替换为 $\nabla^{\otimes k}v$ 对所有 $|x-y|\le\delta$ 及某个递增的 ω：$[0,\delta]\to[0,\infty)$。由恒等式（4.7）可知，若 $\epsilon\le\delta/2$，

$$\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty}\le\int_{\mathbb{R}^d}\omega(y)\chi_\epsilon(y)dy=\int_{B(0,2)}\omega(\epsilon y)\chi(y)dy\le\omega(2\epsilon)\int_{B(0,2)}\chi(y)dy,\tag{4.11}$$

其中我们再次进行了变量替换 $y/\epsilon\mapsto y$ 并利用了 ω的单调性。将v 替换为 $\nabla^{\otimes k}v$ 即可得到（4.5）。

最后，利用 $\nabla\chi_\epsilon$ 为奇函数、 χ_ϵ 为偶函数这一假设，从而有 $\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\chi_\epsilon=0$，我们得到

$$\nabla^{\otimes k}v_\epsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\nabla^{\otimes k-1}v(x-y)-\nabla^{\otimes k-1}v(x)\right)\otimes\nabla\chi_\epsilon(y)dy.\tag{4.12}$$

设 $|\nabla^{\otimes k-1}v(x)-\nabla^{\otimes k-1}v(y)|\le\omega_{k-1}(|x-y|)$ 对 $|x-y|\le\delta_{k-1}$成立，其中 ω_{k-1}： $[0,\delta_{k-1}]\to[0,\infty)$ 是递增的。进行变量替换 $y/\epsilon\mapsto y$后，

$$\begin{aligned}\|\nabla^{\otimes k}v_\epsilon\|_{L^\infty} &\le \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla^{\otimes k-1}v(x-\epsilon y)-\nabla^{\otimes k-1}v(x)||\nabla\chi(y)|dy\\ &\le \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d}\omega_{k-1}(\epsilon y)|\nabla\chi(y)|dy\\ &\le \frac{\omega_{k-1}(2\epsilon)}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\chi(y)|dy,\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中我们利用了 ω_{k-1} 的单调性来得到最后一行。这就得到了（4.6），并完成了证明。□

4.2. **调制能量的性质**。本小节回顾调制能量（1.5）的一些性质，这些性质对于定理2.6和2.8的证明很重要。

第一个结果是以下命题，取自 [HCRS25，命题 2.15] 在奇异情形 $0\le s<d$ 中，以及 [MD24，例 4] 在非奇异情形 $-2<s<0$ 中。该命题表明，调制能量具有强制性：它控制负阶索伯列夫范数的平方，误差至多为 $O(N^{-1+}{}_{sp\,d(p-1)})$，适用于密度 $\mu\in L^p$。特别地，这说明调制能量几乎非负，且调制能量趋于零意味着经验测度弱收敛到目标测度 μ。

命题 4.2。设 $0 \le s < d$ 且 $p > d$ d–s。存在常数 $C = C(d, s\ p) > 0$，使得以下结论成立：对于任意满足 $\int_{\mathbb{R}^d} d\mu = 1$ 且 $\int (\mathbb{R}^d)^2 |g|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2}(x,y) < \infty$ 的 $\mu \in L^1 \cap L^p$，若 $s = 0, \lambda \le 1$，并且对于任意两两不同构型 $X_N \in (\mathbb{R}^d)^N$，均有

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu \right\|^2_{H^{-r/2}} \le C\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + \frac{(\mathsf{g}(\lambda)+C)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C\frac{\mathsf{g}(\lambda)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}>0} + C\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}} \Big), \tag{4.14}$$

If $-2 < \mathsf{s} < 0$，那么对于任意满足 $\int_{\mathbb{R}^d} d\mu = 1$ 且 $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2} < \infty$ 的 $\mu \in L^1$，

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu) = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}} \left\| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu \right\|^2_{\dot{H}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}}{2}}}. \tag{4.15}$$

第二个结果取自 [HCRS25，推论 2。14]，它表明，调制能量能够控制小尺度相互作用。

命题 4.3。设 $p > \mathsf{d}$ d–s 且 $\mu \in L^1 \cap L^p$。定义最近邻类型距离 e

$$\mathsf{r}_i := \frac{1}{4}\min\Big(\min_{1\le j\le N: j\ne i} |x_i - x_j|, \lambda \Big). \tag{4.16}$$

存在 $C = C(\mathsf{d},\ \mathsf{s}\ p) > 0$，使得对每个 $\eta \le \lambda$，

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + \frac{(\mathsf{g}(\eta)+C)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C\frac{\mathsf{g}(\eta)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}>0} + C\|\mu\|_{L^p}\eta^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}} \tag{4.17}$$
$$\ge \begin{cases} \dfrac{1}{2N^2}\displaystyle\sum_{i=1}^N \mathsf{g}(4\mathsf{r}_i), & \mathsf{s} > 0 \\ \dfrac{1}{2N^2}\displaystyle\sum_{i=1}^N \mathsf{g}(4\mathsf{r}_i/\eta), & \mathsf{s} = 0, \end{cases}$$

and

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + \frac{(\mathsf{g}(\eta)+C)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}=0} + C\frac{\mathsf{g}(\eta)}{2N}\mathbf{1}_{\mathsf{s}>0} + C\|\mu\|_{L^p}\eta^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}} \tag{4.18}$$
$$\ge \begin{cases} \dfrac{1}{2CN^2}\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\ne j\le N \\ |x_i-x_j|\le\eta}} |x_i - x_j|^{-\mathsf{s}}, & \mathsf{s} > 0 \\ \dfrac{1}{2CN^2}\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\ne j\le N \\ |x_i-x_j|\le\eta}} -\log\left(\dfrac{x_i-x_j}{\eta}\right), & \mathsf{s} = 0. \end{cases}$$

最终结果取自 [RSW]，并且是 ¨Holder 不等式和 Riesz势的傅里叶表示的一个基本推论，它表明在非奇异情形$-2 < \mathsf{s} < 0$下，调制能量/平方最大均值差异可以控制 $< |\mathsf{s}|/2$ 阶矩。

命题 4.4。假设 $-2 < \mathsf{s} < 0$，并令 $0 < r < \lfloor \mathsf{s}_2 \rfloor$。存在常数 $C = C(\mathsf{d},\mathsf{s}\ r) > 0$，使得对于任意满足 $\int_{\mathbb{R}^d} d\mu = 1$ 且 $\int_{(\mathbb{R}^d)^2} |\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2} < \infty$ 和 $X_N \in (\mathbb{R}^d)^N$ 的 $x_0 \in \mathbb{R}^d$，$\mu \in L^1$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x - x_0|^r d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu \Big) \le C(1 + \|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2r}{|\mathsf{s}|}} \mathsf{F}_N^{\frac{r}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu). \tag{4.19}$$

4.3. **有缺陷的交换子估计**。现在，我们结合定理 1.1 中的泛函不等式与引理4.1 中的磨光误差估计，从而得到下文定理 2.6 形式的有缺陷的交换子估计。正如前文所述，在 $v = \mathbb{M}\nabla \mathsf{g} * \mu$ 的情形下，这种对 Lipschitz 假设的弱化是必要的，此时 μ 属于临界空间$\dot{W}^{\mathsf{d}}{}_{p}{}^{+\mathsf{s}+2-\mathsf{d}^{p}}$，其中 $1 < p < \infty$。下文中的 χ_ϵ 和 v_ϵ 与前面几个小节中的含义相同。

下文引入交换子核的记号

$$k_v(x,y) := \nabla \mathsf{g}(x-y)\cdot(v(x)-v(y)). \tag{4.20}$$

定理 2.6的证明与 [Ros22a、Ros22b]中的论证类似。主要技术要点是下面的引理 4.5，它控制了将 v 替换为磨光向量场 v_ϵ所产生的误差（参见 [Ros22b，引理 4.2]以及 [Ros22a，引理 4.3]）。与以往工作相比，该引理的证明得到了简化，这得益于引理4.1中更好的磨光估计以及命题 4.3中的小尺度控制。注意，我们省略了引理 $\mathsf{s} = 0$ 中的对数情形 4.5，因为 [Ros22b], 中的同一论证已经涵盖了这一情形，而省略它也简化了表述。

引理 4.5。假设 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$ 且 $\mathsf{s} \neq 0$。令 $v \in \dot{\mathcal{C}}^1$ 和 $\mu \in L^1$，其中 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} d\mu = 1$ 以及$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} |\mathsf{g}|(x-y)d|\mu|^{\otimes 2} < \infty$。此外，假设如下：

(a) 若 $-2 < \mathsf{s} \leq -1$，则 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d|\mu| < \infty$；*(b)* 若 $-1 < \mathsf{s} < 0$，则 $\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^r d\mu < \infty$，其中某个 $r < \lfloor \mathsf{s}_2 \rfloor$；*(c)* 若 $-1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1$，则 $\mu \in L^p$，其中某个 $\mathsf{d}\,\mathsf{d}-\mathsf{s}-1 < p \leq \infty$（若$\mathsf{s} = -1$，则允许 $p = 1$）；*(d)* 若 $\mathsf{s} \geq \mathsf{d} - 1$，则 $\mu \in \dot{\mathcal{C}}^\theta$，其中某个 $\theta > \mathsf{s} + 1 - \mathsf{d}$。

那么，对于任意两两不同构型 $X_N \in (\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$ 和 $\epsilon \geq 0$，

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2 \setminus \triangle} k_{(v-v_\epsilon)}(x,y) d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2} \right| \\
&\qquad \leq C N^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1} \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \epsilon \Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_p \|\mu\|_{L^p} \lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}} \Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}} \mathbf{1}_{0<\mathsf{s}<\mathsf{d}} \\
&\quad + \left(C_{\vartheta,\vartheta'} \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \epsilon^{\vartheta'} \Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta} d\mu + (1+\|\mu\|_{L^1}) \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \Big) + C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon \right) \mathbf{1}_{-1<\mathsf{s}<0} \\
&\qquad + C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d\mu + (1+\|\mu\|_{L^1}) \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \right) \mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}\leq -1} \\
&+ \epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d\mu + \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu), & -2 < \mathsf{s} \leq -1 \\ C_q \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}} \|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1 \\ C_\theta \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} \|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} + C_\theta \epsilon^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1} \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} \|\mu\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1 \end{cases},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中 $\vartheta \in [|\mathsf{s}| - r、\ |\mathsf{s}|)$、$0 < \vartheta' < \vartheta$、$C = C(\mathsf{d}、\mathsf{s}) > 0$ 和 $C_{\vartheta,\ \vartheta'}$、$C_p$、$C_\theta > 0$ 分别还依赖于 $(\vartheta、\ \vartheta')$ p、θ。

在 pro 之前引理4.5，下面说明定理2.6如何由该引理和定理1.1推出 .

定理2.6的证明。令 $v = v_\epsilon + (v - v_\epsilon)$，并应用三角不等式，我们得到

$$\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} k_v(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2}\right| \le \left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} k_{v_\epsilon}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2}\right| + \left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2}\right|. \tag{4.22}$$

根据s的取值，我们对1.12）、（1.13）、（1.14）或（1.15）应用定理1.1中的估计来处理（4.22）右端的第一项。我们使用引理4.1（4.6）和连续模估计（2.24）来控制

$$\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}\Big(1 + |\log\epsilon|\Big)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{4.23}$$

其中 $C = C(\mathsf{d}\ p) > 0$。如果 $v \in \dot{W}^{\mathsf{a}\,2,\,2\mathsf{d}\,\mathsf{a}-2}$，那么由微分与磨光的交换性可得，

$$\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v_\epsilon\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}} \le \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}. \tag{4.24}$$

综上，我们得出

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} k_{v_\epsilon}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2}\right| \\
&\quad\le C\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_q\|\mu\|_{L^q}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)\mathbf{1}_{\mathsf{s}\ge\max(0,\mathsf{d}-2)} \\
&+ C\min\Bigg(\Big(\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\mathbf{1}_{\mathsf{a}>2}\Big)\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_q\|\mu\|_{L^q}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big), \\
&\Big(\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\Big)\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_{\tilde{q}}\|\mu\|_{L^{\tilde{q}}}\kappa^{\frac{\mathsf{d}(\tilde{q}-1)}{\tilde{q}}-\mathsf{s}}\Big)\Bigg)\mathbf{1}_{0\le\mathsf{s}<\mathsf{d}-2} \\
&\quad + C\Big(\|v\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}} + \||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}\Big)\mathsf{F}_N(X_N,\mu)\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}<0},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

对于$q > \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$以及$\tilde{q} > \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}-1$，其中 λ，κ 分别如（1.10）、（1.11）中所述。对（4.22）右端的第二项应用引理4.21（4.22），并将所得估计与（4.25）结合，即完成证明。□

现在我们转而证明引理 4.5。

引理 4.5的证明。 我们的出发点是如下分解

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle} k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\Big)^{\otimes 2}(x,y) = \sum_{j=1}^3 \mathrm{Term}_j, \tag{4.26}$$

其中

$$\mathrm{Term}_1 = \frac{1}{N^2}\sum_{1\le i\ne j\le N} k_{(v-v_\epsilon)}(x_i,x_j), \tag{4.27}$$

$$\mathrm{Term}_2 = -2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} k_{(v-v_\epsilon)}(x_i,y)d\mu(y), \tag{4.28}$$

$$\mathrm{Term}_3 = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)d\mu^{\otimes 2}(x,y). \tag{4.29}$$

我们分别估计每个 Term_1,Term_2,Term_3。

• 项$_1$：对于 $1 \le i \le N$，令 r_i 为从 (4.16) 出发的最近邻型距离。由引理 4.1(4.3) 及 $a = 1$，我们得到初等界

$$\forall x \neq y, \qquad \left|k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)\right| \le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{|x-y|^{\mathsf{s}+1}}. \tag{4.30}$$

现在我们根据 s 的取值讨论不同情形。

若 $0 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$，则将界 (4.30) 应用于项$_1$,的每个加数

$$\begin{aligned} |\mathrm{Term}_1| \le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j\neq i}|x_i-x_j|^{-\mathsf{s}-1} &\le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N}\sum_{i=1}^N \mathsf{r}_i^{-\mathsf{s}-1} \\ &\le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N}\Big(\sum_{i=1}^N \mathsf{r}_i^{-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}} \\ &\le \frac{C'(\mathsf{s}N^2)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\epsilon}{N}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu) + C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

其中，第二个不等式由 r_i 的定义得出，第三个不等式由嵌入$\|\cdot\|_{\ell^{\mathsf{s}+1}} \le \|\cdot\|_{\ell^{\mathsf{s}}}$得出，第四个不等式则由命题 4.3 得出。上文中，C，$C' > 0$ 仅依赖于 d,s 和 $\mathsf{d}\,\mathsf{d}-\mathsf{s} < p \le \infty$。若 $-2 < \mathsf{s} \le -1$，则我们改用 $1 > |\mathsf{s}| - 1 \ge 0$ 来论证：

$$\begin{aligned} |\mathrm{Term}_1| \le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j\neq i}|x_i-x_j|^{-\mathsf{s}-1} &\le \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j\neq i}(|x_i|^{|\mathsf{s}|-1}+|x_j|^{|\mathsf{s}|-1}) \\ &\le \frac{2C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N}\sum_{i=1}^N|x_i|^{|\mathsf{s}|-1} \\ &\le 2C'\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu + (1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-1)}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right), \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中我们使用了 $|\mathsf{s}| - 1 < \frac{|\mathsf{s}|}{2}$ 以及命题 4.4 来得到最后一行。

若 $-1 < \mathsf{s} < 0$，那么除 (4.30) 外，我们还注意到以下界

$$\forall |x-y| \le 1, \qquad \left|k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)\right| \le C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}|x-y|^{-\mathsf{s}}(1+|\log|x-y||). \tag{4.33}$$

这是因为 $\dot{\mathcal{C}}^1$ 函数是对数-Lipschitz 的（例如参见 [BCD11，命题 2。107]）。对（4.30）和（4.33）进行插值，我们发现，对于任意 $\vartheta \in [0,1]$,

$$\forall |x-y| \le 1, \qquad \left|k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)\right| \le C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}|x-y|^{-\mathsf{s}}\left(\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\vartheta(1+|\log|x-y||)^{1-\vartheta}. \tag{4.34}$$

注意，只需将 ϵ 指数中的 ϑ 取小一些，就可以去掉对数因子。事实上，对于$1 \ge \vartheta > \vartheta'$，我们有

$$\sup_{|x-y|\le 1}|x-y|^{\vartheta-\vartheta'}(1+|\log|x-y||)^{1-\vartheta'} \le C', \tag{4.35}$$

因此，

$$\begin{aligned} |x-y|^{-\mathsf{s}}\left(\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^{\vartheta'}(1+|\log|x-y||)^{1-\vartheta'} &= \epsilon^{\vartheta'}|x-y|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}|x-y|^{\vartheta-\vartheta'}(1+|\log|x-y||)^{1-\vartheta'} \\ &\le C'\epsilon^{\vartheta'}|x-y|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

因此，选取 $0<\vartheta'<\vartheta<1$ 使得 $r\geq|\mathsf{s}|-\vartheta>0$，即 $|\mathsf{s}|-r\leq\vartheta<|\mathsf{s}|$，并采用与前一种情况类似的论证，

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Term}_1| &\leq \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j:|x_i-x_j|\leq 1}\left|k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)\right|+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j:|x_i-x_j|>1}\left|k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)\right| \\
&\leq \frac{C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon^{\vartheta'}}{N}\sum_{i=1}^N|x_i|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon \\
&\leq C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon^{\vartheta'}\left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}|x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-\vartheta)}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right)+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

结合 4.31、4.32、4.37 对 $0<\mathsf{s}<\mathsf{d}$、$-2<\mathsf{s}\leq -1$ 和 $-1<\mathsf{s}<0$ 的界，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Term}_1| \leq{}& \frac{C(N^2)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\epsilon}{N}\left(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\right)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\mathbf{1}_{0<\mathsf{s}<\mathsf{d}} \qquad (4.38)\\
&+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-1)}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right)\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}\leq -1}\\
&+\left(C_{\vartheta,\vartheta'}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon^{\vartheta'}\left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}|x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-\vartheta)}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right)+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\right)\mathbf{1}_{-1<\mathsf{s}<0},
\end{aligned}
$$

其中 $C=C(\mathsf{d},\ \mathsf{s})>0$ 和 $C_{\vartheta,\ \vartheta'}>0$ 还取决于 ϑ，ϑ'。

- 项$_2$：展开 $k_{(v-v_\epsilon)}$ 的定义，

$$
\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}k_{(v-v_\epsilon)}(\cdot,y)d\mu(y)=(v-v_\epsilon)\cdot\nabla h^\mu+\operatorname{div}h^{(v-v_\epsilon)\mu}, \qquad (4.39)
$$

其中 $h^f:=\mathsf{g}*f$。对于右侧的第一项，我们粗略地估计

$$
\begin{aligned}
\|(v-v_\epsilon)\cdot\nabla h^\mu\|_{L^\infty} &\leq \|v-v_\epsilon\|_{L^\infty}\|\nabla h^\mu\|_{L^\infty} \\
&\leq \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon\begin{cases}C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1\leq\mathsf{s}<\mathsf{d}-1\\ C_\theta\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1,\end{cases} \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

对于 $q>\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{s}-1}$ ($q\geq 1$ 若 $\mathsf{s}=-1$) 且 $\theta>\mathsf{s}+1-\mathsf{d}$，在最后一个不等式中，我们使用了引理 4.1(4.3) 以及插值估计

$$
\|\nabla h^f\|_{L^\infty}\leq\begin{cases}C_q\|f\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|f\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1\leq\mathsf{s}<\mathsf{d}-1\\ C_\theta\|f\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1.\end{cases} \qquad (4.41)
$$

对于（4.39）右侧的第二项，我们再次使用插值估计（4.41）和 H¨older 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
&\|\operatorname{div} h^{(v-v_\epsilon)\mu}\|_{L^\infty} \\
&\leq \begin{cases} C_q \|(v-v_\epsilon)\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}} \|(v-v_\epsilon)\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1 \\ C_\theta \|(v-v_\epsilon)\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} \|(v-v_\epsilon)\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1 \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} C_q \|v-v_\epsilon\|_{L^\infty} \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}} \|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1 \\ C_\theta (\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty} \|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} (\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty} \|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta} + \|v-v_\epsilon\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta} \|\mu\|_{L^\infty})^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1 \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} C_q C\epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}} \|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1 \\ C_\theta (C\epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} (C\epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta} + C'_\theta \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \epsilon^{1-\theta} \|\mu\|_{L^\infty})^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

这里还用到了 H¨older-Zygmund 空间的代数性质。

若 $-2 < \mathsf{s} < -1$，则我们改用（4.30）来估计

$$
\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)| d|\mu|(y) \leq C\epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x-y|^{-\mathsf{s}-1} d|\mu|(y). \tag{4.43}
$$

利用命题 4.4 并取 $x_0 = y$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x_i - y|^{|\mathsf{s}|-1} d|\mu|(y) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x-y|^{|\mathsf{s}|-1} d\mu + (1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-1)}{|\mathsf{s}|}} \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \right) d|\mu|(y) \\
&\leq C' \|\mu\|_{L^1} \left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d|\mu| + (1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-1)}{|\mathsf{s}|}} \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \right).
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |k_{(v-v_\epsilon)}(x_i,y)| d|\mu|(y) \\
&\qquad \leq C'' \epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \|\mu\|_{L^1} \left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d|\mu| + (1+\|\mu\|_{L^1})^{1-\frac{2(|\mathsf{s}|-1)}{|\mathsf{s}|}} \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \right).
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

综合估计式（4.39）、（4.40）、（4.42）、（4.45），对常数进行化简并重新标记后，我们得到

$$
|\mathrm{Term}_2| \leq \epsilon \|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1} \begin{cases} \|\mu\|_{L^1} \left(\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d\mu + (1+\|\mu\|_{L^1})^{\frac{2}{|\mathsf{s}|}} \mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu) \right), & -2 < \mathsf{s} < -1 \\ C_q \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}} \|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1 \leq \mathsf{s} < \mathsf{d}-1 \\ C_\theta \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} \|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} + C_\theta \epsilon^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1} \|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}} \|\mu\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s} \geq \mathsf{d}-1 \end{cases} \tag{4.46}
$$

对于 $q > \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}$（$q \geq 1$ 如果 $\mathsf{s} = -1$）以及 $\theta > \mathsf{s}+1-\mathsf{d}$。

- 项$_3$：展开 $k_{(v-v_\epsilon)}$ 的定义并去对称化，

$$
\mathrm{Term}_3 = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} (v-v_\epsilon) \cdot \nabla h^\mu d\mu, \tag{4.47}
$$

根据 H¨older 不等式,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}(v-v_\epsilon)\cdot\nabla h^\mu d\mu\right|\le\|v-v_\epsilon\|_{L^\infty}\|\nabla h^\mu\|_{L^\infty}\|\mu\|_{L^1}. \tag{4.48}$$

利用估计式（4.40），我们得出

$$|\mathrm{Term}_3|\le\epsilon\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\|\mu\|_{L^1}\begin{cases}C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1\le\mathsf{s}<\mathsf{d}-1\\ C_\theta\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s}\ge\mathsf{d}-1,\end{cases} \tag{4.49}$$

对于 $q>\frac{\mathsf{d}\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}$ 和 $\theta>\mathsf{s}+1-\mathsf{d}$。

若 $-2<\mathsf{s}<-1$，则我们改为采用与项$_2$ 类似的论证，得到

$$|\mathrm{Term}_3|\le C\epsilon\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\|\mu\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu. \tag{4.50}$$

结合估计式（4.49）、（4.50），我们得出

$$|\mathrm{Term}_3|\le\epsilon\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\|\mu\|_{L^1}\begin{cases}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu, & -2<-\mathsf{s}<-1\\ C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1\le\mathsf{s}<\mathsf{d}-1\\ C_\theta\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s}\ge\mathsf{d}-1,\end{cases} \tag{4.51}$$

对于 $q>\frac{\mathsf{d}\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}$ 和 $\theta>\mathsf{s}+1-\mathsf{d}$。

- 证明结束：将项$_1$、项$_2$、项$_3$对应的估计（4.38）、（4.46）、（4.51）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2\setminus\triangle}k_{(v-v_\epsilon)}(x,y)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\Big)^{\otimes2}\right|\\&\qquad\le\frac{C(N^2)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon}{N}\Big(\mathsf{F}_N(X_N,\mu)+C_p\|\mu\|_{L^p}\lambda^{\frac{\mathsf{d}(p-1)}{p}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\mathbf{1}_{0<\mathsf{s}<\mathsf{d}}\\&\qquad+C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\epsilon(1+\|\mu\|_{L^1})^{\frac{2}{|\mathsf{s}|}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu+\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right)\mathbf{1}_{-2<\mathsf{s}\le-1}\\&\quad+C_{\vartheta,\vartheta'}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\left(\epsilon^{\vartheta'}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})^{\frac{2\vartheta}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\right)+\epsilon\right)\mathbf{1}_{-1<\mathsf{s}<0}\\&\quad+\epsilon\|\mu\|_{L^1}\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\begin{cases}C\Big(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}|x|^{|\mathsf{s}|-1}d\mu+(1+\|\mu\|_{L^1})^{\frac{2}{|\mathsf{s}|}}\mathsf{F}_N^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}}(X_N,\mu)\Big), & -2<\mathsf{s}\le-1\\ C_q\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\|\mu\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}, & -1\le\mathsf{s}<\mathsf{d}-1\\ C_\theta\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}+C_\theta\epsilon^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}\|\mu\|_{L^1}^{1-\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}\|\mu\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}, & \mathsf{s}\ge\mathsf{d}-1\end{cases},\end{aligned} \tag{4.52}$$

对于 $\vartheta\in[|\mathsf{s}|-r,\ |\mathsf{s}|)$、$0<\vartheta'<\vartheta$, $p>\frac{\mathsf{d}\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}$、$q>\frac{\mathsf{d}\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}$，以及 $\theta>\mathsf{s}+1-\mathsf{d}$。常数 C仅依赖于 d、s，而常数$C_{\vartheta,\vartheta'}$、C_p、C_q、C_θ还分别依赖于 $(\vartheta,\ \vartheta')$ p、q、θ。将此不等式与引理的陈述比较可知，证明已完成。□

4.4. **平均场收敛**。利用定理 2.6中的有缺陷的交换子估计，我们现在证明，平均场粒子动力学（1.1）的经验测度在调制能量距离下收敛到极限偏微分方程（1.3）的一个（必然唯一的）解。这就证明了定理2.8。与以往的工作 [RSb、定理1.5], [HCRS25、定理1.5],相比，收敛速率并非最优的 $O(N_{\mathsf{sd}}^{-1})$ 速率。考虑到放宽了对平均场向量场为 Lipschitz 的假设必须付出代价，这并不令人意外。

为了闭合关于 $\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)$ 的微分不等式（这是该定理的关键步骤），我们将使用以下 Gr¨onwall-Bellman 不等式的推广形式。

引理 4.6. 设 $a\geq 0$。假设 $C_1,C_2\colon [0,T]\to[0,\infty)$ 局部可积，且 $x\colon[0,T]\to[0,\infty)$ 绝对连续，并且

$$\dot{x}^t\leq C_1^t(x^t)^a+C_2^t x^t,\qquad a.e.\ on\ [0,T]. \tag{4.53}$$

若 $a>1$，令 $I^t:=(a-1)\int_0^t C_1^s e^{(a-1)\int_0^s C_2^\tau d\tau}ds$。若将 T_* 定义为满足 $I^{T_*}\leq (x^0)^{1-a}$ 的最大时间，则

$$\forall t<T_*,\qquad x^t\leq e^{\int_0^t C_2^s ds}\Big((x^0)^{1-a}-I^t\Big)^{-\frac{1}{a-1}}. \tag{4.54}$$

若 $a\leq 1$，则

$$\forall t\leq T,\qquad (x^t)^{1-a}\leq (x^0)^{1-a}e^{(1-a)\int_0^t C_2^\tau d\tau}+(1-a)\int_0^t C_1^s e^{(1-a)\int_s^t C_2^\tau d\tau}ds. \tag{4.55}$$

证明。对于断言（4.54），令 $z^t:=e^{-\int_0^t C_2^s ds}x^t$，它满足

$$\dot{z}^t\leq e^{-\int_0^t C_2^s ds}C_1^t(x^t)^a=C_1^t e^{(a-1)\int_0^t C_2^s ds}(z^t)^a. \tag{4.56}$$

现在令 $w^t:=(z^t)^{1-a}$，由假设 $x^t\geq 0$ 可知其定义良好。由于 $1-a<0$，

$$\dot{w}^t=(1-a)(z^t)^{-a}\dot{z}^t\geq (1-a)C_1^t e^{(a-1)\int_0^t C_2^s ds}. \tag{4.57}$$

将两边从 0 积分到 t，然后重新整理，即完成证明。

对于断言 (4.55)，令 $y^t:=(z^t)^{1-a}$，它满足微分不等式

$$\dot{y}^t\leq (1-a)C_1^t+(1-a)C_2^t y^t. \tag{4.58}$$

将前述不等式两边乘以 $e^{-(1-a)\int_0^t C_2^s ds}$，重新整理后再积分，即可得到所需结论。□

有了这个引理，我们转而证明定理 2.8。

定理 *2.8* 的证明。关于 H^{-r} 在 $r>\mathsf{d}\,2$ 上的收敛的第二个断言，可由第一个断言和命题 4.2立即推出。因此，我们将重点放在调制能量上。

回顾 [Ser20，引理 2.1] 或 [RS24，引理 3.6]，$\mathsf{F}_N(X_N^t,\ \mu^t)$ 满足微分不等式

$$\frac{d}{dt}\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)\leq \int_{(\mathbb{R}^\mathsf{d})^2\setminus\triangle}\nabla \mathsf{g}(x-y)\cdot\big(u^t(x)-u^t(y)\big)d\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i^t}-\mu^t\Big)^{\otimes 2}, \tag{4.59}$$

其中 $u^t:=\mathsf{V}^t-\mathbb{M}\nabla\mathsf{g}\ *\mu^t$。为了让论述更易于理解，我们根据 s 属于（超）库仑、次库仑还是非奇异情形，将论证分为几种情况。

•(s $\geq$ d -2) 注意到 $\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d}\geq\frac{\mathsf{d}}{p}$，当 s $>$ d -2 时不等式严格成立，因此由索伯列夫嵌入，

$$\|\mu^t\|_{L^q}\leq C\|\mu^t\|^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q(\mathsf{s}+2)}}_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}},\qquad (q,\mathsf{s})\neq(\infty,\mathsf{d}-2) \tag{4.60}$$

$$\|u^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1.p}}\leq\|\mathsf{V}^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}+C|\mathbb{M}|\|\mu^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}}, \tag{4.61}$$

$$\|\mu^t\|_{\dot{C}^{\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}}\leq C\|\mu^t\|\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}}. \tag{4.62}$$

对于几乎处处的 t，我们应用定理 2.6，取 $v=u^t$，$q<\infty$ 若 $\mathsf{s}=\mathsf{d}-2$ 且 $q=\infty$ 若 $\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-2$，并且$\theta=\mathsf{s}+2-\mathsf{d}$ 若 $\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1$，从而得到

$$\begin{aligned}(4.63)\quad \frac{d}{dt}\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)&\leq C_p\|u^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon_t|)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)+C_q\|\mu^t\|_{L^q}\lambda_t^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)\\&+CN^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1}\epsilon_t\|u^t\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\Big(\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)+C_q\|\mu^t\|_{L^q}\lambda_t^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}\Big)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}\\&+\epsilon_t\|u^t\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\Big(C_q\|\mu^t\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-1}+C_\theta(\|\mu^t\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}+\epsilon_t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}\|\mu^t\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}})\mathbf{1}_{\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1}\Big),\end{aligned}$$

其中 ϵ_t 需稍后选定，且 λ_t 对应于 (1.10)，其中 $\mu=\mu^t$。令

$$\begin{aligned}(4.64)\quad \mathscr{E}^t\coloneqq\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)+\sup_{t\leq\tau\leq T}\epsilon_\tau\Big(&C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}\lambda_\tau^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}+C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-1}\\&+C_\theta(\|\mu^\tau\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}+\epsilon_\tau^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}\|\mu^\tau\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}})\mathbf{1}_{\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1}\Big),\end{aligned}$$

由不等式 (4.63可得

$$(4.65)\qquad \frac{d}{dt}\mathscr{E}^t\leq C_1^t(\mathscr{E}^t)^{\frac{\mathsf{s}+1}{\mathsf{s}}}+C_2^t\mathscr{E}^t,$$

其中

$$(4.66)\qquad C_1^t\coloneqq CN^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1}\epsilon_t\|u^t\|_{\dot{\mathcal{C}}^1},$$

$$(4.67)\qquad C_2^t\coloneqq C_p\|u^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon_t|)^{1-\frac{1}{p}}.$$

应用引理 4.6(4.54)，取 $a=\mathsf{s}^{+1}\,\mathsf{s}$，可得 ——

$$\begin{aligned}(4.68)\quad \forall 0\leq t<T_*,\qquad \mathscr{E}^t&\leq\exp\Big(\int_0^t C_p\|u^{t'}\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}(1+|\log\epsilon_{t'}|)^{1-\frac{1}{p}}dt'\Big)\\&\times\left((\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}}-\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^t N^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1}\epsilon_{t'}\|u^{t'}\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}e^{\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^{t'}C_p\|u^{t''}\|_{\dot{W}^{1+\frac{1}{p},p}}(1+|\log\epsilon_{t''}|)^{1-\frac{1}{p}}dt''}dt'\right)^{-\mathsf{s}}.\end{aligned}$$

我们有相当大的自由度来选择 ϵ_t，以获得令人满意的估计。例如，选择 $\epsilon=\epsilon_t$（即与时间无关），使其满足隐式方程 $\epsilon=\delta N^{1-\frac{2}{(\mathsf{s}+1)\mathsf{s}}-\alpha}(\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}}$，其中$\delta,\alpha>0$ 固定。这是可行的，因为展开 $\mathscr{E}^0$的定义后，关于 ϵ 的隐式方程可改写为

$$\begin{aligned}(4.69)\quad \epsilon^{\mathsf{s}}\Big(\mathsf{F}_N(X_N^0,\mu^0)+\epsilon\sup_{0\leq\tau\leq T}\Big(&C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}\lambda_\tau^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}+C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\mathbf{1}_{\mathsf{s}<\mathsf{d}-1}\\&+C_\theta(\|\mu^\tau\|_{\dot{\mathcal{C}}^\theta}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}}+\epsilon^{\mathsf{d}-\mathsf{s}-1}\|\mu^\tau\|_{L^\infty}^{\frac{\mathsf{s}-\mathsf{d}+1}{\theta}})\mathbf{1}_{\mathsf{s}\geq\mathsf{d}-1}\Big)\Big)=(\delta N^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-\alpha})^{\mathsf{s}}.\end{aligned}$$

左侧是关于 ϵ的连续函数，当 $\epsilon\to0$ 时趋于零，而当 $\epsilon\to\infty$时趋于 ∞。因此，由介值定理可知，存在一个解。

采用此处对 ϵ_t 的选择后，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^t N^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1}\epsilon\|u^{t'}\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\exp\Big(\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^{t'}C_p\|u^{t''}\|_{\dot{W}^{1+\frac{1}{p},p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}dt''\Big)dt'\\&(4.70)\\&\leq\frac{\delta N^{-\alpha}(\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}}}{\mathsf{s}}\int_0^T\|u^{t'}\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\exp\Big(\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^T C_p\|u^{t''}\|_{\dot{W}^{1+\frac{1}{p},p}}(1+|\log\Big(N^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-\alpha}\delta\Big)|+|\frac{1}{\mathsf{s}}\log\mathscr{E}^0|)^{1-\frac{1}{p}}\Big).\end{aligned}$$

由于 $1-\frac{1}{p}<1$，且对于任意常数 $C>0$, $re^{C(1+|\log r|)^{1-\frac{1}{p}}}\to 0$，当 $r\to 0^+$ 时，我们可以选择一个 $\delta>0$，使其足够小，且仅依赖于 d，s p，α，$\int_0^T \|u^{t''}\|_{\dot{W}^{1+\mathsf{d}p,\,p}} dt''$，$|\mathsf{F}_N(X_N^0,\,\mu^0)|$，从而对每个 $0\le t\le T$,

$$(\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}}-\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^t N^{\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-1}\epsilon\|u^{t'}\|_{\mathcal{C}^1}e^{\frac{1}{\mathsf{s}}\int_0^{t'}C_p\|u^{t''}\|_{\dot{W}^{1+\frac{1}{p},p}}(1+|\log\epsilon|)^{1-\frac{1}{p}}dt''}dt'\ge\frac{1}{2}(\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}},\tag{4.71}$$

这使我们能够将界（4.68）提升为

$$\forall 0\le t\le T,\qquad \mathscr{E}^t\le 2^{\mathsf{s}}\mathscr{E}^0\exp\Big(\int_0^t C_p\|u^{t'}\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+1,p}}\Big(1+|\log\Big(\delta N^{1-\frac{2(\mathsf{s}+1)}{\mathsf{s}}-\alpha}(\mathscr{E}^0)^{-\frac{1}{\mathsf{s}}}\Big)|\Big)^{1-\frac{1}{p}}dt'\Big).\tag{4.72}$$

显然，只要对于任意 $C>0$,$|\mathsf{F}_N(X_N^0,\mu^0)|e^{C|\log N|^{1-\frac{1}{p}}}\to 0$当 $N\to\infty$时（例如，存在某个 $r>0$，使得 $\mathsf{F}(X_N^0,\mu^0)=O(N^{-r})$），前述右端就会在 $N\to\infty$ 时趋于零。这就完成了（超）库仑情形下的论证。

- $(0<\mathsf{s}<\mathsf{d}-2)$ 根据假设中 p 的取值，我们进一步分为两种情形，其中 $\mu^t\in\dot{W}^{\mathsf{d}_{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}$。

若 $p<\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}$，则可以选取一个满足 $\min(2,p)\le r<\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}$ 的指数 r，使得令 $\mathsf{a}=2(\frac{\mathsf{d}}{r}+1)$ 后，$\mathsf{a}\in(\mathsf{d},\mathsf{d}+2)$，并且

$$\begin{aligned}\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}u^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}&\le\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}+C|\mathbb{M}|\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}+\mathsf{s}+1-\mathsf{d}}\mu^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}\\&=\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}+C|\mathbb{M}|\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}}{r}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}\mu^t\|_{L^r}\\&\le\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{a}-2}}}+C'|\mathbb{M}|\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}\mu^t\|_{L^p},\end{aligned}\tag{4.73}$$

其中最后一个不等式由索伯列夫嵌入得到。沿用这一记号，令

$$\mathscr{E}^t:=\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)+\sup_{t\le\tau\le T}\epsilon_\tau\Big(C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}\lambda_\tau^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}+C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\Big).\tag{4.74}$$

应用定理 2.6，可知（4.65）在 C_1^t，C_2^t 分别如（4.66）、（4.67）中所示时成立。重复 $\mathsf{d}-2\le\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 情形中的论证，即完成证明。

若 $p\ge\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}$，则我们未必能控制项 $\||\nabla|^{\mathsf{a}/2}u^t\|_{L^{2\mathsf{d}/\mathsf{a}-2}}$，对于某个 $\mathsf{a}\in(\mathsf{d},\mathsf{d}+2)$，不能用 $\|\mu^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{p}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},p}}$控制，因此只能采用次优估计，该估计仅要求 $\||\nabla|^{\mathsf{d}-\mathsf{s}/2}u^t\|_{L^{2\mathsf{d}/\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}$。事实上，若 $r\le\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}$，则由索伯列夫嵌入，

$$\begin{aligned}\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}u^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}&\le\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}+C\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}}{r}+1}\mathbb{M}\nabla\mathsf{g}*\mu^t\|_{L^r}\\&\le\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}+C'|\mathbb{M}|\|\mu^t\|_{\dot{W}^{\frac{\mathsf{d}}{r}+\mathsf{s}+2-\mathsf{d},r}}\\&\le\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}}\mathsf{V}^t\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}+C'|\mathbb{M}|\|\mu^t\|_{L^{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}}}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

由于 $\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}\le p\le\frac{2}{\mathsf{d}-\mathsf{s}}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-\mathsf{s}-2}$，结论得证。重新定义

$$\mathscr{E}^t:=\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)+\sup_{t\le\tau\le T}\epsilon_\tau C_q\Big(\|\mu^\tau\|_{L^q}\kappa_\tau^{\frac{\mathsf{d}(q-1)}{q}-\mathsf{s}}+\|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}}\Big),\tag{4.76}$$

不等式（4.65）成立，其中 C_1^t，C_2^t 与前面相同，重复同样的推理即可完成证明。

- $(-2<\mathsf{s}<0)$ 我们根据 s 的取值分为两种情况。

如果 $-2 < \mathsf{s} \le -1$，那么我们重新定义

$$\mathscr{E}^t := \mathsf{F}_N(X_N^t, \mu^t) + \sup_{t\le\tau\le T} C\epsilon_\tau \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-1} d\mu^\tau, \tag{4.77}$$

并且由定理 2.6 可知，$\mathscr{E}^t$ 满足以下微分不等式，

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}^t \le C_1^t (\mathscr{E}^t)^{\frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}} + C_2^t \mathscr{E}^t, \tag{4.78}$$

其中 C_2^t 与上文相同，但现在 $C_1^t := C\|u^t\|_{\mathcal{C}^1}\epsilon_t$。应用引理 4.6(4.55)，取 $a = \frac{|\mathsf{s}|-1}{|\mathsf{s}|}\mathsf{s}$，我们得到

$$\forall t \le T, \qquad (\mathscr{E}^t)^{\frac{1}{|\mathsf{s}|}} \le (\mathscr{E}^0)^{\frac{1}{|\mathsf{s}|}} \exp\Big(\frac{1}{|\mathsf{s}|}\int_0^t C_2^\tau d\tau\Big) + \frac{1}{|\mathsf{s}|}\int_0^t C_1^{t'} \exp\Big(\frac{1}{|\mathsf{s}|}\int_{t'}^t C_2^\tau d\tau\Big) dt'. \tag{4.79}$$

对于任意 $\alpha > 0$，我们可以选择 $\epsilon_\tau = N^{-\alpha}$，因此只要对某个 $A > 0$，$|\mathsf{F}_N(X_N^0, \mu^0)|^{\frac{1}{|\mathsf{s}|}} e^{A(1+\log N)^{1-\frac{1}{p}}} \to 0$，当 $N \to \infty$ 时，前述右端趋于零。

如果 $-1 < \mathsf{s} < 0$，那么我们改为令

$$\mathscr{E}^t := \mathsf{F}_N(X_N^t, \mu^t) + \sup_{t\le\tau\le T}\Big(C_{\vartheta,\vartheta'}\epsilon_\tau^{\vartheta'} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |x|^{|\mathsf{s}|-\vartheta} d\mu^\tau + C\epsilon_\tau(1 + C_q\|\mu^\tau\|_{L^q}^{\frac{(\mathsf{s}+1)q}{\mathsf{d}(q-1)}})\Big), \tag{4.80}$$

并且由定理 2.6 可知，$\mathscr{E}^t$ 满足以下微分不等式，

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}^t \le C_1^t (\mathscr{E}^t)^{\frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}} + C_2^t \mathscr{E}^t, \tag{4.81}$$

其中 C_2^t 与上文相同，但现在 $C_1^t := C_\vartheta\|u^t\|_{\mathcal{C}^1}\epsilon_t^\vartheta$。应用引理 4.6(4.55)，取 $a = \frac{|\mathsf{s}|-\vartheta}{|\mathsf{s}|}\mathsf{s}$，可得

$$\forall t \le T, \qquad (\mathscr{E}^t)^{\frac{\vartheta}{|\mathsf{s}|}} \le (\mathscr{E}^0)^{\frac{\vartheta}{|\mathsf{s}|}} \exp\Big(\frac{\vartheta}{|\mathsf{s}|}\int_0^t C_2^\tau d\tau\Big) + \frac{\vartheta}{|\mathsf{s}|}\int_0^t C_1^{t'} \exp\Big(\frac{\vartheta}{|\mathsf{s}|}\int_{t'}^t C_2^\tau d\tau\Big) dt'. \tag{4.82}$$

取 $\epsilon_\tau = N^{-\alpha}$ 即可完成论证。至此，定理的证明完成。□

5. Remaining questions and open problems

最后，我们讨论一些迄今尚未解决的问题，并提出若干关于输运-交换子函数不等式、输运的正则性以及平均场密度正则性的开放问题。我们希望这番讨论能激发该领域未来的研究。

5.1. 最优次库仑输运正则性。正如我们在第1节指出的，定理1.1中的两个次库仑交换子估计（1.13）、（1.14）之间存在一个不幸的差距。对于后一个估计，N 中的速率并非最优，但鉴于推论2.4(i)，输运正则性 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{s}-2}}}$ 预计是最优的。对于前一个估计，N 中的速率是最优的，但当 $\mathsf{a} \in (\mathsf{d}, \mathsf{d}+2)$ 时，输运正则性 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{a}-2}}} \mathbf{1}_{\mathsf{a}>2}$ 虽然与 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{s}-2}}}$ 具有相同的尺度关系，却因索伯列夫嵌入而更强；我们认为它并非最优。

我们提出的第一个问题是证明一个交换子估计，该估计在 $N^{\mathsf{s}-\mathsf{d}-1}$ 误差和我们认为是锐利的输运正则性 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{d}-\mathsf{s}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{s}-2}}}$ 方面都达到最优，其中 $0 \le \mathsf{s} < \mathsf{d}-2$。对于任意 $\mathsf{a} \in (\mathsf{d}, \mathsf{d}+2)$，对 $\||\nabla|^{\frac{\mathsf{a}}{2}} v\|_{L^{\frac{2\mathsf{d}}{\mathsf{d}+\mathsf{a}-2}}}$ 的依赖是我们在定理2.6的证明中借助贝塞尔势的一个中间交换子估计所造成的副产物。我们预计，即使具有锐利的 $N^{\mathsf{s}-\mathsf{d}-1}$ 误差，后者对正则性的依赖仍是最优的，但用我们目前的证明方法似乎无法得到这一结果。要解决这个问题，可能需要设计一种不同的重整化

论证，与 [NRS22、HCRS25], 相比，鉴于证明的这一部分正是问题的根源。由于后面所引的这项工作是唯一给出锐利误差的工作，我们来进一步说明，为什么它的方法似乎不适用于获得最优输运正则性。

该论证的出发点是将 [HCRS25] 对 Riesz势 g 表示为近似恒等算子的“类小波”平均值，并可在小尺度处截断 $\eta \geq 0$从而得到

$$\forall x \neq 0, \qquad \mathsf{g}_\eta(x) := \mathsf{c}_{\phi,\mathsf{d},\mathsf{s}} \int_\eta^\infty t^{\mathsf{d}-\mathsf{s}} \phi_t(x) \frac{dt}{t}, \tag{5.1}$$

其中，ϕ 是任意具有足够良好性质且傅里叶变换非负的径向函数，$\phi_t(x) := t^{-\mathsf{d}}\phi(x/t)$，而 $\mathsf{c}_{\phi,\mathsf{d},\mathsf{s}}$ 取决于 ϕ、d、s。在对 ϕ 作出适当假设的情况下（见 [HCRS25，Lemma 2.2]），g_η 具有许多良好性质。例如，g_η 在 $\eta > 0$上有界，$\mathsf{g}_\eta \leq \mathsf{g}$，$\mathsf{g}_\eta$ 是正定的，并且 $\mathsf{g} - \mathsf{g}_\eta$在球 $B(0,\eta)$之外以尺度 η快速衰减。在对数情形 $\mathsf{s} = 0$下，必须在大尺度处对积分进行重新归一化，才能得到收敛表达式。

主要技术结果 [HCRS25，推论 3。2] 是关于截断势的交换子估计，

$$\left| \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x) - v(y)) \cdot \nabla \mathsf{g}_\eta(x-y) f(x) f(y) \right| \leq C(v) \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}_\eta(x-y) f(x) f(y). \tag{5.2}$$

通过使用表示式（5.1）以及尺度不变性，可以将问题归结为证明：将 g_η 替换为 ϕ时的估计成立。取 ϕ 为贝塞尔势 $\phi(\xi) = \langle 2\pi\xi \rangle^{-\mathsf{a}}$，其中带有一个 $\in (\mathsf{d}, \mathsf{d}+2)$，那么根据关于非齐次傅里叶乘子 $\langle \nabla \rangle^{\mathsf{a}}$ 的 Kato-Ponce 型交换子估计，该结论即成立（这类估计的可用性正是我们选择 ϕ的原因），但其在 v 上的范数形式为 $\| |\nabla|^{\mathsf{a}/2} v \|_{L^{2\mathsf{d}\mathsf{a}-2\mathsf{d}}}$。$\mathsf{a}$ 的上界对我们并不重要，因为我们希望取 $\mathsf{a} = \mathsf{d} - \mathsf{s}$。下界则是自然的，因为需要 $\mathsf{a} > \mathsf{d}$ 才能使 $\overline{\phi}$有界，而这又是使截断势 g_η 有界所必需的。

定理 2.3表明，基于具有快速傅里叶衰减的中间核 ϕ的方法，必然会导致对 v的正则性要求次优的估计。因此，问题仍在于能否直接证明（5.2），即不依赖于关于势 ϕ的中间交换子估计。

5.2. 局部化性。 另一个重要问题是交换子估计的局部化性。为说明其含义，考虑库仑情形 $\mathsf{s} = \mathsf{d} - 2$。通过分部积分，可以得到能量的电场重写

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}(x-y) f(x) f(y) = \frac{1}{\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nabla h^f|^2, \tag{5.3}$$

其中 $h^f := \mathsf{g} * f$。显然，后一项可以局部化到任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$。利用当 $\mathsf{s} = \mathsf{d} - 2$ 时交换子所具有的应力-能量张量结构，可以得到局部化对易子估计

$$\left| \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x) - v(y)) \cdot \nabla \mathsf{g}(x-y) f(x) f(y) \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^\infty} \int_{\operatorname{supp} v} |\nabla h^f|^2. \tag{5.4}$$

这一论证也可以推广到 $\mathsf{s} > \mathsf{d} - 2$，以及高阶交换子估计及其重整化变体 [LS18、Ser23、RSb]。这类局部化估计对于研究介观尺度上 Riesz 气体涨落的中心极限定理具有重要应用价值（例如参见 [Ser24，第 3]）。

对于次库仑范围，局部版本的（重整化）交换子估计尚未解决；在该范围内，交换子不再具有与 [RSb]中论证所关键的相同应力-能量张量结构。此外，[NRS22、HCRS25] 中的证明依赖于中间的非局部交换子估计，因此不适用于局部化估计。

在（次库仑）“局部”情形 $\mathsf{s} = \mathsf{d} - 2k$ 下，对于整数 $k \geq 2$，其中 g 是 $(-\Delta)^k$ 的基本解，仍可将能量重新表述为，

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} \mathsf{g}(x-y) f(x) f(y) = \frac{1}{\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nabla^{\otimes k} h^f|^2, \tag{5.5}$$

其中，电场 ∇h^f 被替换为 k-张量场 $\nabla^{\otimes k} h^f$，显然，（5.5）中的后一个量也可以像之前一样进行局部化。初步计算表明，在这种情况下，交换子具有一种“高阶”应力-能量张量结构，可以通过分部积分加以利用，从而证明一个未重整化交换子估计。尽管如此，v的最优正则性依赖关系仍有待确定。在非局部情形 $\mathsf{s} \neq \mathsf{d} - 2k$中，这种推理很可能可以借助分数阶拉普拉斯算子高次幂的 Caffarelli-Silvestre 延拓推广加以改造 [Yan13]，这与库仑情形 $\mathsf{d} - 2$ 和超库仑情形 $\mathsf{s} > \mathsf{d} - 2$之间的关系类似。

较不直接、也是问题关键之处，在于找到一种合适的重整化方案，将未重整化的局部化交换子估计结合起来，从而得到估计式（1.13）或（1.14）的局部化版本。次库仑情形下现有的两种重整化方案—— [NRS22] 中的平均方案和[HCRS25], 中的势截断方案——似乎都不适用于这一任务。前者无法在 N中产生尖锐误差，而后者显然无法与上述局部化电场表述相结合。

5.3. **高阶估计**。到目前为止，我们只考虑了与调制能量的一阶变分（1.6）相对应的一阶交换子估计。与之同样值得关注的还有对应于 $n \geq 2$ 中的

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} \mathsf{F}_N((\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}(X_N), (\mathbb{I}+tv)\#\mu) &= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2 \setminus \triangle} \nabla^{\otimes n} \mathsf{g}(x-y) : (v(x)-v(y))^{\otimes n} d(\mu_N - \mu)^{\otimes 2} \\ &=: \mathsf{A}_n[X_N, \mu, v], \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $\mathbb{I} + tv$，$(\mathbb{I}+tv)^{\oplus N}$ 与第 1.2 节中的定义相同，且 : 表示张量之间的内积。与一阶情形一样，我们希望用 $C_v(\mathsf{F}_N(X_N, \mu) + C_\mu N^{-\alpha})$来控制这些量，并将这种控制称为高阶交换子估计。

二阶（即 $n = 2$）估计对于前述研究库仑/黎兹气体涨落的输运方法十分重要，也有助于推导带乘性噪声的平均场极限 [Ros20]。二阶以上的估计也很有用，它们能够对 Riesz 气体的涨落给出更精细的估计，从而处理范围更广的相互作用 [PS25]，还可计算 n阶累积量 [Ros]。

高阶交换子估计最初由 [LS18, Ros20] 在 $\mathsf{d} = 2$ 库仑情形下证明了二阶情形，随后由 [Ser23] 证明了更一般的库仑情形（但估计对 F_N的依赖并非最优），之后 [NRS22, RSW] 则对完整范围 $-2 < \mathsf{s} < \mathsf{d}$以及更一般的 Riesz 型相互作用给出了证明。 [NRS22]的方法可以得到高阶估计，但这些估计的加性误差通常并不尖锐。相比之下，[Ser23] 给出的估计是尖锐的，但对于 $\mathsf{d} = 2$ 库仑情形仅限于二阶。更重要的是，他们的证明相当复杂，而且显然难以推广到高阶。 [RSb], 通过精巧的归纳论证，证明了（超）库仑情形下所有阶数的尖锐局部化估计。

尽管这与我们对输运正则性的关注有些无关，但鉴于其对于研究平均场极限附近的涨落十分重要，我们首先提出次库仑情形下高阶交换子的尖锐估计问题 $\mathsf{s} < \mathsf{d} - 2$。上述工作 [HCRS25] 证明了一阶估计是尖锐的，但尚不清楚如何将该论文的方法推广到 $n \geq 2$。将（5.6）去对称化并用迭代对易子表示，会带来处理交换子的交换子的困难，更不用说

随着代数复杂度 n 的增加。此外，通过分部积分将导数转移到交换子核上的 [NRS22]高阶方法，显然并不一定与 [HCRS25]中的重整化方案相兼容。

即使在（超）库仑情形下，后两位作者已在 [RSb], 中证明了任意阶的尖锐局部化估计，输运正则性假设仍不尽如人意；这一问题与交换子的正则性理论密切相关，而该理论正是始于那项工作。为说明我们的意思，先回顾 [RSb]中的一些事实。为聚焦于主要思想，我们将讨论限于库仑情形，但需指出，所有内容都可以推广到超库仑情形。

固定一个向量场 v，给定一个测试函数 f，令 $\kappa^{(n),f}$ 为 n阶交换子，定义为

$$\kappa^{(n),f}(x) := \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \nabla^{\otimes n}\mathsf{g}(x-y) : (v(x)-v(y))^{\otimes n} df(y). \tag{5.7}$$

$\kappa^{(n),f}$ 满足偏微分方程（计算过程见 [RSb，第4节1]）

$$\begin{aligned} -\Delta\kappa^{(n),f} = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}(-1)^n \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \partial_{i_{\sigma_1}} v^{i_1}\cdots\partial_{i_{\sigma_n}} v^{i_n} f - n\partial_i(\partial_i v\cdot \nu^{(n-1),f}) \\ - n\partial_i v\cdot\partial_i\nu^{(n-1),f} + n(n-1)(\partial_i v)^{\otimes 2} : \mu^{(n-2),f}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $\mathbb{S}_n$ 表示 $[n]$ 上的对称群，重复出现的指标表示对该指标求和。右端中，ν 是 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的一个向量场，“从直观上说”类似于 $\nabla\kappa^{(n),f}$；而 μ （不要与平均场密度混淆）是 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 上的一个对称矩阵场，从直观上说类似于$_{\nabla^{\otimes 2}\kappa^{(n),f}}$ （精确定义分别见 [RSb中的（4.12）、（4.14）], ）。式（5.8）的右端很好，因为它只依赖于低阶（即 $n-1, n-2$）交换子。

我们认为，（5.8）的右端可以写成散度形式，其中涉及由 ∇v和 $\nu^{(m)}$的分量的乘积构成的项，适用于 $m\le n-1$。更准确地说，我们猜想

$$-\Delta\kappa^{(n),f} = -n\,\mathrm{div}(\nabla v^i \nu_i^{(n-1),f}) + \sum_{k=1}^{n} C_{k,n} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{k+1}} (-1)^{|\sigma|}\partial_{i_{\sigma(k+1)}}\left(\partial_{i_{\sigma(1)}} v^{i_1}\cdots\partial_{i_{\sigma(k)}} v^{i_k}\nu_{i_{k+1}}^{(n-k),f}\right), \tag{5.9}$$

其中 $C_{k、n}$ 是某些组合系数，而 $|\sigma|$ 表示置换σ的符号。将（5.9）与 $h^w := \mathsf{g} * w$进行配对，并利用

$$\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^2} (v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y) f(x) g(y) = \frac{1}{\mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} (-\Delta)\kappa^{(n),f} h^g, \tag{5.10}$$

再将乘积法则反向使用，便可得到高阶交换子的应力-能量张量结构。如果恒等式（5.9）成立，并且有如下界

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nu^{(m),f}|^2 \le C_m(\|\nabla v\|_{L^\infty})^{2m}\int_{\mathrm{supp}\,\nabla v} |\nabla h^f|^2, \qquad m\le n-1, \tag{5.11}$$

t那么由分部积分和柯西-施瓦茨不等式可立即推出

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} |\nabla\kappa^{(n),f}|^2 \le C_n(\|\nabla v\|_{L^\infty})^{2n}\int_{\mathrm{supp}\,\nabla v} |\nabla h^f|^2. \tag{5.12}$$

由于 ν满足关于 $\nabla\kappa$的递推关系（见 [RSb，（4.13）]），估计式（5.12）意味着（5.11）对 $m=n$ 成立；通过归纳，估计式（5.12）、（5.11）对任意整数$n\ge 1$均成立。

遗憾的是，我们只能证明恒等式 (5.9) 对于 $n\le 2$ （见 [RSb，第4节。3]），而且一旦 $n=2$，计算就已经相当复杂。如果我们采用非散度形式

右端（5.8）中，我们会遇到含有因子 、 的项。例如，

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \kappa^{(n),f}\partial_i v\cdot\partial_i\nu^{(n-1),f} = -\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\partial_i\kappa^{(n),f}\partial_i v\cdot\nu^{(n-1),f} - \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\kappa^{(n),f}\partial_i^2 v\cdot\nu^{(n-1),f}. \tag{5.13}$$

不能像通常那样对右侧第二项直接使用柯西-施瓦茨不等式，因为一般而言，无法用 $\int_{\text{supp }\nabla v}|\nabla\kappa^{(n)},^f|^2$ 控制 $\int_{\text{supp }\nabla v}|\kappa^{(n)},^f|^2$。不过，如果主要关注的是局部化估计，那么可以从一开始就利用局部化来解决这个问题。由于 $-\Delta\kappa^{(n),f}$ 的平均值为零，我们也可以等价地用 $\kappa^{(n),f}-\bar{\kappa}^{(n),f}$ 检验方程 (5.8)，其中 $\bar{\kappa}^{(n),f}$ 表示包含 v 支集的球 B 上的平均值。策略是分部积分，并像之前一样使用柯西-施瓦茨不等式，为 $\kappa^{(m),f},\nu^{(m),f},\mu^{(m),f}$ 满足的估计建立归纳论证（见 [RSb，引理 4.4]）。关键在于， B 上的勒贝格测度满足庞加莱不等式，因此可以用 $\int_B|\nabla\kappa^{(n),f}|^2$ 控制 $\int_B|\kappa^{(n),f}-\bar{\kappa}^{(n),f}|^2$。

尽管这种方法需要对 $\|\nabla^{\otimes 2}v\|_{L^\infty}$进行界定，这比若（5.9）成立时所需的 Lipschitz 条件要求更高，但对于诸如库仑/黎兹气体线性统计量的中心极限定理等应用而言，这仍然足够。然而，将正则性提高到$\|\nabla v\|_{L^\infty}$，将允许我们在这一应用中考虑更粗糙的测试函数，更不用说获得关于局部化的一致估计所具有的审美动机了。

5.4. 关于 $p=\infty$的尺度临界平均场收敛。我们考虑的最后一个问题涉及排除情形 $p=\infty$ 下的定理 2.6 和2.8 。 $p=1$ 情形同样被排除，但这并不特别重要，因为临界空间 $\dot{W}^{\mathsf{s}+2,\ 1}$ 从未对应于一个非递增/守恒量；不同的是， L^∞ 在库仑情形下是尺度临界的。

首先，读者应回想备注 2.7中的内容：按照我们的记号（见第 1.5节），空间 $\dot{W}^{\mathsf{d}\ p+\mathsf{s}+2-\mathsf{d}^p}$ 在 $p\to\infty$ 时的极限空间为

$$\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{d}}):\|\langle\nabla\rangle^{\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}f\|_{L^\infty}<\infty\}. \tag{5.14}$$

从调和分析的角度看，这个空间的性质并不好：奇异积分算子/傅里叶乘子未必在其上有界。更自然的 L^∞-型空间是齐次 Hölder-Zygmund 空间 $\dot{\mathcal{C}}^{\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}$，该空间的性质良好。特别地，我们有

$$\|\mathbb{M}\nabla\mathsf{g}*\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\lesssim|\mathbb{M}|\|\mu\|_{\dot{\mathcal{C}}^{\mathsf{s}+2-\mathsf{d}}}. \tag{5.15}$$

若 $\mathsf{s}=\mathsf{d}-2$（即库仑情形），则应将 $\dot{\mathcal{C}}^0$ 理解为齐次 Besov 空间 $\dot{B}^0_{\infty,\ \infty}$， L^∞ 嵌入其中。

当向量场 $v\in$时，仍然可以证明类似于定理 2.6 的有缺陷的交换子估计 $\mathcal{C}$，但估计 $\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty}$时产生的发散前因子 $(1+|\log\epsilon|)^{\ \ p}$会被 $1+|\log\epsilon|$取代。在对数情形 $\mathsf{s}=0$下，这个因子 $1+|\log\epsilon|$仍足以证明定理 2.8 的一个版本（见 [Ros22b，命题 1.8]）：只需令 $\epsilon=\epsilon_t$ 与调制能量 $\mathsf{F}_N(X_N^t,\mu^t)$ 可比，并利用 $r|\log r|$ 满足奥斯古德引理的条件。重要的是，在估计磨光误差 $v-v_\epsilon$ 时（具体而言，即引理 4.5 证明中的第 $_1$ 项）， v 的对数 Lipschitz 正则性使我们能够对 $|x_i-x_j|\le\frac{1}{2}$ 给出如下界，

$$\left|\nabla\mathsf{g}(x_i-x_j)\cdot\Big((v-v_\epsilon)(x_i)-(v-v_\epsilon)(x_j)\Big)\right|\le C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\frac{|\log|x_i-x_j||}{|x_i-x_j|^{\mathsf{s}}}=C\|v\|_{\dot{\mathcal{C}}^1}\mathsf{g}(x_i-x_j). \tag{5.16}$$

当然，这个关系只在对数情形下成立。当 $0<\mathsf{s}<\mathsf{d}$ 时，会出现剩余因子$|\log|x_i-x_j||$。在 [Ros22a 的命题 4.1], 的证明中，通过用 N 粒子的能量控制点之间的最小距离，处理了这个额外的对数因子。取足够大的 $\epsilon\propto N^{-\alpha}$，便可$\alpha>0$ 闭合 Gr¨onwall 关系，但只能适用于短时间，且时间长度取决于初始调制能量的大小。原因是会遇到量 $N^{-\beta}e^{Ct|\log N^{-\alpha}|}$，其中某个 $\beta>0$，它只有在 $N\to\infty$ 时才趋于零，前提是 t 足够小（且与 N 无关）。即使将这部分论证替换为引理 $_1$ 中估计项4.5 所用的方法，也仍然不能

满足要求，除非我们只有界 $\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty} \lesssim (1+|\log \epsilon|)$。右端的前置因子 $N^{\frac{2}{(s+1)s}-1}\epsilon$（见式（4.21））在 $0 < s < d$ 时再次要求我们取足够大的 $\epsilon \lesssim N^{-\alpha}$ α，于是又会遇到同样的短时间问题。因此，关键在于对 $\theta \in (0,1)$ 上的量$\|\nabla v_\epsilon\|_{L^\infty} \lesssim (1+|\log \epsilon|)^\theta$进行控制，而更强假设$v \in \dot{W}^{d_p+1,p}$使这一点成为可能。

迄今为止，只有在极限密度 $\mu \in L_t^\infty L_x^\infty$满足.....的假设下，才证明了平均场收敛在某个时间区间 $[0,T_*]$上成立，尽管平均场方程的解是全局存在的。消除这一短时间限制——我们认为这纯粹是技术性的——是一个重要的开放问题。更一般地说，当 $\mu \in L_t^\infty \dot{\mathcal{C}}_x^{s+2-d}$时，如果能证明超库仑情形下的收敛不受任何短时间限制，将是理想的。

References

[AHS23] Fabian Altekr¨uger、Johannes Hertrich 和 Gabriele Steidl。基于神经Wasserstein梯度流的Riesz核差异度量。载于 Andreas Krause、Emma Brunskill、Kyunghyun Cho、Barbara Engel- hardt、Sivan Sabato 和 Jonathan Scarlett（编），*Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning* 202 *Proceedings of Machine Learning Research* 664 690 ，第 卷，第 – 页。PMLR，2023年7月。[BBNY19] Roland Bauerschmidt、Paul Bourgade、Miika Nikula 和 Horng-Tzer Yau。二维库仑等离子体：准自由近似与中心极限定理。 *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* 23 4 841 1002, 2019 ，( ): –。[BCD11] Hajer Bahouri、Jean-Yves Chemin 和 Rapha¨el Danchin。 *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* 343 *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 2011 ，第 卷。施普林格，海德堡，。[BG80] H. Br ´ ¨ezis 和 T. Gallouet。非线性薛定谔演化方程。 *Nonlinear Anal.*, 4 4 677 681, 1980 0362 546 1873 5215 10 1016 0362 546 80 90068 1 ，( ): –。ISBN: - X，- 类型: doi: 。/ - X( ) -。[BG13] G. Borot 和 A. Guionnet。单切割区域中 β 矩阵模型的渐近展开。 *Communications in Mathematical Physics* 317 2 447 483, 2013 ，( ): –。[BG24] Ga¨etan Borot 和 Alice Guionnet。多切割区域中 β 矩阵模型的渐近展开。 *Forum of Mathematics. Sigma*，12：论文编号 e13，93，2024。[BHS19] Sergiy V. Borodachov、Douglas P. Hardin 和 Edward B. Saff。 *Discrete energy on rectifiable sets*。数学专著丛书。施普林格，纽约，2019年。[BJW19a] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 和 Zhenfu Wang。调制自由能与平均场极限。*Séminaire Laurent Schwartz–EDP et applications*，第1–22页，2019年。[BJW19b] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 和 Zhenfu Wang。关于平均场极限及具有一大类奇异核的定量估计：在 Patlak-Keller-Segel模型中的应用。 *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris* 357 9 708 720, 2019 ，( ): –。[BJW23] Didier Bresch、Pierre-Emmanuel Jabin 和 Zhenfu Wang。具有奇异吸引核的平均场极限与定量估计。 *Duke Mathematical Journal*，172(13)：2591–2641，2023年。[BLS18] Florent Bekerman、Thomas Lebl´e 和 Sylvia Serfaty。具有一般势的 β-系综涨落的中心极限定理。 *Electronic Journal of Probability*，23：论文编号115，31，2018年。[Bn19] Robert J. Berman 和 Magnus ¨Onnheim。具有奇异平均场相互作用的一类一阶模型的混沌传播。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*，51(1)：159–196，2019年1月。出版商：工业与应用数学学会。[BW80] Haim Brezis 和 Stephen Wainger。关于索伯列夫嵌入与卷积不等式极限情形的注记。 *Communications in Partial Differential Equations*，5(7)：773–789，1980年1月。出版商：Taylor & Francis，电子版：https://doi.org/10.1080/03605308008820154。[Cal80] A.-P. Calder ´ on。交换子、Lipschitz 曲线上的奇异积分及其应用。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)* 85 96 ，第 – 页。芬兰科学院，赫尔辛基，1980年。[CCH14] Jos´e Antonio Carrillo、Young-Pil Choi 和 Maxime Hauray。群集模型的推导：平均场极限与Wasserstein距离。载于 *Collective dynamics from bacteria to crowds* 553 *CISM Courses and Lect.* 1 46 2014 ，第 卷，第 – 页。施普林格，维也纳，。[CdCRS23] Antonin Chodron de Courcel、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。奇异周期Riesz流的尖锐时间一致平均场收敛。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*，42(2)：391–472，2023年12月。

[CdCRS25] Antonin Chodron de Courcel、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。吸引型对数气体：稳定性、唯一性与混沌传播。 *Communications of the American Mathematical Society* 5 695 773, , ： –。2025

[CFGW24] Shuzhe Cai、Xuanrui Feng、Yun Gong 和 Zhenfu Wang。全空间上二维对数气体的混沌传播。 *arXiv preprint arXiv:2411.14777*，2024年。[CFP12] Jos´e A. Carrillo、Lucas C. F. Ferreira 和 Juliana C. Precioso。利用质量输运方法研究具有非局部速度的一维流体力学模型。 *Advances in Mathematics* 231 1 306 327, , ( )： –。[CJ87] 2012

Michael Christ 和 Jean-Lin Journ´e。多线性奇异积分算子的一般多项式增长估计。 *Acta Mathematica*，159(1-2)：51–80，1987年。[CM78] R. Coifman 和 Y. Meyer。奇异积分交换子与多线性算子。 ，( )：xi，–。 *Université* CN[Alekos *de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* 28 3 177 202, 1978

Cecchin 和 Paul Nikolaev。平均场相互作用扩散涨落的收敛速率及其在二维黏性涡旋模型和库仑势中的应用。25] ，2025年。 *arXiv preprint arXiv:2509.01266*CRW[R. R. Coifman、R. Rochberg 和 Guido Weiss。多变量 Hardy 空间的因子分解定理。76] ，103(3)：611–635，1976年。出版商： *Annals of Mathematics*数学年刊，代表数学年刊的普林斯顿大学受托人、普林斯顿大学数学系 [。]DRAW[Thierry Dauxois、Stefano Ruffo、Ennio Arimondo 和 Martin Wilkens。具有长程相互作用的系统的动力学与热力学：导论。载于 02] ，第 卷，第 – 页。施普林格，柏林，2002年。 *Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions (Les Houches, 2002)* 602 *Lecture Notes in Phys.* 1 19 Due[Mitia

Duerinckx。某些Riesz相互作用梯度流的平均场极限。16] ，( )： –。电子版：https://doi.org/ / M- *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 48 3 2269 2300, 2016 10 1137 15 1042620 Eng[Hans

Engler。Brezis-Wainger不等式的另一种证明。89] ，( )： –，4月。出版商：Taylor & Francis，电子版：https://doi.org/10.1080/03605302.1989.12088448。 *Communications in Partial Differential Equations* 14 4 541 544, 1989 FW[Xuanrui

Feng 和 Zhenfu Wang。全空间上具有一般环量的二维黏性涡旋模型的定量混沌传播。24] ，2024年。 *arXiv preprint arXiv:2411.14266*GBM[Arnaud Guillin、Pierre Le Bris 和 Pierre Monmarch24] e。二维涡旋模型及其他奇异随机系统中时间一致的混沌传播。´，2024年。 *Journal of the European Mathematical Society*GBR[Arthur Gretton、Karsten Borgwardt、Malte Rasch、Bernhard Sch+06] olkopf 和 Alex Smola。双样本问题的核方法。载于 B. Sch¨ olkopf、J. Platt 和 T. Hoffman（编），，第 卷。麻省理工学院出版社，。 *Advances* GBR[Arthur *in Neural Information Processing Systems* 19 2006

Gretton、Karsten M Borgwardt、Malte Rasch、Bernhard Sch+07] olkopf 和 Alexander J Smola。比较分布的核方法。载于 ¨，第 卷，第 页。美国加利福尼亚州门洛帕克；马萨诸塞州剑桥；伦敦；AAAI出版社；麻省理工学院出版社；1999年、2007年。期号：2。 *Proceedings of the national conference on artificial intelligence* 22, 1637 GBR[Arthur

Gretton、Karsten M. Borgwardt、Malte J. Rasch、Bernhard Sch+12] olkopf 和 Alexander Smola。核双样本检验。¨，13：723–773，2012年。 *Journal of Machine Learning Research (JMLR)*Gol[Fran16] cois Golse。平均场极限下大规模粒子系统的动力学。载于，，第 卷 *Macroscopic and* ，第 – 页。施普林格，。 *large scale phenomena: coarse graining mean field limits and ergodicity* 3 *Lect. Notes Appl. Math. Mech.* 1 144 2016 GP[Fran22]

cois Golse 和 Thierry Paul。具有库仑相互作用的N体量子动力学的平均场极限与经典极限。，75(6)：1332–1376，2022年。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.21986。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*Gra[Loukas Grafakos。14] 。数学研究生教材第250卷。施普林格，第三版，2014年。 *Modern Fourier Analysis*Han[Kurt Hansson。位势理论中的Sobolev型嵌入定理。79] ，45 102，1979 1 77 0025 5521，1903 1807 10 7146 11827 ( )： –。ISBN： - - 类型： doi： 。/math.scand.a-。 *Math. Scand.*Har[Dorothee D. Haroske。07] ，第 卷。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，。页码：x *Envelopes and sharp embeddings of function spaces* 437 *Chapman & hall/CRC research notes in mathematics* 2007 tex.mrclass： 46E35 (42B35 46E30 47B38 47G10) tex.mrnumber：2262450 tex.mrreviewer：Leszek- Skrzypczak。+227 Hau[Maxime Hauray。Euler型方程涡旋近似的Wasserstein距离。09] ，( )： –。

[HBGS23] Johannes Hertrich、Robert Beinert、Manuel Gr¨af 和 Gabriele Steidl。直线上的 Wasserstein梯度流：关于带距离核的差异度。载于 Luca Calatroni、Marco Donatelli、Serena Morigi、Marco Prato 和 Matteo Santacesaria（编），*Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*，第 431–443 页，沙姆，2023 年。施普林格国际出版社。[HC23] Elias Hess-Childs。奇异 Riesz 型扩散流的大偏差原理。*arXiv preprint arXiv:2312.02904* 2023 ，。[HCRS] Elias Hess-Childs、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。Riesz 最大均值差异的最优量化。准备中。[HCRS25] Elias Hess-Childs、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。所有 Riesz 调制能量的尖锐交换子估计，2025 年 11 月。arXiv:2511.13461 [math].[HHA+23] Paul Hagemann、Johannes Hertrich、Fabian Altekr¨uger、Robert Beinert、Jannis Chemseddine 和 Gabriele Steidl。基于带负距离核的 MMD 梯度流的后验采样。 *arXiv preprint arXiv:2310.03054*，2023 年。[HKI21] Daniel Han-Kwan 和 Mikaela Iacobelli。从牛顿第二定律到理想流体的欧拉方程。*Proceedings of the American Mathematical Society*，149(7):3045–3061，2021 年。[HLSS18] Douglas P. Hardin、Thomas Lebl´e、Edward B. Saff 和 Sylvia Serfaty。超奇异 Riesz 气体的大偏差原理。*Constructive Approximation. An International Journal for Approximations*，( ): –。[HM14] Maxime Hauray 和 St´ephane Mischler。关于 Kac 混沌及相关问题。，( ): –。[HRS] Jiaoyang Huang、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。含噪奇异 Riesz 流平均场极限附近的涨落。准备中。[HSST21] Douglas Hardin、Edward B. Saff、Ruiwen Shu 和 Eitan Tadmor。具有两两超奇异排斥的曲线上粒子动力学。 *Discrete and Continuous Dynamical Systems*，41(12):5509–5536，2021 年。[HWAH23] Johannes Hertrich、Christian Wald、Fabian Altekr¨uger 和 Paul Hagemann。使用 Riesz 核的生成式切片 MMD 流。 *arXiv preprint arXiv:2305.11463*，2023 年。[Jan80] Svante Janson。Lipschitz 空间的推广及其在 Hardy 空间和有界平均振荡中的应用。 *Duke Mathematical Journal*，47(4):959–982，1980 年 12 月。出版商：杜克大学出版社。[JN61] F. John 和 L. Nirenberg。关于有界平均振荡函数。*Communications on Pure and Applied Mathematics* 14 3 415 426, 1961 ，( ): –。tex.eprint：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.3160140317。[JW18] Pierre-Emmanuel Jabin 和 Zhenfu Wang。具有 W-1,infty 核的随机系统中混沌传播的定量估计。 *Inventiones Mathematicae*，214(1):523–591，2018 年。[Kla10] Sergiu Klainerman。作为统一学科的偏微分方程。在 N. Alon、J. Bourgain、A. Connes、M. Gromov 和 V. Milman（编），*Visions in Mathematics: GAFA 2000 Special Volume, Part I*，第 279–315 页。Birkh¨auser，巴塞尔，2010 年。[KNSS22] Soheil Kolouri、Kimia Nadjahi、Shahin Shahrampour 和 Umut Simsekli。广义切片概率度量。载于 *ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)* 4513 4517, 2022 ，第 – 页。[KPV93] Carlos E. Kenig、Gustavo Ponce 和 Luis Vega。通过压缩原理研究广义 Korteweg-de Vries 方程的适定性与散射结果。*Mathematics* 46 4 527 620, 1993 *Communications on Pure and Applied* ，( ): –。[Li19] Dong Li。关于 Kato-Ponce 和分数阶 Leibniz 法则。 *Revista Matemática Iberoamericana*，35(1):23–100，2019 年。[LS18] Thomas Lebl´e 和 Sylvia Serfaty。二维库仑气体的涨落。，( ): –。[LZ00] Fanghua Lin 和 Ping Zhang。关于 Ginzburg–Landau 涡旋的流体动力学极限。*Continuous Dynamical Systems* 6 1 121 142, 2000 *Discrete and* ，( ): –。[M¨u97] Alfred M¨uller。积分概率度量及其生成函数类。，( ): –。[M´e24] Matthieu M´enard。具有陀螺效应的单动理学喷雾模型的平均场极限推导。，( ): –。[MD24] Thibault Modeste 和 Cl´ement Dombry。平移不变 MMD 的刻画及其与 Wasserstein距离的联系。 *Journal of Machine Learning Research (JMLR)*，25：论文编号 [237], 39, 2024。[Mos70] J. Moser。N. Trudinger 不等式的尖锐形式。 *Indiana University Mathematics Journal*，20 1077 1092，1970：–。[NRS22] Quoc-Hung Nguyen、Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。Riesz 型奇异流的平均场极限。*Ars Inveniendi Analytica*，第 4 号论文，45 页，2022 年。*Advances in Applied Probability* 29 2 429 443, 1997 *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 56 1 1068 1113, 2024

[PCJ25] Immanuel Ben Porat、Jos´e A Carrillo 和 Pierre-Emmanuel Jabin。具有时变权重的奇异流。 *arXiv preprint arXiv:2503.02276*，2025 年。[Por23] Immanuel Ben Porat。带磁场的冯·诺依曼方程导出理想流体的欧拉方程。 *Journal of Statistical Physics*，190(7)：论文编号 121，44 页，2023 年。[PS17] Mircea Petrache 和 Sylvia Serfaty。Riesz 相互作用的次阶渐近与重整化能量。

Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. JIMJ. Journal de l'Institut de Mathématiques，( )：–。[*de Jussieu* 16 3 501 569, 2017

PS25] Luke Peilen 和 Sylvia Serfaty。超库仑 Riesz 气体的局部定律与涨落，2025 年 12 月。arXiv:2511.18623 [math-ph]。[Ros] Matthew Rosenzweig。Riesz 气体的累积量。未发表笔记。[Ros20] Matthew Rosenzweig。带乘性噪声的随机点涡系统的平均场极限。 *arXiv preprint arXiv:2011.12180*，2020 年。《纯粹与应用数学通讯》即将刊载。[Ros21] Matthew Rosenzweig。从量子多体系统到理想流体。 *arXiv preprint arXiv:2110.04195* 2021 ，。[

Ros22a] Matthew Rosenzweig。标度临界空间中高维库仑流的平均场近似。 *Nonlinearity*，35(6):2722–2766，2022 年 5 月。出版商：IOP 出版社。[Ros22b] Matthew Rosenzweig。涡量属于 L^∞ 的点涡向不可压缩欧拉方程的平均场收敛。 *Archive for Rational Mechanics and Analysis*，243(3):1361–1431，2022 年。[Ros23] Matthew Rosenzweig。由牛顿第二定律严格推导不可压缩欧拉方程。 *Letters in Mathematical Physics*，113(1)：论文编号 13，32 页，2023 年。[RSa] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。交换子估计、Stein方法以及 Riesz 气体涨落的输运方法。准备中。[RSb] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。库仑与 Riesz 调制能量的各阶尖锐交换子估计。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*，n/a(n/a)。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.70010。[RS16] Nicolas Rougerie 和 Sylvia Serfaty。高维库仑气体与重整化能量泛函。 *Communications on Pure and Applied Mathematics*，69(3):519–605，2016 年。[RS23] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。奇异 Riesz 型扩散流的全时间平均场收敛。 *The Annals of Applied Probability*，33(2):754–798，2023 年。[RS24] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。通过自相似变换研究无约束情形下的相对熵与调制自由能。 *arXiv preprint arXiv:2402.13977*，2024 年。[RS25a] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。湖泊方程作为超临界平均场极限。 *Journal de l'École polytechnique. Mathématiques*，12:1019–1068，2025 年。[RS25b] Matthew Rosenzweig 和 Sylvia Serfaty。调制对数Sobolev不等式与混沌生成。 *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6*，34(1):107–134，2025 年。[RSW] Matthew Rosenzweig、Dejan Slep˘cev 和 Lihan Wang。带能量核的最大均值差异 Wasserstein梯度流。准备中。[Ser20] Sylvia Serfaty。库仑型流的平均场极限。 *Duke Mathematical Journal*，169(15):2887–2935，2020 年 10 月。出版商：杜克大学出版社。[Ser23] Sylvia Serfaty。任意温度下库仑气体的高斯涨落与自由能展开。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*，59(2):1074–1142，2023 年。[Ser24] Sylvia Serfaty。库仑与 Riesz 气体讲义。 *arXiv preprint arXiv:2407.21194*，2024 年。[SS15a] Etienne Sandier 和 Sylvia Serfaty。一维对数气体与重整化能量：零温极限下的结晶。 *Probability Theory and Related Fields*，162(3-4):795–846，2015 年。[SS15b] Etienne Sandier 和 Sylvia Serfaty。

2 *The Annals of* D 库仑气体 *Probability* 43 4 2026 2083, 2015

与重整化能量。，( )：–。[SSS19] Andreas Seeger、Charles K. Smart 和 Brian Street。Christ-Journ´e 型多线性奇异积分型。 *Memoirs of the American Mathematical Society*，257(1231):v+134，2019 年。ISBN：978-1-4704-3437-3；978-1-4704-4945-2。[Ste70] Elias M Stein。 *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*，第 2 卷。普林斯顿大学出版社，1970 年。[SV14] Sylvia Serfaty 和 Juan Luis V´azquez。作为分数阶拉普拉斯算子非线性扩散极限的平均场方程。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*，49(3-4):1091–1120，2014 年 3 月。[Tru67] Neil S. Trudinger。关于嵌入 Orlicz空间及其若干应用。 *J. Math. Mech.*，17 483，1967 473：–。[Yan13] Ray Yang。关于分数阶拉普拉斯算子的高阶延拓，2025 年 2 月。arXiv：。math。

[Yud63] V. I. Yudovich. 理想不可压缩液体的非定常流. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963 (): –。

Elias Hess-Childs, Carnegie Mellon University, Department of Mathematical Sciences, Pittsburgh, PA

Email address: ehesschi@andrew.cmu.eduMatthew Rosenzweig, Carnegie Mellon University, Department of Mathematical Sciences, Pitts-burgh, PA*Email address*: mrosenz2@andrew.cmu.edu

Sylvia Serfaty、 Sorbonne Université、 CNRS、 Université de Paris、 Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL)、 F-75005 Paris & Institut Universitaire de France & Courant Institute of MathematicalSciences、 New York University
Email address: serfaty@cims.nyu.edu