arXiv:2601.02332v1 [math.GR] 5 Jan 2026

二元码对码环的表示

ROSEMARY MIGUEL PIRES、ALEXANDRE GRISHKOV 和 MARINA RASSKAZOVA

ABSTRACT. 码环是由双偶二进制码构造的 Moufang环。于是，给定一个码环 L，我们要问，哪个双偶二进制码 V 生成 L。从这个意义上说， V 称为 L的表示。本文定义并展示如何确定秩 3 和 4 的非结合码环的所有极小表示和约化表示。

1. INTRODUCTION

码环由 Robert Griess [2]基于双偶二进制码按如下方式引入。

设 $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ 是一个含两个元素的域， K^n 是其上的一个 n维向量空间。令 $u =$(u_1, ……， u_n) 和 $v =$(v_1，……， v_n) 属于 K^n，并定义$|v| = |\{i \mid v_i = 1\}|$ （汉明重量）以及 $|u \cap v| = |\{i \mid u_i = v_i = 1\}|$. 。双偶二进制码 是一个子空间 $V \subseteq K^n$，满足 $|v| \equiv 0$ （模 4）。

设 V 是一个双偶二进制码，函数 ϕ：$V \times V \to \{1, -1\}$ 称为因子集，定义如下:

$$\begin{aligned}\phi(v, v) &= (-1)^{\frac{|v|}{4}},\\ \phi(v, w) &= (-1)^{\frac{|v\cap w|}{2}}\phi(w, v),\\ \phi(0, v) &= \phi(v, 0) = 1,\\ \phi(v + w, u) &= \phi(v, w + u)\phi(v, w)\phi(w, u)(-1)^{|v\cap w\cap u|}.\end{aligned}$$

为了定义码环，设 V 是一个双偶二进制码，ϕ：$V \times V \to \{1, -1\}$ 是一个因子集。考虑集合 $L(V) = \{1, -1\} \times V$，并按如下方式在 $L(V)$ 中定义乘积“.”

$$\begin{aligned}v.w &= \phi(v, w)(v + w),\\ v.(-w) &= (-v).w = -(v.w).\end{aligned}$$

在此乘积下，我们得到一个称为码环的 Moufang 环。等价地，若 Moufang 环 L 满足：对于某个阶为 2 的中心子群 A， L/A 是一个初等阿贝尔 2-群，则称其为码环。若 $L(V)$ 的 K-向量空间 V 的维数等于 m，则称 $L(V)$ 的秩为 m 。注意，$v \in L(V)$ 和 $-v \in L(V)$ 分别表示元素 (1， v) 和 (-1， v)。

值得注意的是，码环具有一些与其元素相关的交换子、结合子和平方式质，这些性质有助于我们得出本文呈现的主要结果。Chein 和 Goodaire [1] 证明了码

2010 数学主题分类。主要分类：20N05。关键词和短语。码环、特征向量、表示。

环具有唯一的非单位平方、唯一的非单位交换子以及唯一的非单位结合子。换言之，对于任意 $u, v, w \in V$：

$$v^2 = (-1)^{\frac{|v|}{4}}0, \tag{1.1}$$

$$[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv = (-1)^{\frac{|u\cap v|}{2}}0, \tag{1.2}$$

$$(u, v, w) = ((uv)w)((u(vw))^{-1}) = (-1)^{|u\cap v\cap w|}0. \tag{1.3}$$

设 V 是一个双偶二进制码，且 $v \in V$。注意，如果 $v^2 = -1$，则 $|v| \equiv 4$（模 8）。否则，我们有 $|v| \equiv 0$（模 8）。

现在设 $u,\ v \in V$。根据双偶二进制码的定义，我们得到 $|u \cap v| \equiv 0$（模 2）。于是，在情形 $[u, v] = -1$ 下，我们得到 $|u \cap v| \equiv 2$（模 4）；在另一种情形下，$|u \cap v| \equiv 0$（模 4）。

到目前为止，我们已经展示了如何从双偶二进制码构造码环，但我们还想研究反方向。换句话说，给定某个码环 L，我们希望确定满足 $L \simeq L(V)$ 的双偶码 V。

给定码环 L 的一个表示 是一个双偶二进制码 $V \subseteq K^m$，满足 $L \simeq L(V)$，而数值 m 称为表示的次数。因此，表示的次数就是码长。我们注意到，同一码环有许多不同的表示。必要时，我们用 deg(V)表示 V 的次数。

本文确定秩 3 和 4 的所有非结合码环的最小表示（第 3 节和第 4 节）。我们还将说明如何确定约化表示。为此，首先需要知道这些码环在同构意义下的所有类型。在 [3], 中，利用与这些码环相关的特征向量概念对它们进行了分类。我们在第 2 节回顾秩 3 和 4 的非结合码环分类的主要定理。

2. Nonassociative Code Loops of Rank 3 and 4

设 L 是一个生成元集合为 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 且中心为 $\{1, -1\}$ 的码环。于是，我们定义 L 的特征向量，记作 $\lambda_X(L)$ 或 $\lambda(L)$，如下：

$$\lambda(L) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n; \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{(n-1)n}; \lambda_{123}, \dots, \lambda_{12n}, \dots, \lambda_{(n-2)(n-1)n}),$$

其中 λ_i、λ_{ij}、$\lambda_{ijk} \in \mathbb{F}_2$、$(-1)^{\lambda_i} = x_i^2$、$(-1)^{\lambda_{ij}} = [x_i, x_j]$ 以及 $(-1)^{\lambda_{ijk}} = (x_i,\ x_j,\ x_k)$。

这里，$[x, y]$ 表示 x 与 y 的交换子，而 $(x,\ y,\ z)$ 表示 x、y 与 z 的结合子。环 L 的中心记作 $\mathcal{Z}(L)$，是集合

$$\mathcal{Z}(L) = \{x \in L \mid [x, y] = (x, y, z) = 1,\ \forall y, z \in L\}.$$

一旦确定了一个生成集 X，我们就得到唯一的特征向量 $\lambda_X(L)$；该向量取决于 X 中元素的选择及其排列顺序。不同的极小生成集可能会为同一个码环产生不同的特征向量，如下例所示：

设 $L = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 = \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3\}$，并令 $Z = \{(0,\ 0),\ (0,\ 2)\}$。那么 $Z \leq \mathcal{Z}(L)$（因为 L 是阿贝尔群），且 L/Z 是克莱因群，因此 L是秩为 2 的码环。我们可以考虑 L的各种（有序）极小生成子集。取$X = (a,\ b) = ((0,\ 1),\ (1,\ 0))$，得到 $a + a = (0,\ 2)$ 和 $b + b = (0,\ 0)$；而取$X' = (a',\ b') = ((0,\ 1),\ (1,\ 1))$，则得到 $a' + a' = (0,\ 2)$ 和 $b' + b' = (0,\ 2)$。注意，b 的阶为 2，而 b' 的阶为 4，因此与每个生成集相关联的特征向量各不相同。

特征向量能够唯一确定一个码环，这一事实已在 [3]中得到证明。根据特征向量的定义，这类向量的可能数量为 2^m，其中 $m = n + {}^{n}_{(n-1)\,2} + {}^{n}_{(n-1)(n-2)\,6}$。在 [3], 中，作者构造了由码环生成的簇中的一个自由环 $\mathcal{F}_n$，并展示了如何建立坐标取自 $\mathbb{F}_2$ 的向量与一个非结合码环之间的对应关系。然而，不同的向量可能确定同一个非结合码环（相差一个同构）。此外，利用 GL_n(2) 在特征向量集合上的自然作用，已证明该作用的轨道决定了非结合码环的同构类。因此，秩为 n 的非结合码环的同构类集合，与这类环的特征向量的 GL_n(2)-轨道集合之间存在一一对应关系（见 [3, 推论 2.11，第 172] 页，以及 [3, 命题 2.12，第 172] 页）。

只需知道与 L 相关联的特征向量λ(*L*)，我们就能确定 V L 的表示。事实上，该方法包括寻找 V 的一个基，其向量为v_1、.....、v_n，分别对应于 x_1、.....、x_n。L 的生成元的平方、交换子和结合子将确定 V 的基元素各自的平方、交换子和结合子；根据方程 (1.1)、(1.2) 和 (1.3)，我们得到 v_i、$v_i \cap v_j$ 和 $v_i \cap v_j \cap v_k$ 的重量，即对于每个 i、j、$k \in \{1, \ldots, n\}$，分别得到 $|v_i|$、$|v_i \cap v_j|$ 和 $|v_i \cap v_j \cap v_k|$。为了确定 V 的一个基可能具有的向量，只需分析这些重量，正如我们将在下一节中看到的那样。我们通常使用以下记号：$t_i = |v_i|$、$t_{ij} = |v_i \cap v_j|$ 和 $t_{ijk} = |v_i \cap v_j \cap v_k|$。

现在，假设 L 是一个秩 3 的非结合码环，其生成元为 a、b、c。那么结合子 (a、b、c) 等于 -1；否则，根据 Moufang 定理，L 就会是一个群。与 L 相关联的特征向量为 λ(*L*) = (λ1, ..., λ6)（或简写为 λ(*L*) = (λ1...λ6)），其中 $a^2 = (-1)^{\lambda_1}$、$b^2 = (-1)^{\lambda_2}$、$c^2 = (-1)^{\lambda_3}$、$[a, b] = (-1)^{\lambda_4}$、$[a, c] = (-1)^{\lambda_5}$，以及 $[b, c] = (-1)^{\lambda_6}$.。省略的第七个坐标等于 1。

如上所述，我们知道，具有相同特征向量的两个码环是同构的。这直接由 [3, 推论 2.11，第 172] 页，以及 [3, 命题 2.12，第 172] 页得出。为了通过一个具体例子说明并论证这一点，我们考察秩 3 的非结合码环。根据特征向量的定义，并且由于我们考察的是这一秩的非结合环，与这些环对应的此类向量恰有 64 个。根据 [3, 命题 3.2，第 175], 页，这些向量在 GL_3(2) 的自然作用下分为 5 个等价类（轨道）。每个轨道都对应一个唯一的非结合码环，该环由下文的定理 2.1 给出；其中列出的每个特征向量都是相应轨道的一个代表元。

定理 2.1 ([3])。 考虑具有以下特征向量的 C_1^3..... C_5^3码环：

$$\lambda(C_1^3) = (111111), \qquad \lambda(C_2^3) = (000000), \qquad \lambda(C_3^3) = (000111),$$

$$\lambda(C_4^3) = (110000), \qquad \lambda(C_5^3) = (100000).$$

那么，列表 $\{C_1^3, ..., C_5^3\}$ 中的任意两个环都不同构，并且每个秩为3的非结合码环都同构于该列表中的某一个环。

根据上述分类，我们现在可以描述每个环中 t_i、t_{ij} 和 t_{ijk} 的同余类，这些同余类编码了表示中基向量的交性质。下一条注中列出的值对应于秩 3 码环的情形。

注 2.2。 根据定理 2.1 和方程 (1.1)、(1.2) 及 (1.3)，环 C_1^3、..... C_5^3 的任意表示都具有一个基 $\{v_1, v_2, v_3\}$，该基分别满足以下性质：

1. $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 4$（模 8），$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv 2$（模 4）；2. $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 0$（模 8），$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv 0$（模 4）；3. $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 0$（模 8），$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{13} \equiv 2$（模 4）；4. $t_1 \equiv t_2 \equiv 4$（模 8），$t_3 \equiv 0$（模 8），$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv 0$（模 4）；5. $t_1 \equiv 4$（模 8），$t_2 \equiv t_3 \equiv 0$（模 8），$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv 0$（模 4）。

对于任意表示，由于 $(v_1, v_2, v_3) = -1$，我们还有 $t_{123} \equiv 1$（模 2）。因此，$v_j \subset v_k$、$j \neq k$ 或 $v_j \cap v_k = \emptyset$都不会发生。例如，如果 $v_1 \subset v_2$，那么我们会得到 $t_{123} \equiv t_{13} \equiv 0$（模 2），这显然不成立，因为 t_{123} 是奇数。例如，如果$v_2 \cap v_3 = \emptyset$，那么我们会得到 $t_{123} \equiv t_1 \equiv 0$（模 4），这同样不可能发生。

设 L 是一个秩 4 的非结合码环。根据 [3], 的引理 3.4，我们可以假设 L 有一个生成集 $X = \{a, b, c, d\}$，使得 L 的核由 d生成，即 $N(L) = \mathbb{F}_2 d$。由于 L 是非结合的，因此 $(a, b, c) = -1$。根据定义，与 L相关联的特征向量有 14 个坐标。然而，由于 $(a, b, d) = (a, c, d) = (b, c, d) = 1$ 且 $(a, b, c) = -1$，我们可以省略与这些结合子的值对应的坐标，从而将 L 的特征向量视为 $\lambda_X(L) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{10})$ 的形式（或简写为 $\lambda(L) = (\lambda_1 \ldots \lambda_{10})$），其中

$$
\begin{aligned}
a^2 = (-1)^{\lambda_1}, \quad b^2 = (-1)^{\lambda_2}, \quad c^2 = (-1)^{\lambda_3}, \quad d^2 = (-1)^{\lambda_4}, \\
[a, b] = (-1)^{\lambda_5}, \quad [a, c] = (-1)^{\lambda_6}, \quad [a, d] = (-1)^{\lambda_7}, \\
[b, c] = (-1)^{\lambda_8}, \quad [b, d] = (-1)^{\lambda_9}, \quad [c, d] = (-1)^{\lambda_{10}}.
\end{aligned}
$$

与秩 3 的情形类似，秩为 4 的非结合码环的特征向量集合可在 $GL_4(2)$ 的自然作用下划分为若干轨道，每个轨道对应一个唯一的同构类 [4]。下文的定理 2.3 列出每个轨道的一个代表元，从而给出秩为 4 的码环的分类。

定理 2.3 ([3])。 考虑具有以下特征向量的码环 C_1^4, ..., C_{16}^4。每个秩4 的非结合码环都同构于列表中的某一个。此外，列表中的任意两个码环彼此不同构。

L	$\lambda(L)$	L	$\lambda(L)$
C_1^4	(1110110100)	C_9^4	(0100001000)
C_2^4	(0000000000)	C_{10}^4	(0001111000)
C_3^4	(0000110100)	C_{11}^4	(0001001000)
C_4^4	(0010100000)	C_{12}^4	(0000001100)
C_5^4	(0000010100)	C_{13}^4	(0110111100)
C_6^4	(1111110100)	C_{14}^4	(0001001100)
C_7^4	(0001000000)	C_{15}^4	(1001001100)
C_8^4	(0000001000)	C_{16}^4	(0001111100)

下一条注释列出了 t_i、t_{ij} 和 t_{ijk} 的同余类，这些同余类将用于计算秩为 4 的码环的表示。

注 2.4. 作为定理 2.3 的推论，我们将为每个码环得到以 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 为基、并满足以下性质的表示：

- 若 $\lambda_i = 0$，则 $t_i \equiv 0$ （模 8）。否则，我们有 $t_i \equiv 4$ （模 8）。
- 若 $\lambda_{ij} = 0$，则 $t_{ij} \equiv 0$ （模 4）。否则，我们有 $t_{ij} \equiv 2$（模 4）。
- $t_{123} \equiv 1$（模 2）且 $t_{ij4} \equiv 0$ （模 2）。

注 2.5. 从特征向量中，我们无法得到权 t_i 和 t_{ij}的绝对值，只能得到它们的同余类：由 (1.1) 得到 t_i （模 8），由 (1.2) 得到t_{ij} （模 4）。这些同余关系提供了关于表示 V 中的向量及其交集性质的信息。秩 3 和 4 的码环中，t_i、t_{ij} 和 t_{ijk} 可能的同余类列于注 2.2 和 2.4 中。下一节将分析这些权的精确值；我们将考察与上述同余关系相容的所有可能情况（在给定上界内），以确定极小表示。

3. Representations of code loops

设 L 是一个秩为 n、生成元为 $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 和 $V =$的码环，$Span_{\mathbb{F}_2}\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是次数为 m 的 L 的表示。按照 [3]，我们将 ${}_n\mathbb{F}_2$–空间 $\mathbb{F}_2^m$ 与 $P_m = \{\sigma \subseteq I_m\}$ 识别，于是 $v_i \subseteq I_m$。设 $\bigcup v_i = I_m$。$_{i=1}$那么在 I_m 上有一个等价关系：$i \sim j \iff \{i \in v_p \iff j \in v_p\}$。考虑 ${}_t\, I_m$ 按等价类得到的相应划分：$I_m = \bigcup$

$$I_m^k.$$

$_{k=1}$

我们也可以通过以下方式得到相同的划分。设 $\sigma \subseteq I_n$ 和

$$v^\sigma = \left(\bigcap_{i\in\sigma} v_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j\notin\sigma} v_j\right). \tag{3.1}$$

引理 1. 在上述记号下，我们有：

i) $v^\sigma \cap v^\tau = \emptyset, \ \ \sigma \neq \tau$;

ii) $\bigcup_{\sigma\subseteq I_n} v^\sigma = I_m$;

iii) $\{v^\sigma \neq \emptyset \,|\, \sigma \subseteq I_n\} = \{I_m^k \,|\, k = 1, \cdots, t\}$.

证明。

i) 设 $i \in v^\sigma \cap v^\tau$，且 $j \in \sigma \setminus \tau$。因此，由 (3.1) 得，$i \in v_k$，对所有 $k \in \sigma$ 均成立。由于 $j \neq \tau$，则由 (3.1) 得 $i \notin v_j$。因为 $j \in \sigma$，我们得到矛盾。**ii)** 设 $i \in I_n$，并定义 $\sigma = \{k \in I_n \,|\, i \in v_k\}$。那么对于 $q \notin \sigma$，有 $i \notin v_q$，且$i \in v^\sigma$。**iii)** 设 $i \sim j$ 和 $i \in v^\sigma$，则 $i \in v_k$，$k \in \sigma$，因此 $j \in v_k$。由于 $i \in v^\sigma$，$i \notin v_p$，$p \notin \sigma$。因为 $i \sim j$，$j \notin v_p$。因此 $j \in v^\sigma$。这意味着，如果 $i, j \in I_m^k$，则 $I_m^k \subseteq v^\sigma$。设$k \notin I_m^k$，$k \in v^\sigma$，则存在 v_q，使得 $i \notin v_q$，且 $j \notin v_q$，$k \in v_q$。由$k \in v^\sigma$，$k \in v_q$ 和 (3.1)，我们得到 $q \in \sigma$。另一方面，由于 $i \notin v_q$ 和$i \in v^\sigma$，因此 $q \notin \sigma$。矛盾。

□

$_t$**引理 2.** 划分 $I_m = \bigcup_{k=1} I_m^k$ 不依赖于生成元方程组 $v_1, \cdots, v_n$ 的选取。

证明。我们有 $L = V \cup -V$，其中 $V = Span_{\mathbb{F}_2}\{v_1, \cdots, v_n\}$。回想在 V 中，运算为 $v + w = (v \setminus w) \cup (w \setminus v)$。令 $v \in V$ 和 $i \in v \cap I_m^k$。我们需要证明 $I_m^k \subseteq v$。假设 $j \in I_m^k \setminus v$。令 $v = \sum_{k\in\sigma\subseteq I_k} v_k$。若 $|\sigma| = 1$，则 $v = v_k$，因此 $i \in v$、$j \notin v$ 和 $i \not\sim j$。这与 $i,\ j \in I_m^k$ 矛盾。

令 $|\sigma| = s$，且对所有 $|\tau| < s$，我们都有 $i \in v_\tau = \sum_{k\in\tau} v_k$ 当且仅当 $j \in v_\tau$。

我们有 $v_\sigma = v_\tau + v_l$, $\tau = \sigma \setminus l$, $|\tau| < s$。令 $i \in v_\sigma$和 $i \in v_\tau$，则 $i \notin v_l$，因为$v_\sigma = (v_\tau \setminus v_l) \cup (v_l \setminus v_\tau)$。由 $i \sim j$可得 $j \notin v_l$和 $j \in v_\tau$，因此 $j \in v_\sigma$。令 $i \in v_\sigma$,$i \notin v_\tau$，则 $i \in v_l$。由归纳法可得 $j \in v_l$和 $j \notin v_\tau$。因此 $j \in v_\sigma$。□

我们只考虑满足以下条件的表示：对于任意等价类 X，都有 $|X| < 8$。这种选择是任意的，其目的仅仅是使所有约化表示的枚举易于处理。我们将这些表示称为**约化表示**。

定义 3.1。若约化表示 V满足：每当 $L(V)$ 与 $L(W)$ 同构时，$\deg(V) \leq \deg(W)$，其中 W是另一个表示，则称其为**极小** 。

根据 (3.1)，我们将得到 I_m 上的所有等价类，并证明可以利用这些等价类，找到秩 3 和 4 的码环的所有次数为 m 的约化表示和极小表示。为此，需要确定这些等价类的基数，并说明只需知道权 t_i，t_{ij} 和 t_{ijk}，以及 i，j，$k \in \{1, 2, 3, 4\}$，就能得到这些值。对于每种权的选择，都有一种不同的表示。此选择必须符合注 2.2 和注 2.4 中提到的性质。

定义 3.2. 设 V 是码环 L 的一个 m 次表示，且 $X_1, ..., X_r$ 是 I_m 上的等价类。我们将 V 的**类型**定义为向量 $(|X_1|, ..., |X_r|)$，使得 $|X_1| \leq |X_2| \leq ... \leq |X_r|$。必要时，我们可以写作 $(|X_1|...|X_r|)$。

定义 3.3. 设 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{F}_2^m$的双偶二进制码。当且仅当存在一个双射 $\varphi \in S_m$ 使得 $V_1^\varphi = V_2$时，我们称 V_1 和V_2 为等价码。

3.1. 秩为 3的码环。设 $C_i^3, i = 1,\ldots, 5,$ 为秩 3 的非结合码环，$\lambda(C_i^3)$为第 2 节所示的相应特征向量。我们也用 V_i^3表示相应的表示，并假设 $V_i^3 = Span_{\mathbb{F}_2}\{v_1, v_2, v_3\}$。

设 m 为 V_i^3和 $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$的次数，使得 v_1，v_2，$v_3 \subset I_m$ 和 $v_1 \cup v_2 \cup v_3 = I_m$。根据引理 1，以下集合确定了 I_m 上的所有等价类（见图 1）：

$$X_{123} = v_1 \cap v_2 \cap v_3,\ X_{12} = (v_1 \cap v_2) \setminus v_3,\ X_{13} = (v_1 \cap v_3) \setminus v_2,\ X_{23} = (v_2 \cap v_3) \setminus v_1,$$
$$X_1 = v_1 \setminus (v_2 \cup v_3),\ X_2 = v_2 \setminus (v_1 \cup v_3),\ X_3 = v_3 \setminus (v_1 \cup v_2).$$

现在请注意，V_i^3的生成元取决于等价类，因为我们可以将它们写成如下形式：

$$v_1 = X_{123} \cup X_{12} \cup X_{13} \cup X_1, v_2 = X_{123} \cup X_{12} \cup X_{23} \cup X_2, v_3 = X_{123} \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_3.$$

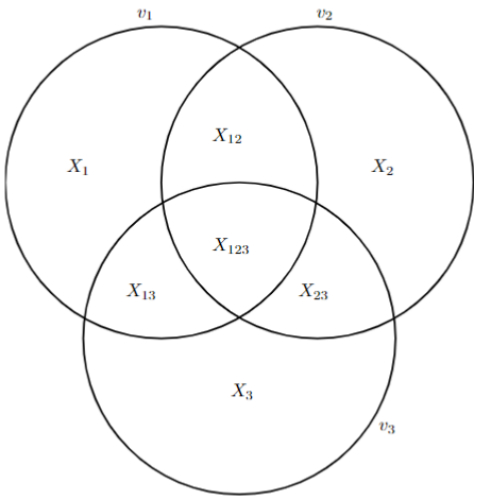


FIGURE 1. I_m 上秩 3 码环的等价类

因此，如果我们找到 I_m上的等价类，就能确定该表示的生成元。由于表示中的元素取决于 v_i、 $v_i \cap v_j$（i， $j \in \{1,2,3\}$）和 $v_1 \cap v_2 \cap v_3$的权，我们可以建立类的基数与这些权之间的关系。

分别以 x_{123}、 x_{ij} 和 x_i表示集合 X_{123}、 X_{ij} 和 X_i 的基数；i， $j = 1$，2，3，并假设 $x_{123} = t_{123}$。这些基数与权通过以下关于变量 x_{12}、 x_{13}、 x_{23}、 x_1、 x_2 和 x_3的方程组相关联:

$$\begin{cases} t_{123} + x_{12} = t_{12} \\ t_{123} + x_{13} = t_{13} \\ t_{123} + x_{23} = t_{23} \\ t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_1 = t_1 \\ t_{123} + x_{12} + x_{23} + x_2 = t_2 \\ t_{123} + x_{13} + x_{23} + x_3 = t_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

那么，解为:

$$\begin{cases} x_{12} = t_{12} - t_{123} \\ x_{13} = t_{13} - t_{123} \\ x_{23} = t_{23} - t_{123} \\ x_1 = t_1 - t_{12} - t_{13} + t_{123} \\ x_2 = t_2 - t_{12} - t_{23} + t_{123} \\ x_3 = t_3 - t_{13} - t_{23} + t_{123} \end{cases} \tag{3.3}$$

因此，要确定一个秩 3 码环的表示，首先为 t_{123}、 t_{ij}和 t_i、 i， $j = 1$，2，3选取数值；然后求解线性方程组（3.2）。由于我们要的是基数严格小于8的等价类，因此考虑满足 $0 \leq x_i \leq 7$和 $0 \leq x_{ij} \leq 7$的解 $v = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_1, x_2, x_3)$，其中$i$， $j = 1$，2，3，

注3.4。由此可知，存在 7 个至多包含 7 个元素的等价类:

- $t_{123} = 1, 3, 5$ or 7;

- $t_{ij} = 2$，4，6，8，10，12 或 14；
- $t_i = 4$，8，12，16，20，24 或 28；
- $7 \leq m \leq 49$。

注意，V_i^3的次数 m 和类型由这些解得出。事实上，$m = x_{123} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_1 + x_2 + x_3$，而类型是一个向量，它由将 $(x_{123}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_1, x_2, x_3)$ 的坐标按升序排列而确定。

求出方程组的解，也就是 I_m 上等价类的基数之后，还需要给其元素编号。我们选择按如下方式为这些元素编号：

$$
\begin{aligned}
&X_{123} = \{1, \cdots, t_{123}\}, X_{12} = \{t_{123} + 1, \cdots, t_{123} + x_{12}\},\\
&X_{13} = \{t_{123} + x_{12} + 1, \cdots, t_{123} + x_{12} + x_{13}\},\\
&X_1 = \{t_{123} + x_{12} + x_{13} + 1, \cdots, t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_1\},\\
&X_{23} = \{t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_1 + 1, \cdots, t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_1 + x_{23}\},\\
&X_2 = \{t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_1 + 1, \cdots, t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_1 + x_2\},\\
&X_3 = \{t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_1 + x_2 + 1, \cdots, t_{123} + x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_1 + x_2 + x_3\}.
\end{aligned}
$$

3.2. 秩为4的码环。 设 V a m 次约化表示，其基为$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，对应于一个秩为4的码环。这里我们也用记号 t 或 t_{1234} 表示 4 个生成元的重量，即 $t = t_{1234} = |v_1 \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4|$。

众所周知，生成元及其交集的重量由与该码环关联的特征向量确定。因此，首先取一个与秩为4的码环关联的特征向量。由于 $t_{123} \equiv 1$（模 2）、$t_{ij4} \equiv 0$（模 2）、$t_{ij} \equiv 0$（模 2）和 $t_i \equiv 0$（模 4），且 V 是约化的，因此我们得到 $1 \leq t_{123} \leq 13$、$0 \leq t_{ij4} \leq 14$、$2 \leq t_{ij} \leq 28$（$i, j = 1, 2, 3$；$i \neq j$）、$0 \leq t_{i4} \leq 28$ 和 $4 \leq t_i \leq 56$。

注3.5。考虑 $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$，使得 $v_1, v_2, v_3, v_4 \subset I_m$和$v_1 \cup v_2 \cup v_3 \cup v_4 = I_m$。根据引理 1，通过计算以下集合，可得 I_m =$\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的等价类（见图2）：

$$
\begin{aligned}
&X_{1234} = v_1 \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4, \quad X_{123} = (v_1 \cap v_2 \cap v_3) \setminus v_4, \quad X_{124} = (v_1 \cap v_2 \cap v_4) \setminus v_3, X_{134} = (v_1 \cap v_3 \cap v_4)\\
&\setminus v_2, \quad X_{234} = (v_2 \cap v_3 \cap v_4) \setminus v_1, \quad X_{12} = (v_1 \cap v_2) \setminus (v_3 \cup v_4), X_{13} = (v_1 \cap v_3) \setminus (v_2 \cup v_4) \quad X_{14} = (v_1 \cap v_4)\\
&\setminus (v_2 \cup v_3) \quad X_{23} = (v_2 \cap v_3) \setminus (v_1 \cup v_4), X_{24} = (v_2 \cap v_4) \setminus (v_1 \cup v_3) \quad X_{34} = (v_3 \cap v_4) \setminus (v_1 \cup v_2)\\
&X_1 = v_1 \setminus (v_2 \cup v_3 \cup v_4), X_2 = v_2 \setminus (v_1 \cup v_3 \cup v_4) \qquad X_3 = v_3 \setminus (v_1 \cup v_2 \cup v_4) \qquad X_4 = v_4 \setminus (v_1 \cup v_2 \cup v_3).
\end{aligned}
$$

与前一节一样，用 x_{1234}、x_{ijk}、x_{ij} 或 x_i 表示 $i, j, k = 1, 2, 3, 4$；这些集合的基数。另设 $t_{1234} = x_{1234}$。求约化表示的第二步是为 t_{1234}、t_{ijk}、t_{ij} 和 t_i 选取取值，其中 $i, j, k = 1, 2, 3, 4$，并且这些取值满足注 2.4 中给出的性质。

在这种情形下，我们还可以通过以下关于变量x_{123}、x_{124}、x_{134}、x_{234}、x_{12}、x_{13}、x_{14}、x_{23}、x_{24}、x_{34}、x_1、x_2、x_3 和 x_4的14个方程组成的线性方程组，关联这些权与 Remark3.5 中所列集合的基数：

		v_2	$v_2 \cap v_4$	v_4
		X_2	X_{24}	X_4
v_1	X_1	X_{12}	X_{124}	X_{14}
$v_1 \cap v_3$	X_{13}	X_{123}	X_{1234}	X_{134}
v_3	X_3	X_{23}	X_{234}	X_{34}

FIGURE 2. 秩为4的码环在 I_m 上的等价类

$$
\begin{cases}
t + x_{123} = t_{123} \\
t + x_{124} = t_{124} \\
t + x_{134} = t_{134} \\
t + x_{234} = t_{234} \\
t + x_{123} + x_{124} + x_{12} = t_{12} \\
t + x_{123} + x_{134} + x_{13} = t_{13} \\
t + x_{124} + x_{134} + x_{14} = t_{14} \\
t + x_{123} + x_{234} + x_{23} = t_{23} \\
t + x_{124} + x_{234} + x_{24} = t_{24} \\
t + x_{134} + x_{234} + x_{34} = t_{34} \\
t + x_{123} + x_{12} + x_{124} + x_{134} + x_{13} + x_{14} + x_1 = t_1 \\
t + x_{123} + x_{12} + x_{124} + x_{234} + x_{23} + x_{24} + x_2 = t_2 \\
t + x_{123} + x_{13} + x_{134} + x_{234} + x_{23} + x_{34} + x_3 = t_3 \\
t + x_{124} + x_{134} + x_{234} + x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_4 = t_4
\end{cases} \tag{3.4}
$$

第三步是求解这个方程组。求解后，我们得到:

$$
\begin{cases}
x_{123} = t_{123} - t \\
x_{124} = t_{124} - t \\
x_{134} = t_{134} - t \\
x_{234} = t_{234} - t \\
x_{12} = t_{12} - t_{123} - t_{124} + t \\
x_{13} = t_{13} - t_{123} - t_{134} + t \\
x_{14} = t_{14} - t_{124} - t_{134} + t \\
x_{23} = t_{23} - t_{123} - t_{234} + t \\
x_{24} = t_{24} - t_{124} - t_{234} + t \\
x_{34} = t_{34} - t_{134} - t_{234} + t \\
x_1 = t_1 - t_{12} - t_{13} + t_{123} - t_{14} + t_{124} + t_{134} - t \\
x_2 = t_2 - t_{12} - t_{23} + t_{123} - t_{24} + t_{234} + t_{124} - t \\
x_3 = t_3 - t_{13} - t_{23} + t_{123} - t_{34} + t_{234} + t_{134} - t \\
x_4 = t_4 - t_{14} - t_{24} + t_{124} - t_{34} + t_{134} + t_{234} - t
\end{cases}
$$

请记住，对于所有满足以下条件的解，都可以得到约化表示，对所有 i， j， $k \in \{1,2,3,4\}$：

$$0 \leq x_i \leq 7,\ 0 \leq x_{ij} \leq 7,\ 0 \leq x_{ijk} \leq 7,\ 0 \leq x_{1234} \leq 7.$$

根据表1中选定的标记，利用这些解可以确定集合 X_{1234}， X_{123}, X_{124}, X_{134}, X_{234}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24},X_{34}, X_1, X_2, X_3 和 X_4 。确定这些集合的顺序可以任意选择。注意，只有非空集合才确定 I_m上的等价类，其中 m 是 V的次数。最后，通过以下方式求出 V的生成元 v_1， v_2， v_3和 v_4：

$$\begin{aligned}
v_1 &= X_{1234} \cup X_{123} \cup X_{124} \cup X_{134} \cup X_{12} \cup X_{13} \cup X_{14} \cup X_1,\\
v_2 &= X_{1234} \cup X_{123} \cup X_{124} \cup X_{234} \cup X_{12} \cup X_{23} \cup X_{24} \cup X_2,\\
v_3 &= X_{1234} \cup X_{123} \cup X_{134} \cup X_{234} \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_{34} \cup X_3,\\
v_4 &= X_{1234} \cup X_{124} \cup X_{134} \cup X_{234} \cup X_{14} \cup X_{24} \cup X_{34} \cup X_4.
\end{aligned}$$

作为示例，我们将给出一个约化表示，记为 V_{16}^4，它对应于特征向量为 (0001111100) 的码环。我们将使用以下记号：

$$u = (t, t_{123}, t_{124}, t_{134}, t_{234}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}, t_1, t_2, t_3)$$
$$v = (x_{123}, x_{124}, x_{134}, x_{234}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_1, x_2, x_3)$$

如果 $u = [0,1,0,2,0,2,6,2,6,0,4,8,8,16,4]$，那么 $v =$(1，0，2，0，1，3，0，5，0，2，1，1，3，0) 是方程组 (3.4) 的解。因此， V_{16}^4 的生成元为：

$$\begin{aligned}
v_1 &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\
v_2 &= \{1,4,9,10,11,12,13,14\},\\
v_3 &= \{1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19\},\\
v_4 &= \{2,3,15,16\}.
\end{aligned}$$

TABLE 1. 在 I_m上标记等价类的元素。

X_{1234}	{ } 如果 $x_{1234}=0$ $\{1,\ldots,x_{1234}\}$ 如果 $x_{1234}\neq 0$	
X_{123}	{ } 如果 $x_{123}=0$ $\{x_{1234}+1,\ldots,n_{123}\}$	$n_{123}=x_{1234}+x_{123}$
X_{124}	{ } 如果 $x_{124}=0$ $\{n_{123}+1,\ldots,n_{124}\}$ 若 $x_{124}\neq 0$	$n_{124}=n_{123}+x_{124}$
X_{12}	{ } 若 $x_{12}=0$ $\{n_{134}+1,\ldots,n_{12}\}$	$n_{12}=n_{124}+x_{12}$
X_{134}	{ } 若 $x_{134}=0$ $\{n_{12}+1,\ldots,n_{134}\}$ 若 $x_{134}\neq 0$	$n_{134}=n_{12}+x_{134}$
X_{13}	{ } 若 $x_{13}=0$ $\{n_{134}+1,\ldots,n_{13}\}$	$n_{13}=n_{134}+x_{13}$
X_{14}	{ } 若 $x_{14}=0$ $\{n_{13}+1,\ldots,n_{14}\}$ 如果 $x_{14}\neq 0$	$n_{14}=n_{13}+x_{14}$
X_1	{ } 如果 $x_1=0$ $\{n_{14}+1,\ldots,n_1\}$	$n_1=n_{14}+x_1$
X_{234}	{ } 如果 $x_{234}=0$ $\{n_1+1,\ldots,n_{234}\}$ 如果 $x_{234}\neq 0$	$n_{234}=n_1+x_{234}$
X_{23}	{ } 如果 $x_{23}=0$ $\{n_{234}+1,\ldots,n_{23}\}$	$n_{23}=n_{234}+x_{23}$
X_{24}	{ } 如果 $x_{24}=0$ $\{n_{23}+1,\ldots,n_{24}\}$ 如果 $x_{24}\neq 0$	$n_{24}=n_{23}+x_{24}$
X_2	{ } 如果 $x_2=0$ $\{n_{24}+1,\ldots,n_2\}$	$n_2=n_{24}+x_2$
X_{34}	{ } 如果 $x_{34}=0$ $\{n_2+1,\ldots,n_{34}\}$ 如果 $x_{34}\neq 0$	$n_{34}=n_2+x_{34}$
X_3	{ } 如果 $x_3=0$ $\{n_{34}+1,\ldots,n_3\}$	$n_3=n_{34}+x_3$
X_4	{ } 如果 $x_4=0$ $\{n_3+1,\ldots,n_4\}$ 如果 $x_4\neq 0$	$n_4=n_3+x_4$

4. Minimal Representations

下面，我们在定理 4.1 和 4.3 中给出秩 3 和 4 的非结合码环的表示，其中每个表示的次数都是极小的，并确定这些表示的次数。这里，我们用记号 $\langle v_1、\ v_2、\ \cdots、\ v_n\rangle$表示由 $v_1、\ v_2、\ \cdots、\ v_n$生成的空间 $\mathbb{F}_2^m$ 的向量子空间。我们还使用第 3.2 节中引入的记号。

我们将向量 v_i+v_j 的长度定义为集合 $v_i\cup v_j$ 的基数，也就是说， v_i+v_j 的长度为数值 $l_{ij}=t_i+t_j-t_{ij}$。类似地，我们将向量 $v_i+v_j+v_k$ 的长度定义为集合 $v_i\cup v_j\cup v_k$ 的基数，也就是说， $v_i+v_j+v_k$ 的长度为数值 $l_{ijk}=t_i+t_j+t_k-(t_{ij}+t_{ik}+t_{jk})+t_{ijk}$。

定理 4.1. 码环 $C_1^3,\ldots,C_5^3$具有以下极小表示$V_1,\ldots,V_5$，其表示如下

$V_1=\langle$*(1, 2, 3, 4), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 5, 7)*$\rangle$,$V_2=\langle$*(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12), (1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13)*$\rangle$,$V_3=\langle$*(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10), (1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11)*$\rangle$,$V_4=\langle$*(1, 2, 3, 4), (1, 2,* $5-14$*), (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17)*$\rangle$,$V_5=\langle$*(*$1-12$*), (*$1-8$*, 13, 14, 15, 16), (1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17)*$\rangle$.

证明。我们考虑上述 $\mathbb{F}_2^7,\mathbb{F}_2^{13},\mathbb{F}_2^{11},\mathbb{F}_2^{17},\mathbb{F}_2^{17}$,分别对应的 $\mathbb{F}_2$-子空间 $V_1,\ldots,V_5$。首先，我们将证明每个空间 V_i 都是 C_i^3的一个表示，也就是说，对于某个 m，它是 $\mathbb{F}_2^m$的一个双偶码，并且 $C_i^3\simeq L(V_i)$, $i=1,..,5$。

由于 V_5 的元素为 $v_0=0$, $v_1=(1-12)$, $v_2=(1-8,13-16)$, $v_3=(1-5,9-11,13-15,17)$, $v_4=v_1+v_2=(9-16)$, $v_5=v_1+v_3=(6,7,8,12,13,14,15,17)$,$v_6=v_2+v_3=(6-11,16,17)$ 和 $v_7=v_1+v_2+v_3=(1-5,12,16,17)$，显然可见，所有向量的重量都是 4 的倍数，且每对向量交集的重量均为偶数。因此， V_5 是一个双偶码。类似地，我们证明 V_i, $i=1,\ldots,4$ 是一个双偶码。

现在，同构 $C_i^3\simeq L(V_i)$ 可直接由《秩 3 码环的分类》中的定理 2.1 得出。首先，我们只需计算与 $L(V_i)$ 相关联的特征向量，并注意到它对应于同一个码环 C_i^3 （见 [[3],命题 3.2]）。

例如，我们计算与 $L(V_5)=\{1,-1\}\times V_5$ 相关联的特征向量。我们有 $v_i^2=(-1)^{\frac{|v_i|}{4}}=-1$ 以及 $[v_i,v_j]=(-1)^{\frac{|v_i\cap v_j|}{2}}=1$，对于 i， $j=1$，2，3。因此 $\lambda(L(V_5))=(111000)$。由于这些向量生成码环 C_5^3，根据定理 2.1，我们得出 $C_5^3\simeq L(V_5)$。

现在我们将证明，对于每个 V_i, $i=1$，.....，5，模同构意义下， C_i^3 是码环的唯一极小表示。我们取 $X=\{a,b,c\}$ 作为 C_i^3 的一组生成元，使得 $\lambda=\lambda_X(C_i^3)$ 是对应的特征向量；并假设 V 是 C_i^3 的一个极小表示，其中 v， w， u 是 V 的基中的元素，它们分别对应于 a， b， c。我们采用记号 $t=|v\cap w\cap u|$。注意， $t\equiv 1$（模 2），因为 $(a,b,c)=-1$。

情形 $i=1$: 在这种情形下，假设 $\deg(V)\leq 7$。特征向量为$\lambda=(111111)$，则 $|v|\equiv|w|\equiv|u|\equiv 4$ (模 8)。我们可以假设 $v=(1，2，3，4)$，但 $[a,b]=-1$，则 $|v\cap w|\equiv 2$ (模 4)，因此 $|v\cap w|=2$。类似地，我们得到 $|v\cap u|=2$。令 $w=(1，2，5，6)$，因此我们也得到 $|w\cap u|=2$，进而得到 $t=1$。因此， $u=(1，3，5，7)$。所以， $V=V_1$。

情形 $i = 2$: 特征向量为 $\lambda =$ (000000)，则 $|v| \equiv |w| \equiv |u| \equiv$0（模 8）。由于 deg($V$) ≤ 13，因此 $|v| = 8$。类似地， $|w| = |u| = 8$。令 $v =$(1−8)。由于 $|v \cap w| \equiv 0$ （模 4），因此 $|v \cap w| = 4$。类似地， $|v \cap u| = |w \cap u| = 4$。

设 $w =$(1 − 4， 9 − 12)。对于 t，有两种可能： $t = 1$ 或 $t = 3$。情形 $t = 3$ 下，我们将得到 deg(V) $= 15$，这与假设矛盾。因此， $t = 1$ 且 $u =$(1， 5 − 7， 9 − 11， 13)。因此， $V = V_2$。

情形 $i = 3$: 我们考虑 $\lambda =$ (000111) 和 deg(V) ≤ 11。与前一种情形类似，我们有 $|v| = |w| = |u| = 8$。在这种情形下，我们有 $|v \cap w| = |v \cap u| = |w \cap u| = 6$。假设 $v =$(1 − 8) 且 $w =$(1 − 6， 9， 10)。对于 t，有三种可能：1、3 或 5。情形 $t \leq 3$ 下，我们将得到 $|v| > 8$，这与假设矛盾。因此， $t = 5$ ，且我们可以假设$u =$(1 − 5， 7， 9， 11)。因此， $V = V_3$。

情形 $i = 4$: 在此情形下，考虑特征向量 $\lambda =$ (111110)。由于$|v| \equiv |w| \equiv |u| \equiv 4$ (模 8)且 $|w \cap u| \equiv 0$ (模 4)，因此 $|w| = |u| = 12$ 且$|w \cap u| = 8$。令 $v =$(1， 2， 3， 4)，于是 $|v \cap w| = |v \cap u| = 2$ 且 $t = 1$。那么我们可以假设$w =$(1， 2， 5 − 14) 且 $u =$(1， 3， 5 − 11， 15 − 17)。因此， $V = V_4$。

现在，假设 $v =$(1 − 12)。若 $|v \cap w| \leq 6$ ，则 deg(V) ≥ 18. 。事实上，我们有 $|v \cap w| = 2$，6 或 10。若 $|v \cap w| = 2$ ，我们将得到 $|v + w| = 20$，矛盾。若$|v \cap w| = 6$ ，我们将得到 $|v + w| = 12$ ，因此 deg(V)≥ 18，矛盾。因此， $|v \cap w| = 10$。类似地，我们得到 $|v \cap u| = 10$。不失一般性，假设 $w =$(1， 2， 5 − 14)。由于 $t \equiv 1$ (模 2)， t的可能取值为 1，3 或 7。无论哪种情形，我们都会得到 $|v| \geq 13$，这与假设矛盾。因此， v 的最后一种可能性并不存在。

情形 $i = 5$: 考虑由 $\lambda =$ (111000) 给出的特征向量，因此我们有$|v| \equiv |w| \equiv |u| \equiv 4$ (模 8)。假设 $v =$(1， 2， 3， 4)，且由于 $[a, b] = 1$，我们将有$|v \cap w| \equiv 0$ (模 4)。情形 $v \cap w \neq \emptyset$ 我们将有 $|v \cap w| = 4$，从而 $v \subset w$，这就产生了矛盾，因为这给出 $t \equiv 0$(模 2)，而这种情况并不会发生。情形$v \cap w = \emptyset$ 也不会发生，因为 v、 w与 u之间必须有非空交集。

因此 $|v| \geq 12$。类似地，我们证明 $|w| \geq 12$ 和 $|u| \geq 12$。

表示 V是极小的，且 deg(V) ≤ 17，因此我们得到 $|v| = |w| = |u| = 12$。不失一般性，设 $v =$(1 − 12) 且 $|w \cap v| = 4$或 8。若 $|v \cap w| = 4$，则 $|v + w| = 16$，从而 deg(V) $\geq |v \cap w| + |v + w| = 20$，这就产生了矛盾。

因此， $v \cap w =$(1 − 8) 和 $w =$(1 − 8， 13 − 16)。类似地，我们有 $|v \cap u| = |w \cap u| = 8$.

如果 $t \leq 3$，那么 $|v| \geq |v \cap w \cap u| + |(v \cap w) \setminus (v \cap w \cap u)| + |(v \cap u) \setminus (v \cap w \cap u)| \geq 3+5+5 = 13$，矛盾。因此， $t \geq 5$.

如果 $t = 7$，那么 deg(V) ≥ 19。为证明这一点，我们考虑 $u =$($i_1, \ldots, i_{12}$)，其中$i_1, \ldots, i_7 \in v \cap w \cap u$，但由于 $v \cap w =$(1 − 8)，于是 $i_1, \ldots, i_7 \in v \cap w$。设 $u =$(1 − 7, $i_8, \ldots,$ i_{12})。由于 $|u \cap v| = 8$和 $|u \cap w| = 8$，因此 $i_8 \in \{9, 10, 11, 12\}$， 而$i_9 \in \{13, 14, 15, 16\}$。我们选择 $i_8 = 10$和 $i_9 = 13$. 。因此 $i_j \notin \{9, 11, 12, 14, 15, 16\}$,$j = 10$, 11, 12。因此， u的一种可能情况是 $u =$(1 − 7, 10, 13, 17 − 19)，使得 deg(V) ≥ 19，这与 V是一个极小表示这一事实矛盾。因此，$t = 5$ 且 $u =$(1 − 5, 9 − 11, 13 − 15, 17)。因此， $V = V_5$。

□

推论 4.2。 码环 $C_1^3, \ldots, C_5^3$ 的每个极小表示分别具有以下类型:

(1111111)，(1111333)，(1111115)，(1111337)，(1113335)。

为了给出秩为4的非结合码环的表示定理，注意到根据定理 2.3，秩为4的码环恰有16个，即 C_1^4，C_2^4，…，C_{16}^4. 对于每个 C_i^4, $i = 1$，…，16，我们都必须找到次数最小的 $V_i \subseteq \mathbb{F}_2^m$双偶码 m，使得 $C_i^4 \cong L(V_i)$。

定理 4.3。码环 C_1^4、……、C_{16}^4 具有以下最小表示V_1、……、V_{16}，具体如下：

$V_1 = \langle$*(1, 2, 3, 4), (1, 2,5, 6), (1, 3, 5, 7),*$(1-8)\rangle$,$V_2 = \langle$*(*$1-8$*), (*$1-4, 9-12$*), (1, 5, 6, 7,9, 10,11, 13), (1, 2, 5, 8, 9, 12, 13, 14)*$\rangle$,$V_3 = \langle$*(*$1-8$*), (*$1-6$*, 9,10), (1, 2, 3, 4, 5, 7, 9,11), (1,*$6-12$*)*$\rangle$,$V_4 = \langle$*(*$1-8$*), (*$1-6$*, 9,10), (1, 2, 3, 7, 9,*$11-17$*), (1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 18)*$\rangle$,$V_5 = \langle$*(*$1-8$*), (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12), (1, 5, 9,*$13-17$*), (1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 18)*$\rangle$,$V_6 = \langle$*(1, 2, 3, 4), (1, 2,5, 6), (1, 3, 5, 7),(8, 9, 10, 11)*$\rangle$,$V_7 = \langle$*(*$1-8$*), (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12), (1, 2, 3, 5, 9, 13, 14, 15), (*$1-16$*)*$\rangle$,$V_8 = \langle$*(*$1-8$*), (1, 2, 3, 4,*$9-12$*), (1, 2, 3, 5, 9, 13, 14, 15), (1, 2, 9, 10, 13, 14, 16, 17)*$\rangle$,$V_9 = \langle$*(*$1-8$*), (1, 2, 3, 4,*$9-16$*), (1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 17), (5, 6, 9, 10, 12, 13, 18, 19)*$\rangle$,$V_{10} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2,*$9-14$*), (1, 3, 9, 10, 11, 15, 16, 17), (*$1-6, 9-18$*)*$\rangle$,$V_{11} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2, 3, 4,*$9-12$*), (1, 2,3, 5, 9, 13, 14, 15), (6, 7,16, 17)*$\rangle$,$V_{12} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2, 3, 4,*$9-12$*), (1, 2,3, 5, 9, 10, 11, 13), (1, 2,9, 10, 14, 15, 16, 17)*$\rangle$,$V_{13} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2, 9, 10), (1, 3, 9, 11), (4,5, 12, 13, 14, 15,16, 17)*$\rangle$,*
$V_{14} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2, 3, 4,*$9-12$*), (1, 2,3, 5, 9, 10, 11, 13), (1, 2,9, 10)*$\rangle$,$V_{15} = \langle$*(*$1-12$*), (1, 2, 3, 4,*$13-16$*), (1, 2,3, 5, 13,14, 15,17), (1, 2, 13, 14)*$\rangle$,$V_{16} = \langle$*(*$1-8$*), (1,2, 9, 10,11, 12, 13, 14), (1,3, 9,10, 11, 12,13, 15), (4, 5, 16, 17)*$\rangle$.

证明。每个 V_i、$i = 1$、……、16 显然都是双偶二进制码。现在，为了证明$C_i^4 \simeq L(V_i)$，我们只需找出与 $L(V_i)$ 相关联的特征向量，并应用定理 2.3（秩 4 码环的分类）。因此，V_i 是 C_i^4、$i = 1$、……、16 的一个表示。

现在，我们将证明，在同构意义下，V_i 是 C_i^4、$i = 1$、……、16 的唯一极小表示。假设 $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ 是 C_i^4 的一个极小表示。为了确定 V，我们利用以下性质计算 t_i、t_{ij}、t_{ijk} 和 $t = t_{1234}$：

$$
\begin{aligned}
& t \le t_{ij4} \le t_{ij} - t_{123} + t \,(i,\ j = 1, 2, 3;\ \ i \ne j)\\
& t_{124} + t_{134} - t \le t_{14} \le t_1 - t_{12} - t_{13} + t_{123} + t_{124} + t_{134} - t\\
& t_{124} + t_{234} - t \le t_{24} \le t_2 - t_{12} - t_{23} + t_{123} + t_{124} + t_{234} - t\\
& t_{134} + t_{234} - t \le t_{34} \le t_3 - t_{13} - t_{23} + t_{123} + t_{134} + t_{234} - t\\
& t_4 \ge t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

让我们证明，对所有 $i = 1, \cdots, 16$，每个 V_i 在同构意义下都是唯一的。为了更直观地了解这些表示，请参见 A 中给出的图示。

情形 $i = 1$: 在这种情形下，特征向量为 $\lambda_1 =$ (1110110100)。由于 deg(V) ≤ 8, $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 4$ (模 8) 且 $t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv 2$ (模 4)，因此 $t_1 = t_2 = t_3 = 4$, $t_{12} = t_{13} = t_{23} = 2$ 和 $t_{123} = 1$。所以我们可以假设 $v_1 =$ (1, 2,3, 4),$v_2 =$ (1,2, 5, 6) 和 $v_3 =$ (1,3, 5, 7)。

接下来，我们利用 $t_4 \equiv 0$ (模 8) 和 $t_{14} \equiv t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$ (模 4) 这一事实求出 v_4。需要分析 t 的两个可能取值：0 和 1。

情形 $t = 0$，我们有 $t_{ij4} = 0$，因此，对于 i，$j = 1$，2，3 和 $i \ne j$，根据性质 (4.1)。这意味着 $\{1, \ldots, 7\} \cap v_4 = \emptyset$。因此，$V$ 的次数 $> 7 + t_4 \ge 15$，于是，在这种情形下我们没有极小约化表示。情形 $t = 1$，我们

有 $t_{ij4}=2$，因此， $t_{i4}=4$，也就是说， $v_i\subset v_4$, $i=1$，2，3。然后，由于 V 是极小的，我们得到 $t_4=8$，并且可以假设 $v_4=(1-8)$。因此 $V=V_1$。

情形 $i=2$: 在此情形下，特征向量为 $\lambda_2=(0000000000)$，因此 $t_i\equiv 0$（模 8）且 $t_{ij}\equiv 0$（模 4）（$i\neq j$）。由于 $\deg(V)\leq 14$，所以 $t_i=8$ 以及 $t_{ij}=4$；i， $j=1$，2，3。事实上，显然 $t_1=8$ 以及 $t_{12}=t_{13}=4$。如果我们假设 $t_2=16$或 $t_3=16$，则会有 $l_{12}=|v_1\cup v_2|=20>\deg(V)$ 和 $l_{13}=|v_1\cup v_3|=20>\deg(V)$，这与 V 的次数极小性相矛盾。因此 $t_2=t_3=8$ 以及 $t_{23}=4$。我们还得到 $t_{123}=1$，因为如果 $t_{123}=3$，则会得到 $l_{123}=|v_1\cup v_2\cup v_3|=15>\deg(V)$。

因此： $v_1=(1-8)$、 $v_2=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12)$ 和 $v_3=(1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13)$。

为了求出 v_4，我们注意到 $l_{123}=13$ 和 $\{1,\cdots,13\}\not\subseteq v_4$，因为否则， $t_4\geq 16$ 且 $\deg(V)>14$。因此 $t_4=8$，而 v_4 在集合 $\{1,\cdots,13\}$ 中有 7 个元素，并且有一个新元素，即 $v_4=(i_1,\ \cdots,\ i_7,\ i_8=14)$ $i_j\in\{1,\cdots,13\}$， $j\in\{1,\cdots,7\}$。此外，我们需要求出满足以下方程的权 t， t_{i4} 和 t_{ij4}：

$$t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t+1=8. \tag{4.2}$$

t有两种可能：0 或 1。根据性质 (4.1) 以及 V 的极小性，我们得出方程 (4.2) 存在唯一解：

$$t=1,\ t_{ij4}=2 \text{ and } t_{i4}=4.$$

这样我们得到 $v_4=$(1、2、5、8、9、12、13、14) 和 $V=V_2$。

情形 $i=3$: $\lambda_3=(0000110100)$； $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv t_4\equiv 0$(模 8)， $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{23}\equiv 2$（模 4）以及 $t_{14}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$ （模4）。

由于 $\deg(V)\leq 12$，我们有 $t_1=8$、 $t_{12}=2$ 或 6，以及 $t_{13}=2$ 或 6。我们假设 $v_1=(1-8)$。在情形 $t_{12}=2$ 下，例如我们可以考虑 $v_2=$(1、2、9、10、11、12、13、14)，但这会使 $\deg(V)\geq 14$。于是， $t_{12}=6$。由于我们希望找到次数尽可能小的 V，因此 $t_2=8$e 我们可以假设 $v_2=$(1、2、3、4、5、6、9、10)。类似地，我们得到 $t_{13}=6$、 $t_3=8$ 以及 $t_{23}=6$。

利用 $t_1>t_{12}+t_{13}-t_{123}$ 这一事实，我们得到 $t_{123}=5.$。我们考虑$v_3=$(1，2，3，4，5，7，9，11)。因此 $v_1\cup v_2\cup v_3=\{1,\cdots,11\}$。

为了求出 v_4，我们首先注意到 $\{1,\cdots,11\}\not\subseteq v_4$、 $\{1,\cdots,11\}\cap v_4\neq\emptyset$ 和 $t_4=8$，因为否则就会有 $\deg(V)>12$。这样一来， v_4 只有两种可能：

(1) $v_4=(i_1,\ \cdots,\ i_7,\ i_8=12)$，其中 $i_1,\ \cdots,\ i_7\in\{1,\cdots,11\}$；
(2) $v_4=(i_1,\ \cdots,\ i_8)$，其中 $i_1,\ \cdots,\ i_8\in\{1,\cdots,11\}$。

下一步是确定满足性质 (4.1)、 V 的极小性以及下列方程之一的权 t, t_{ij4}和 t_{i4}(i, $j=1$,2,3)：

$$t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t+1=8 \tag{4.3}$$

$$t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=8 \tag{4.4}$$

对于 t，有六种可能：0、1、2、3、4 或 5。根据表 2，在情形 $t=0$、2、3 和 5 中，我们没有表示。对于 $t=0$，方程 (4.3) 和 (4.4) 无解。对于 $t=2$、3 和 $t=5$，我们得到一个与权重 t_{i4} 有关的矛盾。对于 $t=4$，存在一个非极小表示；对于 $t=1$，我们得到方程 (4.3) 的一个解，因此可以考虑 $v_4=$(1、6、7、8、9、10、11、12)，从而得到 $V=V_3$。

TABLE 2. V_{3}。

$t=0$: $0\le t_{ij4}\le 1\Rightarrow t_{ij4}=0$	$t=2$: $2\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=2$	$t=4$: $4\le t_{ij4}\le 5\Rightarrow t_{ij4}=4$
$0\le t_{i4}\le 1\Rightarrow t_{i4}=0$	$2\le t_{i4}\le 3$	$4\le t_{i4}\le 5\Rightarrow t_{i4}=4$
$t=1$: $1\le t_{ij4}\le 2\Rightarrow t_{ij4}=2$	$t=3$: $3\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=4$	$t=5$: $5\le t_{ij4}\le 6\Rightarrow t_{ij4}=6$
$3\le t_{i4}\le 5\Rightarrow t_{i4}=4$	$5\le t_{i4}\le 6$	$7\le t_{i4}\le 8\Rightarrow t_{i4}=8$

情形 $i=4$: $\lambda_4=$(0010100000)； $t_1\equiv t_2\equiv t_4\equiv 0$ (模 8)； $t_3\equiv 4$ (模 8)； $t_{12}\equiv 2$ (模 4)； $t_{13}\equiv t_{14}\equiv t_{23}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$(模 4)。

首先，我们注意到 $t_{12}\le 6$。例如，如果 $t_{12}=10$，我们将得到 $t_1\ge 16$和 $t_2\ge 16$，因此 $l_{12}=|v_1\cup v_2|\ge 22$，从而将大于 V 的次数。由于 $t_{12}\le 6$和 $l_{12}\le$deg(V)，所以我们有 $t_1=t_2=8$，进而有 $t_{13}=t_{23}=4$和 $t_{123}=1$或 3。我们可以考虑 $v_1=$(1,2,3,4,5,6,7,8)。

情形 $t_{12}=2$下，我们有 $t_{123}=1$。由于 $t_3>t_{13}+t_{23}-t_{123}$，我们将得到$t_3\ge 12$。由此可知，deg($V$) >18，因为 $l_{123}=t_3+7\ge 19$。因此 $t_{12}=6$，我们可以取 $v_2=$(1，2，3，4，5，6，9，10)。在这种情形下，我们得到 $t_{123}=3$，因为$t_{12}+t_{13}-t_{123}<8$。由于我们有 $t_3>t_{13}+t_{23}-t_{123}$，也就是说， $t_3>5$，且 $l_{123}<$ deg(V)，因此 $t_3=12$。我们考虑 $v_3=$(1，2，3，7，9，11，12，13，14，15，16，17)。

现在，为了确定生成元 v_4，注意到 $v_1\cup v_2\cup v_3=\{1,\dots,17\}\not\subseteq v_4$。因此， v_4有两种可能： $v_4=$(i_1，.....，i_{15}，18) 或 $v_4=$(i_1，.....，i_7，18)，其中 $i_j\in\{1,\dots,17\}$, $j=1$，.....，15。我们需要求出 t_{i4}，t_{ij4} 和 t 的值，使得：

$$t_4=t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t+1. \tag{4.5}$$

t有四种可能：0，1，2 或 3。根据性质 (4.1) 以及 V 的极小性，我们得出方程 (4.5) 有唯一解：

$$t=1,\ t_{ij4}=2,\ t_{i4}=4 \text{ and } t_4=8.$$

这样我们得到 $v_4=$(1，4，7，8，9，10，11，18) 和 $V=V_4$。

情形 $i=5$: $\lambda_5=$(0000010100)； $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv t_4\equiv 0$(模 8)； $t_{12}\equiv t_{14}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$ (模 4)； $t_{13}\equiv t_{23}\equiv 2$ (模 4)。

由于 $l_{13}<18$ 和 $l_{23}<18$，我们得到 $t_1=t_2=t_3=8$、 $t_{13}\le 6$和 $t_{23}\le 6$。若$t_{13}=10$，例如，我们将有 $t_1\ge 16$、 $t_3\ge 16$ 和 $l_{13}\ge 22\ge$ 次数(V)，这与V的度的最小性相矛盾。我们还有 $t_{12}=4$，因此 $t_{123}=1$ 或 3。由于 $t_1>t_{12}+t_{13}-t_{123}$、 $t_2>t_{12}+t_{23}-t_{123}$和 $t_3>t_{13}+t_{23}-t_{123}$，也就是说， $t_{13}-t_{123}<4$、$t_{23}-t_{123}<4$ 和 $t_{23}+t_{13}<t_3+t_{123}$，我们得到 $t_{123}=1$和 $t_{13}=t_{23}=2$。因此，可以将其视为 $v_1=$(1 − 8)、 $v_2=$(1，2，3，4，9，10，11，12)和 $v_3=$(1，5，9，13，14，15，16，17)。

注意， $v_1\cup v_2\cup v_3=\{1,\cdots,17\}\not\subseteq v_4$，然后 $t_4\le 16$。因此， $v_4=$(i_1，$\cdots$，i_{15}，18) 或 $v_4=$(i_1，$\cdots$，i_7，18)，其中 $i_j\in\{1,\cdots,17\}$。根据（4.1），这意味着权t_{i4}，t_{ij4} 和 t 需要满足以下方程之一：

$$t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=15 \tag{4.6}$$

$$t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=7 \tag{4.7}$$

根据表 (3)，只有在 $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$和 $t_{14}=t_{24}=t_{34}=4$ 的情形下才有解。因此考虑 $v_4=$(1，2，5，6，9，10，13，18)，以得到 $V=V_5$。

TABLE 3. V_{5}。

$t=0$	$t=1$
$0 \leq t_{124} \leq 3 \Rightarrow t_{124}=0$ 或 2 $0 \leq t_{134} \leq 1 \Rightarrow t_{134}=0$ $0 \leq t_{234} \leq 1 \Rightarrow t_{234}=0$	$2 \leq t_{124} \leq 4 \Rightarrow t_{124}=2$ 或 4 $1 \leq t_{134} \leq 2 \Rightarrow t_{134}=2$ $1 \leq t_{234} \leq 2 \Rightarrow t_{234}=2$
$t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$	$t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$
$0 \leq t_{14} \leq 3 \Rightarrow t_{14}=0$ $0 \leq t_{24} \leq 3 \Rightarrow t_{24}=0$ $0 \leq t_{34} \leq 5 \Rightarrow t_{34}=0$ 或 4	$3 \leq t_{14} \leq 6 \Rightarrow t_{14}=4$ $3 \leq t_{24} \leq 6 \Rightarrow t_{24}=4$ $3 \leq t_{34} \leq 8 \Rightarrow t_{34}=4$ 或 8
$t_{124}=2; \quad t_{134}=t_{234}=0$	$t_{124}=4; \quad t_{134}=t_{234}=2$
$2 \leq t_{14} \leq 5 \Rightarrow t_{14}=4$ $2 \leq t_{24} \leq 5 \Rightarrow t_{24}=4$ $0 \leq t_{34} \leq 5 \Rightarrow t_{34}=0$ 或 4	$5 \leq t_{14} \leq 8 \Rightarrow t_{14}=8$ $5 \leq t_{24} \leq 8 \Rightarrow t_{24}=8$ $3 \leq t_{34} \leq 8 \Rightarrow t_{34}=4$ 或 8

情形 $i=6$: $\lambda_6=$ (1111110100); $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv t_4 \equiv 4$(模 8); $t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{23} \equiv$2 (模 4); $t_{14} \equiv t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$ (模 4)。

由于 deg(V) ≤ 11, 因此 $t_1=4$, 这意味着 $t_{12}=t_{13}=2$ 和 $t_{123}=1$。此外, 事实 $l_{12}<11$ 和 $l_{13}<11$ 使我们得到 $t_2=t_3=4$ 和 $t_{23}=2$。因此, 考虑$v_1=$(1, 2, 3, 4)、 $v_2=$(1, 2, 5, 6)以及 $v_3=$(1, 3, 5, 7)。为了找到 v_4, 注意到 V 的次数的极小性意味着 $\{1,\cdots,7\} \not\subseteq v_4$, 于是 $t_4=4$。因此, $t_{i4}=0$, 这样一来, $t=t_{ij4}=0$。所以, $\{1,\cdots,7\} \cap v_4=\emptyset$, 这意味着 $v_4=$(8, 9, 10, 11)以及$V=V_6$。

情形 $i=7$: $\lambda_7=$ (0001000000); $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 0$ (模 8); $t_4 \equiv 4$ (模 8); $t_{12} \equiv t_{13} \equiv 0$ (模 4); $t_{23} \equiv t_{14} \equiv t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$(模 4)。

由于 $l_{ij}<16$, 我们有 $t_i=8$ 和 $t_{ij}=4$, 对于 $i, \ j=1$, 2、3。例如, 如果 $t_1=t_2=16$和 $t_{12}=12$, 我们将得到 $l_{12}=20$。假设 $v_1=$(1−8) 和 $v_2=$(、2、3、4、9、10、11、12)。

请注意, t_{123}有两种可能性: 1或3。这两种情形都已进行分析, 结果如表4所示。

我们假设第一种情形为 $v_3=$(1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13), 第二种情形为 $v_3=$(1, 2, 3, 5, 9, 13, 14, 15)。由条目 (1.1.1.), 可得 $\{1,\cdots,13\} \cap v_4=\emptyset$。例如, 若 $t_4=4$ and$v_4=$(14, 15, 16, 17), 我们就会得到一个次数大于 16 的表示。在条目 (1.1.2.)、(1.2.1.)、(1.2.2.)、(2.1.)、(2.2.) 和 (2.3.) 中, 我们也会得到非极小表示。在条目 (1.1.3.)、(1.2.3.) 以及与之类似的情形中, 我们会与假设 $t_{14} \equiv 0$(模 4) 矛盾。最后一种情形下, 极小表示由 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=15$ 确定。因此, 若 $t_4=16$, 我们可以考虑 $v_4=$(1, $\cdots$, 16), 从而得到 $V=V_7$。

TABLE 4. V_{7}。

情况1: $t_{123}=1$	
1.1. $t=0$: $0 \leq t_{ij4} \leq 3 \Rightarrow t_{ij4}=2$ 或 4	1.2. $t=1$: $1 \leq t_{ij4} \leq 4 \Rightarrow t_{ij4}=2$ 或 4
1.1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 0 \leq t_{i4} \leq 1 \Rightarrow t_{i4}=0$	1.2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 3 \leq t_{i4} \leq 4 \Rightarrow t_{i4}=4$
1.1.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 4 \leq t_{i4} \leq 5 \Rightarrow t_{i4}=4$	1.2.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4$ $\Rightarrow 7 \leq t_{i4} \leq 8 \Rightarrow t_{i4}=8$
1.1.3. $t_{124}=2; \quad t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 2 \leq t_{14} \leq 3$	1.2.3. $t_{124}=4; \quad t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 5 \leq t_{14} \leq 6$
情形2: $t_{123}=3$	
2.1. $t=0$: $0 \leq t_{ij4} \leq 1 \Rightarrow t_{ij4}=0$	2.3. $t=2$: $2 \leq t_{ij4} \leq 3 \Rightarrow t_{ij4}=2$
$0 \leq t_{i4} \leq 3 \Rightarrow t_{i4}=0$	$2 \leq t_{i4} \leq 5 \Rightarrow t_{i4}=4$
2.2. $t=1$: $1 \leq t_{ij4} \leq 2 \Rightarrow t_{ij4}=2$	2.4. $t=3$: $3 \leq t_{ij4} \leq 4 \Rightarrow t_{ij4}=4$
$3 \leq t_{i4} \leq 6 \Rightarrow t_{i4}=4$	$5 \leq t_{i4} \leq 8 \Rightarrow t_{i4}=8$

情形 $i=8$: $\lambda_8=$(0000001000); $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv t_4\equiv 0$(模 8); $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{23}\equiv$0 (模 4); $t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$ (模 4); $t_{14}\equiv 2$(模 4)。

由于 $l_{ij}<17$，我们需要有 $t_i=8$ 和 $t_{ij}=4$，对于 $i,\ j=1$，2、3。假设 $v_1=$（$1-8$）以及 $v_2=$（1，2、3、4，9、10、11、12）。需要分析两种情况（见表5）。

在情况1中，我们假设 $v_3=$（1，5，6，7，9，10，11，13）。在（1.1.1.）中，如果 $0\le t_{i4}\le 1$，那么$t_{i4}=0$，因此 $\{1,\cdots,13\}\cap v_4=\emptyset$。很快 $t_4\ge 8$ 且次数（V）≥ 21，也就是说，我们将得到一个非极小表示。在其他情形下，我们发现了与 t_{i4}的权相关的矛盾。其余情形以类似方式进行分析。另一方面，在情况2中，我们假设 $v_3=$（1，2，3，5，9，13，14，15）。如果 $t=0$，我们将有 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=2$。然后，如果 $t_4=8$，并且我们考虑 $v_4=$（i_1，i_2，16，$\cdots$，21），当i_1、$i_2\in\{1,\cdots,15\}$和 i_1、$i_2\in v_1\cap v_4$时，我们将得到一个非极小表示。如果 $t=1$ 且 $t=3$，我们也将分别得到次数等于21和18的非极小表示。如果 $t=2$，那么 $t_4\ge t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=6$。如果我们假设 $t_4=8$ 且 $v_4=$（1，2，9，10，13，14，16，17），则得到 $V=V_8$。

TABLE 5. V_8。

情况1: $t_{123}=1$	
1.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=0$ 或 2	1.2. $t=1$: $1\le t_{124}\le 4\Rightarrow t_{124}=2$ 或 4
1.1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 0\le t_{i4}\le 1\Rightarrow t_{i4}=0$ 1	2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 3\le t_{14}\le 4$
1.1.2. $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$	1.2.2. $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$
1.1.3. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 4\le t_{14}\le 5$	1.2.3. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$
情况2: $t_{123}=3$	
2.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 1\Rightarrow t_{ij4}=0$	2.3. $t=2$: $2\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=2$
$0\le t_{i4}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $t_{24}=t_{34}=0$	$2\le t_{i4}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $t_{24}=t_{34}=4$
2.2. $t=1$: $1\le t_{ij4}\le 2\Rightarrow t_{ij4}=2$	2.4. $t=3$: $3\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=4$
$3\le t_{i4}\le 6\Rightarrow t_{14}=6$; $t_{24}=t_{34}=4$	$5\le t_{i4}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $t_{24}=t_{34}=8$

情形 $i=9$: $\lambda_9=$(0100001000); $t_1\equiv t_3\equiv t_4\equiv 0$ (模 8); $t_2\equiv 4$ (模 8); $t_{14}\equiv 2$ (模 4); $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{23}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$(模 4)。

我们断言 $t_1=8$、$t_2=12$ 和 $t_{12}=4$。事实上，首先注意到 $l_{12}<19$ 蕴含 $t_1\le 16$。如果 $t_1=8$，显然 $t_{12}=4$ 和 $t_2>4$。由于 $l_{12}<19$，因此 $t_2<15$，这意味着 $t_2=12$。如果 $t_1=16$，我们将得到 $t_{12}=4$，8 或 12。但是，为了满足$l_{12}<19$，我们应当有 $t_2-t_{12}<3$，而对于 t_2 和 t_{12}的任何取值，这都不会发生。令 $v_1=$(1 − 8) 和 $v_2=$(1，2，3，4，9，10，11，12，13，14，15，16)。注意，$t_{13}=4$ 和 $t_3=8$，因为 $t_1=8$ 和 $l_{13}<19$。因此，$t_{23}=4$。

现在，我们来求出 v_3 和 v_4。剩余权的可能情形见表 6。在情况1中，我们假设 $v_3=$(1,5,6,7,9,10,11,17). 对于条目 (1.1.1.)、(1.1.2.)–(1.1.7.)、(1.2.1.)–(1.2.4.)、(1.2.7.) 和 (1.2.8)，我们得到与权 t_{i4}相关的矛盾。对于条目 (1.1.3.)、(1.2.5.) 和 (1.2.6.)，我们分别得到次数为 21、20 和 22 的表示。对于条目 (1.1.8.)，由于我们有 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=6$，可以考虑 $v_4=$(i1, · · · , i6, 18, 19)，其中 $\{i_1,\cdots,i_6\}\subset\{1,\cdots,17\}$，因此 $V=V_9$。在情况2中，可以考虑$v_3=$(1, 2, 3, 5, 9, 17, 18, 19)。在这种情况下，如果还有另一个次数为 19 的表示，我们必须有 $v_4\subset\{1,\cdots,19\}$。于是 $t_4=8$ 或 $t_4=16$，且 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=8$ 或 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=16$。分析完 t的所有可能性后，我们发现这些方程无解。

TABLE 6. $V_{9\circ}$

情况1： $t_{123}=1$	
1.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=0$ 或 2	1.2. $t=1$: $1\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=2$ 或 4
1.1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 0\le t_{14}\le 1$	1.2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 3\le t_{14}\le 4$
1.1.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 4\le t_{14}\le 5$	1.2.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$
1.1.3. $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 2\le t_{14}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $2\le t_{24}\le 7\Rightarrow t_{24}=4$; $0\le t_{34}\le 1\Rightarrow t_{34}=0$	1.2.3. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4\Rightarrow 3\le t_{14}\le 4$
1.1.4. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=0\Rightarrow 4\le t_{14}\le 5$	1.2.4. $t_{124}=t_{134}=4$; $t_{234}=2\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$
1.1.5. $t_{124}=t_{234}=2$; $t_{134}=0\Rightarrow 2\le t_{34}\le 3$	1.2.5. $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=4$ $\Rightarrow 5\le t_{14}\le 6\Rightarrow t_{14}=6$; $5\le t_{24}\le 10\Rightarrow t_{24}=8$; $7\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$
1.1.6. $t_{124}=t_{134}=0$; $t_{234}=2\Rightarrow 0\le t_{14}\le 1$	1.2.6. $t_{124}=4$; $t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 5\le t_{14}\le 6\Rightarrow t_{14}=6$; $5\le t_{24}\le 10\Rightarrow t_{24}=8$; $3\le t_{34}\le 4\Rightarrow t_{34}=4$
1.1.7. $t_{124}=t_{234}=0$; $t_{134}=2\Rightarrow 2\le t_{34}\le 3$	1.2.7. $t_{124}=t_{234}=4$; $t_{134}=2\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$
1.1.8. $t_{124}=0$; $t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 2\le t_{14}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $2\le t_{24}\le 5\Rightarrow t_{24}=4$; $4\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$	1.2.8. $t_{124}=t_{234}=2$; $t_{134}=4\Rightarrow 5\le t_{34}\le 6$
情况2： $t_{123}=3$	
2.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 1\Rightarrow t_{ij4}=0$	2.3. $t=2$: $2\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=2$
$0\le t_{14}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $0\le t_{34}\le 3\Rightarrow t_{34}=0$; $0\le t_{24}\le 7\Rightarrow t_{24}=0$ 或 4	$2\le t_{14}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $2\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$; $2\le t_{24}\le 9\Rightarrow t_{24}=4$ 或 8
2.2. $t=1$: $1\le t_{ij4}\le 2\Rightarrow t_{ij4}=2$	2.4. $t=3$: $3\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=4$
$3\le t_{14}\le 6\Rightarrow t_{14}=6$; $3\le t_{34}\le 6\Rightarrow t_{34}=4$; $3\le t_{24}\le 10\Rightarrow t_{24}=4$ 或 8	$5\le t_{14}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $5\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$; $5\le t_{24}\le 12\Rightarrow t_{24}=8$ 或 12

情形 $i=10$: $\lambda_{10}=$ (0001111000); $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv 0$ (模 8); $t_4\equiv 4$ (模 8); $t_{12}\equiv t_{13}\equiv 2$ (模 4); $t_{14}\equiv 2$ (模 4); $t_{23}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$ (模 4).

我们证明 $t_1=t_2=8$ 和 $t_{12}=2$。如果 $t_1=8$，那么 $t_{12}=2$ 或 6。情形 $t_{12}=6$，$l_{12}<19$ 意味着 $t_2=8$ 或 16。在这种情况下不存在表示。事实上，如果 $t_2=8$和 $l_{23}<19$，那么 $t_{23}=4$ 和 $t_3=8$。由于 $t_{12}+t_{23}-t_{123}<t_2$，因此 $t_{123}=3$，这意味着$t_{13}>2$。这是荒谬的，因为我们需要满足 $t_{12}+t_{13}-t_{123}<t_1=8$。在这种情况下，对 $t_2=16$ 的分析类似。因此， $t_{12}=2$。此外， $l_{12}<19$意味着 $t_2=8$。假设 $v_1=$(1 − 8) 并且 $v_2=$(1，2，9，10，11，12，13，14)。如果 $t_1=16$，那么 $t_2-t_{12}<3$，而它只有在 $t_2=8$ 和 $t_{12}=6$时才有解。在这种情况下也不存在表示。

由 $t_{12}=2$、 $t_2=8$ 和 $l_{23}<19$，注意到 $t_{123}=1$、 $t_{23}=4$ 和 $t_3=8$。利用 $t_{13}+t_{23}-t_{123}<t_3$ 这一事实可得 $t_{13}=2$。于是，我们可以假设 $v_3=$(1，3，9，10，11，15，16，17)。

为求得 v_4，我们分析表7中列出的权 t， t_{i4} 和 t_{ij4} 的可能情况。在条目 (1.2.)、(2.1.) 和 (2.2.) 中，我们分别得到次数为 21、20 和 22 的表示。最后，在条目 (1.1.) 中，我们有 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=2$，因此 $t_4=4$，并且可以考虑 $v_4=$(4，5，18，19)。因此，$V=V_{10\circ}$

TABLE 7. V_{10}。

1. $t=0$	2. $t=1$
$0\le t_{124}\le 1\Rightarrow t_{124}=0$ $0\le t_{134}\le 1\Rightarrow t_{134}=0$ $0\le t_{234}\le 3\Rightarrow t_{234}=0$ 或 2	$1\le t_{124}\le 2\Rightarrow t_{124}=2$ $1\le t_{134}\le 2\Rightarrow t_{134}=2$ $1\le t_{234}\le 4\Rightarrow t_{234}=2$ 或 4
1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 0\le t_{14}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $0\le t_{24}\le 3\Rightarrow t_{24}=0$; $0\le t_{34}\le 3\Rightarrow t_{34}=0$	2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 3\le t_{14}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $3\le t_{24}\le 6\Rightarrow t_{24}=4$; $3\le t_{34}\le 6\Rightarrow t_{34}=4$
1.2. $t_{124}=t_{134}=0$; $t_{234}=2$ $\Rightarrow 0\le t_{14}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $2\le t_{24}\le 5\Rightarrow t_{24}=4$; $2\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$	2.2. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4$ $\Rightarrow 3\le t_{14}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $5\le t_{24}\le 8\Rightarrow t_{24}=8$; $5\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$

情形 $i=11$: $\lambda_{11}=$(0001001000); $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv 0$ (模 8); $t_4\equiv 4$ (模 8);$t_{14}\equiv 2$ (模 4); $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{23}\equiv t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$(模 4)。

首先，注意到 $t_1<16$。例如，如果 $t_1=16$，我们将得到 $t_{12}=4$，8 或 12。情形$t_{12}=4$：由于 $l_{12}<17$ 因此 $t_2<5$，这显然荒谬。情形 $t_{12}=8$ 或 12： $t_2\ge 16$，这会得出 $l_{12}>17$，同样不可能。因此， $t_1=8$，这样一来$t_{12}=t_{13}=4$。根据 $l_{12}<17$，我们得到 $t_2=8$。类似地，$t_3=8$ 和 $t_{23}=4$。假设$v_1=$(1 − 8) 和 $v_2=$(1， 2， 3， 4，9， 10， 11， 12)。

让我们求出 v_3 和 v_4。根据表8，需要分析两种情况： $t_{123}=1$和 $t_{123}=3$。在情况1中，我们没有表示。在情况2中，我们可以考虑$v_3=$(1、2、3、5、9、13、14、15)。在条目 (2.2.) 中，我们也没有表示。在最后两种情形（2.3. 和 2.4.）中，我们有非极小表示。但如果 $t=0$，也就是说，在条目 (2.1.) 中，我们有 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=2$。那么，如果 $t_4=4$ 和$v_4=$(6、7、16、17)，我们就得到 $V=V_{11}$。如果 $t_4=12$，我们将得到一个次数大于 17 的表示。

TABLE 8. V_{11}。

情况1： $t_{123}=1$	
1.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=0$ 或 2	1.2. $t=1$: $1\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=2$ 或 4
$t_{124}=t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 0\le t_{14}\le 1$ $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 4\le t_{14}\le 5$ $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$ $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=0\Rightarrow 4\le t_{14}\le 5$ $t_{124}=t_{234}=2$; $t_{134}=0\Rightarrow 2\le t_{34}\le 3$ $t_{124}=t_{134}=0$; $t_{234}=2\Rightarrow 0\le t_{14}\le 1$ $t_{124}=t_{234}=0$; $t_{134}=2\Rightarrow 2\le t_{34}\le 3$ $t_{124}=0$; $t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$	$t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 3\le t_{14}\le 4$ $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$ $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4\Rightarrow 3\le t_{14}\le 4$ $t_{124}=t_{134}=4$; $t_{234}=2\Rightarrow 7\le t_{14}\le 8$ $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$ $t_{124}=4$; $t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$ $t_{124}=t_{234}=4$; $t_{134}=2\Rightarrow 5\le t_{34}\le 6$ $t_{124}=t_{234}=2$; $t_{134}=4\Rightarrow 5\le t_{34}\le 6$
情况2: $t_{123}=3$	
2.1. $t=0$: $0\le t_{ij4}\le 1\Rightarrow t_{ij4}=0$	2.3. $t=2$: $2\le t_{ij4}\le 3\Rightarrow t_{ij4}=2$
$0\le t_{14}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $0\le t_{24}\le 3\Rightarrow t_{24}=0$; $0\le t_{34}\le 3\Rightarrow t_{34}=0$	$2\le t_{14}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $2\le t_{24}\le 5\Rightarrow t_{24}=4$; $2\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$
2.2. $t=1$: $1\le t_{ij4}\le 2\Rightarrow t_{ij4}=2$	2.4. $t=3$: $3\le t_{ij4}\le 4\Rightarrow t_{ij4}=4$
$3\le t_{24}\le 6$	$5\le t_{14}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $5\le t_{24}\le 8\Rightarrow t_{24}=8$; $5\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$

情形 $i=12$: $\lambda_{12}=$(0000001100); $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv t_4\equiv 0$(模 8); $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{24}\equiv$0 (模 4); $t_{34}\equiv 0$(模 4); $t_{14}\equiv t_{23}\equiv 2$ (模 4).

与前一种情形的做法类似，我们得到 $t_1=t_2=t_3=8$ 和$t_{12}=t_{13}=4$。令 $v_1=$(1 − 8) 和 $v_2=$(1， 2， 3， 4， 9， 10，11， 12)。注意， $t_{23}=2$ 或 6。此外，由于 $t_{12}+t_{23}-t_{123}<8$，因此 $t_{23}-t_{123}<4$。所以有两种情形需要分析（见表 9）。

注意，只有在以下情形中才能找到表示：(1.1.2.)、(1.1.3.)、(1.2.2.)、(1.2.3.)、(2.1.1.)、(2.2.1.)、(2.4.2.) 和 (2.3.2.)。在最后一个条目中，我们找到了所需的极小表示。确实：在情况1中，考虑 $v_3 =$(1，5，6，7，9，13，14，15)。对于 (1.1.2.)：$t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 4$。例如，若考虑 $v_4 =$(i_1，$\cdots$，i_4，16，17，18，19)，其中 $\{i_1, \cdots, i_4\} \subset \{1, \cdots, 15\}$，则会得到一个次数为 19 的非极小表示。对于 (1.2.2.)：$t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 11$。我们也会得到一个非极小表示。对于条目 (1.1.3.) 和 (1.2.3.)：分析与前一个条目类似。

在情况2中，令 $v_3 =$(1、2、3、5、9、10、11、13)。对于 (2.1.1.)、(2.2.1.) 和 (2.4.2.)：我们分别得到次数为 19、20 和 18 的非极小表示。对于 (2.3.2.)：$t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 4$ 和 $t_4 = 8$。如果我们考虑$v_4 =$(1、2、9、10、14、15、16、17)，则得到 $V = V_{12}$。

TABLE 9. V_{12}。

情况1： $t_{123} = 1$ 和 $t_{23} = 2$	
1.1. $t = 0$	1.2. $t = 1$
$0 \le t_{124} \le 3 \Rightarrow t_{124} = 0$ 或 2 $0 \le t_{134} \le 3 \Rightarrow t_{134} = 0$ 或 2 $0 \le t_{234} \le 1 \Rightarrow t_{234} = 0$	$1 \le t_{124} \le 4 \Rightarrow t_{124} = 2$ 或 4 $1 \le t_{134} \le 4 \Rightarrow t_{134} = 2$ 或 4 $1 \le t_{234} \le 2 \Rightarrow t_{234} = 2$
1.1.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 1$	1.2.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$
1.1.2. $t_{124} = t_{234} = 0$; $t_{134} = 2$ $\Rightarrow 2 \le t_{14} \le 3 \Rightarrow t_{14} = 2$; $0 \le t_{24} \le 3 \Rightarrow t_{24} = 0$; $2 \le t_{34} \le 5 \Rightarrow t_{34} = 4$	1.2.2. $t_{124} = t_{234} = 2$; $t_{134} = 4$ $\Rightarrow 5 \le t_{14} \le 6 \Rightarrow t_{14} = 6$; $3 \le t_{24} \le 6 \Rightarrow t_{24} = 4$; $5 \le t_{34} \le 8 \Rightarrow t_{34} = 8$
1.1.3. $t_{124} = 2$; $t_{134} = t_{234} = 0$ $\Rightarrow 2 \le t_{14} \le 3 \Rightarrow t_{14} = 2$; $2 \le t_{24} \le 5 \Rightarrow t_{24} = 4$; $0 \le t_{34} \le 3 \Rightarrow t_{34} = 0$	1.2.3. $t_{124} = 4$; $t_{134} = t_{234} = 2$ $\Rightarrow 5 \le t_{14} \le 6 \Rightarrow t_{14} = 6$; $5 \le t_{24} \le 8 \Rightarrow t_{24} = 8$; $3 \le t_{34} \le 6 \Rightarrow t_{34} = 4$
1.1.4. $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 0 \Rightarrow 4 \le t_{14} \le 5$	1.2.4. $t_{124} = t_{134} = 4$; $t_{234} = 2 \Rightarrow 7 \le t_{14} \le 8$
情况2： $t_{123} = 3$ 和 $t_{23} = 6$	
2.1. $t = 0$	2.3. $t = 2$
$0 \le t_{124} \le 1 \Rightarrow t_{124} = 0$ $0 \le t_{134} \le 1 \Rightarrow t_{134} = 0$ $0 \le t_{234} \le 3 \Rightarrow t_{234} = 0$ 或 2	$2 \le t_{124} \le 3 \Rightarrow t_{124} = 2$ $2 \le t_{134} \le 3 \Rightarrow t_{134} = 2$ $2 \le t_{234} \le 5 \Rightarrow t_{234} = 2$ 或 4
2..1.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0$ $\Rightarrow 0 \le t_{14} \le 3 \Rightarrow t_{14} = 2$; $0 \le t_{24} \le 1 \Rightarrow t_{24} = 0$; $0 \le t_{34} \le 1 \Rightarrow t_{34} = 0$	2.3.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 2 \le t_{24} \le 3$
2.1.2. $t_{124} = t_{134} = 0$; $t_{234} = 2 \Rightarrow 2 \le t_{24} \le 3$	2.3.2. $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 4$ $\Rightarrow 2 \le t_{14} \le 5 \Rightarrow t_{14} = 2$; $4 \le t_{24} \le 5 \Rightarrow t_{24} = 4$; $4 \le t_{34} \le 5 \Rightarrow t_{34} = 4$
2.2. $t = 1$	2.4. $t = 3$
$1 \le t_{124} \le 2 \Rightarrow t_{124} = 2$ $1 \le t_{134} \le 2 \Rightarrow t_{134} = 2$ $1 \le t_{234} \le 4 \Rightarrow t_{234} = 2$ 或 4	$3 \le t_{124} \le 4 \Rightarrow t_{124} = 4$ $3 \le t_{134} \le 4 \Rightarrow t_{134} = 4$ $3 \le t_{234} \le 6 \Rightarrow t_{234} = 4$ 或 6
2.2.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2$ $\Rightarrow 3 \le t_{14} \le 6 \Rightarrow t_{14} = 6$; $3 \le t_{24} \le 4 \Rightarrow t_{24} = 4$; $3 \le t_{34} \le 4 \Rightarrow t_{34} = 4$	2.4.1. $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 4 \Rightarrow 5 \le t_{24} \le 6$
2.2.2. $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 4 \Rightarrow 5 \le t_{24} \le 6$	2.4.2. $t_{124} = t_{134} = 4$; $t_{234} = 6$ $\Rightarrow 5 \le t_{14} \le 8 \Rightarrow t_{14} = 6$; $7 \le t_{24} \le 8 \Rightarrow t_{24} = 8$; $7 \le t_{34} \le 8 \Rightarrow t_{34} = 8$

情形 $i = 13$：$\lambda_{13} =$ (0110111100)；$t_1 \equiv t_4 \equiv 0$ (模 8)；$t_2 \equiv t_3 \equiv 4$ (模 8)；$t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$ (模 4)；$t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{14} \equiv t_{23} \equiv 2$(模 4)。

由于 deg(V) = 17，因此 $t_1 = 8$，于是，$t_{12} = 2$ 或 6，以及 $t_{13} = 2$ 或 6。如果 $t_1 = 16$，我们将得到 $t_2 - t_{12} < 1$，因为 $l_{12} < 17$，但这是不可能发生的。由于 $t_1 = 8$ 和 $l_{12} < 17$，

我们必须有 $t_2 - t_{12} < 9$。因此，有两种情形需要分析：(1) $t_2 = 12$ 和$t_{12} = 6$；(2) $t_2 = 4$ 和 $t_{12} = 2$ （见表 10 ）。在情况 1 中，有两个子情形需要分析，因为我们希望 $l_{23} = t_2 + t_3 - t_{23}$ 小于17，即 $t_3 - t_{23} < 5$。根据条目(1.1.)，我们得到 $t_{13} = 6$ 和 $t_{123} = 5$, 因为 $l_{13} = t_1 + t_3 - t_{13} < 17$ 和$t_{12} + t_{13} - t_{123} < 8$。因此令 $v_1 = (1-8)$、 $v_2 = (1-6, 9-14)$ 以及 $v_3 = (1-5, 7, 9-13, 15)$。只有在条目(1.1.3.c)和(1.1.4.c)中才能找到（非极小）表示。在其他任何条目中，我们都会发现与权 t_{i4} 相关的假设存在矛盾。在条目(1.2.)中，我们有 $t_{13} = 2$, 因此 $t_{123} = 1$，因为 $l_{13} = t_1 + t_3 - t_{13} < 17$ 和t_{12}。令 $v_1 = (1-8)$、 $v_2 = (1-6, 9-14)$ 以及 $v_3 = (1, 7, 9, 15)$。条目(1.2.1.c)和(1.2.2.c)存在非极小表示。

在情况2中，我们有 $t_{23} = 2$和 $t_{123} = 1$。我们希望 $l_{23} = t_2 + t_3 - t_{23}$和 $l_{13} = t_1 + t_3 - t_{13}$ 小于17，则 $t_3 = 4$ 或12以及 $t_3 - t_{13} < 9$。有两种可能的解：(2.1.) $t_3 = 4$ 和 $t_{13} = 2$, 以及(2.2.) $t_3 = 12$ 和 $t_{13} = 6$。对于条目(2.1.)，设 $v_1 = (1-8)$、 $v_2 = (1, 2, 9, 10)$和 $v_3 = (1, 3, 9, 11)$。根据条目(2.1.1.)、(2.2.1.c)和(2.2.2.c)，存在非极小表示。在条目(2.1.2.)中，由于我们有$t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 2$，因此 $t_4 \geq 8$。如果 $t_4 = 8$和 $v_4 = (4, 5, 12-17)$，且 $v_1 \cap v_4 = \{4, 5\}$，我们得到 $V = V_{13}$。

TABLE 10. V_{13}。

情况1： $t_2 = 12$ 和 $t_{12} = 6$
1.1. $t_3 = 12$ 和 $t_{23} = 10$
1.1.1. $t = 0$: $0 \leq t_{124} \leq 1 \Rightarrow t_{124} = 0$; $0 \leq t_{134} \leq 1 \Rightarrow t_{134} = 0$; $0 \leq t_{234} \leq 5 \Rightarrow t_{234} = 0$, 2 或 4; $0 \leq t_{14} \leq 1$ 1.1.2. $t = 1$: $1 \leq t_{124} \leq 2 \Rightarrow t_{124} = 2$; $1 \leq t_{134} \leq 2 \Rightarrow t_{134} = 2$ $1 \leq t_{234} \leq 6 \Rightarrow t_{234} = 2$, 4 或 6; $3 \leq t_{14} \leq 4$ 1.1.3. $t = 2$: $2 \leq t_{124} \leq 3 \Rightarrow t_{124} = 2$; $2 \leq t_{134} \leq 3 \Rightarrow t_{134} = 2$; $2 \leq t_{234} \leq 7 \Rightarrow t_{234} = 2$, 4 或 6 (a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 2 \leq t_{24} \leq 3$ (b) $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 6 \Rightarrow 6 \leq t_{24} \leq 7$ (c) $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 4$: $2 \leq t_{14} \leq 3 \Rightarrow t_{14} = 2$; $4 \leq t_{24} \leq 5 \Rightarrow t_{24} = 4$; $4 \leq t_{34} \leq 5 \Rightarrow t_{34} = 4$ 1.1.4. $t = 3$: $3 \leq t_{124} \leq 4 \Rightarrow t_{124} = 4$; $3 \leq t_{134} \leq 4 \Rightarrow t_{134} = 4$; $3 \leq t_{234} \leq 8 \Rightarrow t_{234} = 4$, 6 或 8 (a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 4 \Rightarrow 5 \leq t_{24} \leq 6$ (b) $t_{124} = t_{134} = 4$; $t_{234} = 8 \Rightarrow 9 \leq t_{24} \leq 10$ (c) $t_{124} = t_{134} = 4$; $t_{234} = 6$: $5 \leq t_{14} \leq 6 \Rightarrow t_{14} = 6$; $7 \leq t_{24} \leq 8 \Rightarrow t_{24} = 8$; $7 \leq t_{34} \leq 8 \Rightarrow t_{34} = 8$ 1.1.5. $t = 4$: $4 \leq t_{124} \leq 5 \Rightarrow t_{124} = 2$ 或 4; $4 \leq t_{134} \leq 5 \Rightarrow t_{134} = 2$; $4 \leq t_{234} \leq 9 \Rightarrow t_{234} = 2$; $4 \leq t_{14} \leq 5$ 1.1.6. $t = 5$: $5 \leq t_{124} \leq 6 \Rightarrow t_{124} = 2$ 或 4; $5 \leq t_{134} \leq 6 \Rightarrow t_{134} = 2$; $5 \leq t_{234} \leq 10 \Rightarrow t_{234} = 2$; $7 \leq t_{14} \leq 8$
1.2. $t_3 = 4$ 和 $t_{23} = 2$
1.2.1. $t = 0$: $0 \leq t_{124} \leq 5 \Rightarrow t_{124} = 0$, 2 或 4; $0 \leq t_{134} \leq 1 \Rightarrow t_{134} = 0$; $0 \leq t_{234} \leq 1 \Rightarrow t_{234} = 0$ (a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 0 \leq t_{14} \leq 1$ (b) $t_{124} = 4$; $t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 4 \leq t_{14} \leq 5$ (c) $t_{124} = 2$; $t_{134} = t_{234} = 0$: $2 \leq t_{14} \leq 3 \Rightarrow t_{14} = 2$; $2 \leq t_{24} \leq 7 \Rightarrow t_{24} = 4$; $0 \leq t_{34} \leq 1 \Rightarrow t_{34} = 0$
下页继续

表*10*（续）

情况1： $t_2 = 12$ 和 $t_{12} = 6$

1.2.2. $t = 1$:

$1 \le t_{124} \le 6 \Rightarrow t_{124} = 2$，4 或 6； $1 \le t_{134} \le 2 \Rightarrow t_{134} = 2$； $1 \le t_{234} \le 2 \Rightarrow t_{234} = 2$

(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$

(b) $t_{124} = 6$； $t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 7 \le t_{14} \le 8$

(c) $t_{124} = 4$： $t_{134} = t_{234} = 2$;
$5 \le t_{24} \le 10 \Rightarrow t_{24} = 8$； $3 \le t_{34} \le 4 \Rightarrow t_{34} = 4$

情况2： $t_2 = 4$ 和 $t_{13} = 2$

2.1. $t_3 = 4$ 和 $t_{13} = 2$

2.1.1. $t = 0$:

$0 \le t_{ij4} \le 1 \Rightarrow t_{ij4} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 5 \Rightarrow t_{14} = 2$； $0 \le t_{24} \le 1 \Rightarrow t_{24} = 0$； $0 \le t_{34} \le 1 \Rightarrow t_{34} = 0$

2.1.2. $t = 1$:

$1 \le t_{ij4} \le 2 \Rightarrow t_{ij4} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 8 \Rightarrow t_{14} = 6$； $3 \le t_{24} \le 4 \Rightarrow t_{24} = 4$； $3 \le t_{34} \le 4 \Rightarrow t_{34} = 4$

2.2. $t_3 = 12$ 和 $t_{13} = 6$

2.2.1. $t = 0$:

$0 \le t_{124} \le 1 \Rightarrow t_{124} = 0$； $0 \le t_{134} \le 5 \Rightarrow t_{134} = 0$，2 或 4； $0 \le t_{234} \le 1 \Rightarrow t_{234} = 0$

(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 1$

(b) $t_{124} = t_{234} = 0$； $t_{134} = 4 \Rightarrow 4 \le t_{14} \le 5$

(c) $t_{124} = t_{234} = 0$； $t_{134} = 2$： $2 \le t_{14} \le 3 \Rightarrow t_{14} = 2$;
$0 \le t_{24} \le 1 \Rightarrow t_{24} = 0$； $2 \le t_{34} \le 7 \Rightarrow t_{34} = 4$

2.2.2. $t = 1$:

$1 \le t_{124} \le 2 \Rightarrow t_{124} = 2$； $1 \le t_{134} \le 6 \Rightarrow t_{134} = 2$，4 或 6； $1 \le t_{234} \le 2 \Rightarrow t_{234} = 2$

(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$

(b) $t_{124} = t_{234} = 2$； $t_{134} = 6 \Rightarrow 8 \le t_{14} \le 9$

(c) $t_{124} = t_{234} = 2$； $t_{134} = 4$： $5 \le t_{14} \le 6 \Rightarrow t_{14} = 6$;
$3 \le t_{24} \le 4 \Rightarrow t_{24} = 4$； $5 \le t_{34} \le 10 \Rightarrow t_{34} = 8$

情形 $i = 14$： $\lambda_{14} =$ (0001001100)； $t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv 0$ (模8)； $t_4 \equiv 4$ (模8)；$t_{14} \equiv t_{23} \equiv 2$ (模4)； $t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$(模4)。

由于 deg(V) ≤ 13，因此 $t_1 = t_2 = t_3 = 8$、 $t_{12} = t_{13} = 4$ 和 $t_{23} = 6$ ($l_{23} < 13$)。利用事实 $t_{12} + t_{23} - t_{123} < 8$ 和 $t_{123} < t_{12} = t_{13}$，可得 $t_{123} = 3$。因此，令 $v_1 =$(1 − 8)、$v_2 =$(1，2，3，4，9，10，11，12) 和 $v_3 =$(1，2，3，5，9，10，11，13)。

重量 t 有四种可能（见表 11）。根据条目 (1.1.)、(2.1.) 和 (4.1.)，分别存在次数为 15、16 和 14 的非极小表示。根据条目 (3.1.)，由于 $t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 4$，我们可以考虑$t_4 = 4$和 $v_4 =$(1，2，9，10)。因此， $V = V_{14}$。其他条目中不存在表示。

情形 $i = 15$： $\lambda_{15} =$ (1001001100)：] $t_1 \equiv t_4 \equiv 4$ (模 8)； $t_2 \equiv t_3 \equiv 0$ (模 8)；$t_{14} \equiv t_{23} \equiv 2$ (模 4)； $t_{12} \equiv t_{13} \equiv t_{24} \equiv t_{34} \equiv 0$(模 4)。

显然， $t_1 = 12$。此外， $t_2 = 8$和 $t_{12} = 4$，因为 $l_{12} < 17$，也就是说，$t_2 - t_{12} < 5$。假设 $v_1 =$(1 − 12)和 $v_2 =$(1、2、3、4、13、14、15、16)。类似地，我们得到 $t_3 = 8$ 和 $t_{13} = 4$。我们还有 $t_{23} = 6$，因此 $t_{123} = 3$。如果 $t_{23} = 2$，那么 $t_{123} = 1$，这意味着 $l_{123} = 19 >$次数(V)。假设 $v_3 =$(1、2、3、5、13、14、15、17)。

照例，最后一步是求出 v_4。根据表12，条目 (1.1.)、(2.1.) 和 (4.1.) 对应非极小表示。根据条目 (3.1.)，若 $t_{14} = 6$，我们将得到一个非极小表示。但若 $t_{14} = 2$，则 $t_{14} + t_{24} + t_{34} - t_{124} - t_{134} - t_{234} + t = 4$。若 $t_4 = 4$ 且 $v_4 =$(1，2、 13、 14)，我们得到 $V = V_{15}$。

TABLE 11. $V_{14\circ}$

1. $t=0$	3. $t=2$
$0\le t_{124}\le 1\Rightarrow t_{124}=0$ $0\le t_{134}\le 1\Rightarrow t_{134}=0$ $0\le t_{234}\le 3\Rightarrow t_{234}=0$ 或 2	$2\le t_{124}\le 3\Rightarrow t_{124}=2$ $2\le t_{134}\le 3\Rightarrow t_{134}=2$ $2\le t_{234}\le 5\Rightarrow t_{234}=2$ 或 4
1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 0\le t_{14}\le 3\Rightarrow t_{14}=2$; $0\le t_{24}\le 1\Rightarrow t_{24}=0$; $0\le t_{34}\le 1\Rightarrow t_{34}=0$	3.1. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4$ $\Rightarrow 2\le t_{14}\le 5\Rightarrow t_{14}=2$; $4\le t_{24}\le 5\Rightarrow t_{24}=4$; $4\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$
1.2. $t_{124}=2$; $t_{134}=t_{234}=0\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$	3.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$
2. $t=1$	4. $t=3$
$1\le t_{124}\le 2\Rightarrow t_{124}=2$ $1\le t_{134}\le 2\Rightarrow t_{134}=2$ $1\le t_{234}\le 4\Rightarrow t_{234}=2$ 或 4	$3\le t_{124}\le 4\Rightarrow t_{124}=2$; $3\le t_{134}\le 4\Rightarrow t_{134}=2$; $3\le t_{234}\le 6\Rightarrow t_{234}=4$ 或 6
2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$ $\Rightarrow 3\le t_{14}\le 6\Rightarrow t_{14}=6$; $3\le t_{24}\le 4\Rightarrow t_{24}=4$; $3\le t_{34}\le 4\Rightarrow t_{34}=4$	4.1. $t_{124}=t_{134}=4$; $t_{234}=6$ $\Rightarrow 5\le t_{14}\le 8\Rightarrow t_{14}=6$; $7\le t_{24}\le 8\Rightarrow t_{24}=8$; $7\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$
2.2. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$	4.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$

TABLE 12. $V_{15\circ}$

1. $t=0$	3. $t=2$
$0\le t_{124}\le 1\Rightarrow t_{124}=0$ $0\le t_{134}\le 1\Rightarrow t_{134}=0$ $0\le t_{234}\le 3\Rightarrow t_{234}=0$ 或 2	$2\le t_{124}\le 3\Rightarrow t_{124}=2$ $2\le t_{134}\le 3\Rightarrow t_{134}=2$ $2\le t_{234}\le 5\Rightarrow t_{234}=2$ 或 4
1.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$ $\Rightarrow 0\le t_{24}\le 1\Rightarrow t_{24}=0$; $0\le t_{34}\le 1\Rightarrow t_{34}=0$; $0\le t_{14}\le 7\Rightarrow t_{14}=2$ 或 6;	3.1. $t_{124}=t_{134}=2$; $t_{234}=4$ $\Rightarrow 4\le t_{24}\le 5\Rightarrow t_{24}=4$; $4\le t_{34}\le 5\Rightarrow t_{34}=4$; $2\le t_{14}\le 9\Rightarrow t_{14}=2$ 或 6
1.2. $t_{124}=t_{134}=0$; $t_{234}=2\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$	3.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2\Rightarrow 2\le t_{24}\le 3$
2. $t=1$	4. $t=3$
$1\le t_{124}\le 2\Rightarrow t_{124}=2$ $1\le t_{134}\le 2\Rightarrow t_{134}=2$ $1\le t_{234}\le 4\Rightarrow t_{234}=2$ 或 4	$3\le t_{124}\le 4\Rightarrow t_{124}=4$; $3\le t_{134}\le 4\Rightarrow t_{134}=4$; $3\le t_{234}\le 6\Rightarrow t_{234}=4$ 或 6
2.1. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=2$ $3\le t_{24}\le 4\Rightarrow t_{24}=4$; $3\le t_{34}\le 4\Rightarrow t_{34}=4$; $3\le t_{14}\le 10\Rightarrow t_{14}=6$ 或 10	4.1. $t_{124}=t_{134}=4$; $t_{234}=6$ $\Rightarrow 7\le t_{24}\le 8\Rightarrow t_{24}=8$; $7\le t_{34}\le 8\Rightarrow t_{34}=8$; $5\le t_{14}\le 12\Rightarrow t_{14}=6$ 或 10
2.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 5\le t_{24}\le 6$	4.2. $t_{124}=t_{134}=t_{234}=4\Rightarrow 3\le t_{24}\le 6$

情形 $i=16$:

$\lambda_{16}=$(0001111100):: $t_1\equiv t_2\equiv t_3\equiv 0$ （模 8）； $t_4\equiv 4$ （模 8）； $t_{24}\equiv t_{34}\equiv 0$ （模 4）； $t_{12}\equiv t_{13}\equiv t_{23}\equiv t_{24}\equiv 2$（模 4）。

我们有 $t_{12}\le 6$, 否则 $t_1\ge 16, t_2\ge 16$ 且 deg（V） ≥ 22。类似地， $t_{13}\le 6$ 和$t_{23}\le 6$。由于 $t_1+t_2-t_{12}\le 17$ 和 $t_1+t_3-t_{13}\le 17$, 很快 $t_1=t_2=t_3=8$。令$v_1=$ （1 − 8）。

我们分两种情况进行分析： $t_{12}=2$ 和 $t_{12}=6$。

在情况1中，考虑 $v_2=$(1，2，9 − 14)。在这种情况下， $t_{123}=1$。如果 $t_{13}=t_{23}=2$, 则 deg (V) ≥ 19, 因为 $l_{123}=19$。如果 $t_{13}=t_{23}=6$, 则有 $t_3>11$, 因为$t_{13}+t_{23}-t_{123}=11$。因此，我们只需分析两种子情况：(1.1.) $t_{13}=2$ 和$t_{23}=6$；以及 (1.2.) $t_{13}=6$ 和 $t_{23}=2$。参见表 13。

对于条目 (1.1.)，设 $v_3=$(1，3，9，10，11，12，13，15)。根据条目 (1.1.1.a)，其中 $t=0$; $t_{124}=t_{134}=t_{234}=0$ 和 $t_{14}=2, t_{24}=t_{34}=0$，我们得到 $t_{14}+t_{24}+t_{34}-t_{124}-t_{134}-t_{234}+t=2$。如果 $t_4=4$，我们可以考虑 $v_4=$(4，5，16，17)。因此， $V=V_{16\circ}$ 注意,

对于任何其他条目，如果存在表示，其次数大于 17，也就是说，它不是极小的。通过分析以下条目，我们找到了非极小表示：(1.1.1.c)、(1.1.2.a) 和 (1.1.2.c)。

在情况2中，我们有 $t_{123} = 1$ 或 5，因为我们需要有 $t_1 < t_{12} + t_{13} - t_{123}$。与前一种情况进行分析后，我们发现这种情况下没有表示。对于条目 (2.1.)，利用 $t_1 = t_2 = 8$ 得到 $t_{13} = t_{23} = 2$；对于条目 (2.2.)，注意到 $t_{13} = t_{23} = 6$。

TABLE 13. V_{16}。

情况1： $t_{12} = 2$	
1.1. $t_{13} = 2$ 和 $t_{23} = 6$	
1.1.1. $t = 0$	1.1.2. $t = 1$
$0 \le t_{124} \le 1 \Rightarrow t_{124} = 0$ $0 \le t_{134} \le 1 \Rightarrow t_{134} = 0$ $0 \le t_{234} \le 5 \Rightarrow t_{234} = 0$,2 或 4	$1 \le t_{124} \le 2 \Rightarrow t_{124} = 2$ $1 \le t_{134} \le 2 \Rightarrow t_{134} = 2$ $1 \le t_{234} \le 6 \Rightarrow t_{234} = 2$,4 或 6
(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0$ $\Rightarrow 0 \le t_{14} \le 5 \Rightarrow t_{14} = 2$; $0 \le t_{24} \le 1 \Rightarrow t_{24} = 0$; $0 \le t_{34} \le 1 \Rightarrow t_{34} = 0$ (b) $t_{124} = t_{134} = 0$; $t_{234} = 2 \Rightarrow 2 \le t_{24} \le 3$ (c) $t_{124} = t_{134} = 0$; $t_{234} = 4$ $\Rightarrow 0 \le t_{14} \le 5 \Rightarrow t_{14} = 2$; $4 \le t_{24} \le 5 \Rightarrow t_{24} = 4$; $4 \le t_{34} \le 5 \Rightarrow t_{34} = 4$	(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2$ $\Rightarrow 3 \le t_{14} \le 8 \Rightarrow t_{14} = 6$; $3 \le t_{24} \le 4 \Rightarrow t_{24} = 4$; $3 \le t_{34} \le 4 \Rightarrow t_{34} = 4$ (b) $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 4 \Rightarrow 5 \le t_{24} \le 6$ (c) $t_{124} = t_{134} = 2$; $t_{234} = 6$ $\Rightarrow 3 \le t_{14} \le 8 \Rightarrow t_{14} = 6$; $7 \le t_{24} \le 8 \Rightarrow t_{24} = 8$; $7 \le t_{34} \le 8 \Rightarrow t_{34} = 8$
1.2. $t_{13} = 6$ 和 $t_{23} = 2$	
1.2.1. $t = 0$	1.2.2. $t = 1$
$0 \le t_{124} \le 1 \Rightarrow t_{124} = 0$ $0 \le t_{134} \le 5 \Rightarrow t_{134} = 0$, 2 或 4 $0 \le t_{234} \le 1 \Rightarrow t_{234} = 0$	$1 \le t_{124} \le 2 \Rightarrow t_{124} = 2$ $1 \le t_{134} \le 6 \Rightarrow t_{134} = 2$, 4 或 6 $1 \le t_{234} \le 2 \Rightarrow t_{234} = 2$
(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 1$ (b) $t_{124} = t_{234} = 0$; $t_{134} = 2 \Rightarrow 2 \le t_{34} \le 3$ (c) $t_{124} = t_{234} = 0$; $t_{134} = 4 \Rightarrow 4 \le t_{14} \le 5$	(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$ (b) $t_{124} = t_{234} = 2$; $t_{134} = 4 \Rightarrow 5 \le t_{34} \le 6$ (c) $t_{124} = t_{234} = 2$; $t_{134} = 6 \Rightarrow 7 \le t_{14} \le 8$
情况2： $t_{12} = 6$	
2.1. $t_{123} = 1$	
2.1.1. $t = 0$	2.1.2. $t = 1$
$0 \le t_{124} \le 5 \Rightarrow t_{124} = 0$, 2或4 $0 \le t_{134} \le 1 \Rightarrow t_{134} = 0$ $0 \le t_{234} \le 1 \Rightarrow t_{234} = 0$	$1 \le t_{124} \le 6 \Rightarrow t_{124} = 2$, 4或6 $1 \le t_{134} \le 2 \Rightarrow t_{134} = 2$ $1 \le t_{234} \le 2 \Rightarrow t_{234} = 2$
(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 1$ (b) $t_{124} = 2$; $t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 2 \le t_{24} \le 3$ (c) $t_{124} = 4$; $t_{134} = t_{234} = 0 \Rightarrow 4 \le t_{14} \le 5$	(a) $t_{124} = t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$ (b) $t_{124} = 4$; $t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 5 \le t_{24} \le 6$ (c) $t_{124} = 6$; $t_{134} = t_{234} = 2 \Rightarrow 7 \le t_{14} \le 8$
2.2. $t_{123} = 5$	
(a) $t = 0$: $0 \le t_{ij4} \le 1 \Rightarrow t_{ij4} = 0 \Rightarrow 0 \le t_{14} \le 1$ (b) $t = 1$: $1 \le t_{ij4} \le 2 \Rightarrow t_{ij4} = 2 \Rightarrow 3 \le t_{14} \le 4$ (c) $t = 2$: $2 \le t_{ij4} \le 3 \Rightarrow t_{ij4} = 2 \Rightarrow 2 \le t_{24} \le 3$	(d) $t = 3$: $3 \le t_{ij4} \le 4 \Rightarrow t_{ij4} = 4 \Rightarrow 5 \le t_{24} \le 6$ (e) $t = 4$: $4 \le t_{ij4} \le 5 \Rightarrow t_{ij4} = 4 \Rightarrow 4 \le t_{14} \le 5$ (f) $t = 5$: $5 \le t_{ij4} \le 6 \Rightarrow t_{ij4} = 6$; $\Rightarrow 7 \le t_{14} \le 8$

□

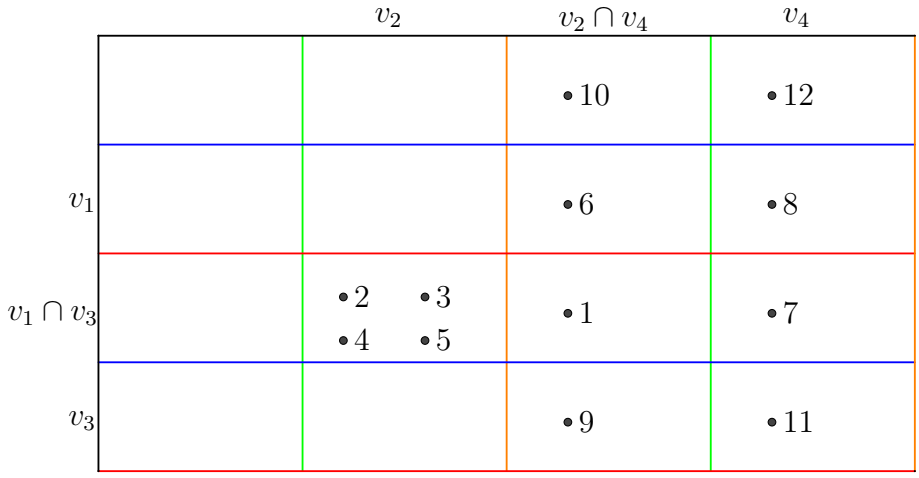
As 由定理 4.3 可直接推出以下推论。

推论4.4。 码环 C_1^4、……、C_{16}^4 的每个极小表示分别具有以下次数和类型：

i	$\deg(V_i)$	V_i的类型	i	$\deg(V_i)$	V_i的类型
1	8	(11111111)	2	14	(11111111222)
3	12	(111111114)	4	18	(11111111226)
5	18	(111111112224)	6	11	(11111114)
7	17	(11113334)	8	17	(11111122223)
9	19	(11111222233)	10	19	(111223333)
11	17	(111122333)	12	17	(1111112234)
13	17	(111111236)	14	13	(111111223)
15	17	(111111227)	16	17	(111112235)

注意，对于秩3和4的码环，码环的类型可以在同构意义下确定该环。这或许在一般情形下也成立。

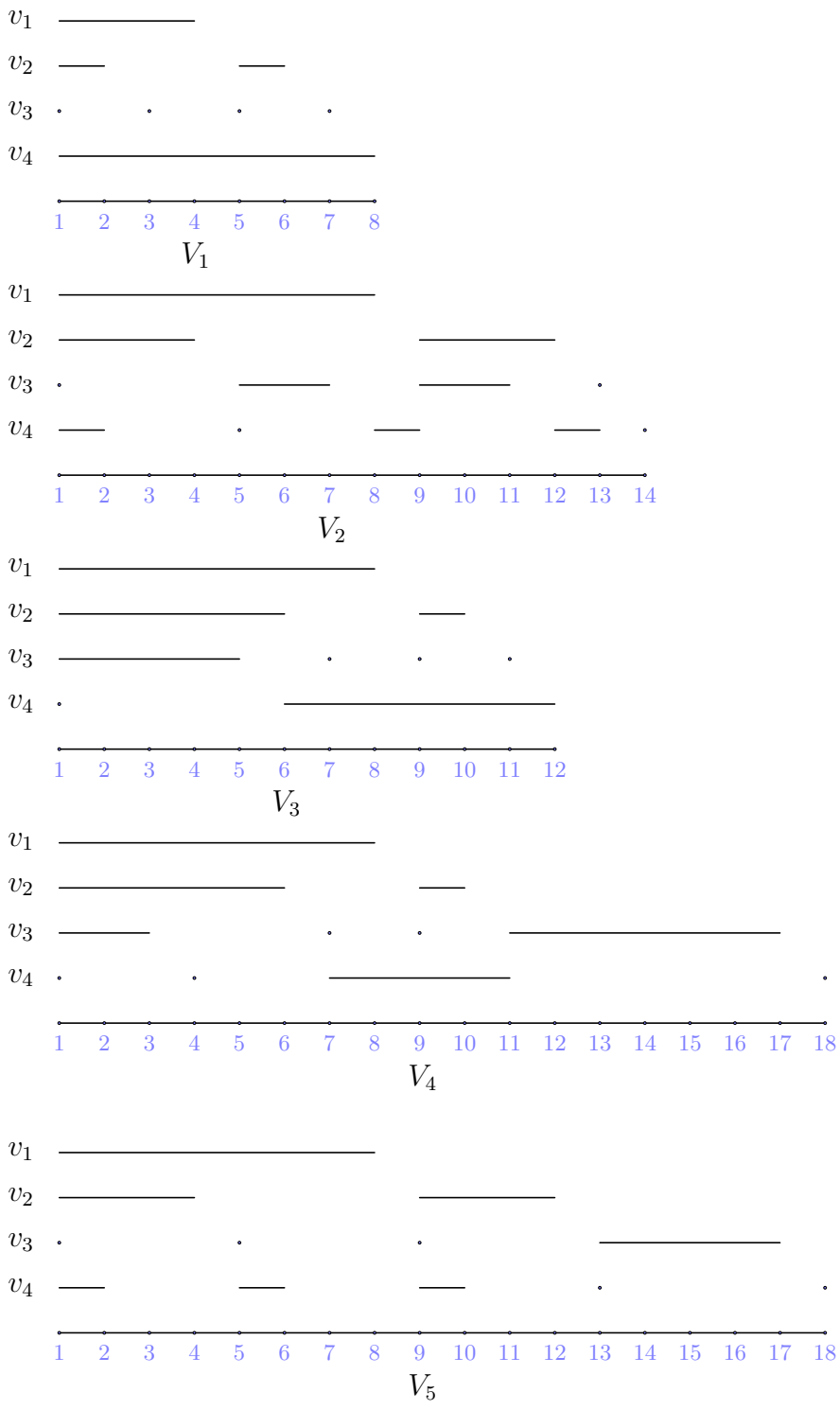
来看一个例子。根据推论4.4，极小表示 V_3有9个等价类。这些等价类如下图所示：

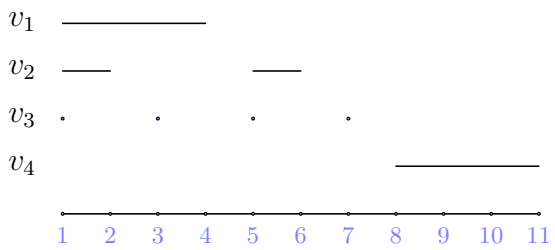


Acknowledgments

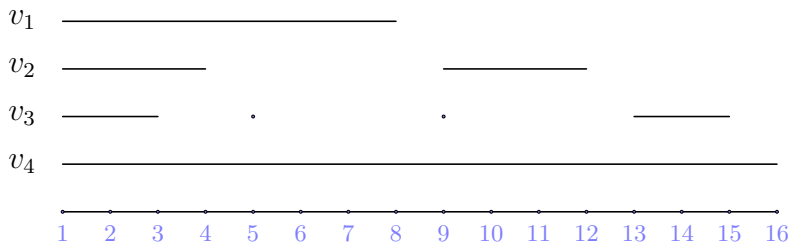
关于经费支持，第一作者感谢国家科学技术发展委员会 - CNPq（资助编号 406932/2023-9）；第二作者感谢 FAPESP（资助编号 2018/23690-6）、CNPq（资助编号 307593/2023-1 和 406932/2023-9），以及根据俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所的国家任务开展的项目 FWNF-2022-003；第三作者感谢 FAPESP（资助编号 2021/12820-9）和 CNPq（资助编号 406932/2023-9）。作者感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。

Appendix A. Diagrams: Minimal representations of code loops of rank4

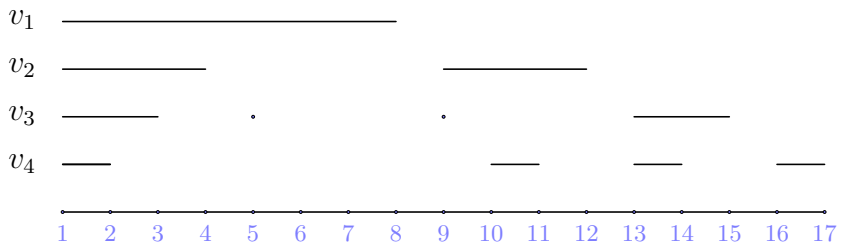




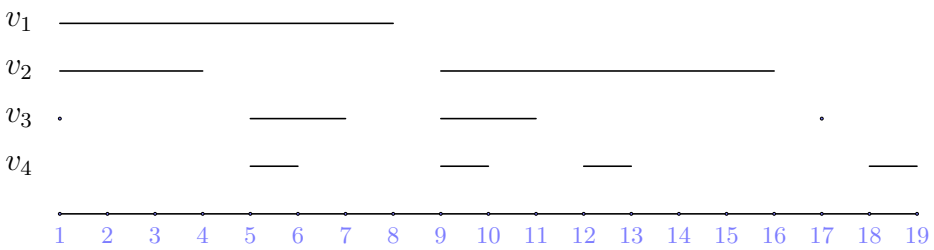
V_6



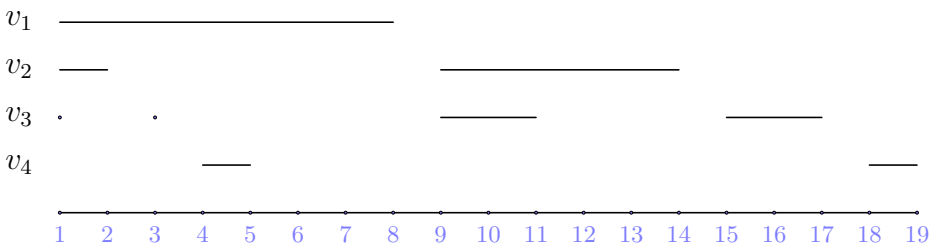
V_7



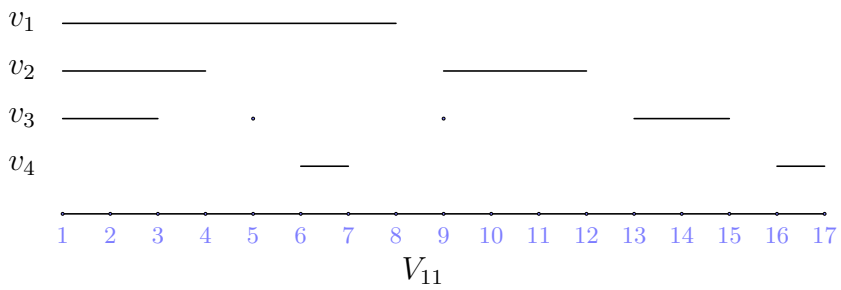
V_8



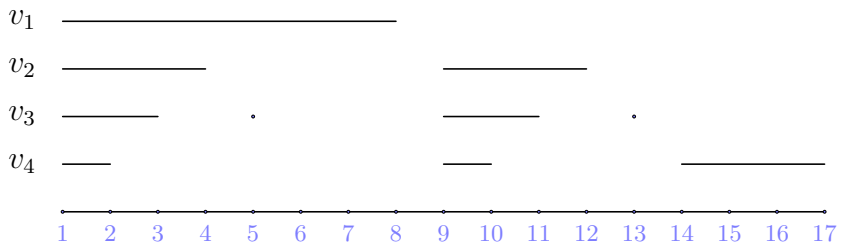
V_9



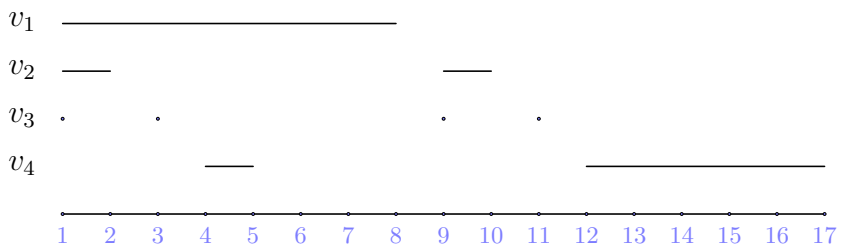
V_{10}



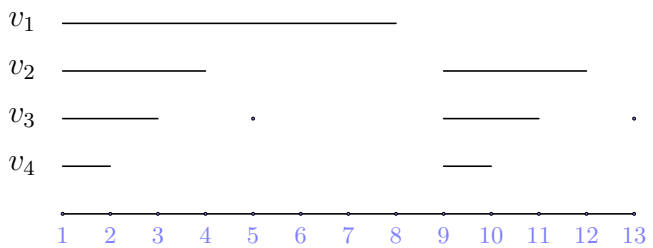
V_{11}



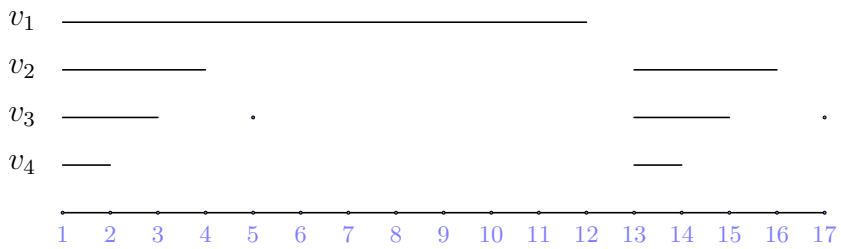
V_{12}



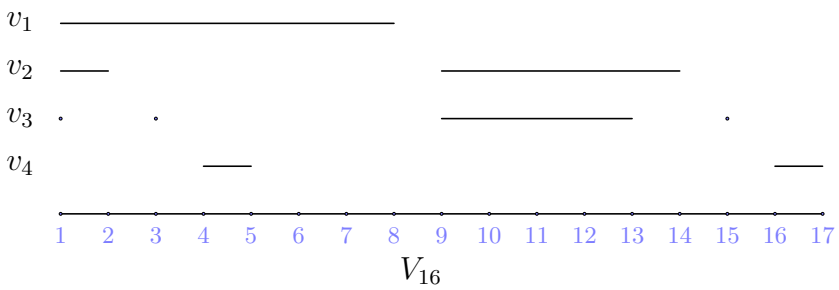
V_{13}



V_{14}



V_{15}


v_1
v_2
v_3
v_4
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
V_{16}

参考文献

[1] O. Chein 和 E.G. Goodaire，具有唯一非单位换位子（结合子、平方）的 *Moufang* 环，《代数杂志》130 (1990), 369-384。[2] R. L. Griess Jr.，码环，《代数杂志》100 (1986), 224-234。[3] A. Grishkov 和 R. Miguel Pires，由码环生成的环的簇，《代数与计算国际期刊》第 28 卷，第 1 期 (2018), 163-177。[4] R. Miguel Pires，码环：自同构与表示 ´ı ˜。博士学位论文，圣保罗大学数学与统计研究所，圣保罗，圣保罗州 (2011)。

(MIGUEL PIRES) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, Aterrado, Volta Redonda, RJ, Brazil, CEP27213-145

电子邮箱地址，Pires：rosemarypires@id.uff.br

(GRISHKOV) Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua doMatão, 1010 Butantã, São Paulo, SP, Brazil, CEP 05508-090 and Sobolev Institute ofMathematics, Omsk, Russia

电子邮箱地址，Grishkov：shuragri@gmail.com

(RASSKAZOVA) Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federaldo ABC, Avenida dos Estados, 5001, Bairro Bangu, Santo André, SP, Brasil, CEP 09280-560; and Siberian State Automobile and Highway University, Prospekt Mira, 5,Omsk, Omsk Oblast, Rússia, 644080

电子邮件地址，RASSKAZOVA：marina.rasskazova@ufabc.edu.br