排版后的文章将在此处显示与文章类型相适应的横幅

arXiv:2601.02341v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

中等钝度圆锥上高超声速流的感受性与失稳

N. d'Epr´emesnil[1]†、C. Caillaud 1、G. Lehnasch [2], M.Olazabal [1] 和 P. Jordan [2]

[1]CEA-CESTA，15 Avenue des Sabli`eres，CS60001，33116勒巴尔普 Cedex，法国[2]流体、热学与燃烧系，PPRIME研究所，法国国家科学研究中心（CNRS）–普瓦捷大学–ENSMA，UPR 3346，86036 普瓦捷，法国

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

为识别并理解支配高超声速流中钝体层流-湍流转捩的线性感受性与放大机制，我们采用预解分析研究半锥角为 7° 、马赫数为 $M_\infty = 6$、零攻角且基于头部半径的雷诺数为$Re_{R_n} = 90000$的钝锥绕流。我们求得了频率最高达 330 千赫、方位波数介于 0 至 200 之间的最优强迫与响应。通过考虑等温（$T_w = 300$ K）和绝热壁条件，纳入壁温效应。预解分析表明，在等温情况下，定常条带模态的放大最强，其次是频率介于 20 至 140 千赫的熵层模态。在绝热情况下， 1^{st}麦克模态的放大最强。由头锥钝度造成的熵层对感受性结构有显著影响。对于最优条带模态，最强的感受性结构位于熵层深处；与相应的尖锥条带模态相比，它们离边界层边缘更远。这表明，大气扰动无需完全穿透边界层，便可能激发条带型不稳定性。对于熵层模态，其主要感受性和脉动特征均位于熵层内。能量收支分析表明，这些模态对动能扰动最为敏感，并且最能体现温度脉动。研究发现，这些模态利用温度混合机制，借助熵层中基流的壁法向温度梯度而增长。

关键词： 预解分析、边界层转捩、失稳、钝头高超声速流

1. 引言

高超声速飞行带来了复杂的飞行器设计挑战。在这种高超声速飞行条件下，大量气流动能会转化为热量，并传递至飞行器壁面。为承受强烈的加热，大多数高超声速飞行器都配备了热防护系统（TPS），并在头部采用一定的钝度。在这些条件下，边界层的状态，即层流还是湍流，会产生重要影响

† 通讯电子邮件地址：nicolas.du-val-d-epremesnil@ensma.fr

摘要不得延伸至第 2 页

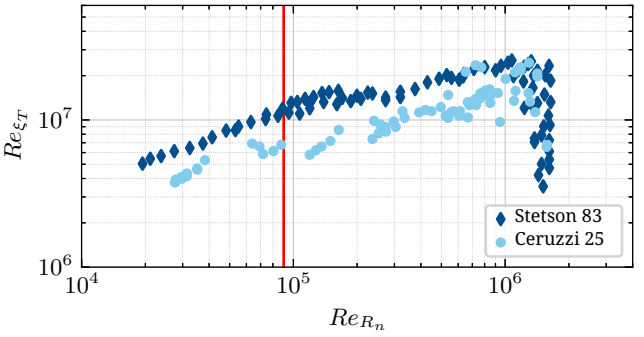


图1：转捩雷诺数与基于头部半径的雷诺数之间的关系，改编自 Ceruzzi 等人 （2025年）；Stetson 等人 （1983）。红线表示本研究的 Re_{R_n} 。

，影响传入飞行器的热流。因此，准确预测层流-湍流转捩的位置对于优化高超声速飞行器的设计至关重要。估计不准确可能导致飞行器损毁；而设计过于保守，则会因增加热防护罩而显著增加重量（国防科学委员会，华盛顿特区，1988）。钝头高超声速体上的转捩机制十分复杂，至今仍未得到充分理解；正是这一现状促使我们开展本研究。

在典型的尖锥情形下，在 0° 攻角时，人们普遍认为转捩由 Mack 模态引起（Mack 1987）。这些是具有指数空间增长率的模态型对流不稳定性。传统工程模型（如 e^N 方法）基于局部平行线性稳定性理论（LST）的理论结果，可为典型几何构型上的转捩位置估算提供令人满意的结果。然而，随着钝度增加，Mack 模态受到阻尼；Stetson 等人（1983）根据头部半径确定了三个流动转捩区间：小、中等和大钝度区间。近期实验已证实了这些发现（Marineau 等，2014；Jewell 等，2018；Ceruzzi 等，2024），转捩雷诺数绘于图1中。在小钝度情形下，LST 预测到转捩延迟，这是由于随着钝度增加，Mack 模态受到衰减（Rosenboom 等，1999）。在中等钝度范围内，当钝度进一步增加时，基流与尖锥典型情形显著不同。钝头鼻端引入了脱体弓形激波，使激波沿线的跃变条件持续变化。这会导致非均匀激波层，并在边界层（BL）上方出现熵层（EL）。在这种情况下，转捩雷诺数变大，Mack 模态不再是转捩的原因；转捩发生时，Mack 模态振幅尚未达到足以引发转捩的大小（Lei & Zhong 2012；Marineau 等，2014；Paredes 等，2019b）。随着钝度进一步增大，达到大钝度区间。在该区间内，转捩雷诺数突然降低，见图1中的 $\mathrm{Re}_{R_n} > 10^6$ 。这一现象被称为转捩逆转。Reshotko 与 Tumin（2004）以及 Paredes 等人（2017）认为，在该区间内，鼻端表面粗糙度引起的瞬态增长可能解释转捩雷诺数的下降。

导致转捩的机制，在中等和高钝度区间内尚未得到充分理解。因此，我们考察可能出现在中等钝度区间内的线性放大机制。近期研究表明，非模态增长可能解释转捩现象（Paredes 等，2019年*a*，2020年；Cook 等，2018）。在谐波线性化纳维-斯托克斯方程（HLNSE）框架下探讨的最优增长理论

以及抛物化稳定性方程（PSE）表明，条带和熵层模态可能出现显著的瞬态增长。Paredes 等（2020年）随后在 $M_\infty = 5。9$ 和 $\mathrm{Re}_{R_n} = 139000$条件下进行了直接数值模拟（DNS），结果表明，一对频率为 250 千赫的最优扰动对应于斜熵层扰动，并通过在边界层中生成定常条带（借助斜熵层模态的三波相互作用）引发转捩。尽管初始扰动位于熵层中，非线性相互作用却激发了边界层。在相似条件下，线性直接数值模拟显示，熵层扰动带来的增长大于 PSE 分析所捕捉到的增长（Hartman 等，2021年），这表明最优 PSE 可能无法捕捉真正最优的线性机制。近期的纹影可视化（Grossir等，2019年；Kennedy 等，2019年，2022年；Ceruzzi 等，2024年）显示，熵层中存在细长的丝状结构，其形态与线性分析中发现的熵层模态定性一致。这进一步支持了这样一种情况：在中等钝度区间内，由熵层机制支撑的瞬态增长。

尽管熵层模态似乎与转捩过程有关，但系统地探究所有可能的线性放大机制十分重要。迄今为止，尚无针对该范围内钝锥几何构型的流动感受性与响应的系统研究。此外，对于熵层模态，其背后的物理机制仍未得到充分理解，导致其激发的感受性类型也尚不明确。

为探究这些问题，我们采用全局预解分析，对中等钝度范围内钝圆锥体周围高超声速流中的最优线性放大机制进行了全面研究。研究涵盖了广泛的频率和方位波数，从而能够识别并研究最优受迫响应与放大机制。这为外部扰动通过线性过程所能达到的放大程度提供了上限，并有助于识别可能由环境扰动触发的机制。为进一步理解其背后的物理过程，我们对占主导地位的最优模态进行了详细分析，并展示和讨论了其能量含量及相关产生项。

此外，飞行过程中，壁面温度可能从冷壁条件变化到绝热壁和热壁条件。以恢复温度为参照改变壁面温度，会显著影响线性放大机制，过去的研究已证实这一点（Mack1987）。此外，风洞试验难以达到飞行焓和压力条件，而且相对于模型的热惯性而言，试验持续时间通常较短。因此，大多数高超声速风洞流动通常只允许在较小范围内改变冷等温壁温度条件。鉴于此前针对钝锥开展的数值稳定性分析仅关注此类冷等温壁条件，我们选择纳入绝热壁条件，以深入了解壁温效应对钝锥流动失稳的影响。

本文结构安排如下：第§2 节介绍本问题的流动条件、几何形状、控制方程以及相关数值框架。第§3 节介绍预解分析所用的基流。第§4节介绍通过全局预解分析得到的最优模态和次优模态。其中两类模态尤为突出，并将在后续章节中进一步研究。第§5节分析最优条带模态的能量含量和产生；第§6 节对熵层模态进行类似研究。最后，第§7 节通过对绝热壁基流进行预解分析，讨论壁面温度的影响。第§8节总结全文，并展望未来研究方向。

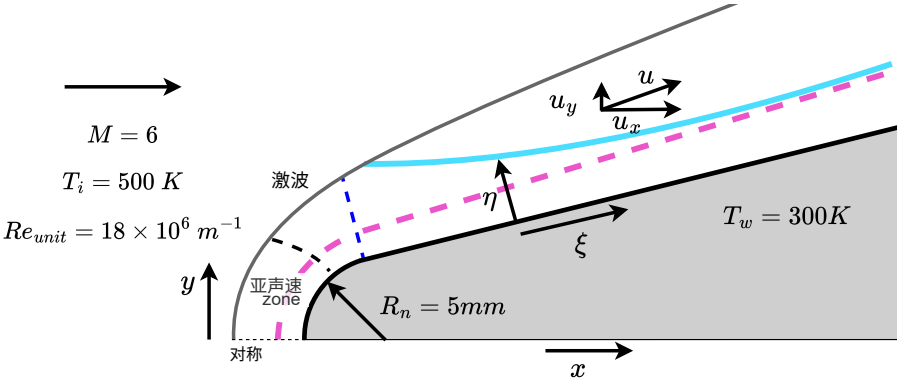


图 2：流动拓扑和装置示意图

name	R_n [毫米]	Re_{R_n}	Re_{unit} [米$^{-1}$]	$T_{i,\infty}$ [开尔文]	M_∞	壁面边界条件
尖锐等温	0.1	1 800	18×10^6	500	6	等温 $T_w = 300$ K
钝头等温	5	90 000	18×10^6	500	6	等温 $T_w = 300$K
钝头绝热	5	90 000	18×10^6	500	6	绝热 $\partial T/\partial\eta\|_{wall} = 0$K/m

表 1：研究的构型

2. 数值设置与方法

2.1. 几何形状与流动条件

我们研究一个钝锥，其球形鼻锥半径为 R_n，圆锥台半锥角为 $\alpha = 7°$，并且 0° 攻角为 $M = 6$。圆锥长50厘米，锥头截短的距离足以容纳半径为 R_n的球形鼻锥。图2 展示了基流和几何形状的示意图，其中 ξ^* 和 η^* 分别表示从尖端起算的曲线距离和壁面法向距离。本文考虑了3种情况，汇总于表1。

头部半径为 5 mm 且采用等温壁面条件的情况，与 Kennedy 等人 (2022年) 在 AFRL 马赫 6 卢德维希管中开展的 B4 实验高度吻合。这些条件处于转捩状态；根据 Jewell 等人(2018) 在同一风洞中进行的实验所得相似性，转捩发生在距尖端约 46 cm 处。Kennedy等人 (2022年) 开展的 B4 实验通过高速纹影可视化显示，第二麦克模态没有放大，且熵层中存在细长的丝状结构。

2.2. 控制方程

流动由可压缩纳维–斯托克斯方程控制，该方程无量纲化如下：

$$x = \frac{x^*}{L_{ref}}, \qquad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, \qquad p = \frac{p^*}{\rho_\infty \mathbf{u}_\infty^2}, \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{u_\infty},$$

流体专题文章不得超过此页长度

$$T = \frac{T^*}{T_\infty}, \qquad \rho E = \frac{(\rho E)^*}{\rho_\infty u_\infty^2}, \qquad t = \frac{t^* u_\infty}{L_{ref}}, \tag{2.1}$$
$$Pr = \frac{\mu_\infty c_p}{\lambda_\infty}, \qquad M = \frac{u^*}{a_\infty}, \qquad Re = \frac{\rho_\infty u_\infty L_{ref}}{\mu_\infty},$$

其中，$\begin{bmatrix}\rho & \mathbf{u} & p\end{bmatrix}^T$ 为通常的原始变量，$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ 为笛卡尔速度矢量，T 为静温，$E = c_v T + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2$ 和 λ 为热导率，μ为遵循萨瑟兰定律的动力黏度，c_p 和 c_v 为比热容；下标 ∞ 表示未受扰动的远场流动状态，上标 $*$ 表示有量纲变量。L_{ref}取为相应钝锥的头部半径（R_n）。采用可压缩纳维–斯托克斯方程，其紧凑形式可写为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}\rho & \rho\mathbf{u} & \rho E\end{bmatrix}^T, \tag{2.2}$$

其中，NNN 表示纳维–斯托克斯算子，黏性应力张量为 $\boldsymbol{\tau} = \mu\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u})\boldsymbol{I}\right)$，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，$\boldsymbol{q}$ 为守恒变量向量，$\boldsymbol{f}$为用于模拟自由来流湍流效应、风洞噪声或任何其他扰动源项的外部强迫。考虑热完全且量热完全气体，其比热比为 $\gamma = 1.4$，且普朗特数 Pr 为常数 $= 0.72$，

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_\infty^2}, \qquad c_v = \frac{1}{\gamma M_\infty^2(\gamma - 1)}. \tag{2.3}$$

2.3. 预解分析框架

正如以往研究所表明的，对钝锥上的转捩进行研究，需要考虑纳维–斯托克斯算子的完整模态与非模态线性动力学。预解分析非常适用于这一目的，因为它能够捕捉全局线性动力学以及流动对外部扰动的感受性。为研究流动的线性响应，将纳维–斯托克斯方程在稳态基流（非线性系统的不动点）附近进行线性化，即 $\mathrm{NNN}(\boldsymbol{q}) = 0$。具体做法是将流动状态在 ε 处展开为一阶泰勒级数，其中 ε 足够小，从而可以采用线性近似：

$$\boldsymbol{q} = \bar{\boldsymbol{q}} + \varepsilon\boldsymbol{q}', \qquad \boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{f}} + \varepsilon\boldsymbol{f}' = \mathbf{0} + \varepsilon\boldsymbol{f}', \quad \varepsilon \ll 1, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}'}{\partial t} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{f}', \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{J} = \frac{\partial \mathrm{NNN}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\Big|_{\bar{\boldsymbol{q}}}$ 是针对基流 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 计算得到的雅可比矩阵。为研究流动感受性和失稳，我们寻找与强迫 $\boldsymbol{f}'$ 相关的响应 $\boldsymbol{q}'$。考虑到定常性和零攻角，流动在方位角方向和时间方向上均具有均匀性，扰动设定可写为，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}'(x, r, \theta, t) &= \hat{\boldsymbol{q}}(x, r)\, e^{i(-\omega t + m\theta)} + \boldsymbol{c.c.},\\ \boldsymbol{f}'(x, r, \theta, t) &= \hat{\boldsymbol{f}}(x, r)\, e^{i(-\omega t + m\theta)} + \boldsymbol{c.c.},\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 m 和 $\omega = 2\pi f$ 分别表示方位波数和时间角频率，而 $\boldsymbol{c}_\circ\boldsymbol{c}$..... 表示复共轭。在本文中，下标 r 表示复数的实部。将假设 2.6 代入方程 2.5 并进行化简后，线性系统可在频域中表示为：

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\mathcal{R}}\hat{\boldsymbol{f}}, \tag{2.7}$$

其中$\mathcal{RRR} = \mathcal{RRR}(\omega, m) = (i\omega \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})^{-1}$为预解算子。因此，方程^2.5所定义的系统可改写为输入/输出问题：对于给定方位波数和脉动频率下的每个强迫 $\boldsymbol{f}$，均对应一个响应 $\hat{\boldsymbol{q}}$。强迫能量与响应能量之比定义为增益：

$$\mu^2(\omega, m) = \frac{||\hat{\boldsymbol{q}}||_q}{||\hat{\boldsymbol{f}}||_f} \tag{2.8}$$

其中 $||\cdot||_x$ 是与加权内积相关联的范数，该内积定义为 $\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q} \rangle_x = \boldsymbol{q}^H \boldsymbol{W}_x \boldsymbol{q}$，其中 $\boldsymbol{W}_x$ 是权重矩阵。为了评估扰动能量，可压缩流通常使用 Chu 范数（Chu 1965）。按照 Bugeat 等人 (2019年) 的方法，可以将该能量写成无量纲形式。下文中，强迫和响应范数分别采用 Chu 范数的矩阵形式 $\boldsymbol{W}_f$ 和 $\boldsymbol{W}_q$ 。随后，通过最大化增益，即可求得最优强迫和响应，

$$\mu_0^2(\omega, m) = \max_{\hat{\boldsymbol{f}}} \frac{||\hat{\boldsymbol{q}}||_q^2}{||\hat{\boldsymbol{f}}||_f^2} = \max_{\hat{\boldsymbol{f}}} \frac{\hat{\boldsymbol{f}}^H \boldsymbol{\mathcal{R}}^H \boldsymbol{W}_q \boldsymbol{\mathcal{R}} \hat{\boldsymbol{f}}}{\hat{\boldsymbol{f}}^H \boldsymbol{W}_f \hat{\boldsymbol{f}}}. \tag{2.9}$$

增益定义了一个与广义厄米特特征值问题相关联的广义瑞利商：

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^H \boldsymbol{W}_q \boldsymbol{\mathcal{R}} \hat{\boldsymbol{f}} = \mu^2 \boldsymbol{W}_f \hat{\boldsymbol{f}}. \tag{2.10}$$

求解该系统等价于求解加权预解算子的奇异值分解（SVD）的右奇异向量（Towne 等人 2018），

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_w = \boldsymbol{W}_q^{1/2} \boldsymbol{\mathcal{R}} \boldsymbol{W}_f^{-1/2} = \tilde{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\boldsymbol{F}}^H, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{W}_q^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{Q}}, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{W}_f^{-1/2} \tilde{\boldsymbol{F}}. \tag{2.13}$$

根据奇异值分解的性质，$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别构成最优响应$\hat{\boldsymbol{q}}_i$ 与最优强迫 $\boldsymbol{f}_i$ 的标准正交基，并按照从能量最高的模态到最低的模态排序；这一顺序体现在对角矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$所包含的增益中。飞行或风洞中经历的任意实际强迫$\hat{\boldsymbol{f}}_{real}$，都可以表示为最优正交强迫基的线性组合；而流动响应则是最优正交响应基的线性组合，其振幅由增益$\hat{}$和内积$\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_{real}$调制，

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{real} = \sum_{i=0}^{N} \hat{\boldsymbol{q}}_i \mu_i^2 \langle \hat{\boldsymbol{f}}_i, \hat{\boldsymbol{f}}_{real} \rangle, \tag{2.14}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{q}}_i$ 和$\hat{\boldsymbol{f}}_i$ 分别是最优响应和强迫基的 i^{th} 向量，μ_i^2为相应的增益。这就得到了感受性系数 $c_i = \mu_i^2 \hat{\boldsymbol{f}}_i, \hat{\boldsymbol{f}}_{real}$，用于表示给定的外部扰动将能量传递至流动响应的能力。需要注意的是，为了在无量纲框架下使不同情形的增益值具有可比性，可以用参考时间尺度对增益进行缩放。

与线性稳定性理论或抛物稳定性方程等经典线性稳定性方法不同，这里既不对基流平行性作任何假设，也不假设流向上的不稳定性机制具有模态性质。根据定义，预解模态考虑了线性算子的非正规性（Schmid 2007）。因此，可以不受其属于模态还是非模态的限制，对流动中的线性

放大机制进行探索和排序。如果存在模态失稳，例如第二 Mack 模态，那么预解算子最优强迫将是最有效地从外部源项（方程 2.14）获取能量、从而放大该失稳的结构；算子的非正规性也可能被利用来激发这种失稳。响应将呈现这一机制的空间结构。由于模态放大呈指数增长，相关增益会非常大，而主导模态与次优模态之间的增益分离也会十分显著。

2.4. 数值求解器

基流和预解分析均使用 ONERA 开发的 BROADCAST 求解器完成（Poulain 等，2023）。该代码采用有限体积格式，并在单元界面处使用高阶 FE-MUSCL 状态重构计算对流通量。本研究使用 7th 阶重构。黏性通量采用 4th 阶紧致有限差分格式计算。纳维–斯托克斯方程的时间积分从均匀初始条件开始，并采用带近似雅可比矩阵的隐式 LU-SGS 格式推进，直至瞬态过程消失。随后通过伪牛顿迭代使稳态基流最终收敛，收敛判据为 $\|\partial \boldsymbol{q}/\partial t\|_{L_2} \leqslant 10^{-10}$。

获得稳态基流后，使用 源项变换方法，通过算法微分非线性通量来获得线性通量。该方法借助法国国家信息与自动化研究院的 TAPENADE 库实现（Hascoet 与 Pascual，2013）。该技术生成精确的线性化通量，并保持原始非线性离散格式的形式精度。利用这些线性化表达式，可在不动点处组装雅可比矩阵。由于采用显式空间离散格式，所得雅可比矩阵既稀疏又准确，非常适用于全局预解分析。

2.4.1. 边界条件

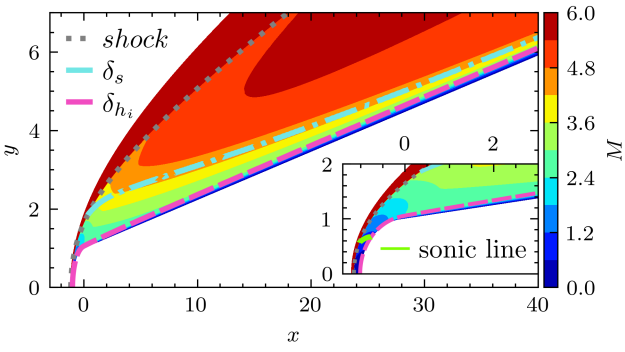
BROADCAST 使用虚单元对流动施加所有边界条件。远场通过狄利克雷条件施加超声速来流。轴对称轴上施加轴对称条件。超声速出口处采用 0th 阶外推施加流出边界。最后，在所有表面上施加等温或绝热壁黏性边界条件。

2.5. 计算域的网格划分

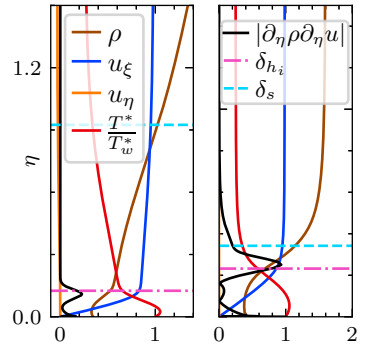
研究区域为(O, x, r) 轴对称条件下钝锥的半平面。网格构建流程遵循Caillaud 等人(2025*b*)开展的先前收敛性研究。网格为结构化曲线网格，依据沿流向施加于壁面、激波线和远场线上的网格加密规律构建。在壁面法向方向，网格加密规律施加于轴对称线、球锥连接处和出口。采用超限插值构建完整网格。壁面处第一个单元的高度设为层流壁面摩擦系数准则给定值的 0.25 倍，该准则基于 y^+。边界层中约有 120 个单元。网格中施加的激波线是一条通过迭代方式确定的样条曲线，直至其与物理激波充分对齐，从而确保不动点的数值收敛。

3. 基流

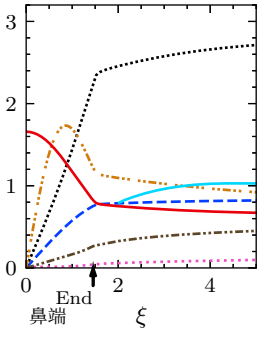
钝锥几何形状会在物体前方形成一个脱体的弯曲弓形激波。这会产生一系列连续的兰金-许戈尼奥跳跃条件，其中熵不断变化，从而



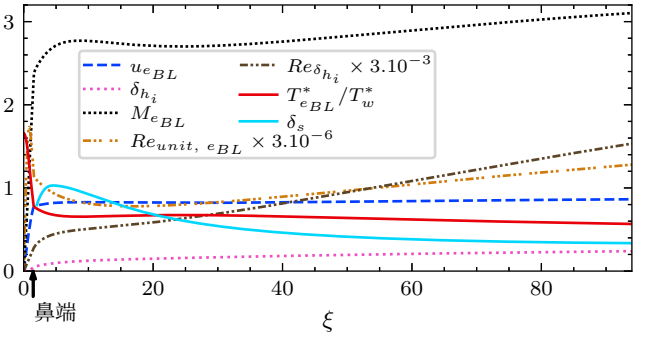
(a) 等温钝锥基流



(b) $\xi = 10$基流壁法向剖面　(c) $\xi = 85$剖面



（d）边界层边缘量，头部段局部放大图

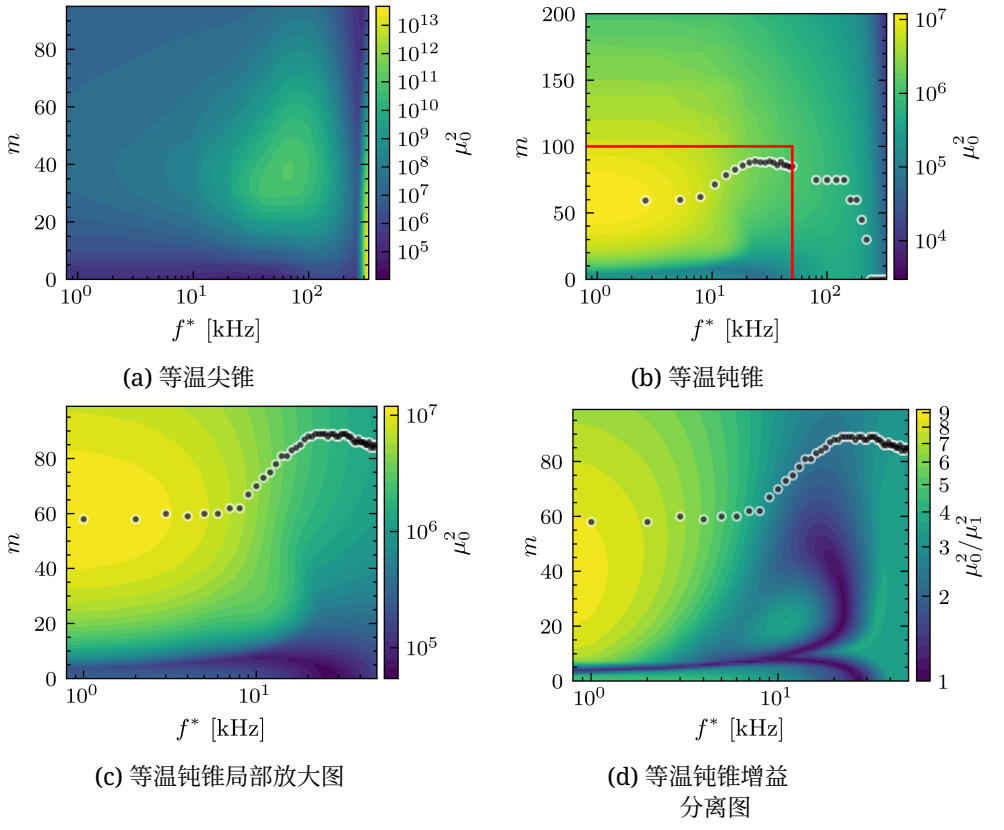


（e）整个计算域上的边界层边缘量

图3

形成熵层。图3a 展示了等温钝锥上的马赫数分布，其中可以看到脱体激波以及熵层和边界层的高度。熵层中的速度也会发生变化，如图3b、3c所示，这使得边界层和熵层高度的任何定义都较为棘手。为与文献保持一致，采用Paredes 等人（2019年 *b*）的定义，其中边界层高度（δ_{h_i}）由从壁面到总焓达到其自由来流值99.5%的最小高度确定：$h_i\left(\delta_{h_i}\right) = 0.995h_{i,\ \infty}$。类似地，熵层高度（$\delta_s$）定义为从壁面到熵差相对于自由来流的值等于其在壁面处数值25%的最小高度： $\Delta s\ \left(\delta_s\right) = 0.25\Delta s_{wall}$，其中 $\Delta s\ (x)\ = s\ (x) - s_\infty$。

边界层上边界处的条件绘于图3d &3e中。在头部段，各物理量变化迅速。马赫数从驻点处的零开始增加，在球段末端达到约 2.2，并在 $\xi = 0.72$ 处穿过声速线。由于有利压力梯度很强，边界层在头部上方始终较薄，并在下游进一步增厚。在计算域 $\delta_{h_i} = 0.24$ 的末端，边界层厚度达到最大值。按照所选的熵层高度定义，直到 $\xi = 2.$ 熵层边缘才达到上边界，其厚度在 $\xi = 4.5$ 处达到最大值，此时 $\delta_s = 1.03$，随后逐渐减小，并渐近趋近于边界层高度。



(a) 等温尖锥

(b) 等温钝锥

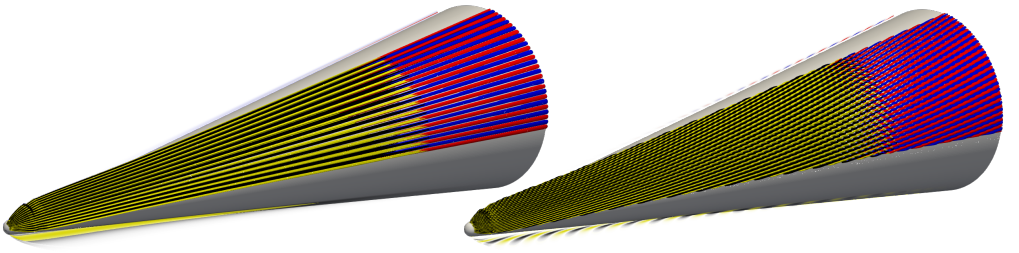
(c) 等温钝锥局部放大图

(d) 等温钝锥增益分离图

图4：(f^*, m)平面内的等温增益图。给定 f^*时增益最大的模态

4. 等温预解式增益图

了解主导放大机制的一种初步方法是查看最优增益图 $\mu_0^2(f^*, m)$。本节展示等温钝锥情形的结果，并以经典尖锥作为参考，评估钝度的影响。图4a、4b展示了尖锐参考构型和钝头情形下，频率为 0 至 330 kHz、方位波数分别为 0 至 100 和 0 至 200 时，频率-方位波数平面（f^*, m）中的最优增益图 μ_0^2。预解分析揭示了尖锐情形与钝头情形之间的显著差异。首先，钝头情形的最大增益比尖锐情形小 6 个数量级以上。这一巨大差异可归因于已知的麦克模态受到强烈衰减，尤其是 2nd 麦克模态因钝度而显著衰减。在尖锐情形下，该模态在（f^*, m）$=(330\ \text{kHz}, 0)$时放大最显著，并且是计算所得（f^*, m）平面中放大最显著的模态。钝头情形中的衰减，是由熵层导致的局部雷诺数降低所致（Lei 和 Zhong，2012）；这会减弱密度梯度，抑制第二模态赖以放大的声学共振（Batista等，2020），且与Marineau等（2014）的实验结果一致。在本分析中，2nd 模态在钝头情形下受到如此强烈的衰减，以至于不再作为最优预解式模态存在（有关网格收敛的更多详情见附录 A）。流动动力学从由低秩高频机制主导，转变为主要由高秩系统主导，其中放大最显著的模态出现在较低频率。图4c展示了增益图在 $f^* \in]0$至 $50]$ 千赫和 $m \in [0, 100]$ 之间的局部放大图，对应于



(a) 最优稳态
条带的三维可视化，$(f^*, m) = (0, 57)$，黑色和黄色表示强迫的等值面，红色和蓝色表示响应的等值面

(b) 三维可视化
$(f^*, m) = (35$千赫$, 88)$ HAWEL 模态，黑色和黄色表示强迫的等值面，红色和蓝色表示响应的等值面

图 5

图 4b中的红色矩形。图 4d 展示了最优模态与第一亚优模态之间相应的增益分离，以比值 μ_0^2/μ_1^2 表示。

放大程度最高的模态族对应于频率为 $f^* = 0$ 千赫的条带，其中放大程度最高的模态位于 $m = 57$ （图 5a），增益为 $\mu_0^2 \approx 10^7\,\mathrm{s}^2$,，增益分离约为 9。这与 Paredes等人（2019年*a*）的 PSE 分析一致；他们发现，在与本文构型相近的条件下，条带是放大程度最高的模态。稍后将在第 5 节详细讨论这一模态。

黑点所示的放大程度最高模态随频率变化的情况表明，随着频率升高，其方位波数增大，并在 $m = 89$处达到最大值，频率为 $f^* = 21$ 千赫。在降至零之前，放大程度最高模态的方位波数在频率达到 $f^* = 140$ 千赫前一直保持较高。这些频率介于 20 千赫和 140 千赫之间的模态，其强迫和响应在熵层中均有显著分布，因此称为高方位波数熵层模态（HAWEL）（图 5b）。这些结果也与 Paredes 等人 （2019年*a*）的发现一致，他们观察到熵层模态具有显著放大。这类模态的增益分离介于 2 和 4 之间，如图 4d所示。放大程度最高模态的增益随频率升高而下降，如图 6 所示。在 HAWEL 模态对应的频率范围内，其增益比最优条带模态低 6 至 20 倍。不过，实验中已观察到熵层细丝（Grossir 等人 2019年；Kennedy 等人 2022年；Ceruzzi 等人 2024年），因此有必要深入研究其性质，相关内容将在第 6 节介绍。

在增益分离度图 Figure 4d中，$(f^*, m) = (11$ 千赫，$21)$处出现了一个局部峰值。该位置的最优模态对应于 1st 麦克模态，可通过其特征性的强迫与响应廓线加以识别（见附录 24，附录 B）。如前所述，由于钝度引起的基流变化，与尖锥情形相比，第一 Mack 模态受到显著阻尼，并向较低频率和方位波数偏移；在尖锥情形中，增益最大的第一 Mack 模态出现在 $(f^*, m) = (65$ 千赫，$37)$。

4.1. 次优模态

与尖锥相关的低阶模态机制相比，钝锥流动状态具有更高阶的特性（即增益分离较小），因此有必要更详细地回顾次优预解算子响应和强迫模态。本节讨论不同方位波数下的增益分离，并研究相应的响应结构和强迫结构。

Rapids 文章不得超过此页长度

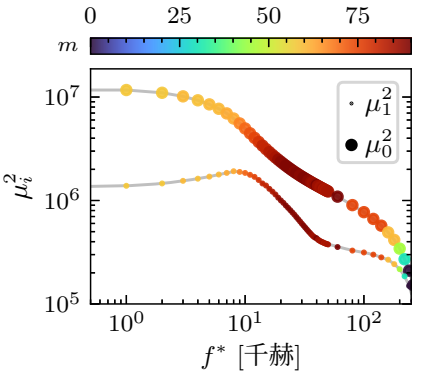
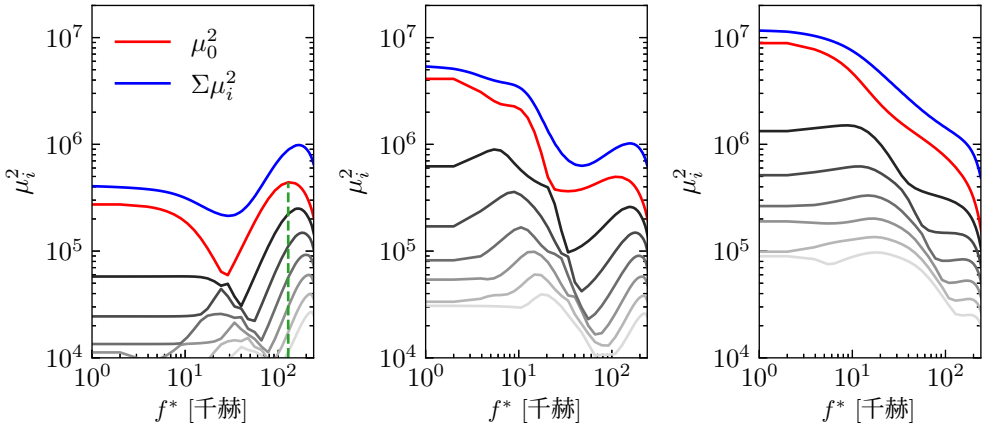


图 6：等温钝头情形下，最放大模态的最优增益函数和次优增益函数随频率的变化



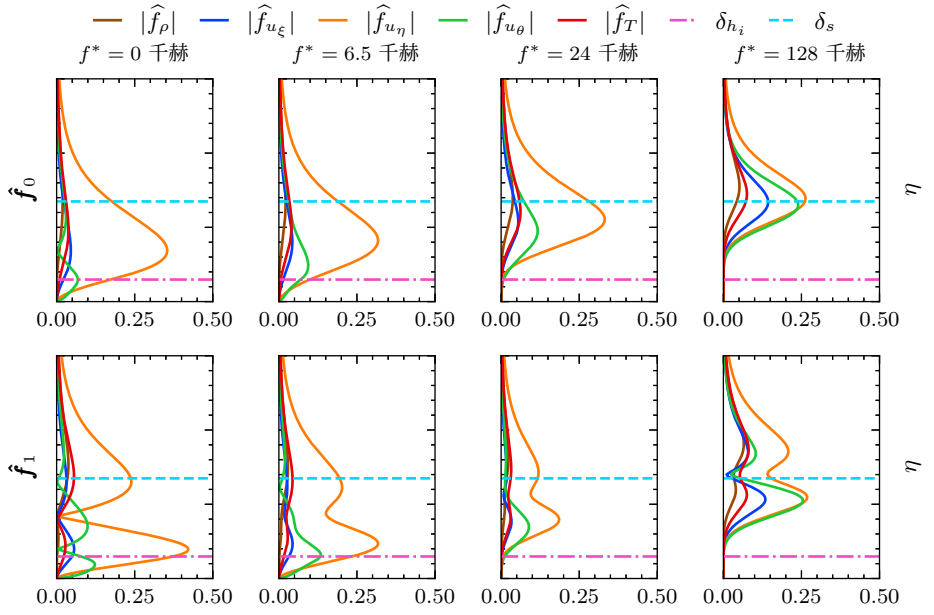
(a) $m = 0$ (b) $m = 21$ (c) $m = 88$

图7：不同 m下， f的最优增益及前几个次优增益

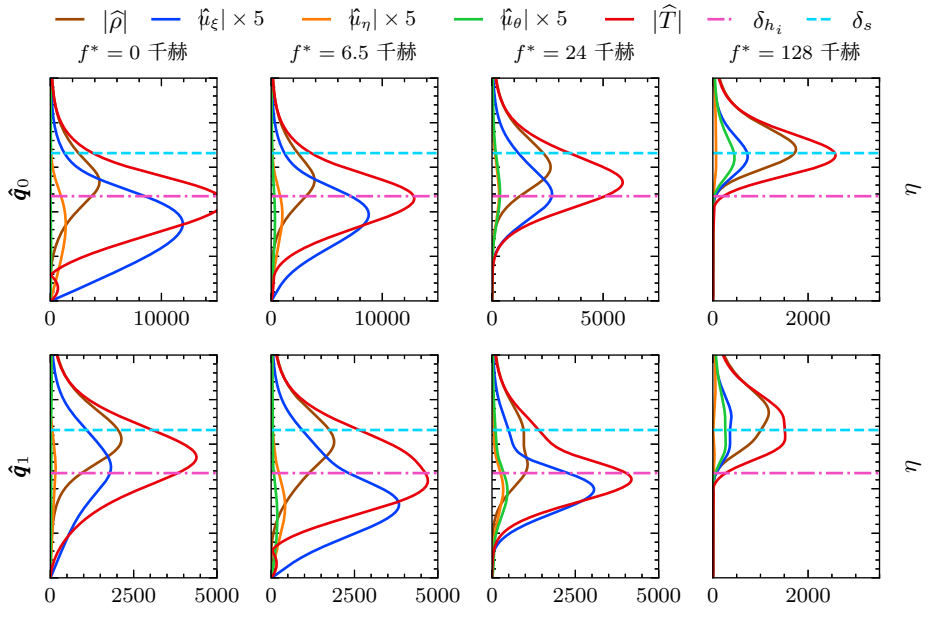
图7 展示了不同方位波数下前几个最优模态的增益函数。从 $m = 88$开始，图7c展示了前两个最优模态的增益。图8 展示了 $\xi = 20$ 时不同频率下前两个最优模态的剖面：强迫对应计算域起始处，响应对应计算域末端。低频时，放大最显著的模态是次优条带（最优模态对应 $m = 57$）。这一点可从强迫结构的特征形态看出：它具有壁法向速度和方位速度强迫，而流向速度和温度的响应很强。第5节将更详细地讨论最优条带的关键特征。

随着频率增加（图7c），最优模态和次优模态的增益均减小，且强迫结构移入熵层；这些就是 HAWEL 模态。在 $f^* = 128$ 千赫时，强迫最显著地作用于$f_{\hat{u}_\theta}$和 $f_{\hat{u}_\xi}$，响应则对熵层中的温度有强烈响应。最优模态与次优模态的区别在于强迫中存在双叶结构，但两者的响应剖面相当相似。第6节将对 HAWEL 模态进行更详细的分析。

现在考虑 $m = 0$处的模态，见图7a，可以看出有两个明显的

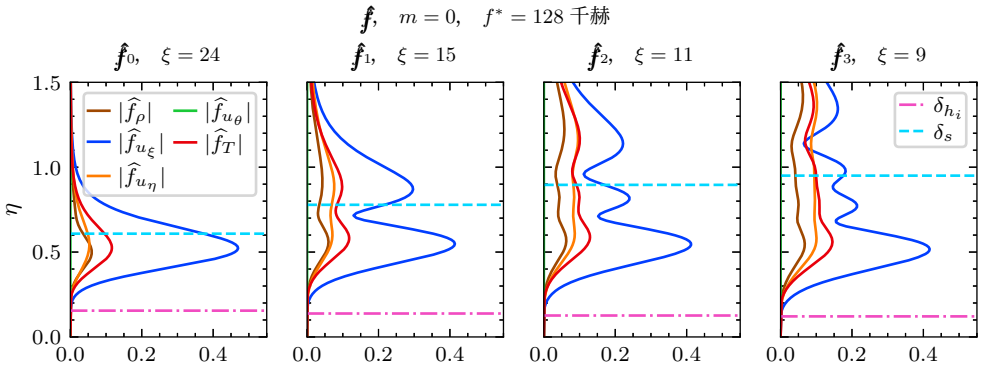


(a) 最优强迫的绝对值（上，模态 0）和 1st 次优强迫（下，模态 1）在 $m = 88$在 $\xi = 20$

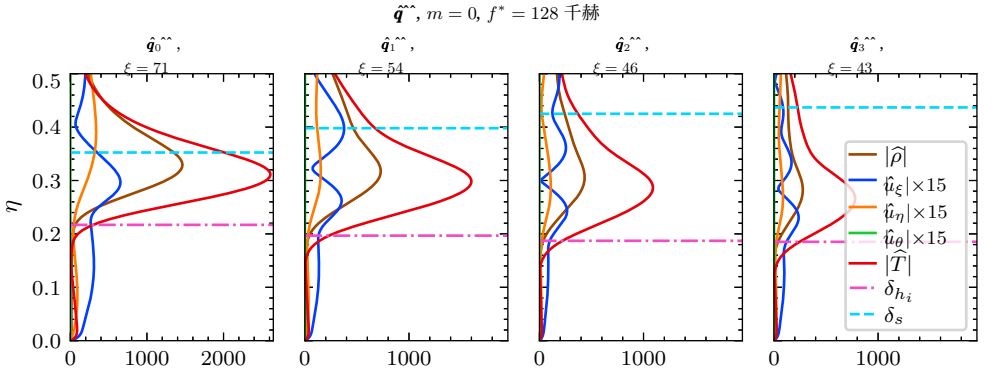


（b）最优响应的绝对值（上方，模态 0）和 1st 次优响应（下方，模态 1）在 $m = 88$在 $\xi = 94$

图8



(a) 在流向速度强迫达到最大值的曲线坐标处， $m=0$, $f^*=128$千赫下前4个最优模态中平面模态最优强迫剖面的绝对值



(b) 在温度脉动达到最大值的曲线坐标处， $m=0$, $f^*=128$千赫下前4个最优模态中平面模态最优响应剖面的绝对值

图9

在 $f^*=25$ 千赫处切换主导位置的机制。较低频率区域（$f^*\leqslant10$千赫）的增益对应于一种较弱的机制，该机制在激波处具有特征，表明其中可能存在一些伪模态（见附录 B）。在较高频率下，主导机制发生切换，新的最优模态在 $f^*=128$ 千赫处达到峰值，并在熵层中显现。图9 沿图 7a中的绿色虚线，展示了128千赫下前4个最优模态的壁法向剖面。这些模态的流向位置是流向速度强迫和温度响应幅值最大的位置，而流向速度强迫和温度响应正是这些模态的主导原始变量。所有这些模态在熵层中都具有强迫和响应特征。随着模态阶数增加，强迫和响应峰值位置均向上游移动。尽管这些模态在熵层中显现，但其特征不同于 HAWEL 模态，因此可将二者区分开来：最强的强迫变量是流向速度强迫，而 HAWEL 模态中的最强强迫变量则是壁法向速度强迫与方位速度强迫的组合。

在 $m=21$处，见图 7b，最优机制再次发生转变。低频时，最优模态是条带。频率升高后，最优模态变为 1^{st}Mack 模态，并在约 $f^*=11$ 千赫处具有最大的增益分离。在 $f^*=20$ 千赫处，主导放大机制发生转换。这些新模态的最大增益出现在 $f^*=130$ 千赫附近，与 ($f^*=128$ 千赫， $m=0$)模态具有相似特征，但周向速度强迫更强。这些介于 25 千赫与

	条带	一阶模态	低方位波数熵层模态	高方位波数熵层模态
频率范围 [千赫]	$[0,5]$	$[7,20]$	$[70,250]$	$[20,140]$
m 范围	$[40,80]$	$[15,35]$	$[0,20]$	宽 $m_{peak} \approx 90$
增益 $[s^2]$	$\sim 10^7$	$\sim 2.10^6$	$\sim 4.10^5$	$[6.10^5, 2.10^6]$
最大增益分离 ≈ 10		≈ 5	≈ 4	≈ 4

表2：主要机制概述

240 千赫之间且方位波数较低的模态似乎是前文讨论的平面模态的斜向版本，本文将其称为低方位波数熵层模态（LAWEL），详情见附录 B。

表2总结了这些机制的主要特征：2下一节将重点介绍和分析与主导最优模态增长相关的机制，首先从最优条带模态开始。

5. 等温钝锥最优条带模态

单位强迫能量下总体最放大的模态对应于 $f^* = 0$ 千赫和 $m = 57$ 处的稳态条带模态。为了将该条带模态的特征与尖锥流动进行比较，我们对 Chu 能量进行了分析。该能量范数定义为

$$E_{Chu} = \frac{1}{2}\int_V \underbrace{\overline{\rho}\,|\mathbf{u}'|^2}_{\text{Kinetic (KE)}} + \underbrace{\frac{\overline{T}}{\overline{\rho}\gamma M^2}\rho'^2}_{\text{Density term (D)}} + \underbrace{\frac{\overline{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M^2 \overline{T}}T'^2}_{\text{Temperature term (T)}}\, dV, \tag{5.1}$$

其中包括动能（KE）项、密度项（D）和温度项（T）。沿壁面法向积分的 Chu 能量密度（$E_\eta(\xi) = \int_0^{\eta_{max}} E(\xi,\eta)\,d\eta$）如图 10a所示。该图展示了强迫和响应的 Chu 能量密度分布位置及分布方式。强迫能量密度仅由动能构成，温度脉动 T 和密度脉动 D 的能量项可以忽略不计。头部段强迫的沿壁面法向积分能量密度非常小，在圆锥起始处急剧增大，并在 $\xi = 10$处达到峰值，该位置略微晚于熵层与边界层边缘间距达到最大值的位置。响应在计算域末端达到最大值，其能量由与流向条带相关的动能脉动构成，但 T 能量项的贡献也很大。图 10b展示了不同速度项对动能的贡献。强迫最初几乎完全由壁法向速度脉动主导，直到约 $\xi = 50$ 处，方位速度分量的动能才变得与之相当。后段特征表明，强迫结构已呈现纵向涡量的形态；但值得注意的是，在上游强迫最大的区域，最优运动包含熵层内局部集中的强径向脉动。对于响应，动能中最重要的是流向分量。

图中展示了强迫和响应结构（ξ，η）流向平面上的情况，见图11 ˆ，其中展示了能量最大的 Chu 范数组分量：f_{u_η}和 $\hat{u}_\xi$。此外，为了更清楚地了解该模态的组织方式，图（η，θ）展示了不同轴向位置处的多个横截面12 ，分别对应强迫和响应。这些图展示了强迫速度

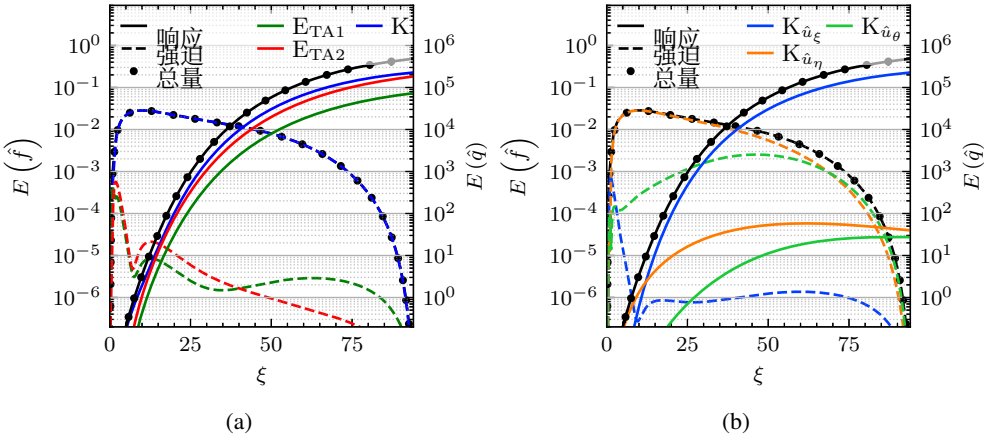


图 10：条带模态的沿壁面法向积分的 Chu 能量密度（E_η）（左）和动能密度（右）随 ξ 的变化

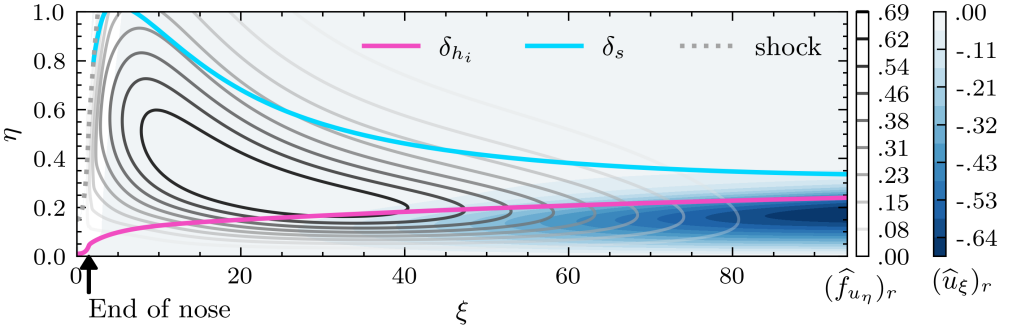
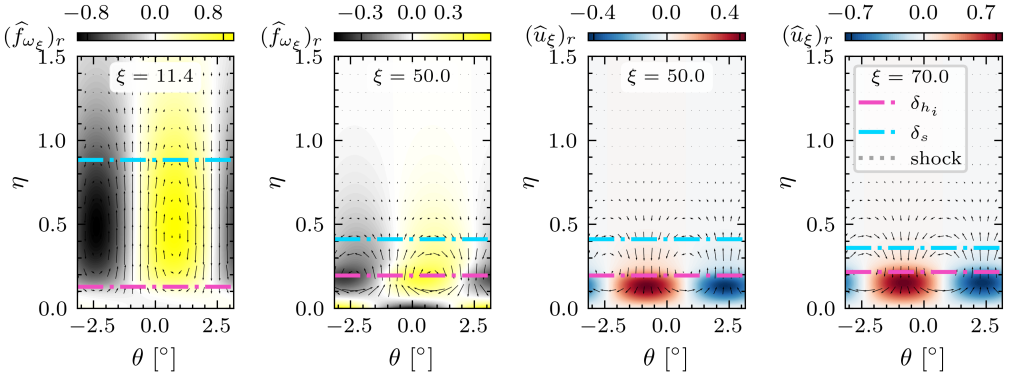


图 11：条带模态中振幅最大的变量所对应的壁法向速度强迫（灰色）和流向速度响应（蓝色）实部的全局形状。分别以各自的最大绝对值归一化

^ ^ ^ 矢量场及其对应的流向涡量，计算方式为 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\omega},\,\xi} = \partial \boldsymbol{f}_\theta/\partial\eta - \partial \boldsymbol{f}_\eta/\partial\theta$，展示了强迫较强的两个上游位置；以及更下游处的响应速度矢量场。

起初，强迫主要由近乎纯粹的壁法向速度脉动主导，这些脉动主要局限于熵层，并由方位角方向上相邻、壁法向速度方向相反的区段组成。在这些上游站位，尤其是在感受性最强的位置（强迫峰值处），该机制具有许多与抬升机制相似的特征，但一个关键区别在于，主要强迫支撑局限于熵层，而在上游区域，熵层远高于边界层。这凸显了熵层在钝体条带生成过程中的重要性。这也表明，穿过弓形激波的大气扰动能够在边界层内激发条带状扰动，而不一定要深入边界层。强迫与响应的下游演化显示，随着熵层与边界层合并，抬升机制特有的涡卷-条带构型逐渐形成。强迫中的纵向涡量逐渐进入边界层，增强边界层内的条带状响应；随着流向位置增加，该响应持续增长。



(a) 强迫 (b) 强迫 (c) 响应 (d) 响应

图 12：最优条带模态的强迫速度矢量场实部及其对应的流向涡量（左）& 响应速度实部（右）

为探究导致该模态产生的机制，我们仿照Dwivedi 等人(2019年)，考察线性化动能方程与温度能量方程的能量收支。在此分析中，能量（KE）项和温度（T）项分解为输运（Tr）、产生（P）、源项（S）、黏性项（V）和强迫（F）项，如下所示：

$$\overline{\rho}\partial_t \mathbf{u}' \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi + \mathrm{KE}_{\mathrm{Tr},\xi} = \mathrm{KE}_{\mathrm{P1},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{P2},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{S},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{F},\xi} \tag{5.2}$$

$$\frac{\overline{\rho}}{2(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\partial_t T'^2 + \mathrm{T}_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{T}_{\mathrm{I}} + \mathrm{T}_{\mathrm{II}} + \mathrm{T}_{\mathrm{S1}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V1}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V}\mu 1} + \mathrm{T}_{\mathrm{S2}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V2}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V}\mu 2} + \mathrm{T}_{\mathrm{F}} \tag{5.3}$$

这些方程的完整推导见附录 C。

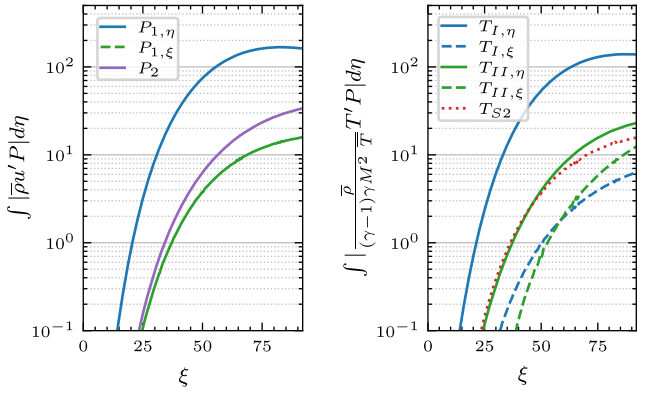
结果所在位置的流线曲率很小：$1/R < 10^{-10}$，其中 R 为局部曲率半径（附录 D），因此能量收支分析是在平行于壁面的线上进行的。图 13 展示了最重要的沿壁面法向积分、时间平均和方位角平均的能量收支项随 ξ变化的情况，以下是动能方程中各项的表达式：

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{P1},\,\xi} = \left\langle -\overline{\rho}\,(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}\cdot u_\xi{}'\mathbf{e}_\xi \right\rangle = \left\langle \overline{\rho}\Big(\underbrace{-u_\xi{}'\partial_\xi \overline{u_\xi}}_{\text{Acceleration P1}_\xi} \underbrace{-u_\eta{}'\partial_\eta \overline{u_\xi}}_{\text{Shear P1}_\eta} \Big) u_\xi{}' \right\rangle \tag{5.4}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{P2},\,\xi} = \left\langle -\overline{\rho}\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\,(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}\cdot u_\xi{}'\mathbf{e}_\xi \right\rangle \approx \left\langle \overline{\rho}\left(-\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\,(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\,\overline{u_\xi}\right) u_\xi{}' \right\rangle \tag{5.5}$$

其中 $\cdot = \frac{mf}{2\pi}\int_0^{\eta_{\max}}\int_0^{2\pi/m}\int_0^{1/f} \cdot\, dt\,d\theta\,d\eta$，当 $m \neq 0$和 $f \neq 0$时，否则省略各自对应的均值。

产生项源自：（i）速度脉动对基流速度的输运，见方程 5.4；（ii）密度脉动项，见方程5.5。由于该模态的动能主要由流向速度脉动构成，因此本研究只考虑流向速度脉动。第一个产生项进一步分为两个部分：第一部分称为加速，源于平均流的流向加速或减速；第二部分称为剪切，取决于平均流的壁面法向梯度，并由抬升效应引起（Landahl 1980）。图13a显示抬升机制



(a) (b)

图13：最优条带模态的线性化动能方程（左图，13a）和温度方程（右图，13b）的壁法向积分主导产生项

占主导地位，是整个计算域内动能从基流传递至模态的主要机制。

对于温度方程，主导项为：

$$\mathrm{T_I} = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\mathbf{u}' \cdot \left(\nabla \overline{T}\right)\right\rangle = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\Big(\underbrace{u_\xi{}' \partial_\xi \overline{T}}_{\text{wall-parallel } \mathrm{T}_{I,\,\xi}} + \underbrace{u_\eta{}' \partial_\eta \overline{T}}_{\text{wall-normal } \mathrm{T}_{I,\,\eta}} \Big)\right\rangle, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{T_{II}} = \left\langle -\frac{\rho'}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\overline{\mathbf{u}} \cdot \left(\nabla \overline{T}\right)\right\rangle = \left\langle -\frac{\rho'}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\Big(\underbrace{\overline{u}_\xi \partial_\xi \overline{T}}_{\text{wall-parallel } \mathrm{T}_{II,\,\xi}} + \underbrace{\overline{u}_\eta \partial_\eta \overline{T}}_{\text{wall-normal } \mathrm{T}_{II,\,\eta}} \Big)\right\rangle, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{T_{S2}} = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{\gamma^2 M_\infty^4}(\nabla \cdot \mathbf{u}')\right\rangle, \tag{5.8}$$

其中，$\mathrm{T_I}$ 和 $\mathrm{T_{II}}$ 分别表示速度脉动和密度脉动对基流温度的输运，对应于动能方程中的产生项 P1 和 P2。$\mathrm{T_{S2}}$ 表示速度膨胀加热。这里，沿壁面法向的 $\mathrm{T}_{I,\,\eta}$ 项对 T 能量的贡献最大，见图13b。壁法向速度响应混合热边界层，使高基流温度的流体上升、低温流体下降，从而形成温度条带。

总之，在中等钝头区间内，最优条带模态的条带感受性机制由熵层中的径向速度泵吸构成，它会激活：负责流向速度条带增长的抬升机制，以及一种与热梯度相关的类似混合机制，从而形成温度条带。

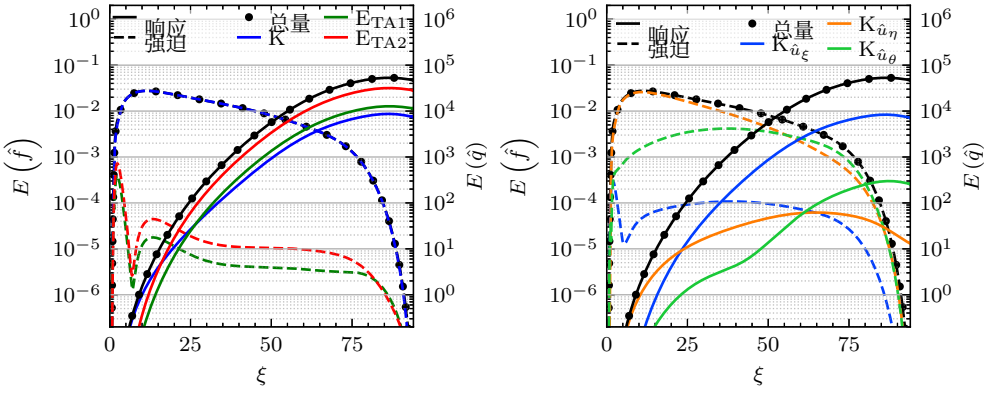


图 14：沿壁面法向积分的 Chu 能量密度 E_η（左图14a）和动能密度（右图14b），随 ξ 变化的熵层模态

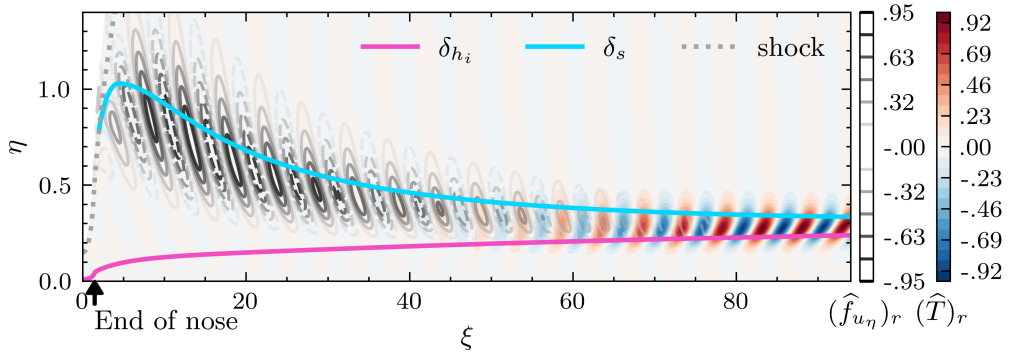
6. 等温钝锥的最优 HAWEL 模态

尽管 HAWEL 模态族的放大程度比最优条带模态低 6 到 20 倍，但 Kennedy 等人 (2022年) 在实验中观测到了熵层扰动，而受控直接数值模拟研究表明，这些扰动可能是转捩的根源（Hartman 等人2021年；Paredes 等人 2020年）。此外，可实现扰动预解分析表明，我们所采用的标准预解算子计算得到的增益值应谨慎看待（Kamal 等人 2023年）。换言之，最终出现的机制在很大程度上取决于来自大气、进入流动的扰动类型，以及这些扰动如何投影到最优强迫支撑上（见方程 2.14）。这也是本研究仔细考察所有模态和机制十分重要的另一个原因。基于这些原因，本节将全面表征 HAWEL 模态：首先考察一个具体示例(f^*, m) =(35千赫，88)，随后考察支撑位于熵层中的 HAWEL 模态族。在下一节中，我们将把 HAWEL 模态统称为熵层模态。

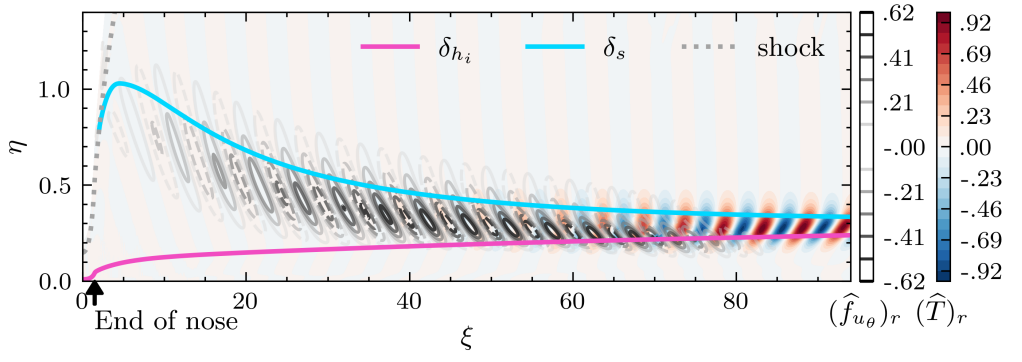
6.1. 在 $f^* = 35$ 千赫、$m = 88$ 时熵层模态的分析

本节将详细分析一个频率为 $f^* = 35$ 千赫、 $m = 88$ 的熵层模态。该模态代表了一大类最优熵层模态。特别选择这一模态，是因为它处于熵层模态族的范围内（即远离增益图图4c中显示的其他最优机制），同时也是增益为 $\mu_0^2 = 1$的熵层模态中放大程度最高的模态之一。7×10^6 s^2。我们将通过研究该模态的能量特性来探究其性质：首先考察其在计算域中的能量增长，然后介绍该模态的形态，最后进行能量收支分析，以了解这种能量增长的源项。

强迫能量 E_η 主要由动能构成，见图14a。钝头尖端处的强迫能量很少，但在锥段起始处迅速上升，并在 $\xi = 11$。6处达到峰值，此处边界与熵层之间的间距接近最大值。随后，强迫能量逐渐减弱，直至$\xi = 70$ 处急剧下降。图14b将动能密度分解为三个速度分量。强迫主要由壁法向速度构成，直到 $\xi = 50$ 处，之后方位速度强迫变得同样重要。这是纵向涡量强迫的特征。另一方面，响应最初由



(a) 壁法向速度强迫

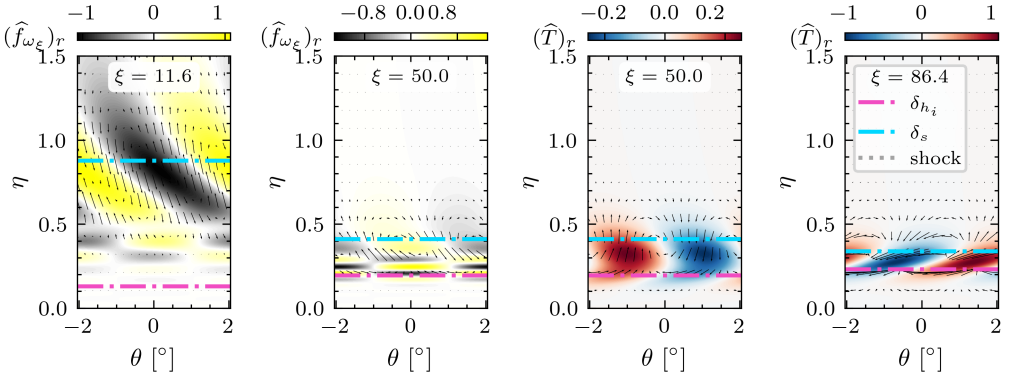


(b) 方位速度强迫

图 15：方位速度和壁法向速度强迫（灰线，虚线表示负值）的实部全局形状，以及对应于熵层模态中振幅最大的变量的温度响应（蓝色）。分别以 max $||\hat{\boldsymbol{f}}_u||$ 和 max $|\hat{T}|$ 归一化

动能主导，直至 $\xi = 15$；此处局部强迫也最为显著。但随后，响应迅速转为由 Chu 范数中的温度脉动 T 能量项主导，并持续至圆锥末端。在 $\xi = 25$处，密度 D 能量项也变得比动能更重要。这表明，强迫首先激发熵层中的速度脉动，随后逐渐向密度和温度脉动转移。响应随后在计算域末端之前的 $\xi = 86.4$ 处达到峰值，这表明当熵层与边界层之间的径向间距或平行程度达到某一阈值后，该模态便不再能够增长。

为了解模态的结构，图 15a 和 15b 展示了 (ξ, η) 流向平面，其中包括壁法向速度强迫、方位速度强迫以及温度响应；这些是能量分析中的主要原始变量。图16展示了 (θ, η) 横截面，分别显示强迫速度场及其对应的流向涡量，以及响应速度场和温度场。作为补充，图 17 展示了相同位置处的强迫与响应剖面。首先需要注意的是，该模态的大部分强迫和响应都位于远离边界层的位置，即熵层的上部边缘。然而，当熵层与边界层在径向上的间隔较小时，边界层顶部也会出现一定程度的强迫和响应。强迫主要由



(a) 强迫 (b) 强迫 (c) 响应 (d) 响应

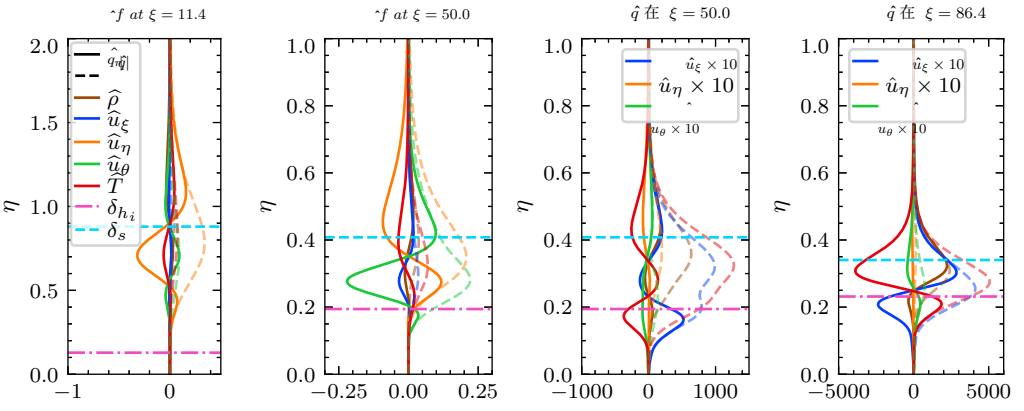
图16：熵层模态的强迫速度矢量场实部及其对应的流向涡量 **(左侧)** & 响应速度与温度的实部 **(右侧)**

壁法向速度构成，其径向支撑范围延伸至熵层边界之外，具体定义见第 3节。上游这些位置的强迫主要由正负交替的壁法向速度脉动构成（见 θ和 ξ）。相应的流向涡量形成了具有较大方位倾角的条带。下游在 $\xi = 40$之后，方位速度强迫变得更加重要，强迫结构呈现为流向涡，另见图 17b。响应在下游显现为沿流向和方位方向振荡的温度，其最大支撑范围位于边界层与熵层边缘之间。强迫速度结构起初倾斜方向与速度梯度相反，而随着向下游移动，响应结构逐渐变得与速度梯度同向倾斜。这些结构从上游到下游逐渐旋转，令人联想到类奥尔机制；但这一过程发生在熵层而非边界层。其根本原因可能在于基流：在边界层与熵层边缘之间，流向速度持续增大，形成剪切区，使模态以随熵层内 η 变化的速度向下游对流。在方位方向上，当 $m > 0$时，模态从上游到下游顺时针旋转；因此，高温响应区对应向上的壁法向速度，而低温响应区则相反。这意味着高温流从边界层被抬升至熵层，而低温流则从上方被卷入熵层。

6.2. 在 $f^* = 35$ 千赫、$m = 88$ 时熵层模态的能量收支分析

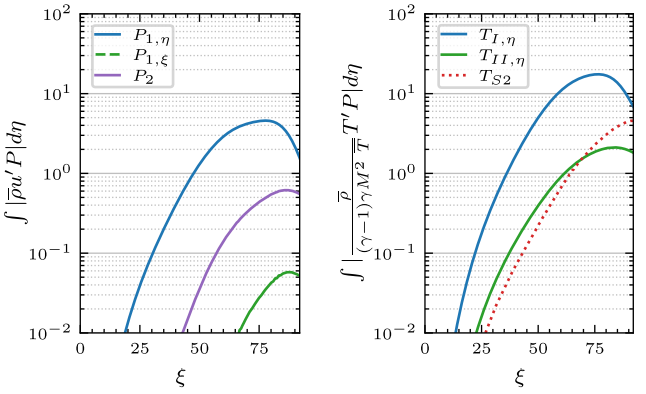
为了全面了解与该模态相关的机制，以类似于最优条带模态分析的方法进行能量收支分析。图18a 显示了动能产生中最重要的各项。剪切产生项在各处均占主导地位，并在 $\xi = 80$ 附近达到峰值，该位置略早于响应Chu能量密度的最大值。在达到最大产生率之前，可以识别出两个指数斜率区域。第一个区域延伸至 $\xi/Rn = 60$，其中斜率最为显著；第二个区域位于其后，一直到 $\xi = 80$ 处的最大值，此处的斜率较小。第二个区域的起点，即产生最为显著的位置，与方位速度强迫变得比壁法向速度强迫更重要的点相吻合，见图14b。

为阐明 T 能量如何增长，图18b 展示了对



(a) 强迫　(b) 强迫　(c) 响应　(d) 响应

图 17：熵层模态在最大强迫位置、中间位置和最大响应曲线坐标处对应的无量纲化局部剖面

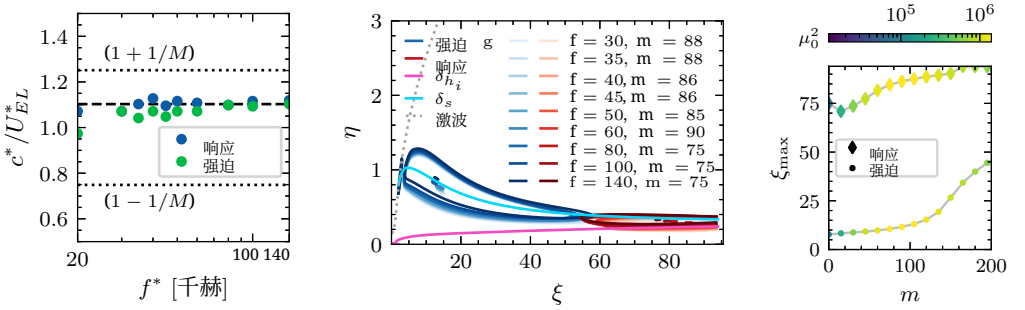


(a)　(b)

图 18：熵层模态的线性化动能方程（左，18a）和温度方程（右，18b）的沿壁面法向积分主导产生项

T 能量增长有贡献的不同项。其中，$T_{I,\eta}$ 项占主导地位，它表示壁法向速度脉动对基流温度的输运。研究发现，速度膨胀在熵层模态的增长中并不发挥重要作用。尽管不如动能产生那样显著，$T_{I,\eta}$ 项的斜率也分为两个区域。第一个区域延伸至 $\xi = 60$，此时 $T_{I,\eta}$ 增长最快。接着是第二个区域，从 $\xi = 60$ 延伸至 $\xi = 80$处的增长峰值，此时 $T_{I,\eta}$ 能量趋于平稳。

这些不同的因素表明了以下机制：熵层模态由速度脉动与基流温度梯度的共同作用产生，使流动从高能量区域移向低能量区域。作用程度较小的是，速度脉动对熵层中的动量也产生了类似作用。



（a）
熵层模态的相速度

（b）强迫幅值的等值线 $|\hat{f}_{u_\eta}|/max = 0.5$ 和响应 $|\hat{u}_\xi|/max = 0.5$ 熵层模态的 $f^* \in [30,\ 140]$ kHz

(c) 最大值位置
强迫与响应 Chu 能量模态在 $f^* = 40$千赫

图19

6.3. 熵层模态特性

现在我们考察整个 HAWEL 模态族。对于广泛的频率范围（20 至 140 千赫）以及 75 至 90 的方位波数，强迫和响应在熵层中均有广泛分布的 HAWEL 模态都存在。响应模态的相速度由 $c = \omega/\alpha$ 给出，其中 α 为流向（角）波数，绘于图19a中。该值通过以下方式计算：在 $\eta/R_n = 0$处的一条平行于壁面的线上，对 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 进行空间傅里叶变换，并取其主导项以确定流向波数。3. 结果表明，在最佳方位波数下，响应模态的相速度保持恒定（对应图4b中的黑点），且在计算域末端，比熵层边缘处的局部流速快 1.09 倍。对强迫模态采用了类似的方法，发现其相速度在所有情况下都略低。

最大响应的流向位置 E_η 与所考察熵层模态的频率无关。此外，图(ξ， η)所示的响应和强迫在19b平面内的分布，对于最优熵层模态也与频率无关，这表明熵层模态随频率变化具有自相似性，并且存在一种可使模态形状重合的尺度变换。然而，当方位波数与最优值相差较大时，强迫峰值和响应能量的流向位置会发生变化，见图19c，其中给出了最优强迫位置和响应位置，并以最优增益值着色。此处绘出了频率为40千赫的模态的最大 Chu能量密度所在流向位置随 m的变化。随着 m 在对应于熵层模态的范围内 $m \in [40, 200]$ 增大，响应位置持续向下游移动。这表明基流存在一个特征长度尺度，它决定了熵层模态对应的波数和频率范围。强迫峰值也随 m增大而呈现向下游移动的趋势，但在 $m < 120$之前，峰值振幅仍位于上游；之后，随着波数进一步增大，峰值会迅速向下游移动。这表明强迫过程主要倾向于发生在边界层与熵层径向间距较大的位置。结合模态组织随频率变化具有自相似性这一观察结果，可以推测，这些模态的特征时间和长度尺度可能与熵层和边界层之间的高度差$\delta_s - \delta_{h_i}$或夹角 θ 有关 $\theta(\delta_s) - \theta\left(\delta_{h_i}\right)$。这一尺度可能是决定这些模态感受性的关键参数。

7. 壁温效应：绝热钝锥

以往关于高超声速边界层不稳定性的研究（Mack 1987）表明，经典 Mack第一模态和第二模态的放大强烈依赖于壁面温度与恢复温度之比（即绝热壁温）。在高超声速飞行过程中，壁面温度会因材料性质和飞行轨迹类型（再入、巡航）而显著变化。因此，壁面温度可能从冷态变化到暖态，这促使人们研究壁面温度与恢复温度之比的影响。为此，我们现在将分析扩展到一种类似的钝锥构型，但采用绝热壁条件，以便与前几节研究的冷等温壁进行比较。

7.1. 预解算子增益图

绝热壁的最优增益图如图 20所示。与等温情况相比，放大最显著的模态不再是稳态条带模态，而是Mack第一模态，其出现于15千赫和方位波数 $m = 23$处。这种放大与此前记录的绝热至温热壁条件下第一模态失稳的增长一致（Mack 1987）。该模态的增益为 $\mu_0^2 = 1$。$48 \times 10^7\,\mathrm{s}^2$,，略高于 $\mu_0^2 = 1$。$20 \times 10^7\,\mathrm{s}^2$ 所示的等温条带模态增益，但与尖锐情形相比大幅衰减：对于 $\mu_0^2 \approx 10^{11}\,\mathrm{s}^2$ 模态为 1st，对于 $\mu_0^2 \approx 10^{13}\mathrm{s}^2$ 模态为 2nd。领先模态与第一亚最优模态之间显著的增益分离与模态放大机制一致。在低频下，绝热情况下放大最显著的条带模态是 $m = 54$处的稳态模态，其增益为 1。$28 \times 10^7\,\mathrm{s}^2$。超过35千赫后，与Mack第一模态相关的增益减小。

在这一较高频率范围内，熵层模态族重新出现，其特征与等温壁情况中的观察结果相似。绝热熵层模态的增益和增益分离与等温情况相似，这表明这些模态对壁面条件并不十分敏感。等温壁与绝热壁条件下主导放大机制的转变，对飞行器的转捩建模具有实际意义，因为壁面温度可能会在较冷的等温壁和绝热壁情况之间变化。

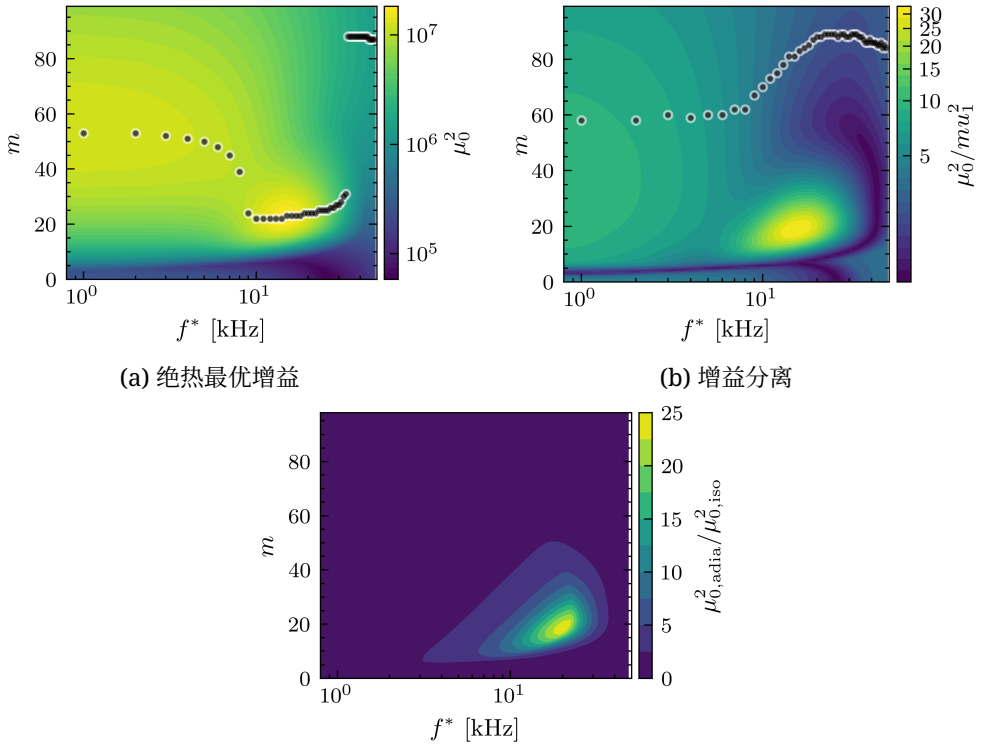
7.2. 绝热钝锥最优 1st *Mack*模态

放大最强的绝热模态是 1st Mack模态，其特征与经典尖锥的 1st Mack模态相似。图 (ξ, η) 展示了该模态的流向平面。21强迫和响应主要位于边界层边缘。最优 1st Mack模态利用Orr机制使初始扰动能量最大化。这一点在其形成的感受性结构中显而易见：该结构呈现出交替带状，并倾斜于流速梯度的反方向，这是Orr机制的典型特征。随后，第一模态在进一步向下游演化时经历模态指数放大。

钝度和诱导边界层的存在，使 1st 麦克模态的最大增益与等效尖锐圆锥上的流动相比大幅降低。然而，熵层不会改变 1st 麦克模态的行为，其表现与平板上的情况非常相似（Bugeat 等 2019年）。

8. 结论

高超声速中等钝体上的转捩尚未得到充分理解，过去的研究也未能全面综述此类流动中的不稳定性与感受性。钝度会产生脱体激波，显著改变基流，



(a) 绝热最优增益

(b) 增益分离

(c) 绝热增益与等温增益比值

图 20：(f^*, m) 平面内的绝热增益图。在给定 f^* 下放大最显著的模态

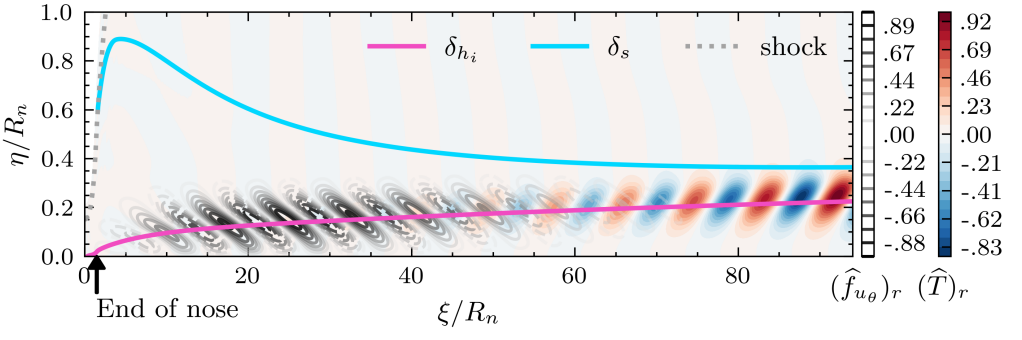


图 21：绝热 1st Mack 模态的方位速度强迫和温度响应实部的全局形状。分别以各自的最大绝对值归一化

相较于尖锐情形，这会改变导致转捩的线性稳定性机制。为解决这一问题，研究采用预解分析，对一个半锥角为 7° 的中等钝度圆锥在马赫数 6、零攻角及雷诺数 $\mathrm{Re}_{R_n} = 90000$ 条件下进行研究，以全面表征在宽广频率和波数范围内可能出现的线性放大机制。一个普遍结论是，在这一中等雷诺数下，所有 Mack 模态都受到强烈阻尼，尤其是第二模态，因而使

转捩路径尚不明确。预解分析表明，在等温壁情况下，方位波数为 $m = 57$ 的条带模态放大最强，其次是在高方位波数下的一系列熵层模态（称为 HAWEL 模态），其放大峰值出现在 $m \approx 88$。此外，还发现了另一类在熵层中具有特征、且不同于 HAWEL 模态的模态，其方位波数较低（$m < 21$）（称为低方位波数熵层模态），其增益远小于其他模态。本研究的主要成果之一，是首次详细描述了这些 HAWEL 最优模态；在较宽的频率和波数范围内，它们都是主要的放大机制。这一描述尤为重要，因为以往的高超声速风洞实验在高速纹影图像中持续观测到沿熵层延伸的脉动（细丝状结构）（Marineau 等 2014年；Jewell 和 Kimmel，2017；Grossir 等2019年；Ceruzzi 等 2024年）。关于这些不稳定性的关键发现是，它们构成了一类具有以下特征的模态：放大较弱（比稳态条带低 6 至 20 倍）；最优强迫明显局限于远高于边界层的熵层中；最优响应则位于边界层上方、且紧邻边界层的熵层中，此处边界层刚开始与熵层合并。这些模态最容易受到上游壁法向速度扰动的影响，而这些扰动沿下游发展为交替分布的流向涡量。另一方面，响应主要体现在温度脉动上；能量分析表明，正是壁法向速度脉动与基流温度和速度的壁面法向梯度共同作用，从基流中向脉动提取能量。

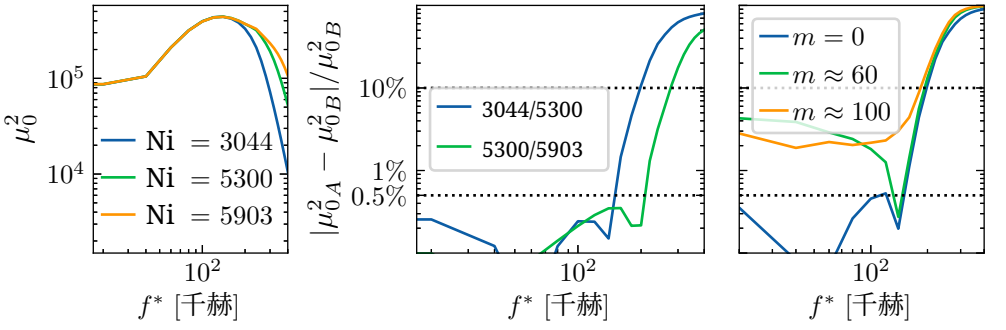
定常条带仍是放大最显著的机制，预计会出现并参与转捩过程。与尖锐参考构型相比，钝度会使条带的感受性区域移入熵层。钝头构型的最优条带模态对径向抽吸最为敏感，随后逐渐进入边界层，在那里，强迫模态中会出现更常见的流向涡量。

有趣的是，在高方位波数熵层模态和条带模态这两种情形中，熵层都在感受性中发挥关键作用。这两种模态在熵层上游均易受壁法向速度强迫影响，而在更下游则更易受纵向涡结构强迫影响。

定常条带对基流的修正会改变模态的增长率（Vaughan 和 Zaki，2011；Caillaud 等 2025*a*）。研究二次稳定性问题有助于深入了解可能的转捩情景。此外，一个有趣的研究视角是分析与熵层模态相关的条带的二次稳定性问题。

关于壁面条件对线性放大机制的影响，这对于理解真实大气层再入与风洞测试之间的差异十分重要。我们的研究表明，在绝热壁条件下，1st Mack 模态在（f^*, m）平面中成为放大最强的模态，其次是在高方位波数下的条带和熵层模态。这进一步表明，在中等钝度流态中，转捩过程可能涉及条带、1st Mack 模态和熵层模态之间的竞争。

虽然预解算子能够描绘所有可能的线性机制，并为最优受迫响应提供深入见解，但它并未考虑可用于驱动流动的物理扰动空间。采用 Kamal 等人 (2023)提出的物理可实现预解分析重新审视这些发现，将进一步阐明本文识别并讨论的放大机制如何由大气扰动激发。或者，在了解环境扰动的情况下，将其投影到最优预解基上，便可计算加权最优增益图，并有望揭示新的机制。



(a) 不同网格在 $m = 0$ 处的最优增益。

(b) 网格 A 相对于更精细的网格 B

(c) 相对误差：包含 3044 个点和 5903 个点的网格之间针对不同 m。

图 22

最后，转捩过程并非仅仅是一个线性问题。研究多模态转捩情景对于理解钝锥转捩过程也至关重要。

利益声明。作者报告称不存在利益冲突

附录 A。

A.1. 预解算子网格收敛

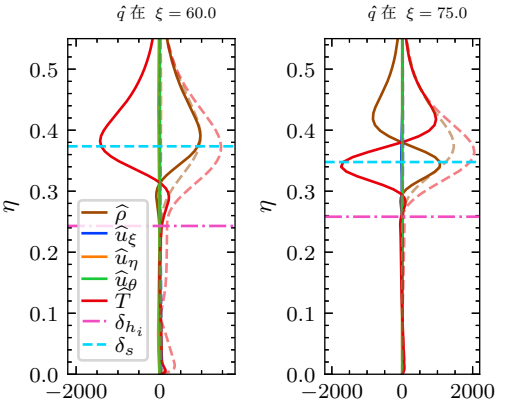
预解分析的网格收敛性基于最优增益的收敛性。在图 22 中，绘出了 $m = 0$ 下不同网格（流向分辨率逐渐提高）的最优增益。由于已解析的法向长度尺度远大于观测到的结构的长度尺度，这里仅展示流向分辨率的收敛性。最粗糙的网格在流向上采用 $Ni = 3044$ 个点时，直到 150 千赫都具有非常好的吻合度；在此频率处，相对于更细网格的相对误差超过了 0.5% 的阈值。所有分析均采用了这一网格。由于增益被低估，超过 200 千赫后相对误差增至 10%；尽管如此，变化趋势仍得以保留，模态结构也基本保持不变。

需要解析的最高频率是 2nd Mack 模态的频率。对于尖锐情形， 2nd 麦克模态在 300 千赫时成为最优模态，并在 330 千赫达到峰值。根据关系式 $f^*_{2^{nd}} \propto U_e/\delta$，由于边界层较厚，钝头情形下的 2nd 模态预计出现在 240 至 260 千赫范围内。在这些频率下，包含 $Ni = 3044$ 个点的网格解析不足，而 5300 网格的误差低于 10%。正如第二 Mack 模态增长时所预期的那样，最优增益并未显著增加。此外，观察这一频率范围内得到的模态剖面可知，它显然并不对应于 2nd 模态，见图 23。 2nd 麦克模态确实受到了衰减，甚至不再是最优预解式模态。

附录B. 次优模态的剖面

为完善第4.1节中关于次优模态的讨论，本附录展示所讨论模态的其他剖面。

图24 展示了以下 $m = 21$ 处两个频率下的前两个最优模态和次优模态。在 $f^* = 20$ 千赫处，可以观察到强迫剖面具有 1st 模态的特征，与平板上观察到的情况相似（Bugeat 等，2019年）。在.....之间



(a) 响应　　(b) 响应

图23：使用高分辨率网格 Ni = 5903计算的模态（f^*，m）=（260 千赫，0）在两个响应较强的流向位置处的最优响应

$f^* = 20$ 和24千赫之间，可以观察到图7b中根据增益描述的主导机制发生了切换。强迫剖面的形状变化表明了这一点：在 $f^* = 24$ 千赫处，最优模态强迫的形状与 $f^* = 20$ 千赫处的次优模态非常相似，而 1st 模态的典型形状则出现在 $f^* = 24$ 千赫处的次优模态中。

在第 4.1 节中也提到了在 $m = 0$ 处及低频下存在轴对称激波模态。图 25 展示了一个位于 (f^*, m) =(1 千赫，0)的示例。

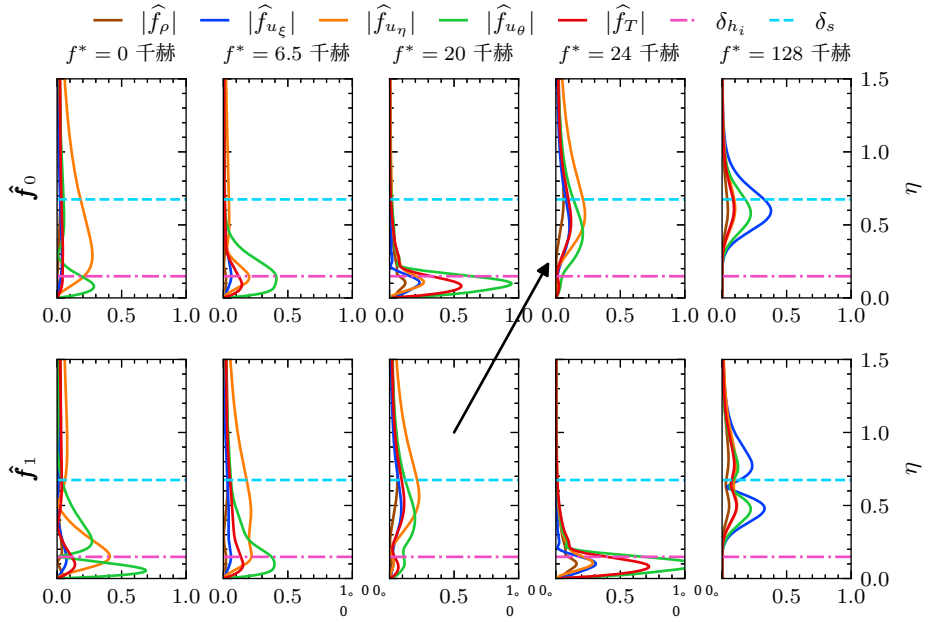
附录 C. 流向速度的线性化输运

用于第 5 节和 6.1 节中能量收支分析的速度和温度脉动完整输运方程列于方程 C 1 和 C2中。

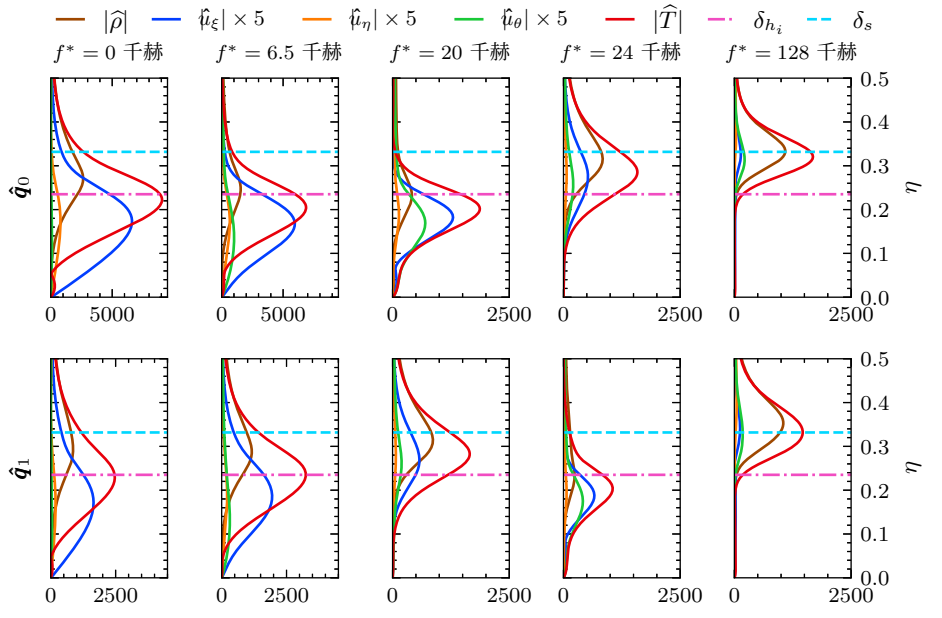
$$\partial_t \mathbf{u}' + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}' = -(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\,\overline{\mathbf{u}} - \frac{\rho'}{\overline{\rho}}(\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\,\overline{\mathbf{u}} - \frac{\nabla p'}{\overline{\rho}} + \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \frac{\boldsymbol{f}_{\rho\mathbf{u}}}{\overline{\rho}} \tag{C 1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t T' + \overline{\mathbf{u}} \cdot (\nabla T') = {} & -\mathbf{u}' \cdot (\nabla \overline{T}) - \frac{\rho'}{\overline{\rho}}\overline{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \overline{T}) \\ & - \frac{\gamma - 1}{\gamma M_\infty^2} T'(\nabla \cdot \overline{\mathbf{u}}) + \frac{\gamma - 1}{\rho_\infty Re\,\overline{\rho}}(\nabla \overline{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\tau}') + \frac{\gamma}{PrRe\,\overline{\rho}}(\nabla \cdot (\overline{\mu} \nabla T')) \\ & - \frac{\gamma - 1}{\gamma M_\infty^2} \overline{T}(\nabla \cdot \mathbf{u}') + \frac{\gamma - 1}{\rho_\infty Re\,\overline{\rho}}(\nabla \mathbf{u}' : \overline{\boldsymbol{\tau}}) + \frac{\gamma}{PrRe\,\overline{\rho}}(\nabla \cdot (\mu' \nabla \overline{T})) \\ & + \frac{\gamma M_\infty^2 (\gamma - 1)}{\overline{\rho}} \left(f_{\rho E} - \boldsymbol{f}_{\rho\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}} \right)\end{aligned} \tag{C 2}$$

为计算能量收支分析中使用的产生项和源项，我们首先将方程C 1 乘以u_ξ，$\mathbf{e}_\xi$，并将方程C 2 乘以 T'。随后分别用 ρ 和$^{\rho}$ $_{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 T}$ 对这些方程进行缩放，从而得到对 Chu 能量有贡献的各项（见方程5.1）。最后，对时间和方位角均值进行壁法向积分：$\cdot = \frac{mf}{2\pi}\int_0^{\eta_{\max}} \int_0^{2\pi/m} {}^{f} \cdot dt d\theta d\eta$，当 $m \neq 0$ 和 $f \neq 0$时；否则，相应的



(a) 最优强迫（上图，模态 0）和 1st 次优响应（下图，模态 1），位于 $m = 21$位于 $\xi = 20$



（b）最优响应（上方，模态 0）和 1st 次优响应（下方，模态 1）在 $m = 21$在 $\xi = 94$

图 24

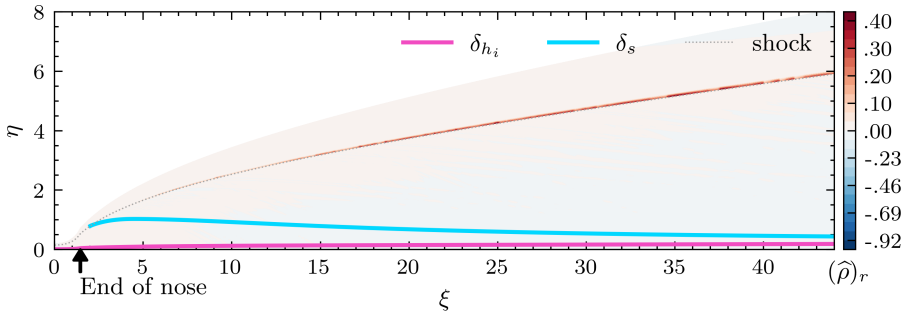


图25：（f^*，m）=（1 千赫，0）冲击模态

均值被省略。因此，完整的方程为：

$$\overline{\rho}\partial_t \mathbf{u}' \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi + \mathrm{KE}_{\mathrm{Tr},\xi} = \mathrm{KE}_{\mathrm{P1},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{P2},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{S},\xi} + \mathrm{KE}_{\mathrm{F},\xi} \tag{5.2}$$

$$\frac{\overline{\rho}}{2(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\partial_t T'^2 + \mathrm{T}_{\mathrm{Tr}} = \mathrm{T}_{\mathrm{I}} + \mathrm{T}_{\mathrm{II}} + \mathrm{T}_{\mathrm{S1}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V1}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V}\mu 1} + \mathrm{T}_{\mathrm{S2}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V2}} + \mathrm{T}_{\mathrm{V}\mu 2} + \mathrm{T}_{\mathrm{F}} \tag{5.3}$$

其中，

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{Tr},\xi}(\xi) = \left\langle \overline{\rho}\,(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}' \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{C 3}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{P1},\xi}(\xi) = \left\langle -\overline{\rho}\,(\mathbf{u}'\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}} \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{5.4}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{P2},\xi}(\xi) = \left\langle -\rho'\,(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}} \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{5.5}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{S},\xi}(\xi) = \left\langle -\nabla p' \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{C 4}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{V},\xi}(\xi) = \left\langle \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}' \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{C 5}$$

$$\mathrm{KE}_{\mathrm{V},\xi}(\xi) = \left\langle \boldsymbol{f}_{\rho\mathbf{u}} \cdot u_\xi{}' \mathbf{e}_\xi \right\rangle \tag{C 6}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{T}}(\xi) = \left\langle \frac{\overline{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\overline{\mathbf{u}}\cdot(\nabla T')T' \right\rangle \tag{C 7}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{I}}(\xi) = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\mathbf{u}'\cdot(\nabla\overline{T})T' \right\rangle \tag{5.6}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{II}}(\xi) = \left\langle -\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M_\infty^2 \overline{T}}\rho'\overline{\mathbf{u}}\cdot(\nabla\overline{T})T' \right\rangle \tag{5.7}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{S1}}(\xi) = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{\gamma^2 M_\infty^4}T'(\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}})T' \right\rangle \tag{C 8}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{V1}}(\xi) = \left\langle \frac{1}{\gamma M_\infty^2 \overline{T}\rho_\infty Re}(\nabla\overline{\mathbf{u}}\colon\boldsymbol{\tau}')T' \right\rangle \tag{C 9}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{V1}\mu}(\xi) = \left\langle \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2 \overline{T}PrRe}(\nabla\cdot(\overline{\mu}\nabla T'))T' \right\rangle \tag{C 10}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{S2}}(\xi) = \left\langle -\frac{\overline{\rho}}{\gamma^2 M_\infty^4}(\nabla\cdot\mathbf{u}')T' \right\rangle \tag{5.8}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{V2}}(\xi) = \left\langle \frac{1}{\gamma M_\infty^2 \overline{T}\rho_\infty Re}(\nabla\mathbf{u}'\colon\overline{\boldsymbol{\tau}})T' \right\rangle \tag{C 11}$$

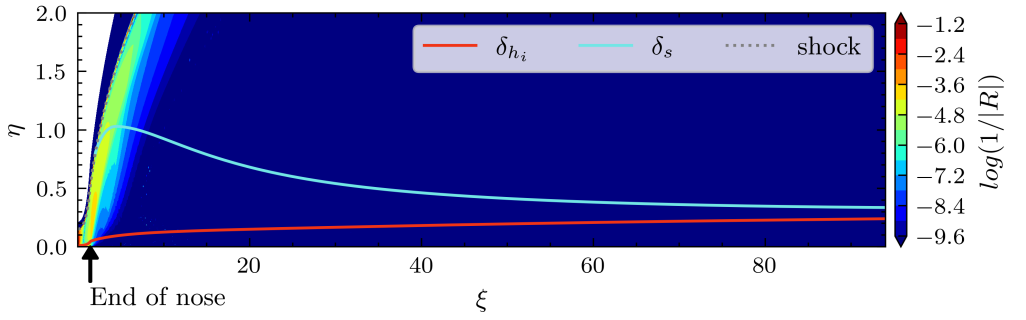


图 26：流动局部曲率半径的倒数

$$\mathrm{T}_{\mathrm{V}2\mu}(\xi) = \left\langle \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2 \overline{T} PrRe} (\nabla \cdot (\mu' \nabla \overline{T}))T' \right\rangle \tag{C 12}$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{F}}(\xi) = \left\langle \frac{1}{\overline{\rho}} \left(f_{\rho E} - \boldsymbol{f}_{\rho \mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}} \right) T' \right\rangle \tag{C 13}$$

(C 14)

.

附录 D. 基流的曲率半径

流动曲率可根据局部流速确定：

$$R = \frac{|\mathbf{u}|^3}{u_\xi D_t u_\eta - u_\eta D_t u_\xi} \tag{D 1}$$

其中 D_t 为物质导数。流动局部曲率半径的倒数如图 26所示。最大流动曲率为 $R > 10^{10} \approx 10^7$m。流动曲率最高的区域位于驻点附近以及圆锥起始处，其数值约为 $R \approx 100 \approx 0。5$ mm。

参考文献

Batista, Armani, Khan, Arham Amin & Kuehl, Joseph 2020年 关于鼻部钝度抑制第二模态不稳定性的机制。《理论与应用力学快报》10 (4), 230–240。9 Bugeat, B., Chassaing, J.-C., Robinet, J.-C. & Sagaut, P. 2019年 超声速边界层的三维全局最优强迫与响应。《计算物理学杂志》398, 108888。6, 23, 26 Caillaud, Cl´ement, Lehnasch, Guillaume, Martini, Eduardo & Jordan, Peter 2025a 条带对高超声速边界层线性不稳定性的影响。《物理评论：流体》10 (4), 043902。25 Caillaud, Cl´ement, Scholten, Anton, Kuehl, Joseph, Paredes, Pedro, Lugrin, Mathieu, Esquieu, S´ebastien, Li, Fei, Choudhari, Meelan M., Benitez, Elizabeth K., Borg, Matthew P., McDaniel, Zachary A. & Jewell, Joseph S. 2025b 圆锥—圆柱—扩张段上的分离与转捩：计算研究。《AIAA 期刊》63 (7), 2615–2634。7 Ceruzzi, Andrew, Le Page, Laurent, McQuellin, Liam P., Condren, Wesley J. & McGilvray, Matthew 2025 在高超声速流中观察钝锥边界层转捩逆转。载于《AIAA SCITECH 2025 论坛》。佛罗里达州奥兰多：美国航空航天学会。2 Ceruzzi, Andrew, Le Page, Laurent M., Kerth, Philipp, Williams, Benjamin A. & McGilvray, Matthew 2024 在牛津高密度风洞中对尖锥与钝锥边界层不稳定性及转捩的实验研究。载于《AIAA SCITECH 2024 论坛》。佛罗里达州奥兰多：美国航空航天学会。2, 3, 10, 25

Chu, Boa-Teh 1965 关于流体流动中小扰动能量传递的研究（第一部分）。Acta Mechanica 1 (3), 215–234。6 Cook, David A., Thome, John, Brock, Joseph M., Nichols, Joseph W. & Candler, Graham V. 2018 利用输入—输出分析理解鼻锥钝度对高超声速边界层转捩的影响。载于 2018 年 AIAA 航空航天科学会议。佛罗里达州基西米：美国航空航天学会。2 国防科学委员会 华盛顿特区 1988年 国防科学委员会国家航空航天飞机（NASP）工作组报告：。技术报告。国防技术信息中心，弗吉尼亚州贝尔沃堡。2 Dwivedi, Anubhav, Sidharth, G. S., Nichols, Joseph W., Candler, Graham V. & Jovanovi´c, Mihailo R. 2019年 高超声速压缩坡流动中的再附条带：输入—输出分析。《流体力学杂志》880, 113–135。16 Grossir, Guillaume, Pinna, Fabio & Chazot, Olivier 2019年 鼻尖钝度对马赫数 10 圆锥边界层不稳定性的影响。《AIAA 期刊》57 (9), 3859–3873，出版方：美国航空航天学会，电子版：https://doi.org/10.2514/1.J057822。3, 10, 25 Hartman, Andrew B., Hader, Christoph & Fasel, Hermann F. 2021年 马赫数 6 钝锥上的非线性转捩机制：斜向破裂。《流体力学杂志》915, R2。3, 18 Hascoet, Laurent & Pascual, Val´erie 2013 Tapenade 自动微分工具：原理、模型与规范。ACM 数学软件汇刊 39 (3)，出版方：计算机协会。7 Jewell, Joseph S., Kennedy, Richard E., Laurence, Stuart J. & Kimmel, Roger L. 2018 在高雷诺数下可变钝度七度锥上的转捩。载于 2018年 AIAA 航空航天科学会议。佛罗里达州基西米：美国航空航天学会。2, 4 Jewell, Joseph S. & Kimmel, Roger L. 2017 Stetson 的马赫数 6 钝锥实验的边界层稳定性分析。《航天器与火箭杂志》54 (1), 258–265。25 Kamal, Omar, Lakebrink, Matthew T. & Colonius, Tim 2023 全局感受性分析：物理上可实现的输入—输出分析。《流体力学杂志》956, R5。18, 25 Kennedy, Richard E., Jagde, Eric K., Laurence, Stuart J., Jewell, Joseph S. & Kimmel, Roger L. 2019 可变钝度圆锥上的高超声速边界层转捩可视化。载于《AIAA 2019 航空论坛》。得克萨斯州达拉斯：美国航空航天学会。3 Kennedy, Richard E., Jewell, Joseph S., Paredes, Pedro & Laurence, Stuart J. 2022 马赫数 6 尖细长锥与钝细长锥上的不稳定性机制表征。《流体力学杂志》936, A39。3, 4, 10, 18 Landahl, M. T. 1980 关于无黏平行剪切流的一种代数不稳定性的说明。《流体力学杂志》98 (2), 243–251。16 Lei, Ji a & Zhong, Xiaolin 2012 鼻部钝度效应对高超声速边界层转捩的线性稳定性分析。《航天器与火箭杂志》49 (1), 24–37。2, 9 Mack, Leslie 1987 高超声速马赫数下尖锥轴对称边界层的稳定性。载于第 19 届 AIAA 流体动力学、等离子体动力学与激光会议。美国夏威夷州檀香山：美国航空航天学会。2, 3, 23 Marineau, Eric C., Moraru, George C., Lewis, Daniel R., Norris, Joseph D., Lafferty, John F., Wagnild, Ross M. & Smith, Justin A. 2014 尖锥与钝锥的马赫数 10 边界层转捩实验（特邀报告）。载于第 19 届 AIAA 国际航天飞机与高超声速系统及技术会议。佐治亚州亚特兰大：美国航空航天学会。2, 9, 25 Paredes, Pedro, Choudhari, Meelan M. & Li, Fei 2017 高超声速球形前体上的钝体悖论与瞬态增长。《物理评论：流体》2 (5), 053903。2 Paredes, Pedro, Choudhari, Meelan M. & Li, Fei 2020 高超声速速度下钝锥上的截锥转捩机制。《流体力学杂志》894, A22。2, 3, 18 Paredes, Pedro, Choudhari, Meelan M., Li, Fei, Jewell, Joseph S. & Kimmel, Roger L. 2019a 高超声速速度下钝锥上行波的非模态增长。《AIAA 期刊》57 (11), 4738–4749，出版方：美国航空航天学会，电子版：https://doi.org/10.2514/1.J058290。2, 10 Paredes, Pedro, Choudhari, Meelan M., Li, Fei, Jewell, Joseph S., Kimmel, Roger L., Marineau, Eric C. & Grossir, Guillaume 2019b 高超声速速度下鼻尖钝度对转捩的影响。《航天器与火箭杂志》56 (2), 369–387。2, 8 Poulain, Arthur, Content, Cedric, Sipp, Denis, Rigas, Georgios & Garnier, Eric 2023 BROADCAST:

一种利用算法微分进行稳定性与敏感性分析的高阶可压缩计算流体力学工具箱。《计算物理通讯》**283**，108557，arXiv:2206.05493 [物理学]。 7 Reshotko 与 Tumin 2004 粗糙度诱导转捩中瞬态增长的作用。 2 Rosenboom,I.,Hein,S. & Dallmann,U.1999 鼻部钝度对高超声速圆锥流动中边界层失稳的影响。见 第*30*届流体动力学会议。美国弗吉尼亚州诺福克：美国航空航天学会。 2Schmid, Peter J. 2007 非模态稳定性理论。《流体力学年度评论》**39**(1), 129–162. 6 Stetson, K., Thompson, E., Donaldson, J. & Siler, L. 1983 马赫数8下圆锥层流边界层稳定性实验。I——尖锥。见 第*16*届流体与等离子体动力学会议。美国马萨诸塞州丹弗斯：美国航空航天学会。 2Towne, Aaron, Schmidt,Oliver T. & Colonius, Tim2018 谱正交分解及其与动态模态分解和预解分析的关系。《流体力学杂志》**847**，821–867。 6Vaughan, Nicholas J.& Zaki, Tamer A.2011 非定常 Klebanoff 条带扰动的零压梯度边界层稳定性。《流体力学杂志》**681**，116–153。 25