arXiv:2601.02355v1 [math.GR] 5 Jan 2026

码环的半自同构群

DYLENEAGDA SOUZA DE BARROS、ALEXANDRE GRICHKOV、
ROSEMARY MIGUEL PIRES 和 MARINA RASSKAZOVA

Abstract. 对于任意码环 L，我们证明， L的半自同构群是由 L 的自同构群与一个初等阿贝尔 2–群的乘积构成，后者包含所有在固定基上作用为恒等映射的半自同构。此外，我们证明，初等映射只有在秩不超过 3 的码环上才可能是半自同构。

1. Introduction

一个环 是一个集合 L，带有二元运算 $\cdot$ 和幺元 $1 \in L$，使得对于任意 a、$b \in L$，方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 分别有唯一解 x、$y \in L$。设 $(L, *)$ 和 $(L', \cdot)$ 是环。双射 $f\colon L \to L'$ 若满足对任意 x、$y \in L$，$f(x*y) \in \{f(x) \cdot f(y)\ f(y) \cdot f(x)\}$，则称为半同构。半自同构 的定义与此相应。若一个半同构（半自同构）是同构（自同构）或反同构（反自同构），则称其为平凡的 。码环 是一个有限穆芳环 L，具有唯一的（中心的）非平凡平方（结合子、交换子）。

1957年，W.R. Scott 证明，两个群之间的任意半同构都是平凡的 [20]。他还给出了一个 8 阶环的例子，该环具有非平凡的半自同构，说明他的结果并不能推广到所有环。不过，我们现在知道，Scott 的结果可以推广到某些特殊情形：平方映射在其核上的因子环中为满射的穆芳环，以及奇数阶的自同构环 [11, 14]。

另一方面，人们也研究了具有非平凡半自同构的环。Gagola 和 Giuliani [7] 给出了某些偶数阶穆方环存在非平凡半自同构的条件；dos Anjos 则描述了 Chein 环何时具有非平凡半自同构， [4]。这一主题的另一类研究是描述具有非平凡半自同构的环的半自同构群 [2, 3, 13, 15]。

在这项工作中，我们通过考察群 $H_{\mathcal{B}}(L)$——即在 L 的固定基 $\mathcal{B}$ 上作用为恒等映射的所有半自同构所构成的群——来研究如何刻画码环 L 的半自同构群。在第 3 节中，我们证明码环 L 的每个半自同构都是一个自同构与 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 中某个元素的乘积。由此可得，我们证明了非结合码环 L 仅有平凡半自同构，当且仅当对于某个基 $\mathcal{B}$，$|H_{\mathcal{B}}(L)| = 2$，从而解决了 [3] 中的 6.4 号问题。在第 4 节中，我们将第 3 节的结果应用于所有秩为 3 和 4 的码环。在第 5 节中，我们证明对于秩大于 3 的码环，任意 x，初等映射 τ_x 都不是半自同构，从而解决了 [3] 中的 6.5 号问题。

2010 数学主题分类。主要：20N05。次要：20B25。关键词和短语。码环、半自同构群、初等映射。

2. Preliminaires

穆芳环是一种环 L，满足对于任意 x、y 和 $z \in L$，都有 $(x \cdot zx)y = x(z \cdot xy)$。穆方环是二结合的逆性质环；每当三个元素满足结合律时，它们生成一个子群。设 L 为一个环。分别用 L^2、$Z(L)$、$A(L)$ 和 $[L, L]$ 表示 L 的所有平方元、中心、结合子子环和交换子子环的集合。关于穆方环和环的更多结果，参见 [18]。

2.1. 码环。码环是一种穆芳环 L，且具有唯一的非平凡平方。Chein 和 Goodaire 证明，对于这类环，$A(L) = [L, L] = L^2 \leq Z(L)$。我们用 -1 表示码环唯一的非平凡平方；对于非结合码环，有 $A(L) = [L, L] = L^2 = \{1, -1\}$，并将 $(-1)x$ 记作 $-x$。众所周知，对于码环中的任意 x、y、z、w，都有 L、$[xy, z] = [x, y][y, z]$、$(x$、y、$z)$、$(xy)^2 = x^2y^2[x, y]$，以及 $(wx$、y、$z) = (w$、y、$z)(x$、y、$z)$ [3]。关于码环的详细内容可参阅 [19, 9, 1]。

码环 L 的一组极小生成元称为 L的一组基。如果L有一组含 n 个元素的基，我们就说L 的秩为 n。若 $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\}$ 是码环 L的一组基，则 L 中的每个元素都可表示为 $\pm(\ldots(a_1a_2)a_3) \ldots a_{n-1})a_n$的形式。此外，向量$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_1,2, \ldots, \lambda_{n-1},_n, \lambda_1,2,3, \ldots, \lambda_{n-2},_{n-1},_n)$，其中 $\lambda_i,\lambda_i,_j, \lambda_i,_j,_k \in \{0, 1\}$，且 $i < j < k$，分别由 $a_i^2 = (-1)^{\lambda_i}$, $[a_i, a_j] = (-1)^{\lambda_i,_j}$和$(a_i, a_j, a_k) = (-1)^{\lambda_i,_j,_k}$给出，称为与 $\mathcal{B}$相关的 L的特征向量。本文中，码环 L 的一组基及其相关特征向量，在用 L的自同构群描述 L的半自同构群时起着重要作用。文献 [19, 10]根据特征向量对秩 3 和秩 4 的码环进行了分类。

定理 2.1 ([10], 定理 3.1)。考虑 C_1^3、...、C_5^3这些具有以下特征向量的码环：

$$\lambda(C_1^3) = (1,1,1,1,1,1), \quad \lambda(C_2^3) = (0,0,0,0,0,0), \quad \lambda(C_3^3) = (0,0,0,1,1,1),$$
$$\lambda(C_4^3) = (1,1,0,0,0,0), \quad \lambda(C_5^3) = (1,0,0,0,0,0).$$

那么，列表 $\{C_1^3, ..., C_5^3\}$ 中的任意两个环都不同构，并且每个秩小于3 的非结合码环都同构于该列表中的某一个环。

在 L 为秩 4 的码环的情况下，Grichkov 和 MIGUEL PIRES 证明了L 具有一个基 $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，其中 a_4 是 L的核中的一个元素。因此，与 $\mathcal{B}$ 相关的特征向量的最后四个坐标为 1000，而分类定理中省略了这些坐标。

定理 2.2 ([10], 定理 3.5)。考虑具有以下特征向量的码环 C_1^4, ..., C_{16}^4。所有秩为 4 的非结合码环都同构于列表中的某一个。此外，这些环两两不同构。

L	$\lambda(L)$
C_1^4	(1110110100)
C_2^4	(0000000000)
C_3^4	(0000110100)
C_4^4	(0010100000)
C_5^4	(0000010100)
C_6^4	(1111110100)
C_7^4	(0001000000)
C_8^4	(0000001000)

L	$\lambda(L)$
C_9^4	(0100001000)
C_{10}^4	(0001111000)
C_{11}^4	(0001001000)
C_{12}^4	(0000001100)
C_{13}^4	(0110111100)
C_{14}^4	(0001001100)
C_{15}^4	(1001001100)
C_{16}^4	(0001111100)

2.2. 代码环的半同构。回顾一下，环的一种半自同构 L 是满足 $f(xy) \in \{f(x)f(y)\ f(y)f(x)\}$ 的双射 $f\colon L \to L$，对所有 x，$y \in L$ 均成立。若环 L 的半自同构是自同构或反自同构，则称其为平凡的 。关于环的半同构的性质，可参见[13, 14]。

两个环之间的半同构 $f\colon L \to L'$ 如果其逆映射 $f^{-1}\colon L' \to L$ 也是半同构，则称为特殊的。两个二结合环之间的每个半同构都是特殊的（推论 3.6, [5]）。现在，我们证明：如果两个码环之间存在半同构，那么它们同构。

引理2.3。设 $P_0 = \langle a, b, c\rangle$ 是码环 P 的 $3-$ 生成子群。那么，P_0 要么是阿贝尔群，要么 P_0 的中心的阶为 4。

证明。如果 P_0 不是阿贝尔群，设 $ab \neq ba = -ab$。那么 $\langle a, b\rangle$ 要么是二面体群 D_8，要么是四元数群 Q_8。注意到 $\langle a, b, c\rangle = \langle a, b, bc\rangle$，且如果 $[a, c] = -1$，则 $[a, bc] = 1$；因此我们可以设 $[a, c] = 1$。类似地，$\langle a, b, c\rangle = \langle ac, b, c\rangle$，且如果 $[b, c] = -1$，则 $[b, ac] = [ac, c] = 1$；因此，我们也可以设 $[b, c] = 1$。于是 $\langle c, -1\rangle \leq Z(P_0)$，简单计算表明 $Z(P_0) = \langle c, -1\rangle$。那么，如果 $c^2 = 1$，则 $Z(P_0) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$；如果 $c^2 = -1$，则 $Z(P_0) \cong \mathbb{Z}_4$。□

给定一个环 L, $C(L) = \{c \in L; cx = xc,$ 对所有 $x \in L\}$ 都称为 L 的交换子集。

引理2.4。设 P 和 Q 是二结合环。若 $f\colon P \to Q$ 是半同构，则 $f(C(P)) = C(Q)$。

证明。由 [11], 的引理 2.1，且由于 f^{-1} 也是一个半同构，我们有：if$xy = yx$ 当且仅当 $f(x)f(y) = f(y)f(x)$，结论得证。□

命题 2.5。设 P 和 Q 是有限码环，且 $f\colon P \to Q$ 是一个半同构。那么 P 与 Q 同构。

证明。我们将证明 P 和 Q 具有相同的特征向量。若对所有 $x \in P$ 都有 $x^2 = 1_P$，则 P 是阿贝尔群；又由于 x 和 $f(x)$ 具有相同的阶，Q 也是阿贝尔群，因而 $P \cong Q$。若对于某个 $x \in P$ 有 $x^2 = -1_P$，则我们得到 $f(-1_P) = f(x^2) = f(x)^2 = -1_Q$，因为码环有唯一的非平凡平方。对于 x、$y \in P$，我们得到 $f([x, y]) = [f(x)\ f(y)]$,，因为对于码环之间的（特殊）半同构，$xy = yx$ 当且仅当 $f(x)f(y) = f(y)f(x)$。设 x、y 且 $z \in P$。我们希望证明 $f(x、y、z) = (f(x)\ f(y)\ f(z))$。若 $P_0 = \langle x、y、z\rangle$ 和 $Q_0 = \langle f(x)\ f(y)\ f(z)\rangle$ 都是群，则 $f(x、y、z) = f(1_P) = 1_Q = (f(x)\ f(y)\ f(z))$。类似地，若 P_0 和 Q_0 都是非结合的，则 $f(x、y、z) = f(-1_P) = -1_Q = (f(x)\ f(y)\ f(z))$。假设 P_0 是群，而 Q_0 是非结合的。回顾一下，

由于 Q_0 是一个秩为 3 的码环， Z（Q_0） $=\{1_Q,-1_Q\}$。由引理 2.3 和 2.4，存在 $c\in Z$（P_0），使得 $c\neq\pm1_P$ 且 f（c） $\in C$（Q_0）。于是，对每个 u 和 $v\in Q_0$，我们得到 $1_Q=[f$（c） $uv]=[f$（c） $u][f$（c） $v]$（f（c） u、v），进而 f（c） $\in Z$（Q_0），这就产生了矛盾。因此，对所有 x、 y 和 $z\in P$，都有 f（x、y、z） $=$（f（x） f（y） f（z））。最后，若 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 是 P 的一组基，则 $\{f$（a_1）.....， f（a_n）$\}$ 是 Q 的一组基，并且它们具有相同的相关特征向量。因此， $P\cong Q$。□

已知有限环的每个半自同构都是特殊的，并且如果 $xy=yx$，那么 $f(xy)=f(x)f(y)$。此外，如果 L是码环，则 L的每个半自同构都保持 L的唯一的非平凡平方。更准确地说：

引理 2.6 ([3], 引理 2.9)**.** 设 L 是一个码环，且 f 是 L的半自同构。

(i) $f(-1)=-1$。*(ii)* $f((x,y,z))=(f(x)\ f(y)\ f(z))$ 对任意 $x,y,z\in L$ 均成立。*(iii)* $[f(-x)\ f(y)]=[-f(x)\ f(y)]=[f(x)\ -f(y)]=[f(x)\ f(y)]=[x,y]$对任意$x$, $y\in L$均成立。

推论 2.7. 设 L 是一个具有固定基 $\mathcal{B}=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ 的码环，且 f 是 L 的半自同构。那么， $\{f(a_1)\ f(a_2)\ldots,f(a_n)\}$ 是 L 的一个基，且具有相同的相关特征向量。

证明. 若 $x=\pm(\ldots(a_1a_2)a_3)\ldots a_{n-1})a_n$ 是 L 的一个元素，那么，由于 $f(-1)=-1\in A(L)$ $=[L,L]\leq Z(L)$，可得 $f(x)=\pm(\ldots(f(a_1)f(a_2))f(a_3))\ldots f(a_{n-1}))f(a_n)$。因此， $f(\mathcal{B})=\{f(a_1)\ f(a_2)$ $\ldots,f(a_n)\}$ 是 L 的一个基。此外，根据引理 2.6，与 $\mathcal{B}$ 和 $f(\mathcal{B})$ 相关的特征向量相同。□

3. The structure of L 的半自同构群

对于一个环 L，我们分别用 Half (L) 和 Aut (L) 表示 L 的半自同构群和自同构群。设 L 是秩为 n 、具有固定基 $\mathcal{B}=\{a_1,\ldots,a_n\}$ 的码环， P_n 是 $I_n=\{1,\ldots,n\}$ 的子集集合。我们定义 $a_\emptyset=1$；对于有序子集 $\sigma=\{i_1,\ldots,i_k\}\in P_n$，我们定义 $a_\sigma\in L$ 为 $a_\sigma=a_\mu\cdot a_{i_k}$，其中 $\mu=\{1,\ldots,i_{k-1}\}$。例如， $a_1a_4\cdot a_5$ 写作 a_σ，其中 $\sigma=\{1,4,5\}$，且对于 $\mu=\{1,3,4,5\}$， $a_\mu=(a_1a_3\cdot a_4)a_5$。由于 $L^2=[L,L]=(L,\ L,\ L)=\{1,-1\}\leq Z(L)$，我们有 $L=\{\pm a_\sigma:$ $\sigma\in P_n\}$。若 a_σ 且 $a_\mu\in L$，则存在 $\lambda(\sigma,\ \mu)\in\{1,-1\}$，使得

$$a_\sigma\cdot a_\mu=\lambda(\sigma,\mu)a_{\sigma\Delta\mu}, \tag{3.1}$$

其中 $\sigma\Delta\mu$表示 σ和 μ的对称差。记 $\{\sigma,\mu\}\in\{1,-1\}$为交换子 $[a_\sigma,a_\mu]$。

将 $H_{\mathcal{B}}(L)$定义为满足 $\varphi(a_\sigma)=\varepsilon_\sigma a_\sigma$的 L 的所有半自同构 φ 构成的集合，其中 $\varepsilon_\sigma\in\{1,-1\}$、 $\epsilon_{\{j\}}=1$，对所有 $j\in I_n$均成立。实际上， $H_{\mathcal{B}}(L)$是 L 的所有半自同构构成的集合，它们在固定基 $\mathcal{B}$ 上作用为恒等映射；容易看出， $H_{\mathcal{B}}(L)$是 Half(L)的一个子群。另一方面，设 $R_{\mathcal{B}}$ 是满足 $\Psi(\emptyset)=1$、 $\Psi(\{j\})=1$的所有函数 Ψ： $P_n\to\{-1,1\}$ 构成的集合，对每个 $j\in I_n$均成立；并且只要 $\{\sigma,\mu\}=1$，就有 $\hat{}\Psi(\sigma\Delta\mu)=\Psi(\sigma)\Psi(\mu)$。对于任意 $\Psi\in R$，定义 $\Psi:\ L\to L$，使得 $\hat{}\ \hat{}\Psi(a_\sigma)=\Psi(\sigma)a_\sigma$，且 $\Psi(-a_\sigma)=-\Psi(\sigma)a_\sigma$。

$\hat{}$**命题 3.1.** 如果 Ψ 是 $R_{\mathcal{B}}$中的一个元素，那么 Ψ 是 $H_{\mathcal{B}}(L)$中的半自同构。反之，如果 φ 是 $H_{\mathcal{B}}(L)$中的半自同构，那么存在一个函数 Ψ 属于 $R_{\mathcal{B}}\hat{}$，使得 $\varphi=\Psi$。

ˆ 证明。假设 $\Psi \in R_{\mathcal{B}}$，下面证明 Ψ 是 $H_{\mathcal{B}}(L)$中的半自同构。首先，根据 Ψ的定义，我们得到 $\Psi(1) = 1$ 以及 $\Psi(a_j) = a_j$，对每个 $j \in I_n$均成立。设 a_σ 和 ˆ ˆa_μ是 L中的元素。注意到 $\Psi(a_\sigma a_\mu) = \Psi(\lambda(\sigma,\mu)a_{\sigma\Delta\mu}) = \lambda(\sigma,\mu)\Psi(\sigma\Delta\mu)a_{\sigma\Delta\mu}$，ˆ ˆ$\Psi(a_\sigma)\Psi(a_\mu) = \Psi(\sigma)a_\sigma \cdot \Psi(\mu)a_\mu = \lambda(\sigma,\mu)\Psi(\sigma)\Psi(\mu) \cdot a_{\sigma\Delta\mu}$；另一方面，ˆ ˆ $\Psi(a_\mu)\Psi(a_\sigma) = \Psi(\mu)a_\mu \cdot \Psi(\sigma)a_\sigma = \lambda(\mu,\sigma)\Psi(\mu)\Psi(\sigma) \cdot a_{\sigma\Delta\mu}$。如果 $\{\sigma,\mu\} = 1$，我们有 ˆ ˆ ˆ $\Psi(\sigma\Delta\mu) = \Psi(\sigma)\Psi(\mu)$，于是 $\Psi(a_\sigma a_\mu) = \Psi(a_\sigma)\Psi(a_\mu)$。如果 $\{\sigma,\mu\} = -1$，则得到 ˆ ˆ ˆ$\lambda(\mu,\sigma) = -\lambda(\sigma,\mu)$；接着，如果 $\Psi(\sigma\Delta\mu) = \Psi(\sigma)\Psi(\mu)$，则有 $\Psi(a_\sigma a_\mu) = \Psi(a_\sigma)\Psi(a_\mu)$；而如果 $\Psi(\sigma\Delta\mu) = -\Psi(\sigma)\Psi(\mu)$，则有 $\Psi(a_\sigma a_\mu) = \Psi(a_\mu)\Psi(a_\sigma)$。因此， Ψ 是 $H_{\mathcal{B}}(L)$中的半自同构。

反之，假设 $\varphi \in H_{\mathcal{B}}(L)$并定义， $\Psi(\emptyset) = 1$ 以及 $\Psi(\sigma) = \epsilon_\sigma$ 其中 $\varphi(a_\sigma) = \epsilon_\sigma a_\sigma$对于 $\sigma \in P_n\backslash\{\emptyset\}$。我们将证明 $\Psi \in R_{\mathcal{B}}$。根据定义， $\Psi(\emptyset) = 1$，并且由于 $\epsilon_{\{j\}} = 1$，对于所有 $j \in I_n$，我们得到 $\Psi(\{j\}) = 1$，对于所有 $j \in I_n$。如果 $\{\sigma,\mu\} = 1$，则 $\varphi(a_\sigma a_\mu) = \varphi(a_\sigma)\varphi(a_\mu)$ ˆ且$\epsilon_{\sigma\Delta\mu} = \epsilon_\sigma\epsilon_\mu$。那么，当 $\{\sigma,\mu\} = 1$时，$\Psi(\sigma\Delta\mu) = \Psi(\sigma)\Psi(\mu)$。显然， $\varphi = \Psi$。□

从 P_n 到 $\{1,-1\}$ 的所有映射的集合 W 是一个 $\mathbb{F}_2$ 维向量空间，其维数为2^{2^n}。集合 $R_{\mathcal{B}}$ 是 W的一个 $\mathbb{F}_2$ 子空间。事实上，对于 Ψ_1 和 $\Psi_2 \in R_{\mathcal{B}}$， $\Psi_1(\emptyset)\Psi_2(\emptyset) = 1$，$\Psi_1(\{j\})\Psi_2(\{j\}) = 1$ 对于每个 $j \in I_n$，并且 $\Psi_1(\sigma\Delta\mu)\Psi_2(\sigma\Delta\mu) = \Psi_1(\sigma)\Psi_2(\sigma)\cdot\Psi_1(\mu)\Psi_2(\mu)$，只要 $\{\sigma,\mu\} = 1$。

引理 3.2. 群 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 是一个初等阿贝尔群。

ˆ证明. 只需证明 $\Psi \in R \mapsto \Psi \in H(L)$ 是一个群同构。若 Ψ 和 $\Phi \in R_{\mathcal{B}}$，则对每个 $a_\sigma \in L$，

$$(\hat{\Psi}\circ\hat{\Phi})(a_\sigma) = \hat{\Psi}(\hat{\Phi}(a_\sigma)) = \hat{\Psi}(\Phi(\sigma)a_\sigma) = \Phi(\sigma)\hat{\Psi}(a_\sigma) = \Phi(\sigma)\Psi(\sigma)a_\sigma = \Psi(\sigma)\Phi(\sigma)a_\sigma.$$

ˆ ˆ ˆ ˆ 由此可得 $\Psi\cdot\Phi \in R_{\mathcal{B}} \mapsto \Psi\circ\Phi \in H_{\mathcal{B}}(L)$。最后， $\Psi = \Phi$ 当且仅当 ˆ ˆ $\Psi(a_\sigma) = \Phi(a_\sigma)$ 对每个 $\sigma \in P_n$ 都成立，这等价于 $\Psi(\sigma) = \Phi(\sigma)$，进而得到 $\Psi = \Phi$。于是 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 与 $R_{\mathcal{B}}$ 群同构，因此 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 是一个初等阿贝尔群。□

注 3.3. 由于唯一一个能固定基的所有元素的 L 自同构是 L 的恒等映射，因此容易看出，对每个基 $\mathcal{B}$，$\mathrm{Aut}(L) \cap H_{\mathcal{B}}(L) = \{Id\}$。

定理 3.4. 设 L 是一个具有固定基 $\mathcal{B} = \{a_1,\ldots,a_n\}$的码环。考虑 $H_{\mathcal{B}}(L)$，即 L 的所有半自同构 φ 中满足以下条件的集合：对于每个 $i = 1,\ldots,n$，均有 $\varphi(a_i) = a_i$。那么，对于 L的每个半自同构 f，都存在唯一的 $h \in$自同构(L) 和 $\varphi \in H_{\mathcal{B}}(L)$，使得 $f = h\varphi$。特别地，半自同构(L) = 自同构$(L)\cdot H_{\mathcal{B}}(L)$。

证明。设 f 是 L的一个半自同构。若 $f(a_i) = b_i$，则根据推论 2.7，$\{b_1,\ldots,b_n\}$是 L的一个基，且与 $\mathcal{B}$对应同一个特征向量。根据引理 3.2 [3],，存在唯一的 $g \in$自同构(L)，使得对于每个 $i = 1,\ldots,n$，都有 $g(b_i) = a_i$。于是， $\varphi = gf$ 是 $H_{\mathcal{B}}(L)$中的一个半自同构。令 $h = g^{-1}$，可得 $f = h\varphi$。现在，若 $f = h\varphi = h_1\varphi_1$，其中 $h, h_1 \in$自同构(L) 且 $\varphi,\varphi_1 \in H_{\mathcal{B}}(L)$，则 $\varphi\varphi_1^{-1} = h^{-1}h_1 \in$自同构$(L) \cap H_{\mathcal{B}}(L)$，进而根据注 3.3，得到 $\varphi = \varphi_1$ 和 $h = h_1$。□

推论 3.5。码环 L 的半自同构群是由 L 的自同构群与一个初等阿贝尔 $2-$群构成的直积。

推论 3.6. 群 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 的结构不依赖于 $\mathcal{B}$。

证明。对于 L的两个基 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{B}_1$，我们有 |自同构 $(L)|.|H_{\mathcal{B}}(L)| =$ |自同构 $(L)|.|H_{\mathcal{B}_1}(L)|$，于是，$|H_{\mathcal{B}}(L)| = |H_{\mathcal{B}_1}(L)|$。由于两个群都是初等阿贝尔群 2–，因此 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 同构于 $H_{\mathcal{B}_1}(L)$。□

注 3.7。平凡半自同构 J： $x \mapsto x^{-1}$ 属于群 $H_{\mathcal{B}}(L)$ 当且仅当 B 的每个元素的阶都是 2。在 $J \notin H_{\mathcal{B}}(L)$ 的情形下，存在一个 $\varphi \in H_{\mathcal{B}}(L)$，即反自同构，使得 $J\varphi^{-1}$ 是 L 的自同构。特别地，L 具有非平凡半自同构，当且仅当 $|H_{\mathcal{B}}(L)| > 2$。

3.1. 子空间的计算 $R_{\mathcal{B}}$。根据命题 3.1 和定理 3.4，为了计算给定秩为 n 、具有固定基 $\mathcal{B}$的码环的所有半自同构的数量，只需计算子空间 $R_{\mathcal{B}}$；这可以通过求解由以下算法得到的线性方程组来完成：给定一个秩为 n 的码环 L，其固定基为 $\mathcal{B}$，以及一个特征向量

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{n-1,n}, \lambda_{1,2,3}, \dots, \lambda_{n-2,n-1,n}),$$

其中 $\lambda_i, \lambda_{i,\,j}, \lambda_{i,\,j,\,k} \in \{0, 1\}$，且 $i < j < k$。

步骤 1. 定义乘法结构：

- For each $\sigma \subseteq P_n$, define $a_\sigma = a_{\sigma\setminus\{i\}} \cdot a_i$, where $i = \max \sigma$.
- Compute the product: $a_\sigma \cdot a_\mu = \lambda(\sigma, \mu) \cdot a_{\sigma \triangle \mu}$, where $a_\sigma \in L$.
- Compute the commutator: $\{\sigma, \mu\}$.

步骤 2. 在集合 $P_n = \ \sigma \subseteq I_n$ 上定义一个序： }

- $\sigma < \mu$ 当 $|\sigma| < |\mu|$ 时；
- 当 $|\sigma| = |\mu|$ 时，若 $\max(\sigma) < \max(\mu)$，则 $\sigma < \mu$；
- 当 $|\sigma| = |\mu|$ 且 $\max(\sigma) = \max(\mu)$ 时，则比较 $\sigma \setminus \{i\}$ 和 $\mu \setminus \{i\}$，其中$i = \max(\sigma)$。

步骤 3. 在 $\mathbb{F}_2 = \{1, -1\}$ 上定义一个采用乘法记号的线性方程组：

$$\varepsilon_{\sigma\triangle\mu} = \varepsilon_\sigma \cdot \varepsilon_\mu \quad \text{whenever } \{\sigma, \mu\} = 1.$$

步骤 4. 用以下值初始化：

$$\varepsilon_\emptyset = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1.$$

步骤 5. 计算以下集合：

$$\widehat{A}_\sigma = \{(\sigma_i, \sigma_j) \mid \sigma_i \triangle \sigma_j = \sigma,\ \sigma_i, \sigma_j < \sigma\},$$
$$A_\sigma = \{(\sigma_i, \sigma_j) \in \widehat{A}_\sigma \mid \{\sigma_i, \sigma_j\} = 1\}.$$

步骤 6. 对于 σ 和 $|\sigma| \geq 2$，按如下方式归纳确定 ε_σ：

- 如果 $A_\sigma = \emptyset$，则将 ε_σ 声明为未定义变量。
- 如果 $(\sigma_i, \sigma_j) \in \mathcal{A}_\sigma$，则设定 $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma_i} \cdot \varepsilon_{\sigma_j}$。若 $(\sigma_r, \sigma_s) \in \mathcal{A}_\sigma$，则有关系式 $\varepsilon_{\sigma_i} \cdot \varepsilon_{\sigma_j} = \varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma_r} \cdot \varepsilon_{\sigma_s}$，随后可以删除重复变量。

步骤 7。该系统总是有解（取 $\varepsilon_\sigma = 1$，对于所有 $\sigma \in P_n$），而子空间 $R_{\mathcal{B}}$ 是其解子空间。

4. Half-automorphisms of code loops of rank 3 and 4

本节应用第 3 节的结果，具体考察所有秩 3 和秩 4 码环的半自同构群。给定码环 L，由定理 3.4，|半自同构（L）| = |$H_{\mathcal{B}}$（L）| · |自同构（L）|，其中基为 $\mathcal{B}$。为计算 |自同构（L）|，定义 L 的外自同构群为商群 Out（L） = 自同构（L）/N，其中 N = {$\sigma \in$ 自同构（L）； σ（x） = $\pm x$，对所有 $x \in L$},

[19, 10]。注意，对于 Aut（L）中的任意自同构 f 和 g，当且仅当 g（x）$= f$（$\pm x$）$= \pm f$（x）对每个 $x \in L$ 都成立时，$fN = gN$ 成立。因此，如果 L 是一个秩为 n 的码环，|自同构（L）$| = 2^n$|外自同构群（L）|。此外，[10], 的命题 3.7 描述了 Out（L）的结构，其中 L 是一个秩 4 码环。

4.1. 秩 3。设 L 是一个秩为 3 的码环，其基为 $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3\}$，特征向量选取为 [10] 的命题 3.2 中所述。对于 $n = 3$，我们有集合 $P_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$，并且正在寻找集合 $R_{\mathcal{B}}$ 中所有可能的函数 Ψ，然后可以按照命题 3.1 构造相应的半自同构 ˆ Ψ。我们将函数 Ψ 表示为其像的列表，根据 $R_{\mathcal{B}}$ 的定义，我们有 $\Psi = [1, 1, 1, 1, \Psi(\{1,2\})\ \Psi(\{1,3\})\ \Psi(\{2,3\})\ \Psi(\{1,2,3\})]$，其余像取决于 $\mathcal{B}$ 中元素的交换子。

设 $\Psi \in R_{\mathcal{B}}$。我们通过应用小节 3.1 中所述的算法步骤，确定 Ψ 的所有可能取值。对于每个满足 $|\sigma| \geq 2$ 的 $\sigma \in P_3$，我们需要计算第 5 步中定义的集合。因此，我们得到：

(1) $A_{\{i,j\}} = \{(\{i\}, \{j\})\}$，若 $\{i,j\} = \{1,2\}$ 或 $\{i,j\} = \{1,3\}$；(2) $A_{\{2,3\}} = \{(\{2\}, \{3\}), (\{1,2\}, \{1,3\})\}$；
(3) $A_{\{1,2,3\}} = \{(\{1\}, \{2,3\}), (\{2\}, \{1,3\}), (\{3\}, \{1,2\})\}$.

因此，

(1) $\Psi(\{i,j\}) = \Psi(\{i\} \triangle \{j\})$，若 $\{i,j\} = \{1,2\}$ 或 $\{i,j\} = \{1,3\}$；(2) $\Psi(\{2,3\}) = \Psi(\{2\} \triangle \{3\}) = \Psi(\{1,2\} \triangle \{1,3\})$；(3) $\Psi(\{1,2,3\}) = \Psi(\{1\} \triangle \{2,3\}) = \Psi(\{2\} \triangle \{1,3\}) = \Psi(\{3\} \triangle \{1,2\})$。

要确定这些像，我们必须通过识别哪些交换子等于 1，来计算每对 $(\sigma_1, \sigma_2) \in A_\sigma$ 对应的集合 A_σ by ˆmutators $\{\sigma_1, \sigma_2\} = [a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}]$ are。现在我们来计算每个秩 3 码环对应的这些集合。

设 $L = C_1^3$ 为特征向量为 (1, 1, 1,1, 1,1) 的码环。由于 $[a_1, a_2] = [a_1, a_3] = [a_2, a_3] = [a_1, a_2a_3] = [a_2, a_1a_3] = [a_3, a_1a_2] = -1$，我们得到 $A_\sigma = \emptyset$，对所有 $\sigma \in P_3$ 都成立，其中 $|\sigma| \geq 2$，并得到 4 个未定义变量，记为 x, y, z, t。于是 $\Psi = [1, 1, 1, 1, x, y, z, t]$，其中 $x, y, z, t \in \{1, -1\}$，并且 $|R_{\mathcal{B}}| = 16$。根据 ˆ 命题 3.1，所有 16 种可能的 Ψ 都是 L 的半自同构。这些结果也可见于 [3], ，其中指出 |Half (L)| $= 21504$ 和 |Aut (L)| $= 1344$。

同样，我们可以分析特征向量为 (0, 0, 0, 1,1, 1) 的码环 $L = C_3^3$ 我们还得到 $\Psi = [1, 1, 1, 1, x, y, z, t]$，其中 x，y，z，$t \in \{1, -1\}$，且 $|R_{\mathcal{B}}| = |H($ $L)|$ =16。例如，函数 $\Psi = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1]$ 对应于一个半自同构 Ψ，使得 Ψ $(a_1a_2 \cdot a_3) = -a_1a_2 \cdot a_3$，$\Psi(-a_1a_2 \cdot a_3) = a_1a_2 \cdot a_3$，而在其他情况下 ˆ ˆ$\Psi(b) = b$。由于 $a_1a_2 \cdot a_3$ 是一个 2 阶元素，Ψ 并非定义 [3]中的定义 2.10 所指的初等映射。根据 GAP 计算，Ψ 是一个非平凡的半自同构，且不能表示为初等映射与 L的自同构的乘积。我们必须指出，在 [3]的定理 4.3 中，作者证明了 L 的每个半自同构都是 L 的一个自同构与由所有初等映射生成的群中的一个元素的复合。这个证明是错误的，我们发现错误在于：作者假设按定理 4.3 证明中的记号，生成元集 $\{x, y, z\}$可以与特征向量 (000111) 对应。实际上，根据定理 3.4，且由于 $|R_{\mathcal{B}}| = 16$，我们得到 |半自同构（L）$| = 3072$，因为 |自同构（L）$| = 192$。

现在，令 $L = C_2^3$为特征向量 (0，0，0，0，0，0) 对应的码环。由于 $[a_1, a_2] = [a_1, a_3] = [a_2, a_3] = 1$和 $[a_1, a_2a_3] = [a_2, a_1a_3] = [a_3, a_1a_2] = -1$，我们得到$A_\sigma \neq \emptyset$，对所有 $\sigma \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$均成立，且 $A_{\{1,2,3\}} = \emptyset$。在这种情况下， Ψ({1,2}) =Ψ({1,3}) = Ψ ({2,3}) = 1，并且只存在一个未定义变量 $\varepsilon_{\{1,2,3\}} = x$。因此， $\Psi = [1,1,1,1,1,1,1,x]$，其中 $x \in \{1,-1\}$，且 $|R_{\mathcal{B}}| = 2$。根据命题 ˆ 3.1，这 2 个可能的 Ψ都是 L的半自同构。这个结果也可在 [3], 中观察到，其中指出 |半自同构（L）| = 384 且 |自同构（L）| = 192。

对于码环 $L = C_4^3$和 $L = C_5^3$，其特征向量分别为 (1，1，0，0，0，0) 和 (1，0，0，0，0，0)，其分析和结果与 $L = C_2^3$相同。我们得到 $\Psi = [1,1,1,1,1,1,1,x]$，其中 $x \in \{1,-1\}$，以及 $|R_{\mathcal{B}}| = |H(L)| = 2$。此外，这些结果也可以在 [3], 中观察到，其中表明 |半自同构 (C_4^3) | = 128、|自同构 (C_4^3)| = 64、 |半自同构 (C_5^3)| = 96和 |自同构 (C_5^3)| = 48。

4.2. 秩 4 的码环。设 L ba 是一个秩为 4 的码环。我们断言， Lpos- 拥有一个秩为 3 的码子环 L'，且没有非平凡半自同构。事实上，可以将 L' 视为一个非阿贝尔子群，然后根据 Scott 的结果 $|H(L')| = 2$。现在，设 $L' = \langle a_{i_1}、\ a_{i_2}、a_{i_3}\rangle$，并考虑 L 的一组基 $\mathcal{B} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}\}$。考虑映射 θ： $H_{\mathcal{B}}(L) \to H(L')$，其定义为 $\theta(\varphi) = \varphi|_{L'}$。由于 φ 固定了 $\mathcal{B}$ 的所有元素，因此 $\theta(\varphi)$ 确实是 L' 的一个半自同构，而且 θ 还是群同态。因此，$|H_{\mathcal{B}}(L)| = |H(L')||ker\theta| = 2|\ker\theta|$，其中 $\ker\theta$ 包含所有满足 $\varphi(a_\sigma) = a_\sigma$ 的 $\varphi \in H_{\mathcal{B}}(L)$，对所有满足 $i_4 \notin \sigma$ 的 $\sigma \in P_4$ 均如此。我们来计算一个例子：设 C_9^4 是一个秩为 4、特征向量为 (0100001000) 的码环 [10]。这是 GAP 库中的环 CodeLoop(32,11)。该环有一组基 $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，而 a_4 是 L 的核元素。我们有 $L' = \langle a_1,\ a_3,\ a_4\rangle$ˆ 是一个非阿贝尔群，因此 $|H(L')| = 2$。若 φ 是 $ker\theta$ 的一个元素，则 $\varphi = \Psi$，并且对于每个满足 $2 \notin \sigma$ 的 $\sigma \in P_4$，都有 $\Psi(\sigma) = 1$。与 $n = 3$ 的情形相同，我们将 Ψ 写作 Ψ = [Ψ(∅) Ψ({1}) Ψ({2}) Ψ({3}) Ψ({4}) Ψ({1,2}) Ψ({1,3}) Ψ({1,4}) Ψ({2,3}),Ψ({2,4}) Ψ({3,4}) Ψ({1,2,3}) Ψ({1,2,4}) Ψ({1,3,4}) Ψ({2,3,4}) Ψ({1,2,3,4})]。于是， Ψ = [1,1,1,1,1, Ψ({1,2}) 1, 1, Ψ({2,3}) Ψ({2,4}) 1, Ψ({1,2,3}) Ψ({1,2,4}), 1,Ψ({2,3,4}) Ψ({1,2,3,4})]。由于 $[a_1, a_2] = [a_2, a_3] = [a_2, a_4] = [a_2, a_1a_4] = [a_2, a_3a_4] = [a_1, a_2a_3 \cdot a_4] = 1$，我们得到 Ψ({1,2}) = Ψ ({2,3}) = Ψ({2,4}) = Ψ({1,2,4}) = Ψ({2,3,4})= Ψ({1,2,3,4}) = 1。最后，由于 $[a_1a_2 \cdot a_3, a_1a_4] = [a_1a_2 \cdot a_3, a_1][a_1a_2 \cdot a_3, a_4] = (-1)(-1) = 1$，我们得到 Ψ({2,3,4}) = Ψ({1,2,3})Ψ({1,4})。我们得到 $ker\theta = \{\Psi\}$，其中 $\Psi = [1,1,\ldots,1]$，于是 $|H(L)| = 2$，且 L 没有非平凡半自同构。下表根据定理 2.2 中列出的特征向量，总结了所有秩为 4 的码环对应的 |Half (L)| 的大小。

i	$L =$ 码环$(32, i)$	$\lvert$外自同构群 $(L)\rvert$	$\lvert$自同构 (L)	$\lvert H(L)\rvert$	$\lvert$半自同构 $(L)\rvert$
1	C_2^4	192	3072	2	6144
2	C_3^4	192	3072	16	49152
3	C_{14}^4	48	768	2	1536
4	C_7^4	24	384	2	768
5	C_5^4	48	768	2	1536
6	C_8^4	24	384	2	768
7	C_{10}^4	12	192	2	384
8	C_{16}^4	8	128	2	256
9	C_{15}^4	48	768	2	1536
10	C_1^4	1344	21504	16	344064
11	C_9^4	8	128	2	256
12	C_{12}^4	8	128	2	256
13	C_4^4	64	1024	2	2048
14	C_{13}^4	24	384	2	768
15	C_6^4	168	2688	16	43008
16	C_{11}^4	12	192	2	384

5. Elementary mappings

本节介绍一些关于所谓初等映射的事实。尽管当秩为 3 的码环具有非平凡半自同构时，这些映射起着非常重要的作用，但我们将证明，对于秩至少为 4 的码环，初等映射都不可能是半自同构。回顾定义 2.10：对于二结合环 L 及其元素 c， L 中的 初等映射 τ_c 定义如下：若 $x \in \{c, c^{-1}\}$，则 $L \to L$ 由 $\tau_c(x) = x^{-1}$ 定义；否则， $\tau_c(x) = x$。

引理 5.1. 设 L 是一个非结合码环，并设 $x \in L$ 满足 $x^2 = -1$。以下陈述等价：

(i) τ_x 是一个半自同构；*(ii)* 对任意 $y, z \in L$: *(ii.a)* $[x, y] = 1$ 蕴含 $y \in \langle x\rangle$; *(ii.b)* $(x, y, z) = 1$ 蕴含以下两者之一： $y \in \langle x, z\rangle$ 或 $z \in \langle x, y\rangle$*(iii)* 若 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{n-1,n}, \lambda_{123}, \ldots, \lambda_{n-2,n-1,n})$ 是与生成集 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 相关的特征向量，且 $v_1 = x$，则 $\lambda_{1j} = \lambda_{1jk} = 1$，其中 $1 < j < k$。

证明。假设 (i) 成立。对于 (ii.a)，设 $y \in L$ 满足 $[x, y] = 1$ 且 $y \notin \langle x\rangle$。于是 $y^{-1}x \notin \langle x\rangle$，并得到 $[y, y^{-1}x] = [y, y^{-1}][y, x](y^{-1}, x, y) = 1$。由于 τ_x 是半自同构，且 $[y, y^{-1}x] = 1$，我们得到 $\tau_x(y \cdot y^{-1}x) = \tau_x(y)\tau_x(y^{-1}x)$，进而

$$-x = \tau_x(x) = \tau_x(y \cdot y^{-1}x) = \tau_x(y)\tau_x(y^{-1}x) = y \cdot y^{-1}x = x,$$

这就产生了矛盾。

对于 (ii.b)，令 $y, z \in L$ 满足 $(x, y, z) = 1$，并假设 $y \notin \langle x, z\rangle$。若 $z \in \langle x\rangle$，则 $z \in \langle x, y\rangle$。反设 $z \notin \langle x\rangle$，并由 (ii.a) 可知 $[x, z] = -1$。

经过简单计算，$\tau_x(xz) = xz$, $\tau_x(x)\tau_x(z) = -xz$ 且 $\tau_x(z)\tau_x(x) = -zx$，又因$[x,z] = -1$, 可得 $\tau_x(xz) = \tau_x(z)\tau_x(x)$。由 Moufang定理和 Scott 的结果，我们得出 τ_x 在 $\langle x, y, z\rangle$ 中限制为反同态。我们有 $yz = \tau_x(yz) = \tau_x(z)\tau_x(y) = zy$，这意味着 $[y,z] = 1$，进而 $[z,xy] = [z,x][z,y](z,x,y) = -1$。然后，

$$z \cdot xy = \tau_x(z \cdot xy) = \tau_x(xy)\tau_x(z) = xy \cdot z = -z \cdot xy,$$

矛盾，因此 (ii) 成立。若假设 (ii)，则根据特征向量的定义，(iii) 成立。现在，假设 (iii)，并令 a 和 b 为 L的元素。首先，假设 $a, b \in \langle x\rangle = \{1, -1, x, -x\}$。由于 L 的每个中心元素的阶都是 2，$\tau_x(ab) = ab = \tau_x(a)\tau_x(b)$，若 $a, b \in Z(L)$。若 $a \in Z(L)$且 $b \notin Z(L)$，则有 $\tau_x(ab) = \tau_x(\pm b) = \pm\tau_x(b) = \tau_x(a)\tau_x(b)$。若 $a, b \notin Z(L)$，则 $a, b \in Z(L)$且$\tau_x(ab) = \tau_x(\pm 1) = \pm 1 = ab = \tau_x(a)\tau_x(b)$。现在，假设 $a, b \notin \langle x\rangle$。我们首先注意到，在这种情况下，可以考虑一个包含 $\{x, a\}$ 或 $\{x, b\}$的 L 的基；于是根据 (iii)，$[x,a] = [x,b] = -1$。若 $ab \notin \langle x\rangle$, $\tau_x(ab) = ab = \tau_x(a)\tau_x(b)$；若 $ab = \pm 1$, $\tau_x(ab) = \tau_x(\pm 1) = \pm 1 = ab = \tau_x(a)\tau_x(b)$。对于 $ab = x$的情形，则$1 = [b,b] = [b, a^{-1}x] = [b, a^{-1}][b,x](b, a^{-1}, x)$，进而 $[a,b] = [b, a^{-1}] = -1$, 因为$(b, a^{-1}, x) = (b, a^{-1}, ab)$。于是 $\tau_x(ab) = -ab = ba = \tau_x(b)\tau_x(a)$。对于 $ab = -x$的情形，也可以采用类似的论证。唯一剩下的情形是 $a \in \{x, -x\}$且 $b \notin \langle x\rangle$。在这种情况下，我们有 $ab \notin \langle x\rangle$, $[x,b] = -1$，进而 $[a,b] = -1$。因此，$\tau_x(ab) = ab = -ba = \tau_x(b)\tau_x(a)$，且 τ_x 是一个半自同构。□

推论 5.2. 设 L是一个秩为 4 的码环，且 x 是 L 中的一个元素，满足$x^2 = -1$。那么，初等映射 τ_x 不是半自同构。

证明. 设 $x \in L$，其中 $x^2 = -1$，并根据 $[10]$,的引理 3.4，考虑 $\{x, y, z, t\}$为 L 的一组基，使得 $(x, y, z) = -1$，且 t 是 L的一个核元素。那么，若 τ_x 是 L的半自同构，则有 $(x, y, t) = 1$, $t \notin \langle x, y\rangle$ 且 $y \notin \langle x, t\rangle$，这就产生了矛盾。□

推论 5.3. 设 L 是一个非结合码环，且 $x \in L$ 满足 $x^2 = -1$。如果τ_x 是半自同构，则 $x \notin N(L)$。

证明。 首先，由于 $x^2 = -1$存在一个包含 x的基。根据引理 5.1，若 τ_x是 L的半自同构，那么对于任意的 y，$z \in L$，若 $(x, y, z) = 1$，则要么$y \in \langle x, z\rangle$，要么 $z \in \langle x, y\rangle$。于是 x 不能属于 $N(L)$，因为 x 无法与 L的其他生成元结合。□

推论 5.4。 设 L 是秩为 $n \geq 4$ 的非结合码环，且 $x \in L$。若$x^2 = -1$，则 τ_x 不是半自同构。

证明。 对于 $n = 4$，推论 5.2 给出了结论。在其他情形下，若 $x^2 = -1$ 且 τ_x 是半自同构，则有 $x \notin N(L)$，于是存在一个包含 x的秩 4 非结合子圈 L'。根据 τ_x的定义，它在 L'上的限制是一个半自同构，这与推论 5.2 矛盾。□

由元素给出的非恒等初等映射只有在码环的秩为 3 时才可能成为半自同构。接下来，我们旨在将这一概念推广到秩更高的码环。

条件 5.5。 设 L是一个非结合码环，且具有一个极大阿贝尔子群 A，满足以下性质：

(i) 对所有的 a和 b，若 A且 x属于 L，则有 $(a, b, x) = 1$;

(ii) 对所有的 $a \in A$ 和 $x \notin A$，都有 $[a, x] = a^2$;

(iii) 存在 $a \in A$，使得 $a^2 = -1$;

定义 5.6。对于二结合环 L 中的子圈 A，子圈 A、τ_A 的广义初等映射 $L \to L$ 定义为

$$\tau_A(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{if} \quad x \in A, \\ x, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注 5.7。在 L 是秩 3 的非结合码环的情形下，满足条件 5.5 的条款 (i) 和 (iv) 的极大阿贝尔子群 A 恰好是 L 的循环子群。事实上，假设 A 有两个生成元 a 和 b，其中 $a^2 = -1$，且 $L = \langle x, y, z \rangle$。由于 $|A| = |\langle a \rangle \langle b \rangle| = \dfrac{|\langle a \rangle||\langle b \rangle|}{|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle|}$，无论 b 的顺序如何，我们都得到 $|A| = 8$。由于 A 并非全部为 L，不妨设 $x \notin A$。于是 $|\langle A, x \rangle| = 16$ 且 $L = \langle a, b, x \rangle$。根据条款 (i)，$(a, b, x) = 1$；由 Moufang 定理，$L$ 是结合的，这就产生了矛盾。

引理5.8. 设 L 是一个具有极大阿贝尔子群 A 且满足条件 *5.5* 的码环。那么，广义初等映射 τ_A 是一个非恒等的半自同构。

证明. 由 (iv) 项可知，τ_A 不是恒等映射。设 $x, y \in L$。显然，$\tau_A(xy) = \tau_A(x)\tau_A(y)$，只要 $x, y \in A$ 或 $x, y, xy \notin A$ 成立。若 $x, y \notin A$ 且 $xy = a \in A$，则得到 $y = x^{-1}a$ 和 $y^{-1} = a^{-1}x$。我们有 $\tau_A(xy) = \tau_A(a) = a^{-1}$。若 $a^2 = 1$，则$\tau_A(x)\tau_A(y) = xy = a = a^{-1}$。若 $a^2 = -1$，由 (ii) 项可得

$$\tau_A(y)\tau_A(x) = yx = x^{-1}a \cdot x = x^{-1} \cdot ax = -x^{-1} \cdot xa = -a = a^{-1}.$$

最后，考虑 $a \in A$ 和 $x \notin A$。若 $a^2 = 1$，则得到 $\tau_A(ax) = ax = \tau_A(a)\tau_A(x)$，类似地，$\tau_A(xa) = \tau_A(x)\tau_A(a)$。若 $a^2 = -1$，则 $\tau_A(ax) = ax = -xa = x(-a) = \tau_A(x)\tau_A(a)$，类似地，$\tau_A(xa) = \tau_A(a)\tau_A(x)$。因此，$\tau_A$ 是一个半自同构。

□

使用 GAP，我们在全部 16 个秩 4 码环中搜索满足条件 5.5 的极大阿贝尔子群。结果发现，只有其中 4 个具有这样的子群：C_2^4，C_3^4，C_1^4和 C_4^4。对于 C_2^4和 C_4^4，只存在一个广义初等映射，且它是反自同构。另一方面，C_3^4 和 C_1^4 分别有 3 个和 7 个非平凡半自同构广义初等映射。环 C_6^4 存在非平凡半自同构，但不存在广义初等映射；由此我们注意到，存在与广义初等映射无关的非平凡半自同构。

本文最后提出：

问题 5.9。子群 A 必须满足什么条件，才能使广义初等映射 τ_A 成为非平凡半自同构?

基于命题 2.5，我们提出如下问题：

问题 5.10。令 $f: \quad L \to Q$是两个穆芳环之间的半同构。L是否与 Q同构?

致谢。 本文中的计算使用了适用于 GAP 的 LOOPS 软件包 [17] [8]完成。作者感谢国家科学技术发展委员会 CNPq（项目编号 406932/2023-9）。GRISHKOV 得到了 FAPESP（项目编号 2024/14914-9）、CNPq（项目编号 307593/2023-1）的资助，并获得俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所国家任务项目 FWNF-2022-003 的支持。作者感谢 Giliard Souza dos Anjos 就该主题进行富有成效的交流。

References

[1] O. Chein 和 E. G. Goodaire, 《具有唯一非恒等交换子（结合子、平方）的穆芳环》, 《代数学杂志》130（1990）, 369–384。[2] D. A. S. de Barros, G. S. dos Anjos, 《一类 Bol 环的半自同构群》, 《代数通讯》（在线）, 第 51 卷, 第 1–13 页, 2022。[3] D. A. S. de Barros, R. M. Pires, 《某些码环的半自同构》, Banach 中心出版物, 第 129 卷（2025）, 51–66。[4] G. S. dos Anjos, 《Chein 环的半自同构群》, 即将发表于《Acta Sci. Math.》（Szeged）。[5] G. S. dos Anjos, 《逆映射也为半同构的半同构》, 《拟群及相关系统》29（2021）, 145–156。[6] S. Gagola III, M. L. Merlini Giuliani, 《奇数阶穆芳环的半同构》, 《代数学及其应用杂志》11（2012）, 194–199。[7] S. Gagola III, M. L. Merlini Giuliani, 《关于某些偶数阶穆芳环的半自同构》, 《代数学杂志》386（2013）, 131–141。[8] GAP 小组, 《GAP——群、算法与编程》, 4.12.2 版, 2022。http://www.gap-system.org[9] R. L. Griess Jr, 《码环》, 《代数学杂志》100（1986）, 224–234。[10] A. Grichkov, R. M. Pires, 《由码环生成的环簇》, 《国际代数与计算杂志》28（2018）, 163–177[11] M. Kinyon, I. Stuhl, P. Vojtˇechovsk´y, 《穆芳环的半同构》, 《代数学杂志》450（2016）, 152–161。[12] M. L. Merlini Giuliani, P. Plaumann, L. Sabinina, 《凯莱-迪克森环的半自同构》, 载于：G. Falcone 编, 《李群、微分方程与几何》。Cham：Springer（2017）, 109–125。[13] M. L. Merlini Giuliani, G. S. dos Anjos, 《二面体自同构环的半同构》, 《代数通讯》48（2020）, 第 3 期, 1150–1162。[14] M. L. Merlini Giuliani, G. S. dos Anjos, 《自同构环的半同构》, 《代数通讯》（在线）, 第 1 卷, 第 1–15 页, 2023。[15] M. L. Merlini Giuliani, G. S. dos Anjos, 《半自同构作用下的李自同构环》, 《代数学及其应用杂志》19（2020）, 第 11 期, 2050221。[16] G. P. Nagy, M. Valsecchi, 《关于具有中心结合子的幂零穆芳环》, 《代数学杂志》307（2007）, 547–564。[17] G. P. Nagy, P. Vojtˇechovsk´y, 《LOOPS：在 GAP 中计算拟群与环》, 3.4.0 版, GAP 软件包, https://cs.du.edu/~petr/loops/[18] H.O. Pflugfelder, 《拟群与环：导论》, 纯数学西格玛丛书 7, Heldermann, 1990。[19] R. M. Pires, 《环的代码：自同构与表示》, 博士论文, 圣保罗大学数学与统计研究所, 2010 年 5 月。（葡萄牙语）[20] W. R. Scott, 《群的半同态》, 《美国数学会会刊》8（1957年）, 1141–1144。

(de Barros) Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG, Brazil, CEP 38408-100电子邮件地址, de Barros: dylene@ufu.br

(GRISHKOV) Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua doMatão, 1010 Butantã, São Paulo, SP, Brazil, CEP 05508-090 and Sobolev Institute ofMathematics, Omsk, Russia
电子邮箱地址，GRISHKOV：shuragri@gmail.com

(MIGUEL PIRES) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, Aterrado, Volta Redonda, RJ, Brazil, CEP27213-145

电子邮箱地址，PIRES：rosemarypires@id.uff.br

(RASSKAZOVA) Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federaldo ABC, Avenida dos Estados, 5001, Bairro Bangu, Santo André, SP, Brasil, CEP 09280-560; and Siberian State Automobile and Highway University, Prospekt Mira, 5,Omsk, Omsk Oblast, Rússia, 644080
电子邮箱地址，RASSKAZOVA：marina.rasskazova@ufabc.edu.br