经典随机过程中的反馈驱动的收敛、竞争与纠缠

Allen Lobo* 和 A. Saravanan*Department of Physics,*
St Joseph's University, Bengaluru, Karnataka, India.（日期：2026年1月7日）

我们提出一种统计收敛的动力学理论，其中大数定律源于结果间反馈，而非预设的独立性。通过定义收敛场Λ_σ及其导数，我们展示了经验频率如何经由耦合演化，从而产生竞争、有限时间涨落和经典纠缠。利用克拉默斯-莫亚尔展开，我们推导出伊藤-朗之万方程和福克-普朗克描述；在对称情形下，该描述可简化为时变奥恩斯坦-乌伦贝克过程。我们提出基于方差的见证量，用于检测二元序列和耦合布朗轨迹中的结果空间纠缠，并通过数值实验确认了纠缠。扩展这一形式体系后，可得到多结果反馈动力学，以及布朗粒子间的有限时间交叉扩散。研究结果将收敛、涨落和纠缠统一起来，表明它们都是单一反馈驱动随机原理的结果。

arXiv:2601.02388v1 [cond-mat.stat-mech] 24 Dec 2025

统计收敛是概率论中最受广泛认可的原则之一，也是统计物理、机器学习和实验科学的基础。然而，尽管这一收敛无处不在，人们却很少追问其物理或动力学起源。在主流理论中，随机性被视为本体论上的原初属性：假定结果相互独立且服从相同分布（独立同分布），并从这些公理出发在数学上推导出收敛。在柯尔莫哥洛夫公理框架 [1], 内，这种处理在数学上虽已完备，却无法解释经验频率为何会随时间趋于稳定。换言之，收敛本身是一条定律，却没有潜在的物理机制。设某个随机事件有 n 个独立同分布的结果，每个结果的概率均为 $P_i = 1/n$。经过 m次重复试验后，测得经验概率 L_i（其中 m_i 表示某一结果 i 发生的次数）：

$$\frac{m_i}{m} = L_i. \tag{1}$$

$$\text{Also,} \quad \sum_{i=1}^{n} L_i = 1. \tag{2}$$

单个结果（k）每次都发生是可能的（尽管这种情况极不可能），即 $L_i = \delta_{ki}$，其中 δ_{ki} 是狄拉克δ函数，对于 $i = k$取 1，其他情况下取 0。然而，根据有限个可数结果系统中的庞加莱复现定理（以及遍历原理），在进行大量重复试验时，每个结果都会被观察到多次。当重复试验的次数趋近于无穷时，每个结果的复现次数将趋于相等；这正是从经典大数定律 [1] （LLN）中得到的结论。但这些理论并未描述 [2–11] 统计的隐藏动力学，而正是这种动力学导致每个结果发生的次数相等，因为试验次数趋于无穷：

$$\lim_{m\to\infty} L_i \to P_i. \tag{6}$$

可以证明，各结果的出现频率呈现出一种由反馈驱动的纠缠。为展示这一点，我们将 Λ_σ 定义为所有结果的联合经验概率，

$$\Lambda_\sigma = \prod_{i=1}^{n} L_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} = \frac{1}{m^n} \prod_{i=1}^{n} m_i, \tag{7}$$

它满足两个条件：

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^0 = \prod_{i=1}^{n} P_i. \tag{8}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d}{dm}\Lambda_\sigma = 0. \tag{9}$$

出现

$$P(m_i = m_k\, \forall i, k \in [1, n]) = \frac{m!}{\left(\frac{m}{n}!\right)^n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^m, \tag{3}$$

这是一般情形下的最大值，

$$P = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! ... m_n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^m. \tag{4}$$

这里 m_a 是结果 a 的频率。输出的任何极端情形，例如某个输出总是出现而其他输出从不出现，都位于输出状态概率分布的极低值区域。因此，最可能的结果是大数定律所预测的结果，并且随着 m 增至 ∞，这一结果会更加显著。另请注意，对于无限种可能结果的情况，也会得到相同的结果，因为在此极限下：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^m \approx \left(\frac{1}{m}\right)^n, \quad \forall m, n > 0. \tag{5}$$

[1] 每种结果出现频率相同的概率——

对 Λ_σ 关于 m求导，

$$\frac{d\Lambda_\sigma}{dm} = \frac{d}{dm}\left(\frac{1}{m^n}\prod_{i=1}^{n} m_i\right), \tag{10}$$

经过一些数学运算后，得到：

$$\frac{d}{dm}\Lambda_\sigma = \Lambda_\sigma\left[\frac{d}{dm}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right) - \frac{n}{m}\right]. \tag{11}$$

上述方程清晰地展示了反馈机制：当代表不足的结果 m_i 必须追赶上来时， $d_m \ln \prod m_i$ 项会放大增长；而随着抽样次数增加， $-n/m$ 项会抑制增长。结果的数量（n）会降低 Λ_σ 向 Λ_σ^0 值收敛的收敛率。当 $m < n$ 时，至少有一个结果尚未出现，因此 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 和 Λ_σ 都仍为零。[2]。随着实验开始并通过重复试验持续进行，使得 $m \geq n$， Λ_σ 会由于偶然性或随机性而偏离 Λ_σ^0。系统的经验随机性可通过 Λ_σ 相对于 Λ_σ^0 值的相对偏移来衡量。当 Λ_σ 偏离 Λ_σ^0 时，这种经验随机性的偏差可表示为 $\sigma = \Lambda_\sigma - \Lambda_\sigma^0$；因此，对于方程（11）中的 m 的较小取值，前提是 $m \geq n$，

$$\frac{1}{\Lambda_\sigma}\frac{d}{dm}\Lambda_\sigma + \frac{n}{m} = \frac{d}{dm}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right) \tag{12}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dm}\prod_{i=1}^{n} m_i = \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)\cdot\left[\frac{d}{dm}\ln\left(\Lambda_\sigma^0 + \sigma\right) + \frac{n}{m}\right]. \tag{13}$$

方程 (13) 表明，结果频率直接取决于[3] 该试验当前阶段的经验随机性，这一随机性由 σ衡量。如果随机过程的演进导致结果频率偏离均匀性， σ 就会增加，因此 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 每次试验的增长速率也会提高。这意味着当前出现频率较低的结果 m_i 也会增加，使得$\prod_{i=1}^{n} m_i$ 增长得更快。

反馈耦合与随机涨落

因此，随机试验的结果并非完全由偶然性支配，而是取决于该过程重复进行时的瞬时经验随机性。

由方程 (11)，可得：

$$\frac{d}{dm}\ln\Lambda_\sigma + \frac{n}{m} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\frac{d}{dm}m_i. \tag{14}$$

$$\Rightarrow \frac{dm_k}{dm} = m_k\frac{d}{dm}\ln\Lambda_\sigma + nL_k - \sum_{k\neq i}^{n}\frac{L_k}{L_i}\frac{dm_i}{dm}. \tag{15}$$

为方便起见，我们将 $d_m \ln \Lambda_\sigma$ 定义为 S。对于一个双结果（$n = 2$）系统 $\Lambda_\sigma = L_1 L_2$，频率增长率因此满足以下关系：

$$\dot{m_1} = m_1 S + 2L_1 - \frac{L_1}{L_2}\dot{m_2} \tag{16}$$

$$\dot{m_2} = m_2 S + 2L_2 - \frac{L_2}{L_1}\dot{m_1}, \tag{17}$$

其中，导数 d_m 用点表示。此外，

$$\dot{m_1} + \dot{m_2} = 1, \tag{18}$$

由于 $m_1 + m_2 = m$。我们进一步得到：

$$\frac{1}{L_1}\dot{m_1} + \frac{1}{L_2}\dot{m_2} = mS + 2. \tag{19}$$

上述两个方程构成一个微分方程组：

$$\frac{1}{L_1}\dot{m_1} + \frac{1}{L_2}\left(1 - \dot{m_1}\right) = mS + 2, \tag{20}$$

。由此得到试验间反馈耦合方程：

$$\frac{dm_1}{dm} = L_1 - mS\frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2}, \tag{21}$$

$$\frac{dm_2}{dm} = L_2 - mS\frac{L_1 L_2}{L_2 - L_1}. \tag{22}$$

上述方程组描述了这类随机系统的结果频率如何相互耦合。频率的增长取决于所表达的经验概率，并且随着所表达的经验概率降低而增加。尽管在实验中具体结果无法预测，但各种结果都遵循随机试验所产生的这种偏向，因此系统偏离了独立同分布术语。将偏差漂移 $L_1 - L_2$ 表示为 Δ，并根据关系$d_m L_i = (d_m m_i - L_i)/m$，

$$\frac{d\Delta}{dm} = -2\frac{L_1 L_2}{\Delta}S. \tag{23}$$

$$\therefore S = -\frac{2\Delta}{1-\Delta^2}\frac{d\Delta}{dm}. \tag{24}$$

[2] 或者，对于 $n \to \infty$的情况， Λ_σ 的值会保持为零，直到试验次数本身足够大，使得 Λ_σ Λ_σ^0 等于。需要注意的是，乘积 $\prod a_i \cdot a_j$ 会随着 a_i 越来越接近并等于 a_j而增加。

方程 (22) 和 (23) 还揭示了经验概率之间相互竞争的演化：

$$\dot{L}_1 = -S\frac{L_1 L_2}{\Delta} = -\dot{L}_2. \tag{25}$$

这些关系直接表明，一种结果的频率增长会受到另一种结果的抑制。如果$L_1 < L_2$，那么 L_1 必定上升，因此系统会自我修正，趋向经典平衡。这种收敛也体现在方程（24）中：随着 L_1 越来越接近 L_2，偏差漂移项 Δ 的增长率趋于零，而S 也趋于零，最终经验概率的增长率趋于 1。随机结果并非彼此独立、全凭偶然，而是通过反馈耦合在动态过程中相互纠缠。一种结果的增长会抑制其他结果，系统则在确定性修正与随机涨落之间振荡。

然而，系统的随机性意味着，动力学演化[4] 不会严格遵循方程（25），而会呈现一定的涨落。在朗之万框架 [12] 中，这些涨落可表示为 ε，

$$\dot{L}_1 = -S\frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2} + \varepsilon(L_1, L_2, m). \tag{26}$$

在重复试验次数足够多时的稳态条件下，经验概率的增长率必须饱和至零。因此：

$$\varepsilon = S\frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2}\left(1 - f(m)\exp\left[-\frac{m}{nm_0}\right]\right). \tag{27}$$

这里， m_0 是试验的弛豫极限，此时收敛率渐近饱和，而 $f(m)$是涨落函数。由方程 (11) 可知，收敛率与 n成反比。这导出耦合方程：

$$\dot{L}_1 = -\dot{L}_2 = -S\frac{L_1 L_2}{L_1 - L_2} f(m)\exp\left[-\frac{m}{nm_0}\right]. \tag{28}$$

方程 (28) 可解释为一种随机闭合关系：确定性反馈项受到涨落因子 $f(m)\exp[-m/(nm_0)]$ 的调制。我们假设存在指数饱和，这是一种最简的现象学闭合关系，其动机是大 m 下的饱和。在朗之万框架中，这相当于对扩散系数进行随时间变化的重标度，

$$B(L,m) \;\mapsto\; B(L,m)\, f(m)^2 \exp\!\left[-\tfrac{2m}{nm_0}\right]. \tag{29}$$

[4] 本节所说的动力学，是指系统随 m 增加而演化，而非随时间演化。

因此，在双结果系统中抑制涨落的同一指数定律，在多结果和双粒子布朗运动表述中再次出现，表现为交叉扩散关联的衰减。因此，方程 (28) 并非凭空设定，而是体现了有限 m 涨落抑制机制，将后续的朗之万和布朗运动研究统一起来。

朗之万与福克–普朗克表述

现在，我们将经验频率的反馈耦合动力学重新表述为随机微分方程（SDE）框架。根据定义， $L_i(m)$表示重复试验 m 次后结果 i 的经验频率，其中$\sum_i L_i = 1$。第 $(m+1)^{\text{th}}$ 次重复试验增加一个指示向量 X，其中 $X_i \in \{0,1\}$ 和$\sum_i X_i = 1$，从而得到更新式

$$L_i \mapsto L_i' = \frac{mL_i + X_i}{m+1} = L_i + \Delta L_i, \tag{30}$$

$$\Rightarrow \Delta L_i = \frac{X_i - L_i}{m+1}. \tag{31}$$

我们允许下一次试验的选择概率取决于当前经验状态，

$$\Pr(X_i = 1 \mid L, m) = q_i(L, m), \tag{32}$$

从而编码了我们先前使用 Λ_σ推导出的反馈耦合。特别是，定义

$$\Lambda_\sigma = \prod_{k=1}^{n} L_k, \qquad S := \frac{d}{dm}\ln\Lambda_\sigma, \tag{33}$$

提供动力学场 S ，该场控制结果竞争。

克拉默斯–莫亚尔展开

根据每次试验的更新，前两个克拉默斯–莫亚尔系数 [13, 14] 为

$$a_i(L,m) = \mathbb{E}[\Delta L_i \mid L] = \frac{q_i(L,m) - L_i}{m+1} \approx \frac{q_i - L_i}{m}, \tag{34}$$

$$b_{ij}(L,m) = \mathbb{E}[\Delta L_i \Delta L_j \mid L] \approx \frac{q_i\delta_{ij} - q_i q_j}{m^2}. \tag{35}$$

这里， $\mathbb{E}[\Delta L_i \Delta L_j \mid L]$ 表示在给定系统当前状态的情况下，对随机下一步结果取期望值（统计平均）。因此，我们证明经验频率动力学可写成著名的伊藤形式 [15]:

$$dL_i = A_i(L,m)\,dm + \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(L,m)\,dW_j, \tag{36}$$

其中 $A_i = (q_i - L_i)/m$。噪声矩阵 G_{ij} 满足$GG^\top = B$，且 W_j 是相互独立的维纳过程 [16–19]。对于 n 结果情形，相应的概率密度 $p(L, m)$ 的福克–普朗克方程 [20] 为：

$$\partial_m p = -\sum_i \partial_{L_i}\big[A_i(L,m)\,p\big] + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_{L_i}\partial_{L_j}\big[B_{ij}(L,m)\,p\big], \tag{37}$$

每个面上均满足无通量边界条件（$L_i = 0$）。现在，我们针对二结果情形展开分析，

然后给出 n–结果单纯形。对于 $n = 2$ with$L = L_1$、$L_2 = 1 - L$和 $\Delta = L_1 - L_2$，确定性反馈关系给出：

$$\dot{L} = -\,S(L,m)\,\frac{L(1-L)}{2L-1}, \tag{38}$$

将目标概率固定为

$$q_1(L,m) = L - mS(L,m)\frac{L(1-L)}{2L-1}, \quad q_2 = 1 - q_1. \tag{39}$$

因此，朗之万方程为：

$$dL = -\,S(L,m)\,\frac{L(1-L)}{2L-1}\,dm + \frac{\sqrt{q_1(L,m)\,[1-q_1(L,m)]}}{m}\,dW_m. \tag{40}$$

相应的福克–普朗克方程 [20] for$p(L, m)$ 在 $(0, 1)$ 上为

$$\partial_m p(L,m) = -\,\partial_L\big[A(L,m)\,p\big] + \tfrac{1}{2}\,\partial_L^2\big[B(L,m)\,p\big], \tag{41}$$

其中，

$$A(L,m) = -\,S(L,m)\,\frac{L(1-L)}{2L-1}, \tag{42}$$

$$B(L,m) = \frac{q_1(L,m)\,[1-q_1(L,m)]}{m^2}. \tag{43}$$

在对称极限下，这可以简化为一个动力学奥恩斯坦–乌伦贝克过程 [21], , 我们将在下一节中展示。

近似平衡奥恩斯坦–乌伦贝克极限

在对称点 $L = 1/2$ 附近，当 $\Delta \to 0$ 时，偏差漂移方程可化为

$$\frac{d\Delta}{dm} = -\frac{S(m)}{2}\,\Delta + \frac{1}{m}\,\xi(m), \tag{44}$$

其中，$\xi(m)$ 是高斯白噪声。这是一个弛豫率随时间变化的奥恩斯坦-乌伦贝克过程$S(m)/2$。如果对于较大的 m，$S(m) \sim c/m$，则方差满足以下关系：

$$\frac{d}{dm}\,\mathrm{Var}[\Delta] = -\frac{c}{m}\,\mathrm{Var}[\Delta] + \frac{1}{m^2}, \tag{45}$$

其解为：

$$\mathrm{Var}[\Delta](m) = \frac{1}{(c-1)m} + \mathcal{C}m^{-c}, \qquad c > 1. \tag{46}$$

因此，方差渐近地按 $\sim 1/m$ 衰减，但其前因子 $1/(c-1)$ 受到反馈的调节。现在我们可以将结果推广到 n–结果的情形。

一般 n–结果系统

对于 $n > 2$，漂移和扩散保持如下形式

$$A_i(L,m) = \frac{q_i(L,m) - L_i}{m}, \tag{47}$$

$$B_{ij}(L,m) = \frac{q_i\delta_{ij} - q_i q_j}{m^2}, \tag{48}$$

其中，$q_i(L, m)$ 由 Λ_σ 约束确定

$$\sum_i \frac{q_i}{L_i} = n + mS. \tag{49}$$

福克–普朗克方程为

$$\partial_m p = -\sum_i \partial_{L_i}(A_i p) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_{L_i}\partial_{L_j}(B_{ij}p), \tag{50}$$

在 $L_i = 0$ 处设置反射边界。

在这一表述中，结果的经验频率按照 Wright–Fisher 扩散 [22, 23] 演化，并具有由反馈确定的非平凡目标分布$q(L, m)$，该分布直接源自编码于 Λ_σ 中的反馈机制。

二结果情形的纠缠见证

在二结果设置中，每次试验产生一个二元变量 $X_1 \in \{0, 1\}$，其中 $X_2 = 1 - X_1$。类似于布朗情形中的渗透速度，我们定义离散评分变量

$$s_1 = \frac{X_1 - L_1}{L_1}, \qquad s_2 = \frac{X_2 - L_2}{L_2}, \tag{51}$$

它们衡量每个结果相对于经验均值的局部涨落。这些量的期望值为零

但能反映分布的尖锐程度。遵循布朗见证量 [24], 的结构

$$W(t) = \mathrm{Var}(u_1 + u_2) + \mathrm{Var}(x_1 - x_2)$$

我们提出离散类比

$$W_{\mathrm{bin}}(m) = \mathrm{Var}[\,s_1 + s_2\,] + \mathrm{Var}[\,X_1 - X_2\,]. \tag{52}$$

为方便起见，我们令在试验 m 中结果 1 的经验频率为 $L_1(m) = p$，从而 $L_2(m) = 1 - p$。对于概率为 p 的可分离的（独立同分布）二结果过程，这两个贡献可以显式计算:

$$\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p), \tag{53}$$

$$\mathrm{Var}(s_1 + s_2) = \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{1-p}\right)^2 p(1-p) = \frac{(2p-1)^2}{p(1-p)}. \tag{54}$$

因此，该见证量具有闭式形式

$$W_{\mathrm{bin}}^{\mathrm{sep}}(p) = \frac{(2p-1)^2}{p(1-p)} + 4p(1-p). \tag{55}$$

引入 $z = p(1-p) \in \left(0, \tfrac{1}{4}\right]$, 后，可将其简化为

$$W_{\mathrm{bin}}^{\mathrm{sep}}(z) = \frac{1}{z} + 4z - 4 \quad \geq 1, \tag{56}$$

等号在 $p = 1/2$ 处成立。任何可分离的二结果过程都满足不等式 [24]

$$W_{\mathrm{bin}}(m) \;\geq\; 1. \tag{57}$$

不等式（57）的违背，即

$$W_{\mathrm{bin}}(m) < 1, \tag{58}$$

表明存在由反馈动力学诱导的结果空间纠缠。这一判据为二元结果框架中的纠缠提供了直接且可操作的见证。

这与布朗情形中基于方差的见证相对应。现在考虑一个二元结果序列 $\{X_t\}_{t\geq 1}$，其中 $X_t \in \{0,1\}$。对于长度为 M 的滑动窗口，我们将窗口中结果 1 的经验频率记为:

$$p \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} X_{t_j} \tag{59}$$

以下所有窗口化量均使用相同的 p，以确保窗口内的一致性。我们将中心化的 ± 1 变量定义为 $Y_t :$
$= 2X_t - 1 \in \{-1, +1\}$，并将离散得分（渗透）变量

$$s_t := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p}\right)(X_t - p), \tag{60}$$

它是渗透速度的离散类比，与布朗情形相同。在同一窗口内，对于固定滞后 $\ell \geq 1$，我们将数对 $(t, t+\ell)$ 视为两个子系统。

双时刻见证量

类比于耦合布朗坐标的 $W = \mathrm{Var}(u_1 + u_2) + \mathrm{Var}(x_1 - x_2)$，我们定义双时刻结果空间见证量

$$W_{\mathrm{pair}} := \mathrm{Var}\big[s_t + s_{t+\ell}\big] \;+\; \mathrm{Var}\big[Y_t - Y_{t+\ell}\big]. \tag{61}$$

这里，方差是在窗口内的 M 对齐对 $(t, t+\ell)$ 上计算的，并采用总体归一化。

对于可分基线，即连续结果在窗口内相互独立且具有相同的成功概率 p，我们有

$$\mathrm{Var}(Y_t - Y_{t+\ell}) = \mathrm{Var}(Y_t) + \mathrm{Var}(Y_{t+\ell}) = 2\big(1 - (2p-1)^2\big) = 8p(1-p), \tag{62}$$

$$\mathrm{Var}(s_t + s_{t+\ell}) = \mathrm{Var}(s_t) + \mathrm{Var}(s_{t+\ell}) = 2\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p}\Big)^2 p(1-p) = 2\,\frac{(2p-1)^2}{p(1-p)}. \tag{63}$$

因此，可分离的（独立同分布）情形下的值为

$$W_{\mathrm{pair}}^{\mathrm{sep}}(p) \;=\; 2\left(\frac{(2p-1)^2}{p(1-p)} + 4p(1-p)\right). \tag{64}$$

引入 $z = p(1-p) \in (0, \tfrac{1}{4}]$, 后，也可以将其写成

as

$$W_{\mathrm{pair}}^{\mathrm{sep}}(z) \;=\; 2\Big(\frac{1}{z} + 4z - 4\Big) \;\geq\; 2, \tag{65}$$

在 $p = \tfrac{1}{2}$ 处取等号。因此，我们注意到，所有可分离的双时过程都满足不等式

$$W_{\mathrm{pair}} \;\geq\; W_{\mathrm{pair}}^{\mathrm{sep}}(p) \;\geq\; 2. \tag{66}$$

因此，当.....时，就会出现结果空间纠缠（不可分离性）

$$W_{\mathrm{pair}} \;<\; W^{\mathrm{sep}}_{\mathrm{pair}}(p), \tag{67}$$

也就是说，经验二时刻方差结构低于可分基线。方程（67）是布朗运动表述中 $W < 4T$ 的直接对应形式。[5]

给定一个包含 M 次试验的窗口和滞后 ℓ （通常为$\ell = 1$），我们构造完全位于窗口内的 M 个对齐对（X_t， $X_{t+\ell}$）（因此，对于长度为N的序列，有效窗口起点为$k = 1$，.....，$N - (M + \ell) + 1$）。随后，我们根据窗口计算 p ，再通过对 $s_t + s_{t+\ell}$ 和$Y_t - Y_{t+\ell}$计算样本（总体）方差来确定W_{pair}，并将其与方程（64）进行比较。纵向分析可以通过滑动窗口进行，从而获得 $W_{\mathrm{pair}} - W^{\mathrm{sep}}$ 对的时间序列；负值窗口所占的比例可作为持续纠缠的序参量。

为实现方程（67）的二结果见证量，我们开发了一个模拟程序，用于模拟反馈驱动的二元过程、计算滑动窗口频率 p，并评估二时刻量

$$W_{\mathrm{pair}} = \mathrm{Var}[s_t + s_{t+\ell}] + \mathrm{Var}[Y_t - Y_{t+\ell}],$$

对于 $s_t = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1-p}\right)(X_t - p)$ 和 $Y_t = 2X_t - 1$。对于每个窗口，都将其与可分基线进行比较

$$W^{\mathrm{sep}}_{\mathrm{pair}}(p) = 2\left(\frac{(2p-1)^2}{p(1-p)} + 4p(1-p)\right),$$

因此，违反 $W_{\mathrm{pair}} < W^{\mathrm{sep}}{}_{\mathrm{pair}}(p)$ 表明存在结果空间纠缠。该代码还会追踪相对于 $\Lambda_{\sigma 0} = 1/4$ 的 $\Lambda_\sigma = p(1-p)$，以检验只要满足 $\Lambda_\sigma \neq \Lambda_{\sigma 0}$，方程（67）是否成立。结果如图 1 所示。我们的数值实验证实，方程（67）的纠缠见证会在二结果过程中动态激活。如图 1 所示，经验频率 p_m 始终接近平衡值 $1/2$，然而双时刻见证 W_{pair} 却低于其可分离基线 $W^{\mathrm{sep}}{}_{\mathrm{pair}}(p)$，表明连续试验之间存在基于记忆的结果纠缠。这些违反恰好发生在收敛场 $\Lambda_\sigma = p(1-p)$ 偏离其对称极限 $\Lambda_{\sigma 0} = 1/4$ 的窗口内，说明偏离平衡伴随着不可分离的时间相关性。底部面板明确标出了这些时间区间

[5] *Single–time degeneracy*: 形如 $\mathrm{Var}(s) + \mathrm{Var}(Y)$ 的时间二元见证量是退化的。对于固定窗口 p，它恒等地收敛到可分离值，因为方程 (60) 中的 s 是 $X - p$ 的标量倍数，因此不涉及依赖顺序的相关性。这说明方程 (61) 中的双时间构造是合理的，它对时间结构十分敏感。

这表明方程（67）并非持续成立，而是以突发形式出现，反映了结果之间的随机竞争。由此，我们在理论模型与实时有限样本动力学之间建立了直接的数值联系。

方程 (61) 的结构与正文中使用并在附录 A 中推导出的布朗见证量 $W = \mathrm{Var}(u_1 + u_2) + \mathrm{Var}(x_1 - x_2)$ 相呼应，其中进行了如下替换：$(u_1, u_2) \mapsto (s_t, s_{t+\ell})$，以及 $(x_1, x_2) \mapsto (Y_t, -Y_{t+\ell})$。两项判据背后的逻辑相同——方差权衡受到可分离性的约束。现在，我们将这些分析应用于研究两个布朗粒子之间的经典纠缠；许多作者已对这一问题进行了严格探讨 [24–27]。

两个布朗粒子之间的经典纠缠

将两个增量的联合符号结果表示为 $\mathcal{O} \in \{++, +-, -+, --\}$ 经验频率$L_{ab}(m)$ 和 $\sum_{ab} L_{ab} = 1$，我们定义联合 Λ_σ 及其导数：

$$\Lambda^{(2)}_\sigma(m) = \prod_{a,b\in\{+,-\}} L_{ab}(m), \tag{68}$$

$$S(m) := \frac{d}{dm} \ln \Lambda^{(2)}_\sigma(m). \tag{69}$$

与单变量情形一样，克拉默斯–莫亚尔恒等式意味着

$$\sum_{ab} \frac{q_{ab}(m)}{L_{ab}(m)} = 4 + mS(m), \tag{70}$$

其中， q_{ab} 下一步的联合概率由之前使用的同一反馈竞争闭合关系确定。考虑过阻尼朗之万动力学，

$$dx_1 = \sqrt{2D_1}\, dW_1, \tag{71}$$

$$dx_2 = \sqrt{2D_2}\, dW_2, \tag{72}$$

$$\langle dW_1\, dW_2 \rangle = \rho(m)\, dt, \tag{73}$$

其中相关系数 $\rho(m)$ 由联合定律确定：

$$\rho(m) = q_{++}(m) + q_{--}(m) - q_{+-}(m) - q_{-+}(m). \tag{74}$$

联合密度 $P(x_1, x_2, t)$ 随后满足福克–普朗克方程

$$\partial_t P = D_1\, \partial^2_{x_1} P + D_2\, \partial^2_{x_2} P + 2\, D_c(t)\, \partial_{x_1}\partial_{x_2} P, \tag{75}$$

$$D_c(t) = \rho(m(t))\sqrt{D_1 D_2}. \tag{76}$$

在大样本极限 $S \to 0$ 下，我们有 $q_{ab} \to L_{ab} \to 1/4$。因此，$\rho \to 0$，交叉扩散项消失，

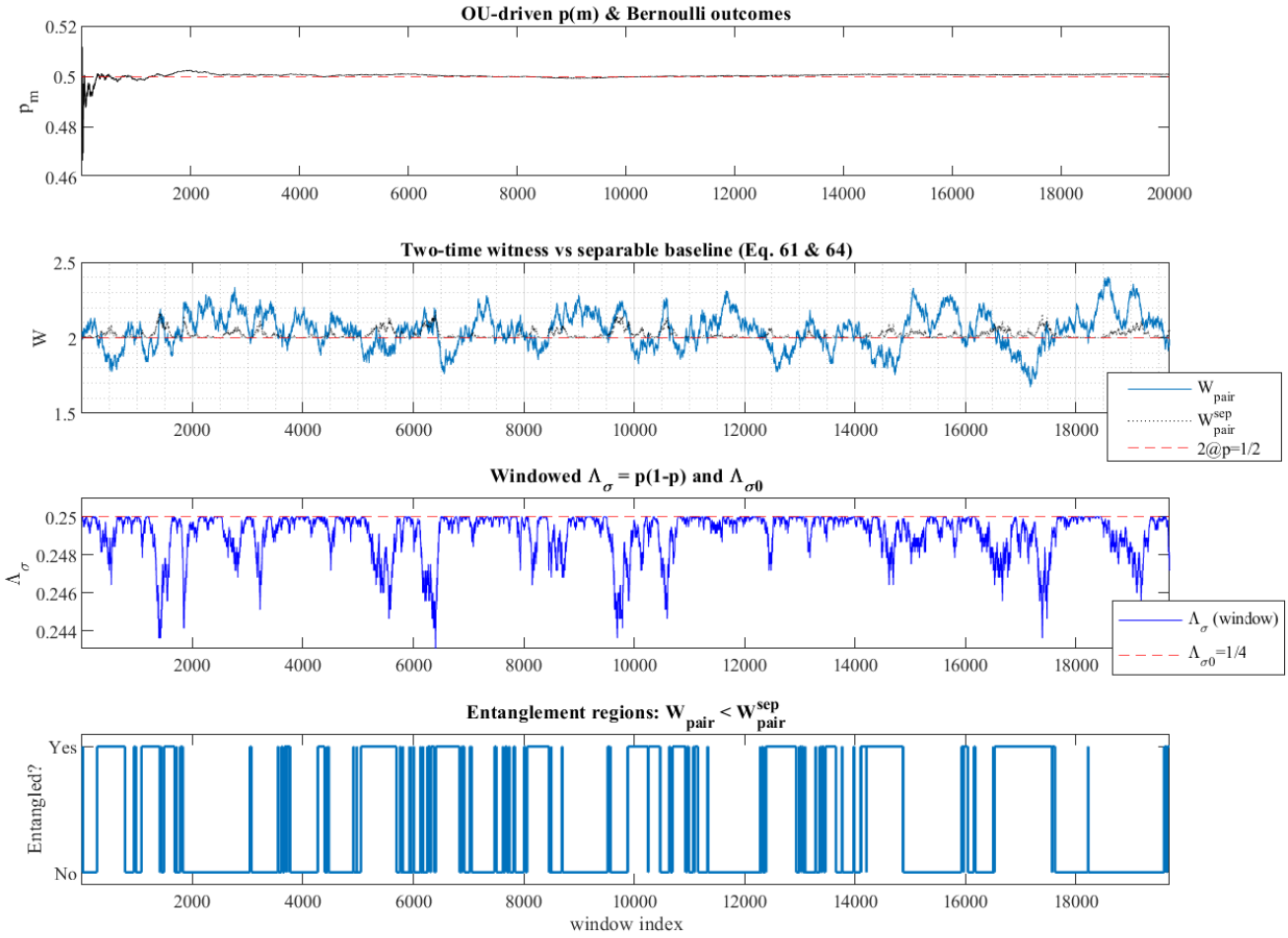

图 1. 对双结果纠缠见证量（式 67）的数值检验。上：由奥恩斯坦-乌伦贝克过程驱动的结果 1 经验频率 p_m。第二行：双时刻见证量 W_{pair} 与可分基线 $W^{\mathrm{sep}}{}_{\text{对}}(p)$（式 61、64）的比较；违反基线表明存在纠缠。第三行：相对于 $\Lambda_{\sigma 0} = 1/4$的窗口化收敛场 $\Lambda_\sigma = p(1-p)$。下：满足 $W_{\mathrm{pair}} < W_{\text{可分对}}(p)$ 的纠缠区域。图中 x 轴表示试验次数。

恢复独立布朗运动。

我们考虑两个过阻尼布朗粒子，并按符号对每个无穷小增量进行粗粒化。联合结果集为 $\mathcal{O} = \{++, +-, -+, --\}$，在 m 个增量和 $\sum_{\alpha\in\mathcal{O}} L_\alpha = 1$ 上的经验频率为 $L_\alpha(m)$。联合 Λ_σ 及其对数导数变为：

$$\Lambda_\sigma^{(2)}(m) = \prod_{\alpha\in\mathcal{O}} L_\alpha(m), \qquad S(m) := \frac{d}{dm}\ln\Lambda_\sigma^{(2)}(m). \tag{77}$$

这引出了对称且由竞争驱动的双结果定律推广，同时保留正态性——

性，并重现单对公式：

$$\dot{L}_\alpha = -\frac{2}{n(n-1)}\,S(m)\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{O}\\ \beta\neq\alpha}}\frac{L_\alpha L_\beta}{L_\alpha - L_\beta}, \quad n = 4. \tag{78}$$

代入 $L_1 = L_{++}, L_2 = L_{+-}, L_3 = L_{-+}, L_4 = L_{--}$，再结合 n=4，方程 (78) 可得：

$$\dot{L}_1 = -\frac{S}{6}\left(\frac{L_1L_2}{L_1-L_2} + \frac{L_1L_3}{L_1-L_3} + \frac{L_1L_4}{L_1-L_4}\right), \tag{79}$$

$$\dot{L}_2 = -\frac{S}{6}\left(\frac{L_2L_1}{L_2-L_1}+\frac{L_2L_3}{L_2-L_3}+\frac{L_2L_4}{L_2-L_4}\right), \quad (80)$$

$$\dot{L}_3 = -\frac{S}{6}\left(\frac{L_3L_1}{L_3-L_1}+\frac{L_3L_2}{L_3-L_2}+\frac{L_3L_4}{L_3-L_4}\right), \quad (81)$$

$$\dot{L}_4 = -\frac{S}{6}\left(\frac{L_4L_1}{L_4-L_1}+\frac{L_4L_2}{L_4-L_2}+\frac{L_4L_3}{L_4-L_3}\right), \quad (82)$$

其中 $S(m) = \frac{d}{dm}\ln(L_1L_2L_3L_4)$，且 $\sum_{i=1}^{4} L_i \equiv 1$。下一步的联合概率为 $q_i = L_i + mL_i$。

对于 $n=4$，前因子为 $1/6$。这个流具有两个关键性质：

1. $\sum_\alpha L_\alpha = 0$ （归一化守恒），因为成对项是反对称的。

2. 与 Λ_σ 场的一致性：

$$\sum_\alpha \frac{\dot{L}_\alpha}{L_\alpha} = -\frac{2}{n(n-1)}\,S\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{L_\beta}{L_\alpha-L_\beta} = S,$$

因为每个无序对在与前因子 $2/[n(n-1)]$ 相乘后求和时，恰好贡献一个单位。对于$n=2$，方程（78）化简为方程（25）。

我们用 $X_\alpha \in \{0,1\}$ 表示具有 $\sum_\alpha X_\alpha = 1$ 的（$m+1$）th 结果。定义下一步联合概率，可得：$q_\alpha(L,m) = \Pr(X_\alpha=1 \mid L,m)$。根据离散更新 $L'_\alpha = (mL_\alpha + X_\alpha)/(m+1)$，我们可以得到单纯形上的漂移-扩散闭合关系：

$$\text{漂移:} \qquad A_\alpha(L,m) = \frac{q_\alpha(L,m)-L_\alpha}{m}, \quad (83)$$

$$\text{Diffusion:} \qquad B_{\alpha\beta}(L,m) = \frac{q_\alpha\delta_{\alpha\beta}-q_\alpha q_\beta}{m^2}, \quad (84)$$

因此，伊藤随机微分方程为

$$dL_\alpha = A_\alpha\,dm + \sum_\beta G_{\alpha\beta}\,dW_\beta, \quad (85)$$

其中 $GG^\top = B$。为匹配方程（78）中的确定性流，我们选择

$$q_\alpha(L,m) = L_\alpha + m\,\dot{L}_\alpha, \quad (86)$$

，其中 L_α 来自（78）。这保证了 $A_\alpha = L_\alpha$，并确保 Λ_σ 一致性 $\sum_\alpha (q_\alpha/L_\alpha) = n + mS$。较小的额外模型化涨落（例如有限分辨率噪声或仪器噪声）可作为加性漂移偏置，或作为作用于 $S(m)$ 的乘性因子纳入，而不改变其结构。

映射到双粒子布朗增量

对于扩散常数为 D_1、D_2 的每个粒子，在一个物理时间步长 Δt 内，我们可以确定一个粗粒化试验，并在连续极限下令 $m(t) \approx t/\Delta t$。

写出过阻尼朗之万动力学，我们得到：

$$dx_1 = \sqrt{2D_1}\,dW_1, \quad (87)$$

$$dx_2 = \sqrt{2D_2}\,dW_2, \quad (88)$$

$$\langle dW_1\,dW_2\rangle = \rho(m)\,dt, \quad (89)$$

其增量相关性由联合下一步定律确定：

$$\rho(m) = q_{++}(m) + q_{--}(m) - q_{+-}(m) - q_{-+}(m). \quad (90)$$

这里的 q_α 由（86）给出。联合密度 $P(x_1,\ x_2,\ t)$ 随后满足

$$\partial_t P = D_1\,\partial_{x_1}^2 P + D_2\,\partial_{x_2}^2 P + 2\,D_c(t)\,\partial_{x_1}\partial_{x_2}P, \quad (91)$$

$$D_c(t) = \rho(m(t))\sqrt{D_1D_2}. \quad (92)$$

因此，结果空间中的反馈在宏观上表现为交叉扩散项。在大样本极限下 $S \to 0$ 我们得到 $q_\alpha \to L_\alpha \to 1/4$，因此 $\rho \to 0$，方程（92）简化为两种相互独立的扩散。

假设收敛场遵循渐近标度 $S(m) \sim c/m$，其中 $c>1$，我们给出一个简单的闭合关系$\rho(m) = \kappa\,S(m)$，其中无量纲常数为 κ。于是，

$$\mathrm{Cov}[x_1(t),x_2(t)] = 2\sqrt{D_1D_2}\int_0^t \rho(s)\,ds \quad (93)$$

$$2\kappa\sqrt{D_1D_2}\,\ln\!\Big(\frac{t}{t_0}\Big), \quad (94)$$

对于某个微观 t_0。我们在图2中展示了这种由反馈诱导的相关性产生的交叉协方差演化。模拟中，我们使用任意的扩散率。具体而言[6], 我们采用 $D_1 = 1.0$、$D_2 = 0.7$，其中 $c = 1.5$ 且 $\kappa = 0.4$。我们总共运行了5000条轨迹的模拟，时间步长为0.01，$t \le 100$。

同时，$\mathrm{Var}[x_i(t)] = 2D_it$，因此相关系数衰减为：

$$r(t) = \frac{\mathrm{Cov}[x_1,x_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}[x_1]\mathrm{Var}[x_2]}} \approx \frac{\kappa\,\ln(t/t_0)}{t} \to 0, \quad (95)$$

其中显示了有限时间纠缠（互信息为正），并且在经典极限下消失，这与理论在$m\to\infty$时恢复独立性相一致。图3展示了相关系数随时间的衰减，体现了采用与图2相同参数进行数值模拟时出现的有限时间纠缠。现在我们转入本文的结论部分。

[6] D_1 和 D_2 的取值选为 $\mathcal{O}(1)$，使轨迹以相近的尺度扩散，但不会变得完全相同。同样，$\kappa<1$ 使 $|\rho|<1$ 在所有时刻都保持不变，从而保证数值稳定性。要实现收敛，反馈强度（c）必须大于 1，如方程（46）所示。

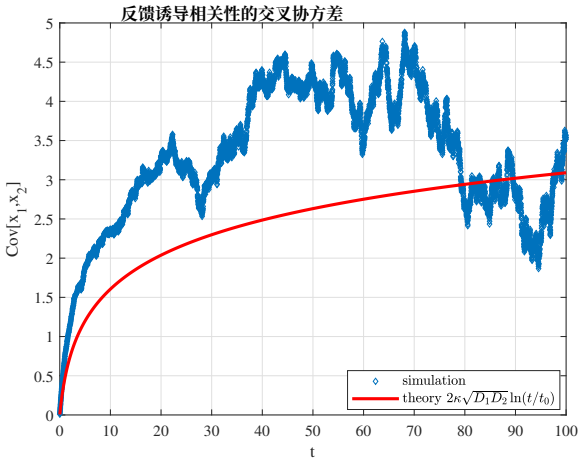

图2. 对两个受反馈控制联合结果统计的过阻尼布朗粒子进行数值模拟，展示交叉协方差 $\mathrm{Cov}[x_1(t)\ x_2(t)]$的时间演化。数据证实了预测的对数增长 $\mathrm{Cov}[x_1, x_2] = 2\kappa\sqrt{D_1 D_2}\ln(t/t_0)$，表明结果空间反馈导致了有限时间纠缠。

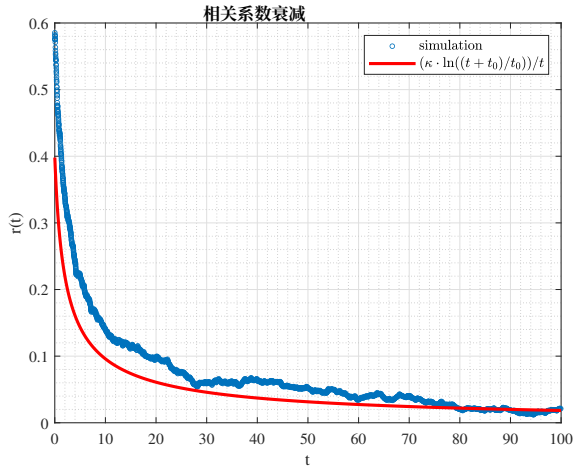

图3. 相关系数 $r(t) = \mathrm{Cov}[x_1(t)\ x_2(t)]/\sqrt{\mathrm{Var}[x_1]\mathrm{Var}[x_2]}$，由与图2相同的模拟得出。结果显示了预测的渐近标度 $r(t) \sim (\kappa \ln t)/t$，证实布朗粒子之间的经典纠缠在中间时段有限，但在长时间极限下消失，从而恢复独立扩散。

结论

在本文中，我们构建了一个统计收敛的动力学框架，在该框架中，随机性不再被视为先验公理，而是结果空间中结构化演化的结果。通过将 Λ_σ 及其导数定义为收敛场，我们展示了经验频率如何在动力学上这些对象相互纠缠并受到反馈耦合的作用，从而在涌现极限下恢复经典大数定律。反馈方程表明，每个结果的增长都会受到其他结果的抑制，由此产生竞争和自我校正；随着试验次数增加，涨落也会逐渐衰减。

我们通过克拉默斯–莫亚尔展开，将这一形式体系推广到随机领域，推导出伊藤-朗之万表示及相应的福克–普朗克方程。在对称情形下，该方程化简为随时间变化的奥恩斯坦–乌伦贝克过程，并预言一种有限-m 方差定律，其形式为 $\mathrm{Var}[\Delta] \sim 1/[(c-1)m]$。因此，经验涨落熟悉的 $1/m$收敛性得以保留，但前因子有所改变，反映了反馈的强度。这为公理化大数定律与一种动态且可检验的随机模型搭建了直接桥梁。

我们的纠缠见证表明，只要满足 $\Lambda_\sigma \neq \Lambda_{\sigma 0}$，结果序列就会表现出基于记忆的不可分性；同一机制还会在布朗粒子之间产生有限时间相关性。因此，收敛、涨落与纠缠可视为同一动力学定律的不同侧面。除了基础理论之外，这一框架还为量化有限实验中的随机性以及对物理和计算中的相关过程建模，提供了新的解析工具。

最后，我们证明，同一机制可自然推广至多结果系统，以及两个布朗粒子的联合结果空间。在此情形下，结果空间反馈会诱导有限时间内的交叉扩散项，从而在原本相互独立的扩散之间产生经典纠缠。相关性按 $r(t) \sim (\kappa \ln t)/t$ 衰减，渐近趋于零，但在可观测时间尺度内仍保持有限。这为该理论提供了一项简洁且可实验检验的预测。

综合来看，这些结果提出了一种统一的随机性观点，并且可以通过经验加以验证：随机性是一种由反馈驱动的过程，随机收敛、结果之间的竞争以及有限时间内的纠缠，都源自同一个动力学原理。除了对概率论基础的概念性贡献外，这一框架还为描述统计物理中的有限样本涨落、评估计算环境中的随机性，以及建模多粒子系统中的相关动力学提供了新工具。

数据可用性声明

本文所述的研究生成了用于绘制图 1、2 和 3 的数据；其数值代码（MATLAB）可向通讯作者（A.L.）合理提出请求后获取。

资金声明

没有需要声明的资金支持。

利益冲突声明

所有作者均声明不存在利益冲突。

*通讯作者：allen.lobo@sju.edu.in；allen.e.lobo@outlook.com

[1] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the theory of probability* 1933 (Chelsea 出版公司，)。[2] D. M. Chibisov, 《概率论及其应用》60（2016），10.1137/S0040585X97T987696。[3] M. Mattm¨uller, 《数学史》41（2014），10.1016/j.hm.2014.04.001。[4] P. Ter´an, 《软计算进展》48（2008），10.1007/978-3-540-85027-4 35。[5] M. Weba, 《统计数学方法》18（2009），10.3103/S1066530709010050。[6] J. A. Goldstein, 《Boletim da Sociedade Brasileira de Matem´atica》6（1975），10.1007/BF02584869。[7] J. Dedecker、P. Doukhan、G. Lang、L. R. Jos´e Rafael、S. Louhichi 和 C. Prieur, 载于 *Examples and Applications* 2007 *Weak Dependence: With* ()。

[8] P. Ter´an 和 I. Molchanov, 《软计算进展》37（2006），10.1007/3-540-34777-1 20。[9] A. Shirikyan（2003）。[10] S. Yang、C. Su 和 K. Yu, 《统计与概率快报》78（2008），10.1016/j.spl.2007.09.046。

[11] J. W. Kay, 载于 *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online* (2014)。[12] D. S. Lemons 和 A. Gythiel, 《美国物理学杂志》65，1079（1997），https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/65/11/1079/12107627/1079 1 online.pdf。[13] H. Kramers, 《Physica》7，284（1940）。[14] J. E. Moyal, 《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》11，150（2018）。[15] K. Itˆo, 《帝国学会院刊》20，519（1944）。[16]"导论与综述"，载于 *Introduction to Stochas-tic Processes With R* (John Wiley & Sons, Ltd, 2016)，第1章，第1–39页，https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118740712.ch1。[17] "马尔可夫链：入门"，载于 *Introduction to Stochastic Processes With R* (John Wiley & Sons, Ltd，2016)，第2章，第40–75页，https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118740712.ch2。[18]"连续时间马尔可夫链"，载于 *Introduction to Stochastic Processes With R*(John Wiley & Sons, Ltd，2016)，第7章，第265–319页，https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118740712.ch7。[19]"布朗运动"，载于 *Introduction to Stochastic Pro-cesses With R* (John Wiley & Sons, Ltd，2016)，第8章，第320–371页，https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9781118740712.ch8。[20] T. Gao、J. Duan 和 X. Li, 《应用数学与计算》278，1（2016）。[21] G. E. Uhlenbeck 和 L. S. Ornstein, 《Phys. Rev.》36，823（1930）。[22] C. Br¨autigam 和 M. Smerlak, 《理论生物学杂志》550，111236（2022）。[23] A. Alexandre、A. Abbara、C. Fruet、C. Loverdo 和 A.-F. Bitbol, 《理论生物学杂志》599，112030（2025）。[24] A. E. Allahverdyan、A. Khrennikov 和 T. M. Nieuwen-huizen, 《Phys. Rev. A》72，032102（2005）。[25] S. A 和 A. Lobo, 《Phys. Rev. E》112，024138（2025）。[26] D. M. Valente 和 A. O. Caldeira, 《Phys. Rev. A》81，012117（2010）。[27] T. L. 和 S. Ciliberto, 《Phys. Rev. Lett.》134，227101（2025）。