非定向流形上异常点的反常碰撞

Weijia Wang，† Qicheng Zhang，†* Kun Zhang、Shuaishuai Tong 和 Chunyin Qiu *

中国武汉市武汉大学物理科学与技术学院、教育部人工微纳结构重点实验室，邮编 *430072*

†这些作者贡献相同：*Weijia Wang*、*Qicheng Zhang**通讯作者：*qicheng.zhang@whu.edu.cn*；*cyqiu@whu.edu.cn*

从厄米狄拉克点到非厄米例外点（EP），能带简并点在拓扑相变中发挥着核心作用。除了单个简并点的拓扑性质之外，它们之间的相互作用还会产生更丰富的现象。一个典型例子是成对产生的简并点发生反常的非湮灭碰撞；此前人们认为，这种现象只会出现在具有非阿贝尔性质的多能带系统中。在此，我们从理论上揭示并通过实验证明，这种反常碰撞甚至可出现在不具备非阿贝尔性质的简单双能带系统中。在一个布里渊区构成不可定向克莱因瓶的二维非厄米晶格中，两个拓扑荷相反、由混合点成对产生的例外点，在再次相遇时会合并为一个新的涡旋点，而非彼此湮灭。值得注意的是，混合点是一种缺陷简并，不呈现本征能量编织；而涡旋点虽是非缺陷简并，却呈现非平庸的本征能量编织。这一过程体现了从有隙相到无隙相的非厄米相变；我们通过动量分辨能带编织和贝里相位测量，在混合维度声学晶格中直接观测到了这一现象。我们的发现表明，不可定向性为调控能带简并点和拓扑相开辟了新的领域，并为实验探索例外点拓扑与不可定向拓扑之间的相互作用铺平了道路。

能带简并点在现代凝聚态物理中发挥着核心作用。在厄米系统中，狄拉克点和外尔点等典型能带简并点构成了众多拓扑相的基础，包括拓扑绝缘体和拓扑半金属 [1-4]。这些厄米简并点仅涉及本征能量的合并，通常受对称性保护，并以量子化的贝里相位为特征。相比之下，非厄米系统会产生性质迥异的一类简并点，称为例外点（EP）；在这些点上，本征能量和本征态都会合并 [5-10]。例外点催生了许多在厄米系统中没有对应现象的效应，包括复能带编织 [11-23]，手征态转移 [24-28],增强传感 [29-32] 和完美吸收 [33-36]。

除了单个能带简并点所涉及的拓扑之外，多个简并点之间的相互作用还构成了更加丰富的图景[37-45]。对于定义在常规布里渊区（BZ）上的两能带系统，费米子倍增定理 [37,41] 指出，成对产生且拓扑荷相反的简并点在碰撞时最终必定湮灭，如图 1(a)所示。相比之下，在多能带系统中，禁戒定理[42] 和非阿贝尔守恒规则[43] 允许出现更引人注目的情形：成对产生的简并点再次碰撞时未必湮灭，因为它们与其他简并点相互作用后，拓扑荷可能发生转变，如图 1(b)所示。这类异常碰撞已得到广泛研究和实验验证，既包括由四元数不变量保护的厄米狄拉克点 [46-49] ，也包括由非阿贝尔编织不变量表征的非厄米例外点[43,50,51]。然而，迄今所有这些发现都源于能带简并点与可定向空间拓扑之间的相互作用，该空间通常是环面布里渊区或无限参数空间。近期理论进展表明，非对称型空间群对称性能够使动量空间变得不可定向，从而形成拓扑结构为克莱因瓶或实射影平面的布里渊区[52-60]。这一根本性变化重塑了拓扑分类，使传统的费米子倍增定理失效，并确立了新的禁戒约束[58-60]。由此自然引出一个关键问题：不可定向性如何影响例外点之间的相互作用？不依赖多能带非阿贝尔拓扑，是否也能发生异常碰撞?

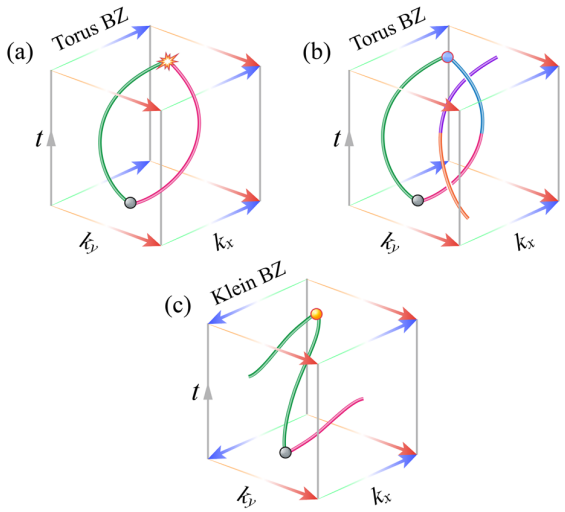

图 1. 不同情形下具有代表性的能带简并演化。(a) 在双能带阿贝尔系统中，成对产生的简并点在可定向环面布里渊区上碰撞后湮灭。(b) 在多能带非阿贝尔系统中，成对产生的简并点可以合并为一个新的简并点，而不发生湮灭。(c) 在双能带阿贝尔系统中，成对产生的简并点也可以合并为一个新的简并点，而不发生湮灭，但此处是在不可定向克莱因布里渊区上。沿 k_x 方向的相反箭头表示克莱因布里渊区的不可定向性。

在这里，我们通过揭示一种由不可定向性诱导的异常例外点演化来回答这一问题。在该二维（2D）双能带晶格中，布里渊区的基本域构成一个克莱因瓶。如图 1(c)所示，两个拓扑荷相反、最初由一个混合点（HP）成对产生的例外点，再次相遇时并未湮灭，而是合并为一个不同的涡旋点（VP）。这种在定义于不可定向流形上的两能带系统中特有的异常行为，源于例外点穿越克莱因布里渊区（KBZ）的不可定向边界时发生的拓扑荷反转。值得注意的是，尽管混合点和涡旋点本质上都与例外点对有关，前者是（非厄米型）缺陷简并，不呈现本征能量编织；而后者是（厄米型）非缺陷简并，却呈现非平庸的本征能量编织[12,61]。因此，这种异常演化标志着拓扑相变：系统从平庸有隙相转变为非平庸无隙相。后者由一个单极子表征，而在定义于可定向布里渊区上的厄米系统和非厄米系统中，这种单极子均被禁止[60]。为通过实验验证这些效应，我们实现了一种混合维度非厄米声学晶格，它由一个实空间维度和一个合成动量维度构成。我们在四个具有代表性的阶段，沿克莱因布里渊区边界测量了两个彼此独立但相辅相成的拓扑不变量——本征频率编织和本征态贝里相——明确观测到与异常例外点演化相关的有隙—无隙相变，以及混合点和涡旋点的存在。这些实验结果还进一步揭示了不可定向空间中禁戒定理的有效性，以及费米子倍增定理遭到违反的情形。

理论模型

我们构建了一个二维双能带非厄米晶格模型，以揭示不可定向 KBZ 上的异常例外点碰撞。如 图 2(a) 所示，该模型的每个元胞包含两个子晶格 A 和 B，并具有互易常数耦合 s_1 和 s_2，以及单向时变耦合 $g_1(t)$ 和 $-g_1(t)$。二维动量空间中的晶格哈密顿量表示为

$$\mathbf{H}(k_x, k_y) = (s_2 \cos k_x + s_1)\sigma_x + \left(s_2 \sin k_x - i g_1(t) e^{ik_y}\right)\sigma_y, \tag{1}$$

其中，σ_x 和 σ_y 为泡利矩阵。具体而言，我们设定参数 $s_1 = -0.6$、$s_2 = 1$ 和 $g_1(t) = te^{-i\pi/3}$，使哈密顿量满足动量空间滑移反射对称性

$$U\mathbf{H}(k_x, k_y)U^{-1} = \mathbf{H}(-k_x, k_y + \pi), \tag{2}$$

采用幺正算符 $U = \sigma_x$（模型设计的详情见 补充信息）。由于这一对称性，只需考虑布里渊区的一个缩减基本域 $(k_x,\ k_y) \in [-\pi,\ \pi] \times [0,\ \pi]$，即可完整捕捉晶格的能带拓扑。不同于常规布里渊区 $(k_x,\ k_y) \in [-\pi,\ \pi] \times [-\pi,\ \pi]$，其周期边界粘合后形成可定向环面；这个缩减后的布里渊区对应一个不可定向的克莱因瓶，称为 KBZ。值得注意的是，由于对称性 $k_y = 0$ 和 $k_y = \pi$，边界必须沿相反方向粘合，从而形成 KBZ 的不可定向边界 $U\mathbf{H}(k_x, 0)U^{-1} = \mathbf{H}(-k_x,\ \pi)$。

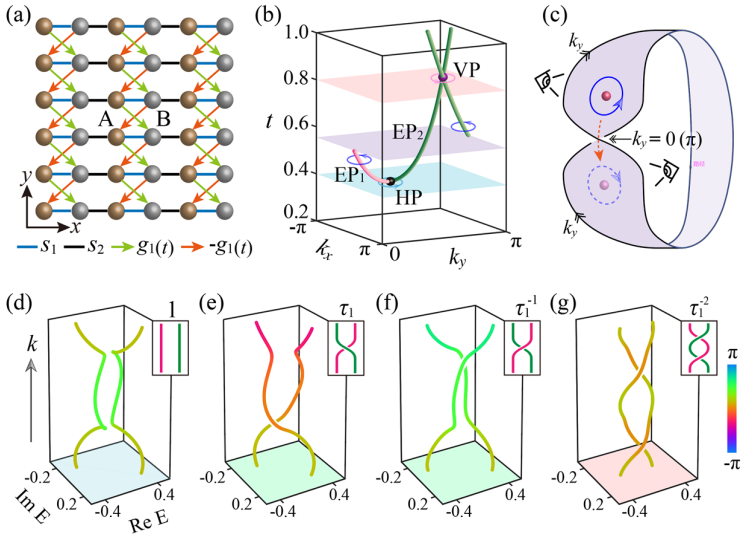

图 2. 异常例外点碰撞的理论模型。(a) 二维非厄米晶格模型，其中 s_1 和 s_2表示互易常数耦合，$g_1(t)$ 和 $-g_1(t)$ 表示随时间变化的单向耦合。(b) 能带简并点在 KBZ 上随时间 t演化的过程。青色、紫色和粉色平面分别标示半极点的产生、例外点$_1$ 穿过不可定向边界，以及涡旋点的形成。(c) 由两个不可定向边界 $k_y = 0$ 和 $k_y = \pi$构成的莫比乌斯结构，展示例外点$_1$ 穿过边界前后的拓扑荷反转。(d)–(g) 沿 (b) 中逆时针回路计算得到的本征能量编织（曲线）和贝里相累积（颜色），这些回路分别环绕半极点、例外点$_1$、例外点$_2$, 和涡旋点。插图为编织示意图。

我们计算了 KBZ 上能带简并点随时间 t 变化的绝热演化，如 图 2(b)所示。为确定每个简并点的例外分类，我们采用两种方式对其进行表征：一是通过本征能量编织 [14-16], 定义的拓扑荷（亦称编织不变量），二是由双正交本征态导出的贝里相位 [62,63]。具体而言，拓扑荷由辫群的 Artin词（例如 τ_1，τ_1^{-1} 和 1）指定，其定义依据是沿着局部逆时针环路得到的本征能量编织。该环路 Γ_1 环绕简并点，沿环路动量回到其初始值。同时，环路的选取需避开不可定向边界，从而使所有 EP 电荷均根据位于莫比乌斯带同一侧的环路定义；这条莫比乌斯带由 $k_y = 0$ 和 $k_y = \pi$边界的扭曲粘合形成，如 图 2(c)所示。相比之下，贝里相位定义为

$$\theta = i \oint_{\Gamma_2} \frac{\langle \phi(k) | \partial_k \psi(k) \rangle}{\langle \phi(k) | \psi(k) \rangle} dk, \tag{3}$$

其中，Γ_2 是一个动量回路，沿此回路本征态会回到自身；$\phi(k)|$ 和$|\psi(k)$分别表示左、右布洛赫本征态。值得注意的是，Γ_1 和 Γ_2 不一定相同， 因为动量回到自身并不一定意味着本征态也会回到自身。 值得注意的是，本征能量编织和贝里相位是彼此独立但相辅相成的不变量；二者结合后，可对我们研究的能带简并点进行不同的分类。

在时刻 $t = 0.4$，$(k_x, k_y) = (0, \pi/3)$处出现一个能带简并点。如图 2(d)所示，其平庸拓扑荷 1 和零贝里相位表明它是一个半极点（HP）——一种特殊类型的非厄米缺陷简并点，有别于通常具有非平庸拓扑荷和非零贝里相位的传统例外点 [63]。随着 t增大，这个半极点分裂成一对简并点。如图 2(e)所示，这两个简并点具有非平庸拓扑荷 τ_1和 τ_1^{-1}，以及 $-\pi$的贝里相位，证实它们是传统例外点，分别记作 EP_1 和 EP_2, 。（请注意，图 2(e)中的颜色变化仅反映单次动量环路 Γ_1 后 $-\pi/2$ 的相位累积；在此过程中，两个本征态发生交换。每个本征态都需要经过双重循环环绕，即 $\Gamma_2 = 2\Gamma_1$，才能回到自身，从而产生 $-\pi$ 的贝里相位。）在 $t = 0.55$处，携带电荷 τ_1 的 EP_1 穿过不可定向边界 $k_y = 0$ ，并从 $k_y = \pi$ 重新进入 KBZ，之后其电荷反转为 τ_1^{-1}。如图 2(c)所示，这种反转可以通过由 k_y =0 和 $k_y = \pi$构成的莫比乌斯带直观地理解。在穿过不可定向边界之前，EP_1 位于莫比乌斯带的外侧，其环绕环路（从外侧视角看）沿逆时针方向。在穿过边界之后，EP_1 移至内侧，其环路仍保持逆时针方向

（从内侧视角看）。由于 EP 电荷是相对于位于莫比乌斯带同一侧的环路定义的，因此内侧的逆时针环路从外侧看必须是顺时针环路，最终导致 EP 拓扑电荷反转。最后，在 $t = 0.8$ 处，EP_1 和 EP_2，均携带相同的拓扑荷 τ_1^{-1}，并合并为位于 $(k_x, k_y) = (-3\pi/10, 5\pi/6)$的新简并点。该简并点具有非平庸拓扑荷$\tau_1^{-2}$ ，但贝里相位为零，如图2(f)所示，表明它是一个涡旋点（VP）——一种特殊的厄米非缺陷简并点，有别于传统狄拉克点；传统狄拉克点在本征能量编织方面具有平庸拓扑荷且贝里相位非零 [1,2]。该 VP 还构成一个总编织度为二的未配对单极子，这在可定向非厄米系统中是不允许的。这一完整演化表明，成对产生的 EP 在再次相遇时并不会湮灭，而是合并为一个由不可定向拓扑保护的新简并点，从而驱动系统从有隙相（平庸能带编织 1）转变为无隙相（非平庸能带编织 τ_1^{-2}）。作为比较，我们还构造了一种平庸演化情形，其中 EP 穿过 KBZ 的可定向边界。在这种情况下，由半极点产生的两个 EP 在再次相遇时重新合并为原来的半极点，系统始终处于平庸有隙相（见补充信息）。

实验实现

我们通过实验实现了一种混合维度声学晶格——由一个实空间维度和一个合成动量维度组成——以展示例外点的异常演化。该实现利用了以下事实：我们的二维动量空间哈密顿量 $\mathbf{H}(k_x、\ k_y)$ 可以映射为一个由合成动量 k_y参数化的一维实空间哈密顿量，即，

$$\mathbf{H}(k_y) = \sum_n \left(g_1 e^{ik_y} + s_1\right) c_{2n}^{\dagger} c_{2n-1} + \left(-g_1 e^{ik_y} + s_1\right) c_{2n-1}^{\dagger} c_{2n} + s_2\left(c_{2n+1}^{\dagger} c_{2n} + c_{2n}^{\dagger} c_{2n+1}\right), \quad (4)$$

其中，$c_n^{\dagger}$ 和 c_n 分别表示第 n 个晶格点处的产生与湮灭算符。如图3(a)所示，声学晶格由沿实空间 x 方向排列的 16 个声学腔（8 个元胞）组成，并构成一个环，以实现周期性边界条件。每个腔的偶极共振频率为 $\omega_0 \approx 5212$ Hz，本征损耗为 $\gamma_0 \approx 40$ Hz，模拟一个晶格点。相邻腔之间的细管产生互易的恒定声学耦合，例如，平行管对应负耦合$s_1 \approx -30$ Hz，交叉管对应正耦合 s_2 ≈50 Hz。同时，在腔[19]之间引入电声单向耦合器，每个耦合器由麦克风、放大器、移相器和扬声器组成。它们实现依赖于 k_y的单向复耦合 $\kappa_r(k_y) = 50 g_1(t) e^{ik_y}$ 和 $\kappa_l(k_y) = -50 g_1(t) e^{ik_y}$，其中，依赖于 t的振幅由放大器控制，合成动量 k_y则通过移相器编码（更多实验细节见补充信息）。

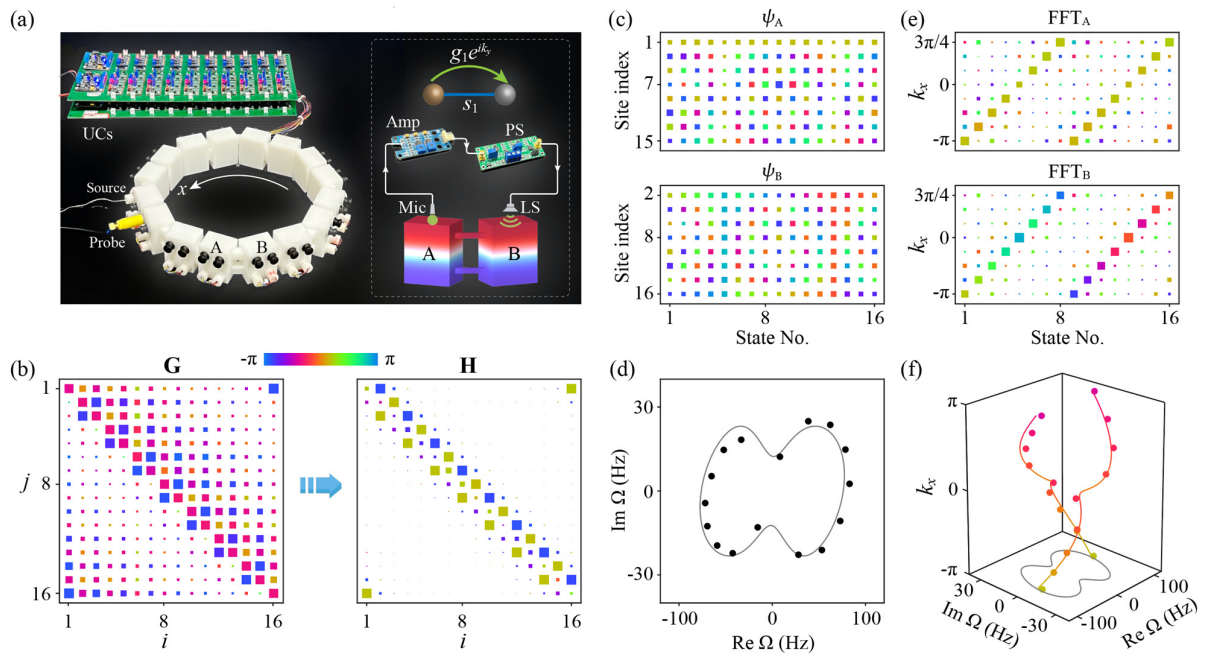

图 3. 实验实现。(a) 声学晶格包含一个实空间维度x和一个合成动量维度k_y，其中 k_y 由单向耦合器（UC）编码，每个耦合器由一个麦克风（Mic）、一个放大器（Amp）、一个移相器（PS）和一个扬声器（Ls）组成。(b) 左：在激励频率 $\omega = 5212$ Hz下实验测得的格林函数的空间表示。下方：根据测得的格林函数重构的哈密顿量。方块的尺寸和颜色分别表示振幅和相位。为清晰起见，对角元已减去声学位点能量 $\omega_0 - i\gamma_0$。(c) 子晶格 A 和 B 上的实空间本征态。(d) 系统的本征频率，圆圈和实线分别表示实验结果和理论结果。(e) 对应本征态的快速傅里叶变换频谱，其中振幅最大的位置表示相应的动量 k_x。(f) 本征频率编织和贝里相位累积随 k_x的变化。 (b)–(f) 中的所有实验数据均取自 $t = 0.48$和 $k_y = 0.25\pi$。

对于给定的时刻 t 和合成动量 k_y，我们依次激励并探测这 16 个腔，以获取声学格林函数的各个元素 $\mathbf{G}_{ij}(\omega)$。这里，$i, j = 1{:}\,16$分别表示被探测和被激励的腔，ω 表示激励频率。图3(b)左侧面板显示了在给定 $t = 0.48$和 $k_y = 0.25\pi$ （对应 $\kappa_r = 23.18 - 6.21i$ Hz和 $\kappa_l = -23.18 + 6.21i$ Hz）时，$\mathbf{G}(\omega)$在 $\omega = 5212$ Hz下的一个代表性空间分布图。根据测得的格林函数，我们通过 $\mathbf{H} = \omega\mathbf{I} - \mathbf{G}^{-1}(\omega)$实验重构系统哈密顿量，其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。原则上，$\mathbf{H}$ 与 ω无关，因此任意激励频率下的格林函数都会得到相同的哈密顿量。为抑制实验误差，我们对在 $\omega \in [5162, 5262]$ Hz范围内均匀选取的 51 个频率下重构的哈密顿量取平均。如图3(b)右侧面板所示，周期性分布的互易和非互易最近邻耦合清晰可辨，证明了我们实验方案的可靠性。（注意，为突出耦合模式，已从 $\mathbf{H}$ 的对角元中减去声学位点项 $\omega_0 - i\gamma_0$ 。）无论是根据测得的格林函数

对于重构后的哈密顿量，我们可以得到系统的实空间本征态 $|\psi_n(x)$ 和本征频率 Ω_n ，其中 n 表示态指标，如图 3(c) 和 3(d) 所示。值得注意的是，这些量不保留动量 k_x 信息。为获取动量，我们对 $|\psi_n(x)$ 进行快速傅里叶变换（FFT）。随后，根据快速傅里叶变换谱的峰值位置确定各本征态的实动量 k_x ，如图 3(e) 所示。因此，我们提取每个已确定动量 k_x 下子晶格 A 和 B 的快速傅里叶变换振幅 $\rho_{A,B}(k_x)$ 以及相位 $\varphi_{A,B}(k_x)$，重构动量分辨的布洛赫本征态 $|\psi_n(k_x) = [\rho_A e^{i\varphi_A}, \rho_B e^{i\varphi_B}]^{\mathrm{T}}$。随后，利用右本征态 $|\psi_n(k_x)$ 及其双正交左本征态 $\phi_n(k_x)|$ 表征贝里相位，而相应的本征频率 $\Omega_n(k_x)$ 则构成了本征值编织和拓扑荷。图 3(f) 展示了 k_x 从 $-\pi$ 变化至 π 时的本征频率和贝里相位累积，分辨率为 0.25π （为便于呈现数据，此处沿选定路径对贝里相位累积进行了轻微调整）。进一步以 0.25π 为步长将合成动量 k_y 从 0 逐步增加至 π ，即可获得整个 KBZ 上完整的动量分辨本征频率和本征态。

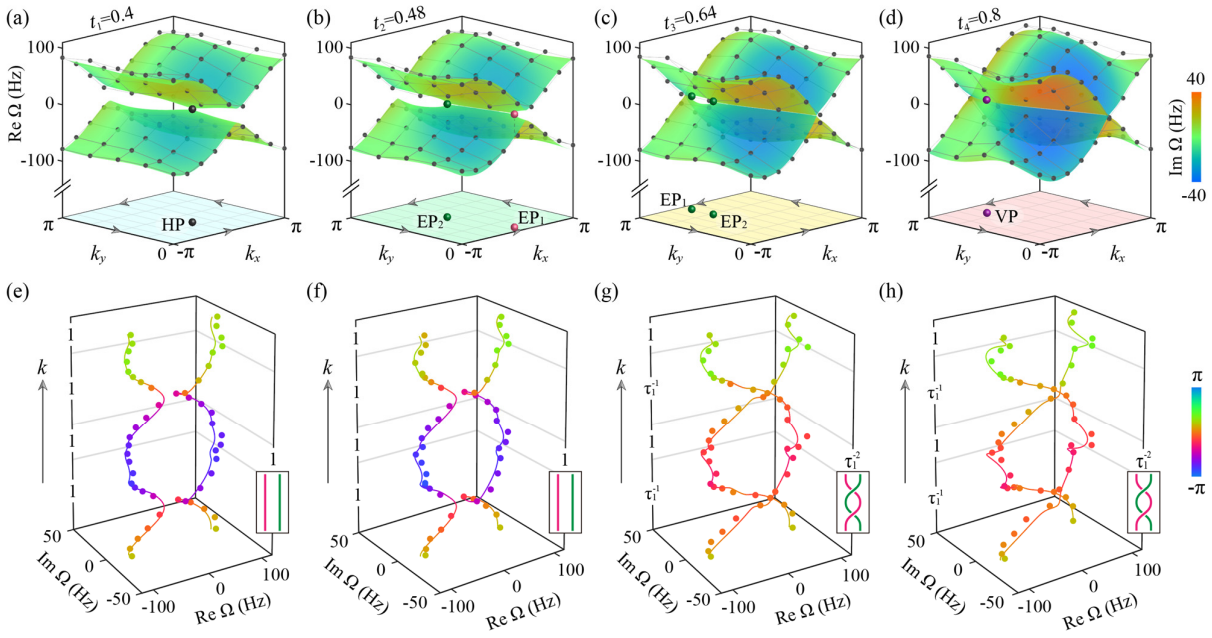

图 4. 异常例外点演化诱导的相变的实验表征。(a)-(d) 在四个代表性时刻 $t_1 = 0.4$、 $t_2 = 0.48$、 $t_3 = 0.64$ 和 $t_4 = 0.8$ 测得的整个 KBZ 上的本征频率（圆点），以及相应的理论黎曼曲面。球体表示能带简并点。(e)-(h) 根据实验数据提取的沿克莱因布里渊区边界测得的能带编织（圆点）和贝里相（颜色），箭头表示遍历方向。实线表示理论结果。与 t_3 和 t_4 处的非平庸能带编织相反， t_1 和 t_2 处的平庸能带编织表明发生了有隙到无隙拓扑相变。

首先，我们表征异常例外点演化引起的声学晶格相变。我们重点研究四个具有代表性的时刻 $t_1 = 0.4$、 $t_2 = 0.48$、 $t_3 = 0.64$ 和 $t_4 = 0.8$，它们分别对应 KBZ 内存在一个半极点、一对拓扑荷相反的例外点、一对拓扑荷相同的例外点，以及一个涡旋点。通过调节电声反馈模块中的放大器，实现这四个时刻，使声学晶格中单向耦合的振幅分别固定为 $|\kappa_r| = |\kappa_l| \approx 20$ Hz、$|\kappa_r| = |\kappa_l| \approx 24$ Hz、 $|\kappa_r| = |\kappa_l| \approx 32$ Hz 和 $|\kappa_r| = |\kappa_l| \approx 40$ Hz。采用上述策略获取实动量 k_x 和合成动量 k_y 后，测得的本征频率及相应的理论黎曼曲面如图 4(a)–4(d) 所示，二者吻合良好。我们进一步提取 KBZ 边界上的本征频率和本征态，从而获得各时刻的能带编织和贝里相位，如图 4(e)–4(h) 所示。在 t_1 和 t_2 时，能带编织是平庸的，即为 1，直接体现了有隙相[图 4(e) 和 4(f)]。结合这两个时刻贝里相位均为零的结果，可以判定系统中存在一个半极点，或存在一对源自该半极点且拓扑荷相反的例外点。相比之下，在 t_3 和 t_4 时，KBZ 边界上的能带编织变为非平庸，即为 τ_1^{-2}，表明系统处于无隙相，而贝里相位仍为零[图 4(g) 和 4(h)]。这两个特征表明存在一对携带相同拓扑荷的例外点，或者等价地，存在由它们合并形成的涡旋点。这些结果为异常例外点演化驱动的拓扑相变提供了明确无误的实验证据。此外，它们还验证了 KBZ 上的禁戒定理，并证明费米子倍增定理遭到违反。将 KBZ 边界划分为四个区段后，我们发现，在 t_3 和 t_4 处的编织可表示为 $1\tau_1^{-1}1\tau_1^{-1}$，满足形式为 $B_aB_bB_aB_b^{-1}$ [58,60] 的禁戒约束。（注意，在 t_1 和 t_2 处的平庸编织也满足这一结构。）在 t_3 和 t_4 处，非零的总判别数（例如编织度 [44]——定义为 τ_1 数与 τ_1^{-1} 数之差）表明存在无法湮灭、而是在不可定向动量空间中形成未配对单极子的例外点，从而违反费米子倍增定理[58-60]。

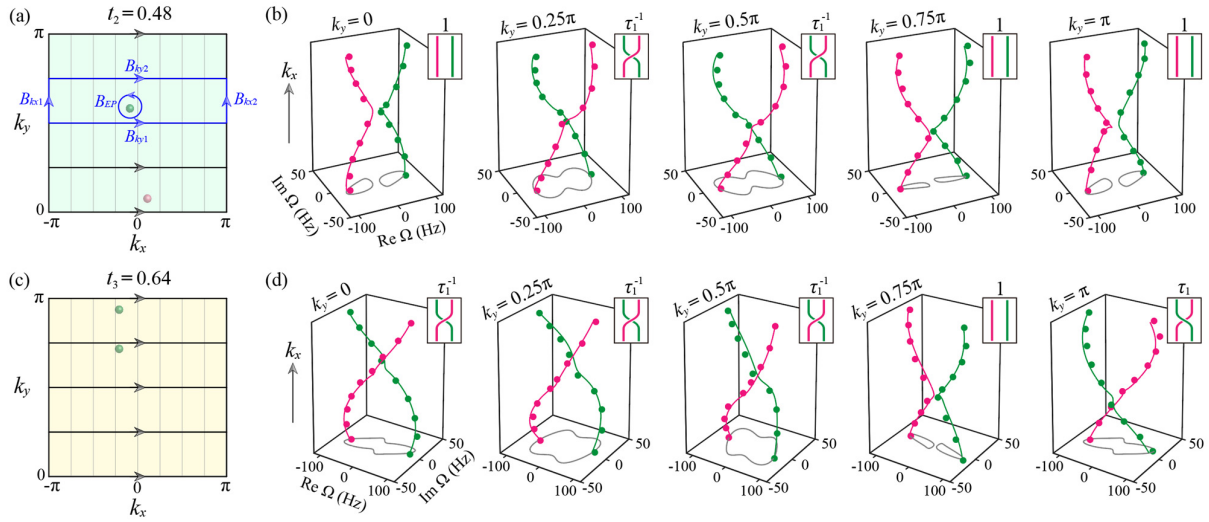

图5. EP电荷反转的实验表征。(a) 时刻 t_2时 KBZ 上例外点的示意分布。定义 EP拓扑电荷的局部回路可连续变形为四条具有恒定 k_x 和 k_y的路径。(b) 沿五条恒定-k_y 路径测得的本征频率编织。与 $k_y=0.75\pi$ 路径和 $k_y=0.5\pi$ 路径相关联的不同编织 1 和 τ_1^{-1} 表明，它们之间存在一个携带拓扑荷 τ_1^{-1} 的例外点；而 $k_y=0.25\pi$ 路径和 $k_y=0$ 路径对应的不同编织 τ_1^{-1} 和 1，则意味着存在一个荷为 τ_1的例外点。(c)-(d) 与 (a)-(b) 相同，但对应时刻 t_3。对于 $k_y=\pi$ 路径和 $k_y=0.75\pi$ 路径，不同编织 τ_1 和 1；对于 $k_y=0.75\pi$ 路径和 $k_y=0.5\pi$ 路径，编织 1 和 τ_1^{-1} 。这些结果表明，KBZ 上存在两个携带拓扑荷 τ_1^{-1} 的例外点。

从 t_2 处的有隙相到 t_3 处的无隙相的转变必然意味着，一个EP横穿不可定向边界，并经历拓扑电荷反转。接下来，我们直接根据实验结果证实这一事实。为此，我们首先回顾双能带系统在KBZ上的EP检测定理：如果与两条相邻的常-k_y 路径相关联的本征能量编织不等价，即 $B_{k_{y1}}\neq B_{k_{y2}}$，那么在这两条路径之间必定位于一个携带（或总计携带）拓扑荷 $B_{k_{y2}}^{-1}B_{k_{y1}}$ 的非平凡EP（或多个EP）[58]。该定理可由EP电荷 $B_{EP}=B_{k_{x1}}^{-1}B_{k_{y2}}^{-1}B_{k_{x2}}B_{k_{y1}}$的回路同伦证明；利用双能带系统中的阿贝尔关系 $B_{k_{y2}}^{-1}B_{k_{x2}}=B_{k_{x2}}B_{k_{y2}}^{-1}$ 以及由可定向边界强制的等价关系 $B_{k_{x1}}=B_{k_{x2}}$，它可化简为 $B_{EP}=B_{k_{y2}}^{-1}B_{k_{y1}}$，如图5(a)所示。在实验中，于时刻 t_2，我们测量了沿五条常-k_y 路径的本征频率编织，即 $k_y=0$、0.25π、0.5π、0.75π 和 π，如图5(b)所示。不等价的编织 $B_{k_y=0、\ 25\pi}=\tau_1^{-1}$ 和 $B_{k_y=0}=\mathbb{I}$ 表明，在这两条路径之间存在一个拓扑荷为 τ_1 的EP。类似地，不等价的编织 $B_{k_y=0、\ 75\pi}=1$ 和$B_{k_y=0、\ 5\pi}=\tau_1^{-1}$ 意味着其间存在另一个携带电荷 τ_1^{-1} 的EP。相比之下，在时刻 t_3，路径 $k_y=\pi$ 与 $k_y=0、75\pi$之间的不等价编织，即 τ_1 和 $\mathbb{I}$，以及 $k_y=0、75\pi$ 与 $k_y=0、5\pi$之间的不等价编织，即1和 τ_1^{-1} [，图5(c)和5(d)], 证明

两个具有相同拓扑荷的EP τ_1^{-1} 存在于KBZ上。这些观察结果证明，一个EP穿过了 t_2 与 t_3 之间的不可定向边界，并伴随着荷反转。此外，我们的实验结果证实了边界编织变换的一条规则：EP穿过边界前后，沿该边界的编织恰好相差该EP的电荷，即 $B_{after} = B_{before}B_{EP}^{-1}$ [60]。例如，在我们的系统中，沿边界 $k_y = 0$ 的编织从 1变为 τ_1^{-1}，满足 $B_{k_y=0}^{t_3} = B_{k_y=0}^{t_2}B_{EP}^{-1}$。

结论

我们从理论上揭示并通过实验验证了不可定向 KBZ 上的异常例外点演化：由半极点成对产生的例外点在碰撞时并未湮灭，而是合并为一个不同的涡旋点。我们的结果凸显了不可定向性这一全新基本要素，它可用于调控非厄米系统中的能带简并点和拓扑相。与此前研究的、依赖可定向空间的非阿贝尔拓扑的简并点异常碰撞不同，本文报道的异常例外点演化源于 KBZ 不可定向几何所施加的全局约束。穿越不可定向边界时 EP拓扑电荷的反转，为诱导非厄米有隙—无隙拓扑相变以及违反费米子倍增定理提供了直接机制。特别是，我们在实验中测得的本征频率编织和贝里相位，作为两种彼此独立但互为补充的不变量，为分类半极点和涡旋点等例外能带简并提供了统一的探测手段。这一理论框架和实验方案可自然拓展至多能带系统中更丰富的简并结构研究；在这些系统中，非阿贝尔例外点和高阶例外点也可能因不可定向性而经历类似受约束但不同寻常的演化 [58,60]。

补充说明。 我们最近了解到一项相关的光子学研究，该研究在克莱因参数空间上实现了非厄米例外拓扑 [64]。该研究聚焦于静态情形，并通过谱费米弧测量确定了同荷例外点构型；而我们的研究揭示并观测到了由不可定向性促成的例外点异常演化，包括EP电荷反转、半极点和涡旋点的出现，以及有隙—无隙拓扑相变，同时测量了能带编织和贝里相位这两种彼此独立但相互补充的不变量。

致谢

本研究得到国家重点研发计划（项目编号：2023YFA1406900）的资助，

国家自然科学基金委员会（项目编号：12374418、12304495 和 12104346）、湖北省自然科学基金（项目编号：2024AFB654）、武汉市自然科学基金（项目编号：2025040601020223）、北京凝聚态物理国家研究中心开放项目（项目编号：2025BNLCMPKF018）以及中央高校基本科研业务费的资助。

参考文献

1. M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, 《专题讨论：拓扑绝缘体》, 《现代物理评论》82, 3045 (2010)。2. X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, 《拓扑绝缘体与超导体》, 《现代物理评论》83, 1057 (2011) 3. A. A. Burkov 和 L. Balents, 《拓扑绝缘体多层结构中的外尔半金属》, 《物理评论快报》107, 127205 (2011)。4. A. A. Burkov, 《拓扑半金属》, 《自然·材料》15, 1145 (2016)。5. M. V. Berry, 《非厄米简并点物理学》, 《捷克物理学杂志》54, 1039 (2004)。6. R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H.Musslimani、S. Rotter 和 D. N, Christodoulides, 《非厄米物理与宇称-时间对称性》, 《自然·物理》14, 11 (2018)。7. M.-A. Miri 和 A. Alù, 《光学与光子学中的例外点》, 《科学》363, eaar 7709 (2019)。8. E. J. Bergholtz、J. C. Budich 和 F. K. Kunst, 《非厄米系统的例外拓扑》, 《现代物理评论》93, 015005 (2021)。9. K. Ding、C. Fang 和 G. Ma, 《非厄米拓扑与例外点几何》, 《自然综述：物理》4, 745 2022( )。10. N. Okuma 和 M. Sato, 《非厄米拓扑现象：综述》, 《凝聚态物理年度评论》14, 83 (2023)。11. J. Ren 和 N. A. Sinitsyn, 《非平衡随机动力学中的辫群与拓扑相变》, 《物理评论E辑》87, 050101 (2013)。12. H. Shen、B. Zhen 和 L. Fu, 《非厄米哈密顿量的拓扑能带理论》, 《物理评论快报》120, 146402 2018( )。13. K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato, 《非厄米物理中的对称性与拓扑》, 《物理评论X》9, 041015 (2019)。14. C. C. Wojcik、X.-Q. Sun、T. Bzdušek 和 S. Fan, 《非厄米哈密顿量的同伦刻画》, 《物理评论B辑》101, 205417 (2020)。15. Z. Li 和 R. S. K. Mong, 《非厄米能带结构的同伦论刻画》, 《物理评论B辑》103, 155129 2021( )。16. H. Hu 和 E. Zhao, 《纽结与非厄米布洛赫能带》, 《物理评论快报》126, 010401 (2021)。17. K. Wang、A. Dutt、C. C. Wojcik 和 S. Fan, 《非厄米能带的拓扑复能量编织》, 《自然》（伦敦）598, 59 (2021)。18. Y. S. S. Patil、J. Höller、P. A. Henry、C. Guria、Y. Zhang、L. Jiang、N. Kralj、N. Read 和 J. G. E. Harris, 《测量非厄米简并点的纽结与非对易辫》, 《自然》（伦敦）607, 271 (2022)。19. Q. Zhang、Y. Li、H. Sun、X. Liu、L. Zhao、X. Feng、X. Fan 和 C. Qiu, 《声学非厄米布洛赫辫及相关拓扑相变的观测》, 《物理评论快报》130, 017201 (2023)。20. Rao Z、Meng C、Han Y 等, 《非厄米磁振子学中无反射态的编织》[J]。《自然·物理》, 2024, 20(12)：1904-1911。21. J. Chen、Z. Wang、Y. T. Tan、C. Wang 和 J. Ren, 《利用机器学习识别非厄米能带编织中的纽结拓扑》, 《通讯·物理》7, 209 (2024)。22. Y. Long、Z. Wang、C. Zhang、H. Xue、Y. X. Zhao 和 B. Zhang, 《拓扑边缘能带的非阿贝尔编织》, 《物理评论快报》132, 236401 (2024) 23. S. Tong、Q. Zhang、L. Qi、G. Li、X. Feng 和 C. Qiu, 《非厄米时空晶格中弗洛凯-布洛赫辫的观测》, 《物理评论快报》134, 126603 (2025)。24. J. Doppler、A. A. Mailybaev、J. Böhm、U. Kuhl、A. Girschik、F. Libisch、T. J. Milburn、P. Rabl、N. Moiseyev 和 S. Rotter, 《动态环绕例外点实现非对称模式切换》, 《自然》537, 76 (2016)。25. H. Xu、D. Mason、L. Jiang 和 J. G. E. Harries, 《含例外点的光机械系统中的拓扑能量传递》, 《自然》537, 80 (2016)。26. A. U. Hassan、B. Zhen、M. Soljačić、M Khajavikhan 和 D. N. Christodoulides, 《动态环绕

例外点：精确演化与偏振态转换，《物理评论快报》118, 093002 (2017)。27. X. L. Zhang、T. Jiang 和 C. T. Chan，《在反宇称-时间对称系统中动态环绕例外点》，光科学与应用 8, 88 (2019)。28. W. Liu、Y. Wu、C. K. Duan、X. Rong 和 J. Du，《在真实量子系统中动态环绕例外点》，《物理评论快报》126, 170506 (2021)。29. J. Wiersig，《利用例外点提高频率和能级劈裂探测的灵敏度》，《物理评论快报》112, 203901 (2014)。30. C. Shi、M. Dubois、Y. Chen、L. Cheng、H Ramezani、Y. Wang 和 X. Zhang，《探测宇称-时间对称声学中的例外点》，《自然·通讯》7, 11110 (2016)。31. H. Hodaei、A. U. Hassan、S. Wittek、H. Garcia-Gracia、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides 和 M. Khajavikhan，《高阶例外点处灵敏度增[illegible]Özdemir、G. Zhao、W. Chen、Ş. Kaya Özdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang，《例外点增强光学微腔中的传感能力》，《自然》548, 192 (2017)。33. C. Wang、W. R. Sweeney、A. D. Stone 和 L. Yang，《例外点处的相干完美吸收》，《科学》373, 1261 (2021)。34. W. R. Sweeney、C. W. Hsu、S. Rotter 和 A. D. Stone，《完美吸收例外点与手性吸收体》，《物理评论快报》122, 093901 (2019)。35. Z. Zhou、B. Jia、N. Wang、X. Wang 和 Y Li，《通过连续谱中的束缚态观测到完美手性例外点》，《物理评论快报》130, 116101 (2023)。36. Y. F. Xia、Z. X. Xu、Y. T. Yan、A. Chen、J. Yang、B. Liang、J.-C. Cheng 和 J. Christensen，《例外点处相干完美声学吸收的观测》，《物理评论快报》125, 014501 (2020)。37. H. B. Nielsen 和 M. Ninomiya，《手性费米子正则化的禁戒定理》，Phys. Lett. B 105, 219 (1981)。38. Ryu、S.-Y. Lee 和 S. W. Kim，《非厄米哈密顿量中与三个相互作用本征模相关的多个例外点分析》，《物理评论A辑》85, 042101 (2012)。39. Q. Zhong、M. Khajavikhan、D. N. Christodoulides 和 R. El-Ganainy，《绕行非厄米奇点》，《自然·通讯》9, 4808 (2018)。40. E. J. Pap、D. Boer 和 H. Waalkens，《含多个例外点系统的非阿贝尔性质》，《物理评论A辑》98, 023818 (2018)。41. Z. Yang、A. Schnyder、J. Hu 和 C.-K. Chiu，《二维非厄米系统中费米点与例外点的费米子倍增定理》，《物理评论快报》126, 086401 (2021)。42. H. Hu、S. Sun 和 S. Chen，《例外点的纽结拓扑与非厄米禁戒定理》，《物理评论研究》4, L022064 (2022)。43. C.-X. Guo、S. Chen、K. Ding 和 H. Hu，《多带非厄米系统中的例外非阿贝尔拓扑》，《物理评论快报》130, 157201 (2023)。44. J. L. K. König、K. Yang、J. C. Budich 和 E. J. Bergholtz，《未配对例外点保护的拓扑能带结构》，《物理评论研究》5, L042010 (2023)。45. J.-Z. Li、K. Bai、C. Guo、T.-R. Liu、L. Fang、D. Wan 和 M. Xiao，《非厄米系统中对称性保护简并点的编织拓扑》，《物理评论B辑》109, L041102 (2024)。46. Q. Wu、A. A. Soluyanov 和 T. Bzdušek，《非相互作用金属中的非阿贝尔能带拓扑》，《科学》365, 1273 (2019)。47. A. Bouhon、Q. Wu、R.-J. Slager、H. Weng、O. V. Yazyev 和 T. Bzdušek，《外尔点的非阿贝尔互易编织及其在 ZrTe 中的表现》，《自然·物理》16, 1137 (2020)。48. B. Jiang、A. Bouhon、Z.-K. Lin、X. Zhou、B. Hou、F. Li、R.-J. Slager 和 J.-H. Jiang，《非阿贝尔拓扑声学半金属及其相变的实验观测》，《自然·物理》17, 1239 (2021)。49. H. Qiu、Q. Zhang、T. Liu、X. Fan、F. Zhang 和 C. Qiu，《理想超材料中的最简非阿贝尔节点编织》，《自然·通讯》14, 1261 (2023)。50. Q. Zhang、Y. Leng、C. X. Guo、L. Qi、S. Tong、H. Hu 和 C. Qiu，《多个相互作用例外点非阿贝尔守恒规则的实验证据》，《物理评论B辑》112, L020101 (2025)。51. Y. Wang、Y. Wu、X. Ye、C. K. Duan、Y. Wang、H. Hu、X. Rong 和 J. Du，《S = 1 电子自旋系统中的非厄米非阿贝尔拓扑相变》，《自然·纳米技术》[illegible]《人工规范场产生的布里渊克莱因瓶》，《自然·通讯》13, 2215 (2022)。53. C. Zhang、Z. Y. Chen、Z. Zhang 和 Y. X. Zhao，《动量空间非对称型对称性的一般理论》，《物理评论快报》130, 256601 (2023) 54. Z. Pu、H. He、W. Deng、X. Huang、L. Ye、J. Lu、M. Ke 和 Z. Liu，《声学克莱因瓶绝缘体》，《物理评论B辑》108, L220101 (2023)。55. A. Grossi e Fonseca、S. Vaidya、T. Christensen、M. C. Rechtsman、T. L. Hughes 和 M. Soljačić，《不可定向流形上的外尔点》，《物理评论快报》132, 266601 (2024)。

56. Z. Zhu、L. Yang、J. Wu、Y. Meng、X. Xi、B. Yan、J. Chen、J. Lu、X. Huang、W. Deng、C. Shang、P. P. Shum、Y. Yang、H. Chen、K. Xiang、G.-G. Liu、Z. Liu 和 Z. Gao，三维声学晶体中的布里渊克莱因空间与半转空间，《科学通报》69，2050（2024） 57. J. Hu、S. Zhuang 和 Y. Yang，通过动量空间非对称性实现的高阶拓扑绝缘体，《物理评论快报》132，213801（2024） 58. W. B. Rui 和 Z. D. Wa
W. I
论A
和 E
Han
Liar
2013） 63. J. W. Ryu、J. H. Han、C. H. Yi、M. J. Park 和 H. C. Park，非厄米系统的例外分类。《通讯·物理》7，109（2024） 64. Z. S. Xu、J. L. König、A. Cataldo、R. Yadgirkar、G. Krishna、V.
Dee
上的