RBI-ThPhys-2026-01

一维 Hou–Luo 模型的复时间奇异结构

Cornelius Rampf [1], * 以及 Sai Swetha Venkata Kolluru [2,3], †

[1]鲁đer·博什科维奇研究所理论物理部，*Bijenička cesta 54*，*10000* 萨格勒布，克罗地亚
[2]*SPEC*，*CEA* 萨克雷，吉夫-叙尔-伊韦特，*F-91191*，法国
[3]印度科学研究所凝聚态理论中心物理系，班加罗尔，印度 - *560012*
(2026年1月7日)

arXiv:2601.02464v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2026

从光滑初始数据出发，我们研究一维 Hou–Luo（HL）模型的复时间解析结构。该模型是三维轴对称欧拉方程的一种壁面近似。尽管这一情形下的有限时刻爆破已得到确立，我们在此描绘其完整的奇异图景。此项分析得益于一种新的 HL 模型拉格朗日坐标表述，其中流场的时间泰勒系数以符号方式计算至较高截断阶数。我们的结果有三方面。首先，我们证明，涡量的拉格朗日级数在半径为 $t_\star > 0$ 的复时间圆盘内收敛，并且不存在阻碍欧拉表述的（早期时间）共振。其次，对该级数进行渐近分析后，我们高精度地恢复了爆破时间和奇点指数。这也使我们能够定量评估 Beale–Kato–Majda 准则；我们发现，该准则能够正确识别爆破时间，但会抹去局部奇异指数，因为它依赖于空间上确界。第三，也是最重要的一点，我们发展出一种拉格朗日奇点理论，通过利用爆破的驱动机制——多个流体粒子聚集于同一欧拉位置——预测了在欧拉坐标中观察到的眼形奇异性轮廓。本文采用的技术扩展了近期针对无黏 Burgers 方程引入的方法 [C. Rampf等人，《物理评论：流体》**7**(2022) 10, 104610]，，并且还可进一步应用于更高空间维度或其他流体力学方程。

I. 引言

光滑解的流体力学偏微分方程整体正则性的证明，是数学流体动力学中的核心问题。特别是对于三维（3D）纳维–斯托克斯方程和欧拉方程，有限时刻奇异性的形成意味着整体正则性的失效，并可能为理解纳维–斯托克斯湍流中的反常耗散提供合理的启示 [1]。在此背景下，约化情形或对称性约束情形——例如有界区域中的轴对称流——已成为探索奇异行为的宝贵试验场。值得注意的是，在壁面有界区域中的三维轴对称不可压缩欧拉（3DAE）方程近年来重新引起了人们的兴趣，此前已有数值证据表明其可能发生有限时刻爆破 [2]。

为了检测流体力学方程中的奇异行为，人们提出了多种解析和数值判据。一个著名的例子是 Beale–Kato–Majda（BKM）判据 [3]，它将三维轴对称欧拉方程的爆破与其最大涡量的时间积分发散联系起来 $\|\boldsymbol{\omega}\|_\infty$。此外，人们也提出了非爆破判据，例如，文献 [4] 指出，涡量增长受到几何和动力学约束时，奇异性便不会形成。相关研究还在密切相关的模型中探索了其他方法——这些方法通常基于对涡拉伸、对齐、压力或能量相关量的控制——为理解可能导致或避免爆破的机制提供了宝贵见解 [5–7]。

* cornelius.stefan.rampf@irb.hr
† venkata-saiswetha.kolluru@cea.fr

与这类基于范数的判据相辅相成，基于解析性的方法通过考察解的空间或时间解析性的丧失来探究奇异行为。在空间情形下，解析性条带法 [8] 通过监测（傅里叶）谱系数指数衰减的尾部，追踪最近复奇点与实空间域之间的距离 [9–11]。对于三维轴对称欧拉方程（及相关问题），文献 [12] 采用傅里叶–切比雪夫伪谱方法和解析性条带法，追踪限制收敛的奇点在复空间中的移动，以估算奇点形成的时间。然而，称为*tyger*的振荡伪影出现后，爆破时间便难以精确确定。这一现象在其他欧拉流体模拟中也有观察到 [13–17] （但参见 [18]）。

检测时间奇点的另一种方法是考察时间解析性 [19]。在这种方法中，人们为流场构造时间泰勒级数，并通过渐近分析或使用帕德逼近等收敛加速方法来寻找复时间奇点（例如参见 [20]）。结合高精度算术，这些方法已被用于研究欧拉流 [21–25], 湍流纳维–斯托克斯流 [26], 以及相关流体力学问题 [27–29]的解析结构。最近，文献 [30] 研究了一维无黏伯格斯方程的时间泰勒级数解，通过符号计算求得系数，从而避免了在配置点采样流场时可能产生的数值伪影。此外，外推过程通常需要在准奇异点处计算系数（之比），而有了系数的精确符号表达式，便能更稳健地完成这项计算。

本文研究一维 Hou–Luo（HL）模型。该模型最初由文献 [2] 提出，随后在文献 [31–33] 中被分析，用作在壁面上刻画完整三维轴对称欧拉方程系统奇异动力学的约化模型。具体而言，我们通过采用多种时间泰勒级数解，研究 HL 系统的时间解析性。最近，文献 [34], 也将类似方法应用于 HL 模型，但仅在欧拉坐标下使用四倍精度伪谱方法对流场采样。相比之下，我们同时使用欧拉坐标和拉格朗日坐标研究 HL 系统的解析结构，并通过符号计算所有级数系数来达到最高精度。关于欧拉坐标下的渐近分析，我们确认并稍作扩展了文献 [34], 的结果，给出了实时间轴附近的近似外推结果，从而揭示出一个连续分布的奇点图景，其排列呈眼形图案。

通过在拉格朗日坐标下重新表述 HL 模型，我们发现问题的解析结构大为简化。具体而言，欧拉坐标下观察到的连续眼形奇点结构，在拉格朗日表述中仅受两个实值奇点的限制，分别对应正、负时间方向上的爆破时间。拉格朗日坐标下这种简化的解析结构，使我们能够为 HL 系统发展一种新颖的奇点理论。从概念上讲，该理论类似于近期为一维无黏性伯格斯方程 [30] 建立的理论。不过在这里，我们将理论推广到适用于级数解，而非伯格斯方程情形下可得的精确闭式解。将由此产生的舍入误差纳入考量，是一项重要的概念性扩展，也使这一奇点理论能够灵活应用于更复杂的流体力学方程。

本文其余部分安排如下。首先进行预备性讨论，尤其是将 HL 模型与其母系统——三维轴对称欧拉方程联系起来。在III–IV节中，我们分别在欧拉坐标和拉格朗日坐标下给出 HL 系统的级数解和渐近分析；奇点结果总结见图2 。基于这些渐近洞见，我们推导出一个拉格朗日涡量模型，该模型能够以较高精度刻画爆破附近的时空区域。具体而言，我们通过对截断级数解进行渐近补全（AC）来实现这一点（第V节）。由此得到的 AC 模型随后被用作涡量模拟输出的替代模型，从而使我们能够检验利用 BKM 条件可以获取多少局部奇点信息（第VI节）。最后，我们在第VII 节发展奇点理论，并在第VIII节作总结。

II. 初步考虑与初始条件

文献 [2] 提出了一维 Hou–Luo（HL）模型，用以近似描述三维轴对称欧拉方程的壁面动力学；该方程被猜想会在有限时间后发生爆破。三维轴对称不可压欧拉方程如下：

$$\partial_t\omega^1 + u^r\partial_r\omega^1 + u^z\partial_z\omega^1 = \partial_z(u^1)^2\,, \qquad \partial_t u^1 + u^r\partial_r u^1 + u^z\partial_z u^1 = 2u^1\partial_z\psi^1\,, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{u} = (u^r, u^\theta, u^z)^\top$ 是柱坐标中的速度场。我们对 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}$ 定义了 $f^1 = f^\theta/r$，其中 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}$ [2]。不可压缩条件为 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$，结合涡量的定义 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$，可得 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的毕奥–萨伐尔关系。数值研究表明，$r-z$ 平面内的次级流在驱动有限时奇点方面起着关键作用；该奇点在壁面 [6] 的对称线上形成。为构建奇异动力学的一维近似，文献 [2] 的作者将完整的三维轴对称欧拉方程限制在壁面（$r=1$），并将相应的三维场映射为一维对应量，如下所示：$(u^1)^2(r=1,z) \leftrightarrow u(z)$ $\omega^1(r=1,z) \leftrightarrow w(z)$ $u^z(r=1,z) \leftrightarrow v(z)$。在壁面处忽略径向导数项（文献 [2], 对此给出了论证和推导），作者提出了以下模型

$$\boxed{\partial_t u + v\,\partial_z u = 0\,, \qquad \partial_t w + v\,\partial_z w = \partial_z u\,, \qquad \partial_z v = \mathcal{H}[w]}\,, \qquad \text{[Hou–Luo model]} \tag{2}$$

假设具有周期性 $z\in[-\pi,\pi)$。式（2）中的最后一个方程是上述毕奥-萨伐尔定律的一维类比，其中采用了希尔伯特变换$\mathcal{H}$（详见 [35]）。从光滑初始数据出发，文献 [31] 从数学上证明了 Hou–Luo（HL）模型（2）整体正则性的丧失及由此导致的有限时刻爆破，并探讨了该模型与半空间中限制在壁面上的二维 Boussinesq 系统之间的联系。相比之下，我们的方法是显式的，具体而言：（a）我们通过泰勒级数展开和渐近外推方法直接追踪奇点；（b）我们的方法可以直接应用于其他流体系统和/或其他初始数据。

由于我们的方法具有构造性，因此我们依靠指定显式初始数据，对此我们 se

$$u(z,t=0) = \sin^2 z\,, \qquad w(z,t=0) = 0\,. \tag{3}$$

采用这些初始条件，并对流体变量关于时间进行最高达 72 阶的泰勒级数展开 t，使用三种互补的外推方法进行检验，得到的爆破时间为$t = t_\star \simeq 2.118$，爆破位置为 $z = z_\star = 0$、$\pm\pi/2$、$\pm\pi$（结果汇总见图 2）。文献 [18], 也给出了 HL 模型类似的爆破估计，但仅针对上述初始数据的缩放（sc）版本，具体而言，令 $u^{\rm sc}(t=0) = 10^4\sin^2(12\pi z)$ 和 $w^{\rm sc}(t=0) = 0$；在附录 A 中，我们针对这类缩放初始数据重复了下文的部分分析，得到 $t_\star^{\rm sc} \simeq 0.003449$（与文献 [2] 对三维轴对称欧拉方程的爆破估计相差在 1.6% 以内）。需要说明的是，为使图示清晰，下文的图通常只展示周期性 z-域的一半，因为 u 具有镜像对称性，而 v、w 在 $z=0$处具有点对称性，这源于初始数据（3）的选取。

在第III节中，我们首先采用欧拉坐标进行渐近分析，主要沿用文献 [34], 的方法，同时对其结果略作拓展。具体而言，我们的（仍属近似的）外推方法描绘出复时间奇点的连续分布，并给出了爆破时间的估计（见图2）；而文献 [34] 则报告了复时间平面上孤立点处的奇点。在第IV节中，我们分析 HL 模型的拉格朗日表述，尤其发现，涡量（及其他流体变量）的拉格朗日表示仅受两个实奇点限制，它们位于 $t = \pm t_\star$，也就是爆破时间。拉格朗日坐标下这种简化的解析结构使我们能够：(i) 构建一个“渐近完备”模型，其性能优于拉格朗日级数（第V节）；(ii) 使用该模型

探究全局爆破判据的局限性（第VI节）；以及 (iii) 建立一种奇点理论，用以描述欧拉奇点的完整分布（第VII节）。

III. 欧拉坐标中的侯–娄模型

在第III A 节中，我们使用以新的时间变量 $\tau = t^2$构造的泰勒级数展开，求解带有初始条件（2）和（3）的一维 HL 模型。基于 Mercer–Roberts 方法的渐近分析见第III B节。见图2，其中总结了我们的主要结果，包括通过第VII节发展的拉格朗日理论得到的结果。

A. 欧拉流体变量的级数表示

分析 HL 模型解析结构的一种方法，是考察其流体变量的泰勒级数解。众所周知，泰勒级数的收敛半径由最近的奇点决定，而奇点是非解析性的标志。为引出下文针对当前具体问题的讨论，不妨先考察低阶级数解，并将展开形式上视为微扰展开。具体而言，利用初始数据（3），并将流体变量 $f = u,\ v,\ w$关于 $t = 0$展开如下：$f = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots$其中 $f_n = f_n(z)$，由方程（2）可直接求得级数解的首项：

$$u(z,t) = \sin^2(z) + t^2\,\sin^2(z)\cos^2(z) + t^4\,\frac{\sin(2z)\sin(4z)}{12} + O(t^6)\,, \tag{4a}$$

$$v(z,t) = -t\sin(z)\cos(z) - t^3\frac{\sin(4z)}{12} - t^5\frac{3\sin(2z) - 2\sin(6z)}{90} + O(t^7)\,, \tag{4b}$$

$$w(z,t) = t\,\sin^2(z) + t^3\,\frac{\sin(4z)}{3} + t^5\,\frac{2\sin(6z) - \sin(2z)}{15} + O(t^7)\,; \tag{4c}$$

参见文献。[34] 有关相应递归关系的推导。注意，u的级数不含奇数阶时间泰勒系数，而 v、w不含偶数阶系数——这是初始数据（3的选择所致。为简化泰勒系数的计算及随后渐近方法的应用，最好对时间和流体变量作如下变换：

$$\boxed{t^2 = \tau\,, \qquad u(z,t) = U(z,\tau)\,, \qquad v(z,t) = t\,V(z,\tau)\,, \qquad w(z,t) = t\,W(z,\tau)}\,, \tag{5}$$

并在该重标度系统中进行分析。将变换（5）应用于（2），得到重标度后的 HL 模型

$$\partial_\tau U + \frac{1}{2}V\nabla_z U = 0\,, \qquad \partial_\tau W + \frac{1}{2\tau}\,(W - \nabla_z U) = -\frac{1}{2}V\nabla_z W\,, \qquad \nabla_z V = \mathcal{H}[W]\,. \tag{6}$$

Th这些方程可通过以下泰勒级数形式直接求解，

$$U(z,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)\,\tau^n\,, \qquad V(z,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(z)\,\tau^n\,, \qquad W(z,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(z)\,\tau^n\,, \tag{7}$$

按构造，该表达式仅具有非零系数（特殊位置 z除外，见下文）。接着便可直接推导出方程（7）中泰勒系数的任意阶递归关系（例如参见 [30, 34, 36]）。事实上，将（7）代入（6），并比较 τ 的各次幂，

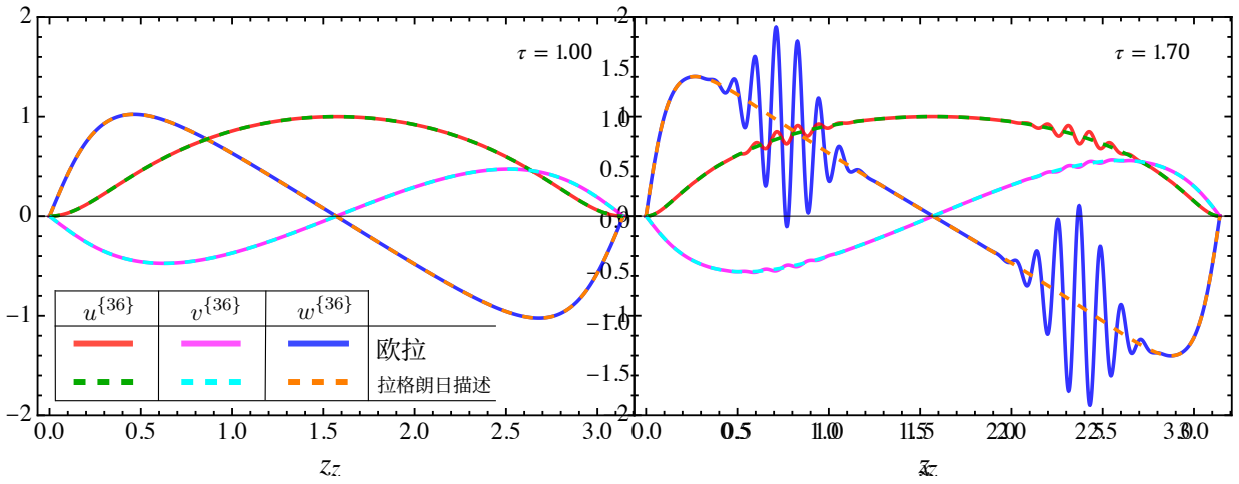

图 1. HL 模型中的流体变量 u，v，w，以 τ-时间级数解表示，分别采用欧拉坐标（实线）和拉格朗日坐标（虚线；见第IV节），其中 $\tau = t^2$。所有泰勒级数解均截断至 τ-时间的第 36 阶，并对泰勒系数进行符号计算。图中仅显示周期域 z 的一半；u 呈镜像对称，而 v，w 则因初始数据而呈点对称（3）。左图：在时间 $\tau = 1$处计算的流体变量，其中欧拉方法与拉格朗日方法的结果精度一致至优于 2×10^{-9}（未显示）。右图：在 $\tau = 1.7$处的解。欧拉解在爆破时间 $\tau_\star \simeq 4.483$ 之前很久便表现出病态行为（另见图 2），与之相反，拉格朗日解仍保持规则演化。

可得（$n > 0$）

$$U_{n+1} = \frac{-1}{2n+2} \sum_{l+m=n} V_l \, \partial_z U_m \,, \tag{8a}$$

$$V_{n+1} = \int \mathcal{H}\left[W_{n+1}(z')\right] \mathrm{d}z' \,, \tag{8b}$$

$$W_{n+1} = \frac{-1}{2n+3} \left(-\partial_z U_{n+1} + \sum_{l+m=n} V_l \partial_z W_m \right) . \tag{8c}$$

为方便起见，我们在附录中提供了实现这些递归关系（以及拉格朗日描述下的递归关系）的代码。B。值得指出的是，参考文献 [34] 推导了以 t时间表述的 HL 模型的递归关系，其适用范围比我们的更广，因为其递归关系也适用于非对称初始数据；相比之下，我们的递归关系更适合研究基于对称初始数据（如（3））的 HL 模型的渐近性质。

利用递推解（8）（或者用数学上等价的形式，即参考文献 [34]中的解），可以轻松生成相当高阶的泰勒系数。具体而言，我们求出前 36 τ阶时间（72 t阶时间）泰勒系数，并对其进行符号计算，这与参考文献 [34], 不同，后者使用 2/3去混叠傅里叶伪谱方法，并采用四倍精度算术，在等距网格上对这些系数进行采样。

在图 1 中，我们展示了流体变量 $u = U$、$v = tV$ 和 $w = tW$ 的时间演化，采用泰勒级数解 $F\{N\} := \sum_{n=0}^{N} F_n \tau^n$，其中 $F = U$、V、W 分别计算至截断阶数 $N = 36$，并分别以红色、品红色和蓝色实线表示。在时间 $\tau = 1$ （左图），欧拉解与以拉格朗日坐标表述的级数解（绿色、青色和橙色虚线；详情见第IV节）符合良好。然而，在右图所示的时间 $\tau = 1.7$，随着最初局域的振荡结构出现，欧拉解开始恶化；这些结构集中在 $z \simeq \pm\pi/4$、$\pm 3\pi/4$ 附近（这里只展示周期性 z 域的一半）。这些共振特征被称为“早期 tygers”，此前在无黏 Burgers [30] 中以及当前的 HL 模型 [34] 中均已被观察到。在更广泛的流体力学背景下，一般意义上的 tyger 现象近年来也受到了相当多的关注（例如 [13, 18, 37–39]）。

B. 欧拉坐标中的渐近外推

这里我们重述并略微扩展文献[34]中的分析。具体而言，我们再次应用 Mercer–Roberts（MR）方法来检测 HL 模型中的奇异行为，并获得爆破位置和奇点指数的 MR 估计值（另见附录A ，其中介绍了另一种爆破时间估计器）。然而，在爆破附近的复时间邻域内，MR 方法仍是近似性的，因此应谨慎解读所得估计值。

MR 分析需要一个实值模型函数 $W_{\rm E}(\boldsymbol{\tau})$，它依赖于复时间 $\boldsymbol{\tau}$，并且（推测）概括了复时间平面中成对竞争奇点所导致的涡量 $W = w/t$ 的主导阶奇异行为，

$$W^{\rm E}(\boldsymbol{\tau}) = \left(1 - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau}_\star}\right)^{\nu} + \left(1 - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\bar{\boldsymbol{\tau}}_\star}\right)^{\nu}, \quad \boldsymbol{\tau}_\star := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad R \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in (-\pi, \pi], \quad \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{9}$$

其他流体变量也类似。这里，$\boldsymbol{\tau}_\star$ 和 $\bar{\boldsymbol{\tau}}_\star$ 表示模为 R 、角度为 θ 的共轭复奇点的位置，而 ν 是实值奇点指数；我们强调，这些未知量（因而 $W^{\rm E}$）取决于欧拉位置 z，为简洁起见，我们经常省略这一位置。对于 $|\boldsymbol{\tau}| < R$，模型函数（9）可表示为泰勒级数 $W_{\rm E}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{{\rm E}_n} \boldsymbol{\tau}^n$，其泰勒系数为 $W_{{\rm E}_n} = 2(-1)^n \binom{\nu}{n} R^{-n} \cos(n\theta)$。通过考虑由 $W_n^{\rm E}$ 构造的适当序列 B_n，Mercer 和 Roberts [40] 证明，与成对复时间奇点相关的主导阶渐近行为可估计为

$$B_n = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\nu+1}{n} + O(n^{-2})\right), \qquad \cos\theta_n = \cos\theta\left(1 + \frac{\nu+1}{n^2}\left[1 - \frac{\cos(2n-1)\theta}{\cos\theta}\right] + O(n^{-3})\right), \tag{10}$$

其中估计器为

$$B_n^2 = \frac{W_{n+1}W_{n-1} - W_n^2}{W_n W_{n-2} - W_{n-1}^2}, \qquad \cos\theta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{W_{n-1}}{W_n} B_n + \frac{W_{n+1}}{W_n} B_n^{-1}\right). \tag{11}$$

这里，我们用 HL 涡量的时间泰勒系数 $W_n^{\rm E}$替换了通用系数 W_n，这些系数由递归关系（8）得到。随后，MR 分析基于这样的假设：当阶数足够高时，W_n 的渐近行为由与模型序列 $W_n^{\rm E}$相同的奇异结构所支配。实际上，未知参数 R、θ和 ν通过绘制 B_n 对 $1/n$ [的关系图，以及绘制 $\cos\theta_n$ 对 $1/n^2$] 的关系图，并外推至极限 $1/n \to 0$ [$1/n^2 \to 0$]来提取；这对应于 $n \to \infty$；详情见附录A 。

在图 2 左图中，我们总结了 MR 方法（虚线）的结果：使用 τ-时间系数 W_n 作为（10）的输入，其中 $n = 30 - 35$；为方便起见，我们还展示了下文推导并进一步讨论的奇点理论结果（实线）（见第 VII 节）。MR 方法表明，离原点最近的奇点位于距离（模） $R_{\rm inf} = R_{\rm MR}(z_{\rm ty}) \simeq 1.588$处，相位为 $\theta(z_{\rm ty}) \simeq \pi/2$，对应的欧拉位置为$z = z_{\rm ty} = \pm\pi/4$、$\pm 3\pi/4$。因此，最近的奇点沿虚时间轴排列；这解释了为何在时间 $|\boldsymbol{\tau}| \gtrsim R_{\rm inf}$出现了早期 tygers，这一现象见于图 1 右图。在位置 $z = z_\star = 0$、$\pm\pi/2$、$\pm\pi$处，MR 方法预测存在实奇点 $R_{\rm MR}(z_\star) \simeq 4.486$，其奇点指数为 $\nu_\star \simeq -3.06$；该指数通过在计算 B_n之前先取极限 $z \to z_\star$ 得到。在这些奇点附近，低阶 MR 估计器（10）只能提供近似结果，因为 $1/n$ 中的高阶项对于进一步分析至关重要。参见文献 [30] ，其中针对无黏 Burgers 方程提出了一种非线性外推方法，或可部分弥补 MR 方法的这些局限。尽管 MR 结果本质上只是近似值，但与第 VII 节提出的奇点理论所得结果相当吻合。

在图2的右侧面板中，我们展示了复$\boldsymbol{\tau}$平面中的 MR 结果（橙色虚线），以及半径为 $R_{\rm inf} \simeq 1.588$的收敛圆盘（灰色），它限制了

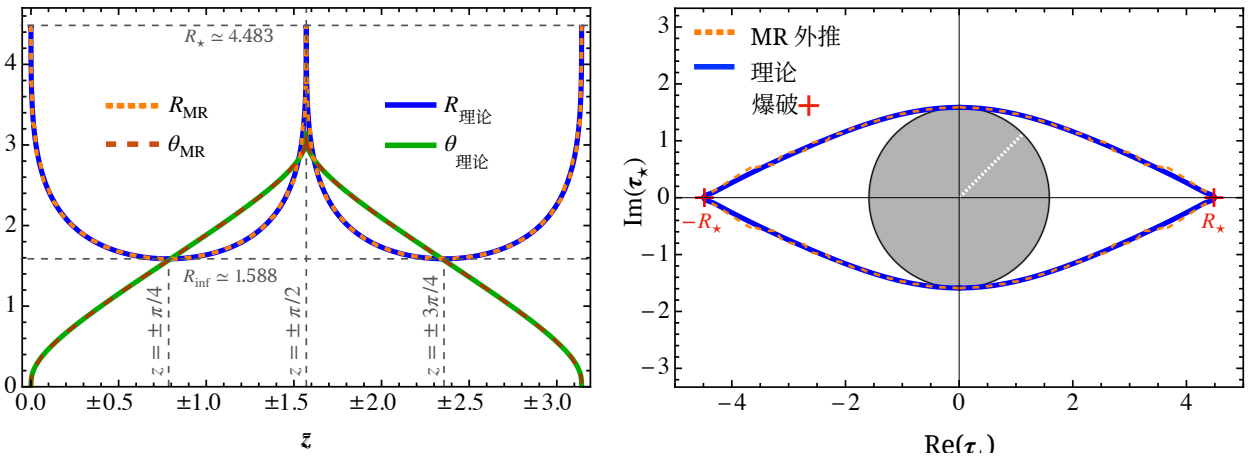

图 2。左图：模 R和相位 θ最近奇点 $\boldsymbol{\tau}_\star = R\exp(\mathrm{i}\theta)$随 z变化的函数关系，由 Mercer–Roberts（MR）渐近外推方法（橙色点划线和红色点线结果）以及第VII 节提出的奇点理论（蓝色和绿色实线）得到。最小收敛半径 $R_{\rm inf} = R^{\rm MR}(z_{\rm ty}) \simeq 1.588$出现在 $z_{\rm ty} = \pm\pi/4$，$\pm 3\pi/4$ 相位为 $\theta_{\rm MR}(z_{\rm ty}) \simeq \pi/2$（精确到 11 位数字）。这些奇点位于虚轴上，并触发了欧拉时间泰勒解中观察到的早期 tygers（图1）。右图：复$\boldsymbol{\tau}$ 平面中限制收敛的奇点，基于 MR 方法（橙色虚线）和我们的理论（蓝色实线）。

涡量欧拉级数解的有效范围——但不限制拉格朗日理论（蓝色实线），后者在复圆盘 $0 \le |\boldsymbol{\tau}| < R_\star \simeq 4.483$ 内有效。相较于理论预测，在当前截断阶数（$n = 36$）下，MR 外推以 0.013% 的精度确定了 $R_{\rm inf}$。对于靠近实时间轴但不在其上的奇点，MR 外推结果相较于理论结果呈现轻微的振荡行为；这一特征此前在无黏 Burgers 方程中也曾观察到（但程度较轻）[30]。相比之下，MR 外推和拉格朗日奇点理论都预测，在 $R = \pm R_\star$ 处存在实值奇点，其$R_\star \simeq 4.483$ 和 $R_{\rm MR}(z_\star) \simeq 4.486$，二者相差约 0.070%。最后，关于欧拉解的有效范围，我们指出，沿实时间方向进行解析延拓（魏尔斯特拉斯意义下）或许是可行的，例如在新的展开点 $\tau = \tau_i$ 处连续进行展开，且 $\tau_i < R_{{\rm inf},i-1}$，其中 $R_{{\rm inf},i-1}$ 表示前一时间步的收敛半径（$i-1$）；此处，$i = 1, 2, \ldots$ 且 $R_{\rm inf,0} = R_{\rm inf}$和 $\tau_1 = 0$（相关思路参见参考文献 [38]）。

我们得出结论：MR外推法能够给出相当可靠的结果，但对于靠近实时间轴的奇点则不然——正如先前的研究已经观察到的那样 [30, 34]。然而，归根结底，MR 方法存在测量不确定性，并且本质上具有现象学特征。为了深入了解 HL 模型的骨架，我们在第 VII节发展拉格朗日奇点理论；并在下文第IV–V 节讨论必要的预备性考量。

IV. 拉格朗日空间中的 HOU–LOU 模型

我们不再在固定的欧拉参考系中考虑 HL方程（2），而是使用拉格朗日坐标对其进行表述和分析。相应的方程在拉格朗日形式下重新表示，并在第*IV A*节中通过泰勒级数Ansätze求解。在第IV B节中，我们对拉格朗日解进行渐近分析。与欧拉情形类似，尽管拉格朗日解会发生爆破，但我们发现其解析结构得到了显著简化。

A. 拉格朗日空间中的表述与级数表示

HL 模型（2）可以使用特征（拉格朗日）坐标 a重新表示。为此，我们引入特征映射 $a \mapsto \mathsf{Z}(a,t)$，它将初始位置 a 在时间 $t = 0$ 映射到当前时间 t的位置 $\mathsf{Z}(a,t)$。映射 $\mathsf{Z}(a,t)$编码了流体粒子沿着（欧拉） z方向被 v 输运的轨迹，并满足特征方程 $v = \mathrm{d}\mathsf{Z}/\mathrm{d}t$，其中 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial_t + v\nabla_z$。雅可比行列式

$$\mathcal{J} := \nabla_a \mathcal{Z} \tag{12}$$

衡量流体粒子沿 z 方向的分离，因此，不固定为 *1*——例如，不可压缩欧拉方程的拉格朗日映射的雅可比行列式就是如此（参见 [36]）。相反，当前雅可比行列式的时间演化由下式支配：$\mathrm{d}\mathcal{J}/\mathrm{d}t = \mathcal{J}\,\partial_z v$ 利用式（2）中的毕奥-萨伐尔定律后，可将其写为$\mathrm{d}\mathcal{J}/\mathrm{d}t = \mathcal{J}\mathcal{H}[w]$。事实上，正如我们很快将看到的，多个流体粒子会趋向同一个欧拉位置$\mathcal{Z}$，当$t \to t_\star$时，导致雅可比行列式（12）在 $a = a_\star$处趋于零——这正是 HL 模型中爆破的驱动机制。

有了这一铺垫，我们可以将方程（2）改写为紧凑形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Z} = v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w = \nabla_z u\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathcal{H}[w]\,, \tag{13}$$

其中，剩余的欧拉梯度 ∇_z 将在下文变换到拉格朗日空间。这些方程还需配以如下初始条件

$$u(t=0) = \sin^2(a)\,, \qquad w(t=0) = 0\,. \tag{14}$$

有趣的是，拉格朗日方程$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 0$ 与第一个初始条件（14）立即推出平凡解

$$u(\mathcal{Z}(a,t)) = \sin^2 a\,, \tag{15}$$

这意味着变量 u 沿流体特征线保持时间不变。利用这一点，并对时间 $\tau = t^2$ 和流体变量 $u = \mathcal{U}$、 $v = \mathcal{V}t$、 $w = \mathcal{W}t$进行重标度，我们得到拉格朗日空间中的重标度 HL 系统，

$$\boxed{\mathcal{U} = \sin^2 a\,, \qquad \mathcal{V} = 2\mathcal{Z}'\,, \qquad 2\tau\mathcal{W}' + \mathcal{W} = \frac{\sin(2a)}{\mathcal{J}}\,, \qquad \mathcal{J}' = \frac{1}{2}\mathcal{J}\mathcal{H}[\mathcal{W}]}\,, \tag{16}$$

其中 $\mathcal{Z}' = \partial_\tau \mathcal{Z}$等，且所有流体变量都是$\mathcal{Z}(a,\tau)$的函数。

为求解方程（16），我们对所谓的拉格朗日位移场 $\Psi = \mathcal{Z} - a$施加泰勒级数

$$\Psi(a,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(a)\,\tau^n\,, \tag{17}$$

其中 Ψ_n 是拉格朗日位移场的 τ时间泰勒系数。为了用 Ψ表示其他流体变量，可以将（17）代入（16），并以类似于第 τIII A节欧拉情形的方式，确定各个时间系数之间的关系。然而在实际操作中，这类方法很快就会变得十分繁琐，因为据我们所知，在拉格朗日坐标中，希尔伯特变换并无闭式表达式。

相反，我们 Ψ_n 通过利用我们已在第IIIA节确定欧拉解这一事实，以递归且计算成本低廉的方式确定

欧拉变量 V 的傅里叶变换，

$$\tilde{V}(k,\tau) := \int V(z,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z = 2\int \mathcal{Z}'(a,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathcal{Z}(a,\tau)}\mathcal{J}(a,\tau)\,\mathrm{d}a\,. \tag{18}$$

这里，我们使用了 $\mathrm{d}z = \mathsf{J}\,\mathrm{d}a$ 以及定义 $V(a,\tau) = 2\partial_\tau \mathsf{Z}(a,\tau)$。现在，在式（18）的第一个表达式中使用傅里叶级数~ ~ ~表示 $V(k,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(k)\,\tau^n$，其中系数 $V_n(k) = \int V_n(z)\exp(-\mathrm{i}kz)\,\mathrm{d}z$；并将式（18）的最后一个表达式在 $\tau = 0$ 附近展开，我们得到一个包含无穷 τ-时间级数的方程。比较 τ^n 的相同幂次，可得位移系数 $(n \geq 0)$ 满足以下递归关系

$$\boxed{(n+1)\mathcal{F}_{a\to k}[\Psi_{n+1}] = \frac{\tilde{V}_n(k)}{2} - \sum_{\substack{p+q\\=n+1}} p\mathcal{F}_{a\to k}\left[\Psi_p\left(\nabla_a \Psi_q + E_q\right)\right] - \sum_{\substack{p+q+r\\=n+1}} p\mathcal{F}_{a\to k}\left[\Psi_p E_q \nabla_a \Psi_r\right]}\,. \tag{19}$$

这里，$\mathsf{F}_{a\to k}[\Psi] := \int \Psi(a)\exp(-\mathrm{i}ka)\,\mathrm{d}a$ 表示关于拉格朗日坐标 a 的傅里叶变换，并且我们定义了 $E(a) = \exp(-\mathrm{i}k\,\Psi(a)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\tau^n$，其中 E_n 是 $E(a)$ 关于 $\tau = 0$ 的 n 阶泰勒系数。利用从式（8）中得到的 V_n，我们便能高效地生成任意阶的位移系数。为方便起见，我们在附录B中提供了实现拉格朗日描述和欧拉递归关系的 Mathematica 代码。

一旦位移已知到给定的截断阶数，就可以轻松确定拉格朗日表示中的相应解

$$\mathcal{V}(a,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n(a)\tau^n\,, \qquad \mathcal{W}(a,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n(a)\tau^n \tag{20}$$

fro由相应方程（16）得到。所得级数的前几项为 d

$$\Psi(a,\tau) = -\tau\frac{\sin a\cos a}{2} + \tau^2\frac{\sin(4a)}{96} + \tau^3\frac{24\sin(2a) - \sin(6a)}{4320} + O(\tau^4), \tag{21}$$

$$\mathcal{V}(a,\tau) = -\frac{\sin(2a)}{4} + \tau\frac{\sin(4a)}{48} - \tau^2\frac{\sin(6a) - 24\sin(2a)}{1440} + \tau^3\frac{3\sin(8a) - 80\sin(4a)}{241920} + O(\tau^4), \tag{22}$$

$$\mathcal{W}(a,\tau) = \sin(2a) + \tau\frac{\sin(4a)}{12} + \tau^2\frac{2\sin(2a) + \sin(6a)}{120} + \tau^3\frac{72\sin(4a) + 17\sin(8a)}{20160} + O(\tau^4). \tag{23}$$

在图 1 中，我们展示了 $u(z)$ $v(z)$ $w(z)$ 的拉格朗日预测（各种虚线），其方法是将 $\mathsf{U}(a)$ $\tau^{1/2}\mathsf{V}(a)$ $\tau^{1/2}\mathsf{W}(a)$ 关于 $\mathsf{Z}(a)$ 作参数图，并将 τ-时间截断至第 36 阶。在所考察的时间 $\tau = 1.0$、1.7，拉格朗日预测始终保持规则，完全不受位于 $R_{\mathrm{inf}} \simeq 1.588$ 处奇点的影响；在这些位置，欧拉级数解不再有意义。

为进一步阐明拉格朗日表述性能提升的原因，我们在图3中展示了拉格朗日流体变量随 a 变化的情况，对应的时间明显更晚： $\tau = 2$ （左侧面板）和$\tau = 3$ （右侧面板）。顶排展示了流体变量的拉格朗日 τ-时间级数解，其截断阶数取最大值 $N = 36$；各子面板则展示了级数解与截断阶数 n 的关系，其中 $0 < n < N$。所有流体变量的级数解似乎都收敛，且符合预期：较早时刻的截断误差通常较小。此外，我们观察到收敛速度具有空间依赖性，其中涡量 $w^{\{n\}}$ 体现出最显著的趋势：在高阶时，截断误差在位置 $a = 0$、$\pm\pi/2$、$\pm\pi$附近最大，不过我们注意到，涡量恰好在这些位置穿过零点。此外，正如我们将在下文解释的，这些位置附近收敛缓慢是由奇异行为导致的。

最后，注意到 $\mathcal{J}$ 在图3所考察的时间内严格为正，但正如我们很快将看到的，当 $\tau \to \tau_\star$ 在位置 $a = a_\star = 0, \pm\pi$时会变为零。在这一时刻，某些

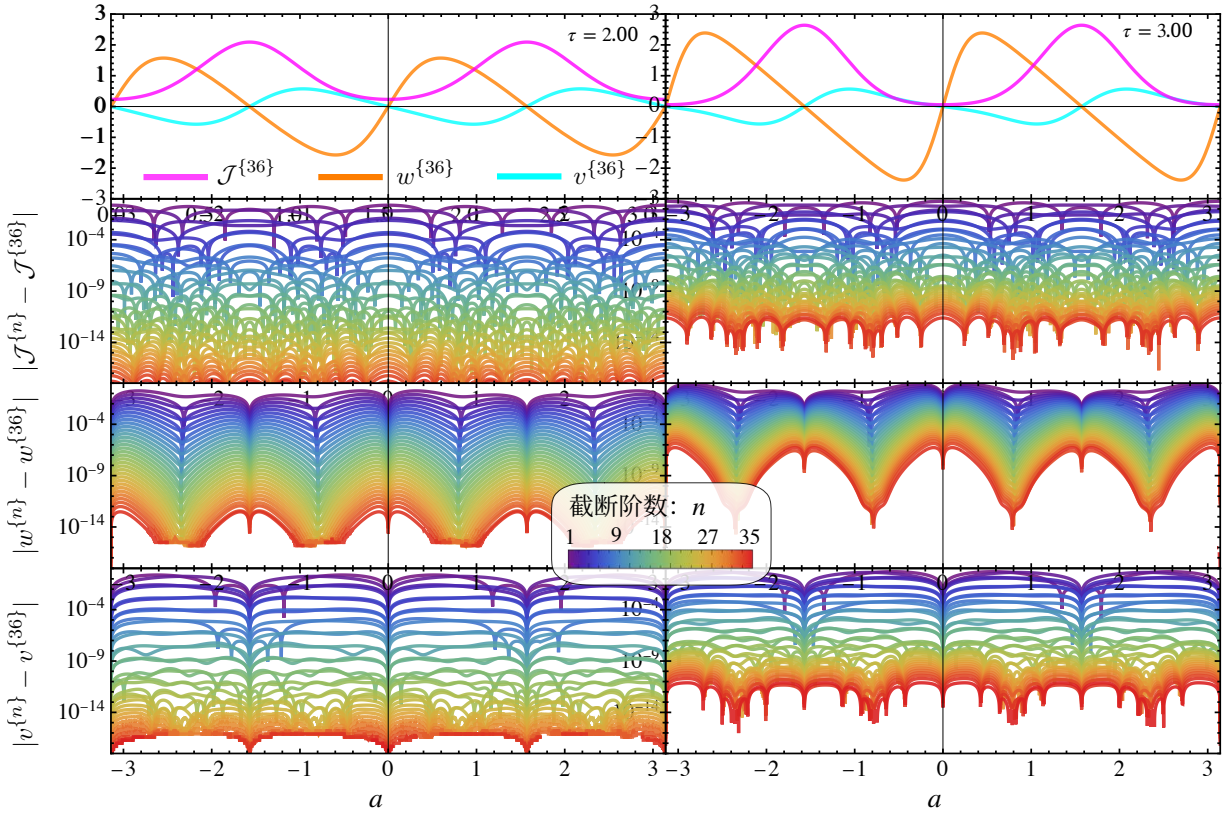

图 3. 雅可比行列式 $\mathcal{J} = \nabla_a Z$以及流体变量 $w = \tau^{1/2}\mathcal{W}$和 $v = \tau^{1/2}\mathcal{V}$随拉格朗日坐标 a的变化情况，截断阶数各不相同 $1 \le n \le 36$ （由“$\{n\}$”表示），分别在时间 $\tau = 2$ （左侧面板）和 $\tau = 3$ （右侧面板）处计算。上方各面板显示截断阶数取最大值时的拉格朗日预测，其余面板则显示这些预测与较低截断阶数 $1 \le n < 36$下的解之间的绝对差。

沿 z 方向的流体粒子之间的分离因此收缩至零，最终导致映射 $a \to Z$失去单调性。

B. 拉格朗日空间中的渐近分析

根据以上在图1 和 3中总结的结果，拉格朗日解似乎不受欧拉情形下相同复时间奇点的限制。这一观察表明，拉格朗日解的解析结构可能更简单。为了检验这一假设，我们考虑标准的 Domb–Sykes 分析 [20, 41]，其中模型函数包含一个非解析项，具体为

$$\mathcal{W}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\tau}) = \left(1 - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau^{\mathrm{L}}_\star}\right)^{\nu_{\mathrm{L}}}, \qquad \text{with} \quad \tau^{\mathrm{L}}_\star = \tau^{\mathrm{L}}_\star(a) \in \mathbb{R}, \quad \nu_{\mathrm{L}} = \nu_{\mathrm{L}}(a) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\ge 0}, \tag{24}$$

对于拉格朗日涡量。我们指出，类似的考虑也适用于其他流体变量；然而，根据图3，涡量似乎主要表现出奇异行为，因此我们在后续分析中聚焦于这一变量。回到（24），对于 $|\boldsymbol{\tau}| < \tau_{\mathrm{L}\star}$，模型函数可表示为如下展开

$$\mathcal{W}^{\mathrm{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}^{\mathrm{L}}_n \boldsymbol{\tau}^n, \qquad \mathcal{W}^{\mathrm{L}}_n = \binom{\nu_{\mathrm{L}}}{n} [-\tau^{\mathrm{L}}_\star]^{-n}, \tag{25}$$

其中我们采用广义二项式系数 $\binom{\nu_{\mathrm{L}}}{n}$。依次取系数$\mathcal{W}^{\mathrm{L}}_n/\mathcal{W}^{\mathrm{L}}_{n-1}$的比值，并将模型系数 $\mathcal{W}^{\mathrm{L}}_n$ 替换为拉格朗日涡量的系数

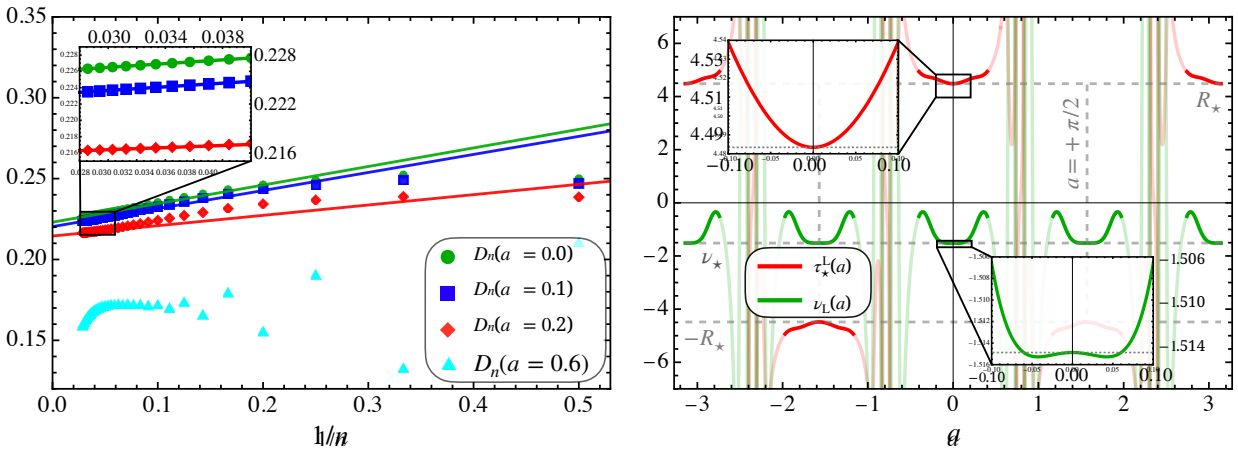

图 4。左图：截至阶数 $N=36$ 的拉格朗日涡量的 τ-时间泰勒系数的 Domb–Sykes估计器 $D_n(a)$ [式 26]。我们在四个示例位置 $a=0$、0.1、0.2、0.6 处分别计算 $D_n(a)$（分别以绿色、蓝色、红色和青色表示）。除最后一个位置外，所有位置的 D_n 在阶数 $n\gtrsim 30$ 时趋于线性行为，从而证明进行线性外推是合理的，并揭示拉格朗日涡量的首阶渐近行为。右图：时间奇点的位置$\tau_\star^{\rm L}$（红色）和奇点指数 $\nu_{\rm L}$（绿色；见式 24）的结果汇总。Domb–Sykes检验无法得出结论的位置以浅色线条表示。

$\mathcal{W}_n$，即可准确得到

$$D_n := \frac{\mathcal{W}_n}{\mathcal{W}_{n-1}} = \frac{1}{\tau_\star^{\rm L}}\left(1-[1+\nu_{\rm L}]\,\frac{1}{n}\right). \tag{26}$$

在图4的左图中，我们计算 D_n 在 $1<n\le 36$ 四个示例位置 a =0。0、0。1、0。2、0。6。在所有这些位置——除了 $a=0.6$（见下文）—— D_n 比值在足够大的 n阶数下趋于线性行为，这表明比值判别法中的达朗贝尔极限

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\mathcal{W}_n}{\mathcal{W}_{n-1}}\right| \tag{27}$$

存在，其中 R 是收敛半径。对 D_n 与 $1/n$ 在阶数 $30\le n\le 35$ 之间进行最小二乘拟合，可估算 $\tau_\star^{\rm L}(a)$ (在 R处)以及式（ $\nu_{\rm L}(a)$ （26）中的奇点指数，在 $n\to\infty$的极限下。然而，在诸如 $a=0.6$ 这样的非网格位置（左图中的青色/三角形绘图标记）， D_n 至少在我们目前掌握的泰勒系数范围内，并未呈现出规律性行为，因此我们不将其纳入渐近分析的考量（相关说明见下文）。

在图 4的右图中，我们展示了由此得到的 $\tau_\star^{\rm L}(a)$ 和 $\nu_{\rm L}(a)$ 的估计值（分别以红色和绿色表示）；浅色线条表示 Domb–Sykes 分析无法得出明确结论的估计值。值得注意的是，我们检测到了实奇点，其中最靠近原点的奇点为

$$\boxed{R_\star := \tau_\star^{\rm L}(a_\star^+)\simeq 4.48339\,,\quad -R_\star=\tau_\star^{\rm L}(a_\star^-)\simeq -4.48339\,,\quad \text{with}\ \ \nu_\star:=\nu_{\rm L}(a_\star^\pm)\simeq -1.51487}\,, \tag{28}$$

其中 $a_\star^+=0$， $\pm\pi$ 以及 $a_\star^-=\pm\pi/2$。因此我们得出结论：拉格朗日涡量在时间 $\tau=R_\star$ 发生爆炸，其首阶渐近行为（asymp）可概括为

$$\mathcal{W}^{\rm asymp}(a) = C\big(\tau_\star^{\rm L}-\tau\big)^{\nu_{\rm L}}\,,\qquad \text{for}\ \ |a-a_\star^\pm|\lesssim 0.4\,, \tag{29}$$

其中 C 是一个常数，并提醒读者， $\tau_\star^{\rm L}$ 和 $\nu_{\rm L}$ 都（弱）依赖于邻域 $a\simeq a_\star^\pm$中的位置。请注意，在 $a_\star^+$ 处安全地计算 $D_n(a)$中出现的三角函数之比，需要取极限 $a\to a_\star^+$。对于非网格位置，合理的做法是通过考虑相互竞争的奇点来改进渐近建模

将沿正、负时间轴分布的奇点纳入考量，这可能会减轻图4右图中观察到的“干涉图样”。然而，由于只有最接近原点的奇点会限制收敛，且这些奇点位于实时间轴上，因此我们认为上述分析已足以满足我们的目的。

我们强调，尽管最近的奇点恰好位于$a = a_\star^+$，但涡量的级数解在这些位置恰好为零（参见式23，另见下文第V 节）。尽管如此，$\lim_{a\to a_\star^+} D_n(a)$ 存在且非零。此外，爆破位置附近的 Domb–Sykes 估计器已充分收敛；相比之下，依赖 MR 估计器的欧拉结果在爆破附近存在显著的精度误差（图2）。

将拉格朗日描述下的结果与欧拉坐标下得到的结果进行比较颇有意味。具体而言，根据在欧拉位置 $z = 0$、 $\pm\pi/2$、 $\pm\pi/2$处计算的 MR 估计器，我们在第IIIB 节报告了一个模为 $R_\star^{\mathrm{MR}} \simeq 4.4865$的实值时间奇点，这与当前估计值 $R_\star \simeq 4.48339$ 相差0。069%。实际上，我们还得到了另一个关于实奇点的欧拉估计值，即 $R^{\mathrm{DS}}{}_\star{}^{\mathrm{E}} \simeq 4.4842$ 这是通过在这些爆破位置精确地对欧拉涡量进行 Domb–Sykes（DS）检验得到的（见附录A），其与 $R_\star$ 的差异小于0。018%。

因此，我们得出结论：正如预期，欧拉解和拉格朗日解都受到相同实奇点的限制，而三种估计之间的小幅差异很可能源于残余外推误差。采用更高阶的泰勒系数可以减小这些误差。作为比较，对于具有光滑初始数据的一维无黏 Burgers 方程，其爆破时间（预激波时间）可以精确确定；采用 MR 方法估计该爆破时间时，精度达到 0.0061% [30], ，但所用泰勒系数为 70 个，而非本文的 35 个。若对无黏 Burgers 方程重复文献 [30] 中的分析，但将 MR 估计器的评估范围限制在 30–35 阶（如本文对 HL 所做的那样），得到的爆破时间精度仅为 0.012%，即误差大致翻倍。因此，根据这些外部参考，可以预期，将级数系数的数量从 35 个增至 70 个时，HL 外推方法的误差或可降低约一半。然而，这种数量翻倍会导致计算时间呈指数级增长，因为高阶级数系数会呈指数级增大；因此，我们将这类研究留待未来开展。

在以下章节中，我们提出一个简单模型，将上述得到的领先阶渐近行为纳入其中。在第VI 节中，我们随后将这一渐近完备模型用作代理模拟输出，并根据全局 Beale–Kato–Majda 判据检验局部渐近行为能够在多大程度上得到恢复。关于奇点理论的构建，请参见第VII 节。

V. 渐近完备（AC）

尽管拉格朗日涡量的级数表示（23）似乎在半径为 $R_\star \simeq 4.48339$的复时间圆盘内收敛，但其收敛速度相当缓慢（图3）。在此，我们采用一种利用第IVB 节渐近洞见的方法，以实现远快于原始级数展开的收敛速度。下文将这一方法称为 AC 方法；该方法最近已应用于宇宙学流体，并被称为 UV 方法 [42, 43] （我们采用 AC 一词，以避免与紫外术语混淆）；历史背景请参见文献 [20] 。

在第IVB节中，我们已推导出，拉格朗日涡量的主导阶渐近行为可由下式刻画：$\mathcal{W}^{\mathrm{asymp}} = C(\tau_\star^{\mathrm{L}} - \tau)^{\nu_{\mathrm{L}}}$，其适用于爆破点 $a_\star^\pm = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$附近。AC 方法表明，可以将$\mathcal{W}$ 的截断泰勒级数渐近补全，并将$\mathcal{W}^{\mathrm{asymp}}$ 视为无穷级数的余项。渐近补全后的预测

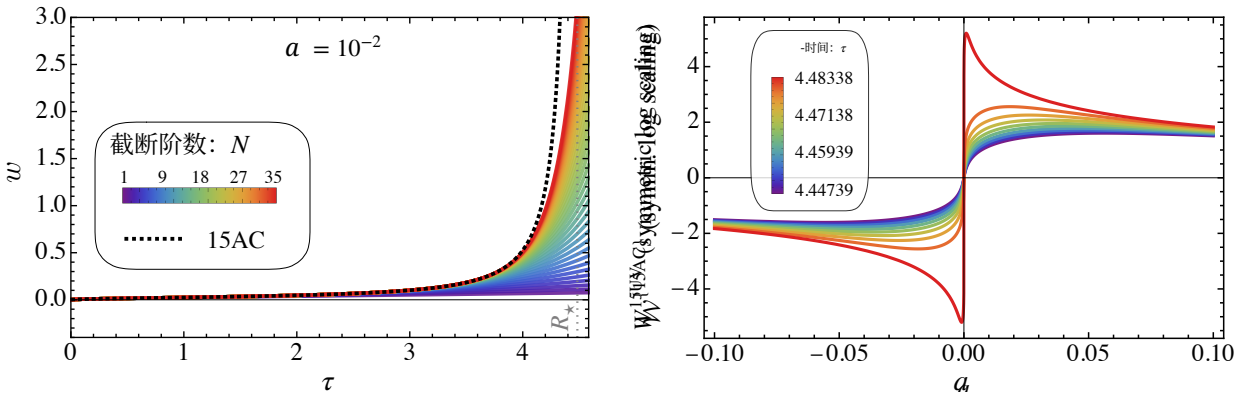

图5。 左图： 拉格朗日涡量 $w = \tau^{1/2}\mathcal{W}$ 作为 τ 使用 $\mathcal{W}^{\{15\mathrm{AC}\}}$ 的函数，其中采用 AC 方法（黑色点线，公式31）得到的结果与截断原始级数解进行比较（不同颜色表示不同截断阶数，公式23）；所有预测均在 $a = 10^{-2}$ 处进行评估。 右图： $\mathcal{W}^{\{15\mathrm{AC}\}}$ 在对称对数刻度下作为 a 的函数，所示区域为爆破位置 $a = a_\star = 0$附近。不同颜色（从蓝色到红色）表示逐渐趋近于爆破时间的评估时间 $\tau = R_\star \simeq 4.48339$。另见图7，其中展示了极大值/极小值的时间演化，这与应用全局爆破判据相关。

形式如下，其中 $\mathcal{W}$ 在下文中称为 AC涡量，或称为 $\mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}}$

$$\mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}} := \sum_{s=0}^{n-1} \mathcal{W}_s \tau^s + \mathcal{W}^{\mathrm{asymp}} - \mathcal{W}^{\{\mathrm{asymp},n-1\}}, \qquad a \simeq a_\star^{\pm}. \tag{30}$$

这里，$\mathcal{W}_s$ 是拉格朗日系数（23），而 $\mathcal{W}^{\{\mathrm{asymp},n-1\}}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathrm{asymp}} = C(\tau_\star^{\mathrm{L}} - \tau)^{\nu_{\mathrm{L}}}$关于 $\tau = 0$的泰勒级数（见下文），截断至 $n-1$阶；该项用于避免截断阶数 $n-1$之前低阶系数的重复计数。

在 AC 方法中， $\tau_\star^{\mathrm{L}}$ 和 ν_{L}的近似结果——在本例中由 Domb–Sykes 方法（图4）得到——是唯一的输入。剩下的唯一任务是确定方程（C）中出现的常数29。为此，我们要求$\mathcal{W}^{\mathrm{asymp}}$ 的泰勒级数系数与$\mathcal{W}$ 在截断阶数 n时的级数系数相同。通过这一匹配，便可直接得到 AC涡量

$$\mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}} = \sum_{s=0}^{n-1} \mathcal{W}_s \tau^s + \frac{\mathcal{W}_n}{c_n} \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_\star^{\nu_{\mathrm{L}}}}\right)^{\nu_{\mathrm{L}}} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \tau^k \right], \qquad a \simeq a_\star^{\pm}, \tag{31}$$

其中， $c_n = \binom{\nu_{\mathrm{L}}}{n}[-\tau_\star^{\mathrm{L}}]^{-n}$ 包含一个广义二项式系数。例如，在三阶时，AC涡量为（$a \simeq a_\star^{\pm}$）

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{\{3\mathrm{AC}\}} &= \sin(2a) + \frac{\tau}{6}\cos(2a)\sin(2a) + \frac{\tau^2}{120}\left[2\sin(2a) + \sin(6a)\right] + \frac{\tau_\star^{\mathrm{L}}\Gamma(-\nu_{\mathrm{L}})}{6720\Gamma(3-\nu_{\mathrm{L}})} \\ &\times \left(2\tau_\star^2\left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_\star^{\mathrm{L}}}\right)^{\nu_{\mathrm{L}}} - 1\right] + \nu_{\mathrm{L}}\tau(\tau + 2\tau_\star^{\mathrm{L}}) - \nu_{\mathrm{L}}^2\tau^2\right)\left[72\sin(4a) + 17\sin(8a)\right].\end{aligned} \tag{32}$$

根据构造，$\mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}}$ 在任意截断阶数 n下都具有相同的主导阶渐近行为。然而，与采用最大截断阶数计算的原始级数相比， n 应取足够大的值，以确保在早期时间具有相当的性能。

在图5的左图中，我们展示了拉格朗日涡量 $w = \tau^{1/2}\mathcal{W}$ 的各种近似的时间演化，特别是采用 AC 模型 $\mathcal{W}^{\{15\mathrm{AC}\}}$ （黑色点线），以及针对 $\mathcal{W}$ 的各种截断级数解（实线，颜色如图例所示）。所有函数均在爆破位置稍微偏离网格处求值，即 $a = 10^{-2}$，因为在 $a = 0$处涡量系数恒为零。对于 AC 方法，我们使用输入$\tau_\star^{\mathrm{L}}(10^{-2}) \simeq 4.484 > R_\star \simeq 4.483$和 $\nu_{\mathrm{L}}(10^{-2}) \simeq \nu_\star \simeq -1.515$。可以看到，AC 涡量

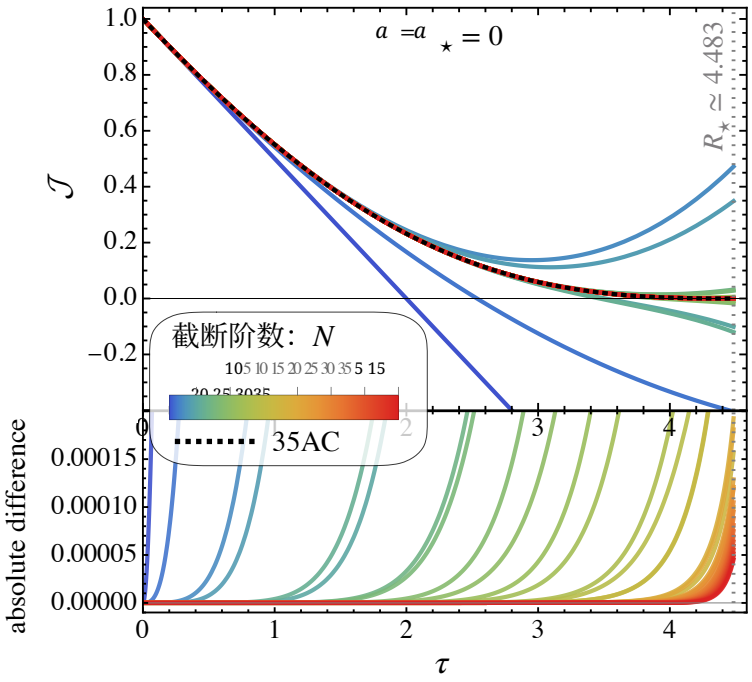

图6. 在爆破位置 $a = a_\star = 0$处计算的雅可比行列式 $\mathcal{J} = \nabla_a \mathcal{Z}$ 。图中显示了基于原始展开的截断级数解（不同颜色的实线；基于方程21），以及截断阶数为 $n = 35$ 时的 AC 预测（33）（黑色点虚线）。绘制了 $0 \le \tau \le R_\star$对应的曲线。底部面板显示了 $\mathcal{J}^{\{35\mathrm{AC}\}}$ 与截断级数解之间的绝对差值。

在较早时刻与高阶原始级数解吻合良好；随着系统接近临界时间，它会在位置 $a_\star^\pm$附近显示出爆破迹象，这与预期一致。

在图5右侧面板中，我们展示了 $-0.1 \le a \le 0.1$ 的 AC涡量——即爆破位置 $a_\star = 0$ 附近的涡量——其取值对应于非常接近 $\tau = R_\star \simeq$4.48339 处爆破发生时刻的时间（颜色由蓝到红表示时间逐渐推后）。具体而言，我们展示 AC涡量的对称对数，定义为 symlog(W$^{\{15\mathrm{AC}\}}$) = sign(W$^{\{15\mathrm{AC}\}}$) log$_{10}$(1+|W$^{\{15\mathrm{AC}\}}$|)。注意，在 AC 模型中，我们确实考虑了 $\tau_\star^{\mathrm{L}}$ 和 ν_{L} 的空间依赖关系（输入见图 4 右侧面板）。可以看到，随着 τ 接近 $R_\star$，涡量剖面呈现出明显的“挤压”行为：原点两侧形成两个相邻的峰值——一个对应 $a < 0$，另一个对应 $a > 0$——而 $a = 0$ 处的涡量始终恒为零，对所有 $\tau < R_\star$ 均如此。在极限 $\tau \to R_\star$ 下计算 AC涡量 (32)，最奇异的项为 $\propto a(\tau_\star^{\mathrm{L}} - \tau)^{\nu_{\mathrm{L}}} + O(a^3)$，该项在 $a = 0$ 附近不连续。由于拉格朗日点 $a = 0$ 在所有时间 $[\Psi(a = 0) = 0$ 下均映射到 Z $= 0$，对任意 $\tau < \infty$ 都成立；见方程 21]，，因此对于 $\tau < R_\star$，欧拉涡量同样呈现挤压行为，并在 $z = 0$ 附近对 $\tau \to R_\star$ 变得不连续。

采用 AC涡量（31）来获取雅可比行列式的 AC 预测颇具启发性。具体做法是将 $\mathcal{W} \to \mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}}$中的 $\mathcal{W} + 2\tau\partial_\tau \mathcal{W} = \sin(2a)/\mathcal{J}$ [方程（16）],替换掉，然后对该关系进行反演，从而得到“AC 雅可比行列式”

$$\mathcal{J}^{\{n\mathrm{AC}\}} := \frac{\sin(2a)}{\mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}} + 2\tau\partial_\tau \mathcal{W}^{\{n\mathrm{AC}\}}} \,. \tag{33}$$

与 AC涡量的情形一样，该表达式仅在 $a \simeq a_\star^\pm$附近有效，因为 AC 方法需要将 Domb–Sykes 外推结果作为输入，而这些结果目前仅在该邻域内可信。 然而，与 AC涡量不同，AC 雅可比行列式（33）一般在 非零的极限 $a \to a_\star^+ = 0$下 $\pm\pi$，对于任意 $\tau < \tau_\star^{\mathrm{L}}(a_\star^+) = R_\star$，因此可以作为一种清晰的诊断方法，在爆破位置处精确计算。事实上，对于任意 $n > 1$，爆破发生前的时间内，AC 雅可比行列式严格为正，并且在 $\tau = R_\star$ 处、位置 $a = a_\star^+$上恰好为零。

在图6中，我们展示了在 $a \to a_\star = 0$处评估的雅可比行列式$\mathcal{J} = 1 + \nabla_a \Psi$的时间演化，

该结果由截断阶数为 $n = 35$ 的 AC 模型得到（黑色点线），并与不同截断阶数下的原始级数解进行比较（颜色如图例所示）。截断级数解逐渐收敛于 AC 解，符合预期的趋势：最高截断阶数在最长的时间范围内保持准确。然而，同样值得注意的是，雅可比行列式的原始级数展开收敛得相当缓慢，尤其是在接近爆破的时间处。这种缓慢的收敛表明，尽管使用了拉格朗日坐标，HL 模型在本质上仍然具有高度奇异性；作为比较，请参见 [30, 44, 45] 针对不同流体的相关结果，其中拉格朗日级数的收敛速度相较于欧拉级数显著加快。

VI. 实验：AC 模型与 Beale–Kato–Majda 准则

在此，我们采用第 V 节推导的 AC 模型，并进行一项数值实验：我们将 AC 涡量（31）作为基于拉格朗日网格的数值模拟所得涡量输出的替代，并假设这一替代输出能够忠实地表示真实解（在 AC 构造的有效范围内）。这一替代场呈现出依赖于坐标的时间奇点 $\tau_\star^{\mathrm{L}}(a) \in \mathbb{R}$ 及其对应的指数 $\nu^{\mathrm{L}}(a) \in \mathbb{R}$（图 4）。我们的目标是应用一种标准的全局爆破准则——即 Beale–Kato–Majda（BKM）条件 [3, 46]——以评估能在多大程度上从这些数据中恢复底层奇点的性质。

对于三维欧拉情形，可以利用 BKM 准则明确判断是否存在有限时奇点。该准则指出，涡量的 L^∞ 范数的时间积分会在有限时间内发散 t_s，即 $\int_0^{t_s} \|\boldsymbol{\omega}\|_\infty \mathrm{d}t = \infty$。相比之下，对于 HL 模型，正则性的每一种丧失是否都是检测有限时刻爆破的可靠准则 [31]，目前仍不清楚。尽管如此，作为一种直观上合理的诊断方法，我们可以将以下类似的爆破条件应用于 HL 模型

$$\int_0^{\mathcal{T}_\star} \|\mathcal{W}\|_\infty \, \mathrm{d}\tau = \infty \,, \qquad \text{[BKM criterion applied to HL model]} \tag{34}$$

其中 $\mathcal{T}_\star$ 是对爆破时间的估计，而 $\mathcal{W}$ 是通过方程（16）定义的拉格朗日涡量。若 $\mathcal{T}_\star$ 与 $\tau_\star^{\mathrm{L}}$（$a = a_\star^+$）$= R_\star$一致，则所提出的实验成功。为此，我们将（$\mathcal{W}$）中的 34替换为 AC 模型 $\mathcal{W}^{15\mathrm{AC}}$（方程（31）中的 $n = 15$），其余项刻画了 HL 模型的非解析行为，

$$\mathcal{W}^{\mathrm{asymp}}(a, \tau) \propto [\tau_\star^{\mathrm{L}}(a) - \tau]^{\nu_{\mathrm{L}}(a)} \,. \tag{35}$$

我们强调，AC 方法只有在 $|a - a_\star^\pm| \lesssim 0.4$ 临界位置 $a_\star^\pm = 0$ 附近才能得出有意义的预测 $\pm\pi/2$，$\pm\pi$（见图4）。然而，由于我们关注的正是这些邻域内 $\mathcal{W}^{\{15\mathrm{AC}\}}$ 最大值的时间演化，因此我们限制了计算范数所用的空间区域。

由于我们将 AC 预测视为直接数值模拟（DNS）的替代，因此也引入人工空间离散化，以模拟 DNS 固有的分辨率限制（请注意，这仅考察配置误差，因为我们假设 AC 模型不存在亚网格限制）。为此，我们在子域 $\mathcal{W}^{15\mathrm{AC}}$ 上进行采样，$-0.1 \le a \le 0.1$ 采用均匀间距网格，网格点数量可变 $N_z = 32$，64、128、512、1024、∞，其中最后一项表示连续情形。图7 展示了最大涡量随时间变化的结果（蓝点），对应于 $N_z = 128$（更高分辨率下的结果看起来无法区分）。正如预期的那样，并且与先前的观察结果一致（图5），最大涡量呈现出爆破迹象。为对此进行量化，我们采用非解析模型

$$\|\mathcal{W}\|_{\infty,\mathrm{model}} = c\,(\mathcal{T}_\star - \tau)^\alpha \tag{36}$$

并通过非线性最小二乘拟合确定未知参数，使用 32 个时间

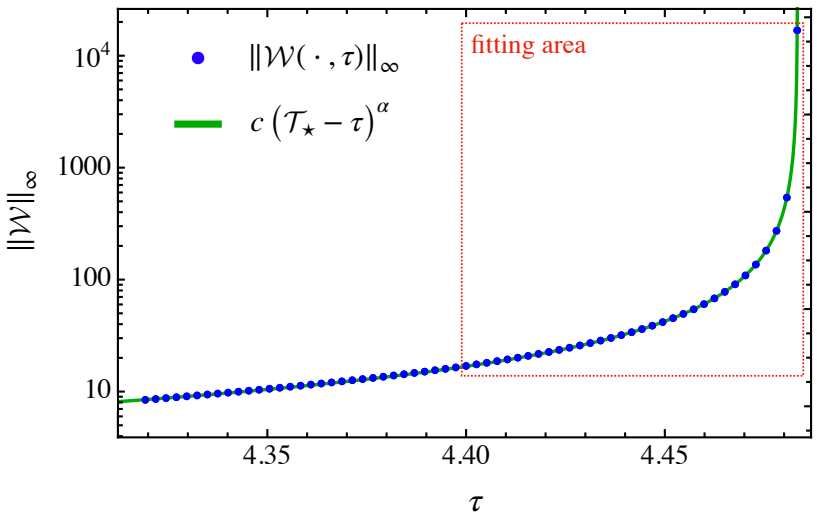

图7. 最大涡量的演化$\mathcal{W}$（蓝色点），此处通过对 AC 模型进行采样获得$\mathcal{W}^{15\mathrm{AC}}$ 在具有128个网格点的拉格朗日网格上，对子域 $-0.1 \le a \le 0.1$ 围绕爆破位置 $a = a_\star = 0$进行计算。幂律拟合（绿色实线；基于 BKM）以六位有效数字恢复了爆破时间$\mathcal{T}_\star = R_\star \simeq 4.48339$，但测得的指数 $\alpha \simeq -1.01$ 明显偏离局部奇异指数 $\nu_\star \simeq -1.51$。有关不同空间分辨率下结果的汇总，请参见表I 。

N_z	32	64	128	256	512	1024	∞
α	-1.00879	-1.01128	-1.01112	-1.01136	-1.01127	-1.01129	-1.01129
$\mathcal{T}_\star$	4.83440	4.48339	4.48339	4.48339	4.48339	4.48339	4.48339

表 I. 基于模型（α）拟合的奇点指数$\mathcal{T}_\star$ 和爆破时间的收敛性，随着网格分辨率的提高 N_z，针对子域 $-0.1 \le a \le 0.1$（以爆破位置为中心） $a_\star = 0$。

均匀分布在 $4.4000 \le \tau \le 4.4833$ 之间的数据点（图7中的红框），紧接在 $\tau = R_\star \simeq 4.48339$爆破之前。

需要再次指出的是，在 AC 模型中，时间奇点 $\tau_\star^{\mathrm{L}}(a)$ 随位置变化，并且在 $a = 0$ (图4) 附近近似呈抛物线形状。对于拟合所使用的最后一个时间数据点 $\tau_{\max} = 4.4833$，涡量最大值出现在 $a_{\tau_{\max}} \simeq 0.002754$，当 $N_z = \infty$时，对应的局部奇异时间为 $\tau_\star^{\mathrm{L}}(a_{\tau_{\max}}) \simeq 4.48343$，其略大于真实的爆破时间 $R_\star$。这一点微妙但十分重要：尽管 AC 模型是完美的替代模型，但涡量最大值只能被追踪到时间 $\tau_{\max} < R_\star$，此时它被限制在距离奇异点有限距离的位置（$a = 0$）。因此，BKM 拟合必须通过外推来恢复爆破时间，而不能直接对奇异区间进行采样。此外，由有限 N_z 所施加的分辨率限制还可能加剧这一问题。

在图7中，我们展示了所得的拟合结果（绿色实线），以及针对 $N_z = 128$获得的最佳拟合值；所有分辨率下的相应拟合结果汇总于表I中。对于 $N_z \ge 64$，外推显示$\mathcal{T}_\star = R_\star$ 可精确到 6 位有效数字，这表明，确实可以从分辨率足够高的直接数值模拟数据中获取爆破时间。相比之下，所提取的奇点指数表现不同：我们观察到其收敛速度较慢，只有在 $N_z \ge 1024$时才能达到相同的 6 位精度。更重要的是，所获得的指数 $\alpha \simeq -1.01129$ 与我们的替代模型直接数值模拟的输入值明显不同，其中 $\nu_\star \simeq -1.51487$对应于 $a = 0$。这种不匹配可以解释如下。基于 BKM 的幂律拟合只能探测上确界范数，而上确界范数对奇点所具有的空间结构并不敏感。具体而言，在当前情形下，最大值的位置会随着 $\tau \to \mathcal{T}_\star$的变化向原点漂移，因此所提取的指数 α 代表了一种有效指数，它源于一系列空间位置的依次变化，而这些位置会暂时主导最大值。尽管其潜在机制似乎显而易见，但截至此处

我们仍无法从第一性原理推导出所测得的有效指数的数值。

VII. 拉格朗日描述奇点理论

我们已经看到，在欧拉表述下，MR外推法描绘出了一幅复时间中的奇点景观图（图2）。然而，归根结底，MR 等方法具有现象学性质，难以量化外推误差。这里，我们展示如何通过拉格朗日理论推导出上述欧拉表述所得到的复时间奇点景观。在当前的实现中，该理论依赖于泰勒级数表示，其收敛半径覆盖半径为 $R_\star \simeq 4.483$ 的复时间圆盘；这与欧拉级数解不同，后者受限于位于 $R_{\rm inf} \simeq 1.588$ 的复奇点。因此，拉格朗日理论的预测仅受收敛级数的截断误差限制，正如我们将展示的，这些误差是可控的。

我们首先描述理想情况下理论的构建，此时特征映射 $\mathcal{Z}(a,\tau)$ 的数学精确解已知；随后再讨论截断误差。在这一理想化设定中，理论的构建与一维无黏性伯格斯方程 [30], 的理论十分相似，因为后者不存在截断误差。因此，纳入截断误差构成了当前理论一个全新且不可或缺的要素。

该理论的核心思想是，HL 模型中的有限时刻奇异性由多个流体粒子趋近同一欧拉位置所触发 $z_\circ$。在拉格朗日描述坐标中，后一说法等价于寻找拉格朗日映射的雅可比行列式何时为零$\mathcal{J} = \partial\mathcal{Z}/\partial a$，其首次发生的时间为 $\tau = R_\star \simeq 4.48339$ ，对应的拉格朗日位置为 $a = a_\star^+ = 0, \pm\pi$（详情见第IVB 节）。若允许时间变量取复数值

$$\boldsymbol{\tau} := |\boldsymbol{\tau}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \tag{37}$$

则雅可比行列式为零的条件也可以在复时间下成立，且其模小于 $R_\star$。事实上，将$\mathcal{J}$、$\mathcal{Z}$ 和 a形式上复化，分别记为$\boldsymbol{\mathcal{J}}$、$\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ 和 $\boldsymbol{a}$，那么求解复数解 $\boldsymbol{a}_i$ 的求根问题可写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_i : \qquad \boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\tau}) := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Z}}}{\partial \boldsymbol{a}} \overset{!}{=} \mathbf{0}\,, \qquad |\boldsymbol{\tau}| < R_\star\,. \tag{38}$$

对于当前 HL 模型和所选初始数据，对雅可比行列式的泰勒级数进行数值求根，结果表明 $i = 4$，即共有四个这样的根。为降低求根问题的复杂度，我们采用参数化方法，针对不同的相位 Θ，求解 $\boldsymbol{a}_i$ 关于 $|\boldsymbol{\tau}|$的函数 $\Theta \simeq \pm\pi/2$。此外，这些根的（复）时间演化通常也取决于雅可比行列式所采用的截断阶数。然而，正如我们下文所示，对于相位 $\Theta \simeq \pm\pi/2$，求根中的截断误差极小 10^{-8} ，截断阶数为 $N \gtrsim 33$ （见下文图9 ）。因此，为了说明这些根的数学意义，我们首先讨论特殊情形 $\Theta = \pi/2$ （同时令 $N = 36$），随后将方法推广至任意 Θ ，并详细讨论截断误差。

在图 8的左图中，我们展示了四个根随复时间的模 $|\boldsymbol{\tau}|$在 $\Theta = \pi/2$时的变化。四个根中有两个具有相同的虚部，该虚部随时间变化。在这一特定情形下，它们的实部保持不变。这并非普遍特征，但不会带来额外的复杂性。

牢记这一观察，我们现在运用该理论的核心思想，即这些根会引发非解析性，正如在实欧拉坐标处观察到的那样，当复数的虚部

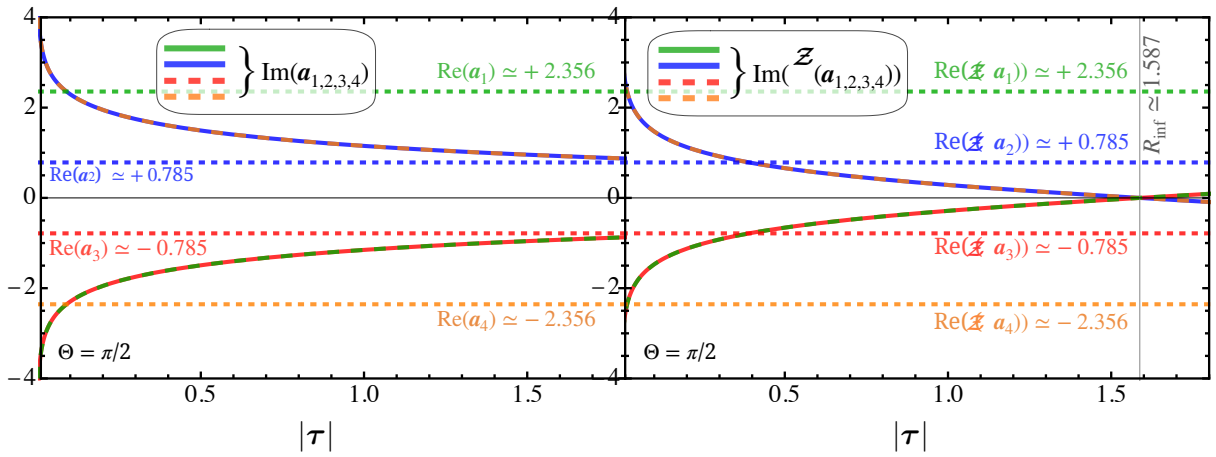

图 8。左图：复化雅可比矩阵 J 的四个根 $\boldsymbol{a}_{1,2,3,4}$ 随 $\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\exp(\mathrm{i}\Theta)$ 的演化，其中相位取值为 $\Theta = \pi/2$。右图：在这些根处计算得到的复化位置 Z 的相应演化。根据理论，$\mathrm{Im}[\mathrm{Z}(\boldsymbol{a}_i)] = 0$ 首次出现时，表明在 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\star,i}$ 处出现了奇点，这一点可在欧拉表述中观察到。对于当前的相位选择，距离原点最近的奇点的模为 $|\boldsymbol{\tau}| = R_{\mathrm{inf}} \simeq 1.587$，并首先出现在欧拉位置 $\mathrm{Re}[\mathrm{Z}(\boldsymbol{a}_{1,2,3,4})] \simeq \pm 0.785, \pm 2.356$ 处（参见图 2 左图）。求根以特征映射的 $\boldsymbol{\tau}$-时间泰勒级数作为输入，截断阶数为 $N = 36$。

分　　在给定根处求值的欧拉位置首次消失的时刻 [30]；也就是说，我们施加

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{\star,i} : \qquad \mathrm{Im}\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{\tau})\right) \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{39}$$

接着，在最后一步中——对于当前设定并非必需——我们令 $\boldsymbol{\tau}_\star = \inf\{\boldsymbol{\tau}_{\star,i}\}$，从而选取最接近时间原点的奇点作为物理上相关的奇点（同样，在当前情形下这并无必要，因为 $\boldsymbol{\tau}_\star = \boldsymbol{\tau}_{\star,i}$ 对于 $i = 1,2,3,4$；见下文讨论）。

上述方法在图8右图中作了可视化展示，其中我们像之前一样将 $\boldsymbol{\tau}$ 的相位固定为$\Theta = \pi/2$。在早期时刻 $|\boldsymbol{\tau}|$，根位置 $\boldsymbol{a}_{1,2,3,4}$ 处$\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ 的虚部均非零，并且（对于当前设定）在同一时刻过零 $|\boldsymbol{\tau}| = R_{\mathrm{inf}} \simeq 1.587$。这正是欧拉位置 $z = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4 \simeq \pm 0.785, \pm 2.356$ 处观察到的最小收敛半径（参见图2左图），由此观察到了早期 tygers（图1）。此外，该理论不仅预测奇点的位置，还能确定这些奇点最早在哪些欧拉空间位置变得相关：通过计算实部 $\mathrm{Re}[\boldsymbol{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{a}_{1,2,3,4})]$，即可获得这一信息；除极小的数值求根误差外，所得欧拉位置与上述位置完全一致。

上述考量适用于相位 Θ 的任意选择 $\boldsymbol{\tau}$，因此我们能够在时间域内重构欧拉表述的奇异结构（截断误差除外，见下文）。为此，我们改变 Θ 并搜索相应的 $|\boldsymbol{\tau}_\star|$，使其满足实数性条件（39），从而得到图2右图所示的结果。同样，分别绘制 $|\boldsymbol{\tau}_\star|$ 和 Θ 随 $\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\mathcal{Z}}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{\tau}_\star)\right)$的变化曲线，即可得到图2左图所示的理论预测。

最后，我们讨论当前设定下的截断误差。拉格朗日求根 (38) 和实数性条件 (39) 的计算都需要将截断级数 $\mathrm{Z}^{\{N\}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\tau}) := \boldsymbol{a} + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\Psi}_n(\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{\tau}^n$ 作为输入，其中 $\boldsymbol{\Psi}_n$ 是 (17) 中形式上复化的级数系数。图 9 左图展示了 $\boldsymbol{\tau}_\star = R\exp(\mathrm{i}\Theta)$ 的预测模 R 随截断阶数的变化，分别对应相位 $\Theta = 0.01$、$\pi/12$、$\pi/2$三种取值。$\Theta = \pi/2$（蓝色圆圈）的结果对应于恰好位于虚时间轴上的奇点（$\mathrm{Re}(\boldsymbol{\tau}_\star) = 0$）；在这种情况下，解会迅速收敛至稳定解，相较于我们的基准解，$N \gtrsim 7$时截断误差低于 10^{-4}（见图 9 右图；请注意，MR 方法使用了最高达 36 阶的泰勒系数，以四位数精度确定 R_{inf}）。快速收敛的

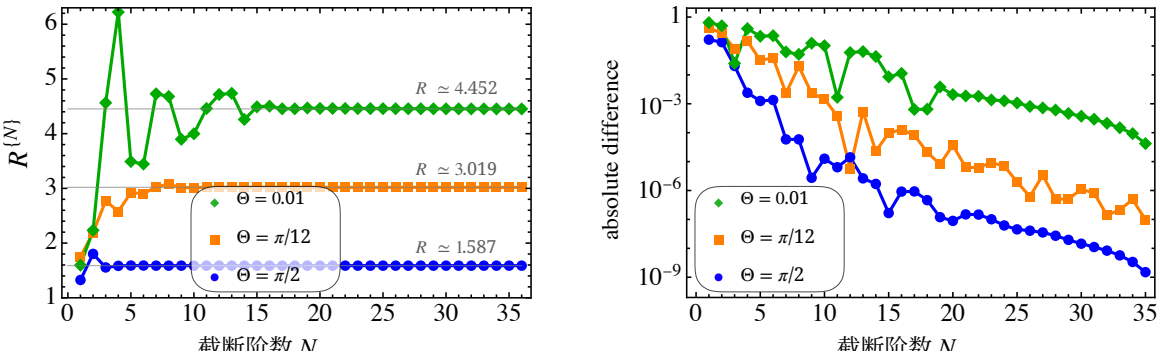

图9. 求解方程（39）时的截断误差，采用 $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{\{N\}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{a} + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\Psi}_n(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\tau}^n$。 左图： 奇点的预测模 $R = R^{\{N\}}\exp(\mathrm{i}\Theta)$ 随截断阶数 N变化的情况，图中展示了三种相位选择 $\Theta = 0.01$、$\pi/12$、$\pi/2$（分别以绿色菱形、橙色方块和蓝色圆圈表示）。 右图： 三种相位选择在不同截断阶数下相对于 $R^{\{36\}}$ 的绝对相对差，图例中标出了这三种相位选择。

拉格朗日理论之所以收敛迅速，是因为相应的奇点， $R = R_{\mathrm{inf}} \simeq 1.587$，远在拉格朗日级数的收敛半径之内；该收敛半径是我们通过 $R = R_\star \simeq 4.483$（第IVB节）估算得到的。因此，正如收敛级数表示通常所预期的那样，也如图9所示，截断误差会很快变得可以忽略不计。

当 $\boldsymbol{\tau}_\star$ 预测的模接近收敛边界时，截断误差会变得更加显著。图9 展示了 $\Theta = \pi/12$ （橙色方块）的情况，尤其是$\Theta = 0.01$ （绿色菱形）的情况；在这些情况下，截断误差的衰减速度远低于前面讨论的情况。尽管如此，即使对于这类位于实时间轴附近的奇点，当截断阶数为 $N \gtrsim 35$ 时，理论结果仍能达到约四位有效数字的精度。更重要的是，这一预测无需任何外推即可得到。

VIII. 结论

通过直接数值模拟检测有限时刻爆破本质上颇具挑战性。数值精度在接近奇异点时会下降，因此不得不根据足够接近爆破、但仍明显未到爆破时的数据进行外推。如果已知针对该问题的“去奇异化”变换，情况便会大为不同。粗略地说，这种变换能将无穷大转化为零，从而使奇点可以直接求值。

本文研究了一维 Hou–Luo（HL）模型的奇异结构，并表明引入拉格朗日描述（特征）坐标恰好能够实现这样的去奇异化。具体而言，从初始流体质点位置到当前流体质点位置、沿轴向的特征映射充当去奇异变换，其对应的雅可比行列式在爆破位置处为零（图6）。该雅可比行列式衡量流体粒子的轴向间距；当多个粒子汇聚到同一欧拉位置时，该间距会塌缩，这表明映射的单调性丧失，且分岔即将发生。

在拉格朗日坐标中，HL 爆破依然存在，但最近奇点的结构大大简化了：不同于欧拉坐标中连续呈眼形增殖的奇点（图2），在拉格朗日表述中，只有两个离散奇点仍具有重要意义，分别对应于正、负时间方向上的实数爆破时间。这一简化的奇异结构带来了若干重要后果，而我们将在本文中加以利用。例如，拉格朗日时间泰勒级数解（21）–（23）在数学上仍然有效，直至爆破时间；而欧拉对应解（4）则会在更早的时间失去正则性，其诱因是复时间奇点（图1）。这些结果由欧拉坐标和拉格朗日坐标中的渐近分析加以证实，该分析基于首个 72 t-时间

泰勒系数；我们已对其进行了符号计算（有关更多渐近结果，请参见附录A ，相关代码请参见附录B ）。

此外，我们还建立了一个简单的拉格朗日涡量模型 $\mathcal{W}$，能够以较高精度刻画爆破附近的时空区域（图5）。该模型通过渐近补全(AC) 得到，其中 $\mathcal{W}$ 的截断级数余项包含了解的渐近奇点（式31）。我们利用这一 AC 模型作为测试平台，评估将全局 Beale–Kato–Majda（BKM）判据应用于 AC 涡量时，能够在多大程度上恢复局部奇点信息。通过将一个与空间无关的非解析模型拟合到 L^∞ 范数 $\|\mathcal{W}\|_\infty$在爆破前不久的时间变化上，我们发现，外推能够以很高的精度恢复爆破时间，但会抹去局部奇点指数，因为空间上确界对奇点的局部结构并不敏感（图7 和表I）。

雅可比行列式的消失为检测 HL 爆破提供了一种明确的诊断方法。本文建立的拉格朗日奇点理论在形式上将针对雅可比行列式的求根问题扩展到复空间和复时间，并预测在给定的实值欧拉位置会显现哪些复时间奇点 z （图2 和 8）。从概念上说，本文理论是对近期为一维无黏 Burgers 方程建立的理论的推广，因为它现在允许在求根过程中使用级数解（图 [30], 9），而不再依赖 Burgers 方程情形下可用的精确闭式解。对由此产生的舍入误差进行处理是一项重要扩展，也使奇点理论适用于更复杂的流体力学方程。

我们强调，只有欧拉表述会出现（早期时间或 tyger）共振，这一点此前已在多种流体中得到分析 [12, 30, 34, 38]。这一观察表明，这类流体的数值格式也可能受益于拉格朗日实现。尽管近期流体动力学研究大多聚焦于欧拉方法，但在包括宇宙学和等离子体物理在内的多种情境中，拉格朗日描述能够提供互补且往往至关重要的见解 [45]。三维轴对称欧拉方程及更广泛情形的拉格朗日表述确实存在（例如 [36, 38, 47–49]），但我们认为，其对奇点检测的意义尚未得到系统探索。因此，本文强调，结合欧拉描述与拉格朗日描述，有助于为流体流动中奇异性形成与否提供可靠证据。

本文所发展的理论采用单步级数解来求解复根。不过，具体问题的求解策略可以灵活调整，例如采用柯西–拉格朗日方法等多时间步进算法 [38, 49]，或开发在复化空间中进行直接数值模拟的技术。此外，迄今为止，两个彼此独立的流体模型中都观察到了奇点特有的眼形结构，这表明这种形状或许具有一定的普遍性。要评估这一可能性，还需要进一步研究；我们推测，这或许会推动新型奇点检测方法的发展。

我们的理论可以直接应用于其他流体，尤其是不可压缩流，此时直接拉格朗日映射的雅可比行列式在整个演化过程中都被约束为 1。在这一背景下，需要回顾的是，HL 模型是可压缩的，尽管其母系统——三维轴对称不可压缩欧拉方程（3DAE）——确实是不可压缩的。这个表面上的矛盾可由以下事实化解：HL 表述中出现的雅可比行列式并不对应于这样的保体积映射，而是源于约化特征描述（在壁面处计算的 3DAE）。因此，将现有理论应用于不可压缩流时，趋于零的并非保体积映射的雅可比行列式，而是可能发生退化的特定矩阵元素，同时并不违背不可压缩性。这一区分澄清了雅可比行列式在理论中的作用，并表明奇异性形成的潜在机制可能自然地延伸到可压缩流之外。

尽管 HL 模型是一维的，我们的理论仍可直接应用于更高空间维度的流体。这需要首先建立相应的拉格朗日坐标表述（如果现有文献中尚未给出），随后进行渐近分析，以探究拉格朗日解的有效范围。在更高维度中，奇点理论所依据的复数求根问题本质上变成了更高维的问题，因此更加复杂；然而，这并不构成该方法的根本局限。实际上，分析由模最小的奇点控制，而为了识别物理上相关的奇点，只需确定这个根即可。

作为下一步但同样重要的工作，我们将把当前的奇点框架应用于二维 Boussinesq 流 [50, 51] 以及三维无黏性泰勒–格林涡 [9, 10, 22]。这些系统为评估所开发方法的稳健性和普适性提供了天然的试验平台，从长远来看，也有助于推动在流体力学方程中系统地搜寻有限时刻奇异性。

致谢

我们感谢 Uriel Frisch 和 Rahul Pandit 与我们进行相关讨论，并感谢 Samriddhi Sankar Ray 对稿件提出的宝贵意见。

---

[1] G. Eyink，《流体力学杂志》988，P1（2024），arXiv:2404.10084。[2] G. Luo 和 T. Y. Hou，《美国国家科学院院刊》111，12968（2014），arXiv:1310.0497。[3] J. T. Beale、T. Kato 和 A. Majda，《数学物理通讯》94，61（1984）。[4] J. Deng、T. Y. Hou 和 X. Yu，《偏微分方程通讯》30，225（2005），arXiv:math-ph/0402032。[5] T. Y. Hou 和 R. Li，《非线性科学杂志》16，639（2006），arXiv:math-ph/0602051。[6] D. Barkley，《伦敦皇家学会会刊A辑》476，20200348（2020），arXiv:1902.05993。[7] N. Fehn、M. Kronbichler、P. Munch 和 W. A. Wall，《流体力学杂志》932，A40（2022）。[8] C. Sulem、P.-L. Sulem 和 H. Frisch，《计算物理学杂志》50，138（1983）。[9] M. E. Brachet、D. I. Meiron、S. A. Orszag、B. G. Nickel、R. H. Morf 和 U. Frisch，《流体力学杂志》130，411（1983）。[10] M. E. Brachet、M. Meneguzzi、A. Vincent、H. Politano 和 P. L. Sulem，《流体物理》A辑4，2845（1992）。[11] C. Cichowlas 和 M.-E. Brachet，《流体动力学研究》36，239（2005）。[12] S. S. V. Kolluru、P. Sharma 和 R. Pandit，《物理评论E辑》105，065107（2022），arXiv:2012.14182。[13] S. S. Ray、U. Frisch、S. Nazarenko 和 T. Matsumoto，《物理评论E辑》84，016301（2011），arXiv:1011.1826。[14] D. Venkataraman 和 S. Sankar Ray，《伦敦皇家学会会刊A辑》473，20160585（2017），arXiv:1608.07574。[15]P. Clark Di Leoni、P. D. Mininni 和 M. E. Brachet，《物理评论：流体》3，014603（2018），arXiv:1711.08618。[16] D. Banerjee 和 S. S. Ray，《物理评论E辑》90，041001（2014），arXiv:1403.6599。[17] S. D. Murugan 和 S. S. Ray，《物理评论：流体》8，084605（2023），arXiv:2209.05046。[18] S. S. Venkata Kolluru、N.Besse 和 R.Pandit，《计算物理学杂志》519，113446（2024），arXiv:2402.17688。[19] G. I. Taylor 和 A. E. Green，《伦敦皇家学会会刊A辑》158，499（1937）。[20] M. van Dyke，《Q. Jl Mech. appl. Math.》27，423（1974）。[21] M. van Dyke，《工业与应用数学学会应用数学杂志》28，720（1975）。[22] R. H. Morf、S. A. Orszag 和 U. Frisch，《物理评论快报》44，572（1980）。[23] M. E. Brachet、D. I. Meiron、S. A. Orszag、B. G. Nickel、R. H. Morf 和 U. Frisch，《流体力学杂志》130，411（1983）。[24] M. E. Brachet、D. Meiron、S. Orszag、B. Nickel、R. Morf 和 U. Frisch，《统计物理学杂志》34，1049（1984）。[25] R. B. Pelz 和 Y. Gulak，《物理评论快报》79，4998（1997）。[26] R. H. Morf、S. A. Orszag、D. I. Meiron、M. Meneguzzi 和 U. Frisch，载于《流体动力学中的数值方法》，第141卷，W. C. Reynolds 和 R. W. MacCormack 编（Springer，1981），第292–298页。[27] U. Frisch 和 R. Morf，《物理评论A辑》23，2673（1981）。[28] D. I. Meiron、G. R. Baker 和 S. A. Orszag，《流体力学杂志》114，283（1982）。[29] K. Ohkitani 和 J. D. Gibbon，《流体物理》12，3181（2000）。

[30] C. Rampf、U. Frisch 和 O. Hahn，《物理评论：流体》7，104610（2022），arXiv:2207.12416。[31] K. Choi、T.Y. Hou、A. Kiselev、G.Luo、V. Sverak 和 Y. Yao，《纯粹与应用数学通讯》70，2218（2017），arXiv:1407.4776。[32] D. Huang、X. Qin、X. Wang 和 D. Wei，《数学物理通讯》406，243（2025），arXiv:2308.01528。[33] T. Do、A. Kiselev 和 X. Xu，《非线性科学杂志》28，2127（2018），arXiv:1604.07118。[34] S. S. Venkata Kolluru 和 R. Pandit，《流体物理》36，097159（2024），arXiv:2406.04228。[35] P. Constantin、P. D. Lax 和 A. Majda，《纯粹与应用数学通讯》38，715（1985）。[36] V. Zheligovsky 和 U. Frisch，《流体力学杂志》749，404（2014），arXiv:1312.6320。[37] V. Shukla、M. Brachet 和 R. Pandit，《新物理学杂志》15，113025（2013），arXiv:1301.3383。[38] O. Podvigina、V. Zheligovsky 和 U. Frisch，《计算物理学杂志》306，320（2016），arXiv:1504.05030。[39] S. D. Murugan、U. Frisch、S. Nazarenko、N. Besse 和 S. S. Ray，《物理评论：研究》2，033202（2020），arXiv:2001.04819。[40] G. N. Mercer 和 A. J. Roberts，《工业与应用数学学会应用数学杂志》50，1547（1990）。[41] C. Domb 和 M. F. Sykes，《伦敦皇家学会会刊A辑》240，214（1957）。[42] C. Rampf 和 O. Hahn，《物理评论D辑》107，023515（2023），arXiv:2211.02053。[43] C. Rampf、S. Saga、A. Taruya 和 S. Colombi，《物理评论D辑》108，103513（2023），arXiv:2303.12832。[44] C. Rampf 和 U. Frisch，《皇家天文学会月报》471，671（2017），arXiv:1705.08456。[45] C. Rampf，《现代等离子体物理评论》5，10（2021），arXiv:2110.06265。[46] A. B. Ferrari，《数学物理通讯》155，277（1993）。[47] T. Matsumoto、J. Bec 和 U. Frisch，《物理学D辑》237，1951（2008），arXiv:0709.0219。[48] N. Besse 和 U. Frisch，《数学物理通讯》351，689（2017），arXiv:1603.09219。[49] T. Hertel、N. Besse 和 U. Frisch，《计算物理学杂志》449，110758（2022）。[50] T. M. Elgindi 和 I.-J. Jeong，《偏微分方程年刊》6，5（2020），arXiv:1708.02724。[51] J. Chen 和 T. Y. Hou，《数学物理通讯》383，1559（2021），arXiv:1910.00173。

附录 A：欧拉坐标下渐近分析的细节

在第A 1 节中，我们详细说明应用于 HL 模型的渐近分析，并由此得到正文中图2 所示的结果。在第 A 2 节中，我们展示了如何直接使用这些方法预测缩放初始数据的爆破时间。

1. 渐近分析与外推方法

在第 IIIB 节中，我们使用 Mercer–Roberts 估计器，为方便起见，在此重述如下

$$B_n^2(z) = \frac{W_{n+1}W_{n-1} - W_n^2}{W_nW_{n-2} - W_{n-1}^2}, \tag{A1}$$

其中 $W_n = W_n(z)$ 是通过递归关系（ τ）得到的欧拉8时系数。正如正文中所述，估计器（A1）结合

$$B_n(z) = \frac{1}{R^{\mathrm{MR}}}\left(1 - [1+\nu^{\mathrm{MR}}]\frac{1}{n} + O(n^{-2})\right) \tag{A2}$$

可用于求得 HL 模型中涡量的首阶渐近行为。为此，我们在图 10 中展示了在三个典型点 $z = 0.0$, $\pi/4$, 1.7 处计算得到的、关于 $1/n$ 的 B_n 估计器（绿色、蓝色和红色绘图标记）。在爆破位置 $z = 0$ （绿色实心圆）处，当 $n = 30 - 35$ 足够大时， B_n估计器趋于线性行为，这证明了线性模型 (A2) 的合理性，从而使我们能够求得奇点 $R(z = 0) =: R_\star^{\mathrm{MR}} \simeq$4.4865 的位置，其奇点指数为 $\nu^{\mathrm{MR}}(z = 0) \simeq -3.060$。对于位置 $z = \pi/4$（蓝色方块），我们观察到重复出现的模式：$B_2 = B_3$, $B_4 = B_5$ 等，以及相位$\theta(z = \pi/4) = \pi/2$（见图 2 左图）。值得注意的是，文献 [30] 在研究无黏 Burgers 方程时也观察到了相同的模式，此时奇点的相位为 $\pi/2$ ，因而与虚时间轴完全对齐。利用 (A2) 外推至原点，可得模 $R(z = \pi/4) =:$

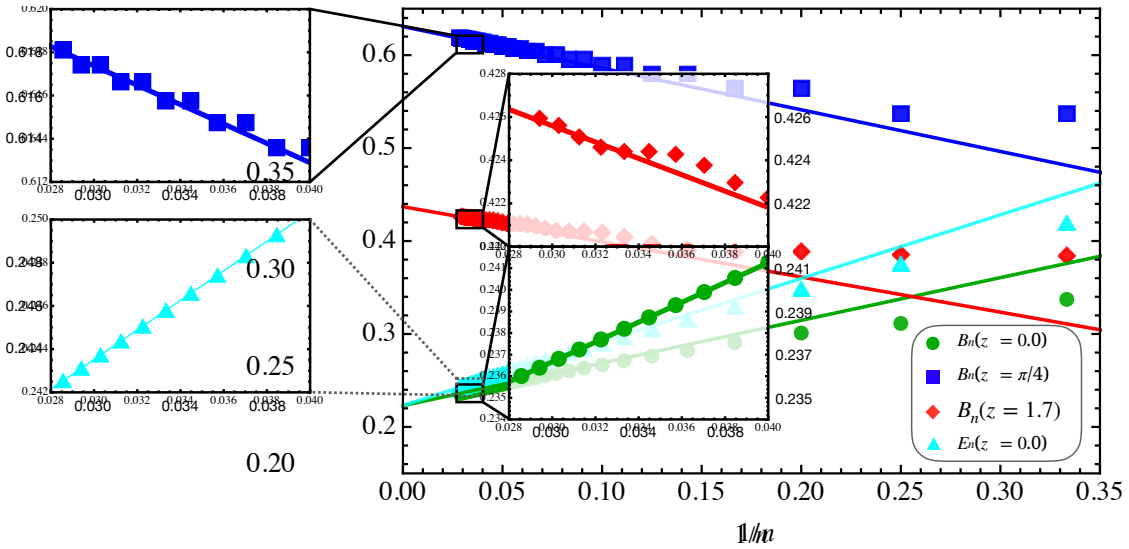

图 10. Mercer–Roberts 估计器 B_n在不同位置处的计算结果。对于爆破位置 $z = 0$，我们还展示了 Domb–Sykes 方法的结果，以及欧拉估计量 $E_n(z) \;= W_n(z)/W_{n-1}(z)$ (与方程26中给出的拉格朗日描述估计量相比)。

$R^{\mathrm{MR}}{}_{\text{无穷大}} \simeq 1.5875$，与我们的理论结果相符，误差为 0.013% (第VII节）。至于第三个位置（$z = 1.7$，红色菱形标记），对于 B_n，即使在高阶时观察到的趋势也不是线性的；原则上，需要在渐近模型中加入非线性项（A2），如 [34]所做的那样。

最后，受上述发现的启发，我们还对爆破位置 $z = 0$ 处的欧拉涡量应用 Domb–Sykes（DS）检验，相应的估计器为

$$E_n(z=0) := \lim_{z\to 0} \frac{W_n(z)}{W_{n-1}(z)} = \frac{1}{R_\star^{\mathrm{DS,E}}} \left(1 - [1 + \nu_\star^{\mathrm{DS,E}}] \frac{1}{n}\right) \tag{A3}$$

(参见式26 中针对拉格朗日涡量的估计器）。关键的是，该估计器假设限制收敛的奇点位于实时间轴上——这与 MR 估计器 B_n[式（A2）] 假设成对的复时间奇点不同。从实际应用的角度来看，E_n 给出的预测与 B_n互为补充。此外，对于固定的 E_n，计算 n 只需要两个泰勒系数，而 B_n 则依赖四个。因此，鉴于可用的泰勒系数数量有限，E_n 估计器的计算经济性要高得多。图10展示了 E_n 在爆破位置的结果，尤其得到 $R^{\mathrm{DS}}{}_\star{}^{\mathrm{E}} \simeq 4.4842$，与 MR 结果相差0。049%，与拉格朗日 Domb–Sykes 结果（第IVB节）相差0。018%。

2. 外推结果的可扩展性

这里我们展示，外推方法可直接用于预测缩放（sc）初始数据的爆破时间，其形式为

$$u^{\mathrm{sc}}(z, \tau = 0) = A \sin^2(2\pi z/L)\,, \qquad w^{\mathrm{sc}}(z, \tau = 0) = 0\,. \tag{A4}$$

在正文中，我们分别使用 $A = 1$和 $L = 2\pi$；文献 [2, 18]则使用满足 $A = 10^4$ 和 $L = 1/6$ 的重新缩放的初始数据。显然，有效的缩放不会改变爆破的空间位置，但爆破时间则不然。事实上，将（A4）作为递归关系（8）的输入，并在爆破位置（$z \to 0$）附近计算所得涡量系数的比值，可得缩放后系数

$$\lim_{z\to 0} \frac{W_n^{\mathrm{sc}}(z)}{W_{n-1}^{\mathrm{sc}}(z)} = \frac{2\pi A}{L} \lim_{z\to 0} \frac{W_n(z)}{W_{n-1}(z)} \overset{\text{Eq. (A3)}}{=} \frac{2\pi A}{L} \frac{1}{R_\star^{\mathrm{DS,E}}} \left(1 - [1 + \nu_\star^{\mathrm{DS,E}}] \frac{1}{n}\right)\,, \tag{A5}$$

其中$W_n^{\rm sc}$（z）是由（A4）得到的系数，而 $W_n(z)$则是正文中由初始数据（3）导出的系数。因此，一旦已知任意一组 A和 L对应的爆破 τ时间，任意缩放初始数据（A4）对应的爆破时间便可直接得出，即$R^{\rm sc}_\star = LR^{\rm DS}_\star{}^{\rm E}/(2\pi A)$，其中 $R^{\rm DS}_\star{}^{\rm E} \simeq 4.4842$。

附录 B：递归关系的代码

此处给出 Mathematica-12 代码，用于通过第 IIIA 节的欧拉框架和第 IV A节计算一维 HL 模型的时间泰勒系数。

代码清单 1。式（8）中欧拉时间泰勒系数的计算代码

```
   (*----- Define parameters and functions -----*)f[n_] = Floor[(n - 1)/2] ;
HilbertTransform[f_, x_, X_] := Module[ {fp = FourierParameters -> {1, -1}, k}, InverseFourierTransform[ -I
(2 HeavisideTheta[k]-1) * FourierTransform[f, x, k, fp], k, X, fp]];


(*----- Initial data -----*)
U[0, z_] := Sin[z]^2;

   (*----- Recursion relations -----*)W[n_, z_] := W[n, z] = FullSimplify[ExpToTrig[((- Sum[If[i != (n - 1 - i),
(V[i, z] D[W[n - 1 - i, z], z]) + (V[n - 1 - i, z] D[W[i, z], z]) , (V[i, z] D[W[i, z], z])],
{i, 0, f[n], 1}] + D[U[n, z], z])/(2 n + 1) ) ]];


U[n_, z_] := U[n, z] = FullSimplify[ExpToTrig[((-Sum[If[i != (n - 1 - i),
(V[i, z] D[U[n - 1 - i, z], z]) + (V[n - 1 - i, z] D[U[i, z], z]),(V[i, z] D[U[i, z], z])],
 {i, 0, f[n], 1}])/(2 n))]];

V[n_, z_] := V[n,z]= FullSimplify[ExpToTrig[Integrate[HilbertTransform[W[n,x],x,z],z]]];

(*----- Compute coefficients up to order nmax = 36 -----*)
coeffs = {}; nmin = 0; nmax = 36;
Do[nn = n; AppendTo[coeffs, {n, U[n, z], W[n, z], V[n, z]}], {n, nmin, nmax}];

(*----- Write to file -----*)
Fnameout = "./ttc_Eulerian_" <> ToString[coeffs[[-1, 1]]] <> ".mx";
DumpSave[Fnameout, coeffs];
```

上述代码具有通用性，即适用于对称（多模态）初始数据（参见文献 [34] ，其中的代码也处理非对称情形）。我们指出，对于某些特殊情形，如果涡量仅包含涉及正弦或余弦模态之和的系数，那么通过直接代入恒等式$\mathcal{H}[\sin(nz)] = -\cos(nz)$和$\mathcal{H}[\cos(nz)] = \sin(nz)$（任意正整数 n），可以显著加快希尔伯特变换的计算。在这种情况下，应调整代码，有选择地应用这些代换，即仅在涡量具有这种受限函数形式时才应用。当然，也可以为其他（非周期）初始数据实现类似的希尔伯特变换恒等式。

列表 2. 拉格朗日时间泰勒系数的计算代码 $\Psi_n(a)$ 根据公式 (1 9)

```
(*----- Define parameters and functions -----*)
fp = FourierParameters -> {1, -1}; f[n_] = Floor[(n - 1)/2] ;

   (*---- Load Eulerian output from last code -----*)
ls2 = {}; Ntmax = 36;
Fnamein = "ttc_Eulerian_" <> ToString[Ntmax] <> ".mx";DumpGet[Fnamein];
Do[ U[n, z_] = coeffs[[n + 1, 2]]; W[n, z_] = coeffs[[n + 1, 3]];
Ve[n, z_] = coeffs[[n + 1, 4]];, {n, 0, Ntmax}]


   (*----- Compute Eulerian fourier transform V_n(k) of V_n(z) -----*)
Do[ V[n_, z_] := V[n, z] = Simplify[ComplexExpand[TrigReduce[Ve[n, z]]]];
Vk[n, k_] = FourierTransform[V[n, z], z, k, fp];  {n, 0, Ntmax + 1/2} ];
```

```
(*----- Initialise to 0 -----*)
Psik[0, k_] := 0; DPsi[0, a_] := 0; Psi[0, a_] := 0;

(*------- RECURSIONS -------*)

(*--- Equation 19 ---*)
Psik[n_, k_] := Psik[n, k] = Simplify[Tk[n, k]*1/n];

   (*--- Psi ---*)
Psi[n_, a_] := Psi[n, a] = ComplexExpand[TrigReduce[ If[n < 27, FullSimplify[InverseFourierTransform[Psik[n, k], k, a, fp]],
 InverseFourierTransform[Psik[n, k], k, a, fp]]]];

(*--- D Psi/Da ---*)
DPsi[n_, a_] := DPsi[n, a] = Simplify[D[Psi[n, a], a]];

(*--- Truncated sum of psi at order N ---*)
SumPsi[N_, a_, \[Tau]_] := SumPsi[N, a, \[Tau]] = Sum[Psi[j, a]*\[Tau]^j, {j, 1, N}];

(*--- F_q(a) ---*)
F[n_, N_, a_, k_] := F[n, N, a, k] = Simplify[ SeriesCoefficient[Exp[-I*k*SumPsi[N, a, \[Tau]]], {\[Tau], 0, n
     }]];

(*--- Second term | Dt^{a,p} (p,q,N,k) ---*)
dpat[p_, q_, N_, k_] := dpat[p, q, N, k] = p*FourierTransform[Psi[p, a]*(DPsi[q, a] + F[q, N, a, l]), a, k, fp
     ] /. {l -> k};

(*--- Second term | D^{2,n} (k) ---
    *)d2n[n_, k_] := d2n[n, k] = Simplify[ ExpandAll[ Sum[If[i != (n - i), dpat[i, n - i, n - 1, k] + dpat[n - i, i,
n - 1,  k],  dpat[i, i, n - 1, k]],  {i, 1, f[n + 1], 1}]]];

(*--- Third term | D^{b p} (a) ---*)
dpb[p_, a_] := dpb[p, a] = Sum[If[i != (p - i), i*Psi[i, a]*DPsi[p - i, a] + (p - i)*Psi[p - i, a]*DPsi[i, a
],  i*Psi[i, a]*DPsi[i, a]],  {i, 1, f[p + 1], 1}];

(*--- Third term | T^{3,n} (k) ---*)
t3n[n_, k_] := t3n[n, k] = FourierTransform[ Sum[If[p != (n - p), (dpb[p, a] *F[n - p, n - 1, a, l] + dpb[n -p,
 a] *F[p, n - 1, a, l]),  dpb[p, a] *F[p, n - 1, a, l]],  {p, 1, f[n + 1], 1}],  a,  k,  fp] /. {l -> k};

(*--- RHS of equation 19 ---*)
Tk[n_, k_] := Tk[n, k] = Simplify[ExpandAll[Vk[n - 1, k]/2 - d2n[n, k] - t3n[n, k]]];

(*------- COMPUTATIONS -------*)

(*----- Compute Psi_n(a) and Z_n(a,tau) up till order nmax and export to file -----*)
nmin=2;nmax=36; Timing[Monitor[Do[Psi[n,a], {n,nmin,nmax}], Row[{ProgressIndicator[n,{nmin,nmax}],n},"␣"]]];
zFull[a_,\[Tau]] = Collect[a + SumPsi[nmax, a, \[Tau]], \[Tau]];
Export["./Z_Full.txt", Simplify[zFull[a,\[Tau]]]];

(*----- Compute W_n(a,tau) up till order nmax and export to file -----*)
Wrecoftau[n_] := Normal[Simplify[Series[Integrate[Series[Sin[2 a]/D[zFull[a, t^2], a], {t, 0, n}], t], {t, 0,
     n}]/t]] /. t -> tau^(1/2);
Wres = Wrecoftau[2 nmax] /. {tau -> \[Tau]};
Export["~/W_Full.txt", Wres];

(*----- Compute V_n(a,tau) uptill order nmax and export to file -----*)
Vrecoftau[n_] := Normal[Simplify[ Series[D[zFull[a, \[Tau]], \[Tau]], {\[Tau], 0, n}]]];
Vres = Vrecoftau[nmax];
Export["./V_Full.txt", Vres];
```