# 从超形式代数导出的颜色-运动学对偶

Roberto Bonezzi, [1, *] Christoph Chiaffrino, [1, †] Olaf Hohm, [1, ‡] 以及 Maria Foteini Kallimani[1, §]

[1] *Institut für Physik und IRIS Adlershof, Humboldt-Universität zu Berlin, Zum Großen Windkanal 2, 12489 Berlin, Germany*

颜色-运动学对偶指出，树级杨-米尔斯三次散射振幅的运动学分子满足与色因子因雅可比恒等式而具有的相同对称性质。我们提出一种基于超空间上微分形式的新策略来推导这一对偶。这个超形式空间具有巴塔林-维尔科维斯基（BV）代数（$\mathrm{BV}^{\square}$ 代数）的一种推广。我们证明，去色杨-米尔斯理论的同伦代数可由该空间取商得到：将一个“在同伦意义下”构成理想的子空间除去即可。这个代数是一个 $\mathrm{BV}^{\square}_{\infty}$ 代数的子扇区。推导出后者，将为从场论出发证明颜色-运动学对偶提供一个基于第一原理的证明。

arXiv:2601.02478v1 [hep-th] 5 Jan 2026

## I. 引言

自然界已知的基本力，一方面由粒子物理学中的杨-米尔斯理论支配，另一方面则由引力物理学中的广义相对论支配。这两种理论都具有规范不变性等广泛的定性特征，但其具体的拉格朗日量看起来截然不同。杨-米尔斯理论由一个包含三次顶点的拉格朗日量支配，该顶点对导数呈线性；此外还包含一个与导数无关的四次顶点。这使其成为可重整化的量子场论（QFT）。与此相反，将广义相对论在闵可夫斯基时空附近展开，会得到任意阶的相互作用顶点，每个顶点都含有两个导数。这使其成为不可重整化的量子场论。

尽管如此，Bern、Carrasco 和 Johansson（BCJ）[1, 2] 已证明，某种引力理论的树级散射振幅与杨-米尔斯理论的树级散射振幅之间存在深刻联系。为陈述这一关系，我们将杨-米尔斯理论的一个树级 $n$点散射振幅写成费曼图展开，但只使用三次图 $\Gamma$:

$$\mathcal{A}_n = g^{n-2} \sum_{\Gamma} \frac{c_\Gamma \, n_\Gamma}{D_\Gamma} \, . \tag{1}$$

例如，可以通过将场强 $F_{\mu\nu}$ 替换为一个独立的辅助场，或以适当方式“展开”四次顶点，使所有费曼规则都变为三次形式来实现这一点。此外， $c_\Gamma$ 是与给定图 $\Gamma$相关联的色因子，由 $n-2$个结构常数 $f^a{}_{bc}$组成； $n_\Gamma$ 则是由 $n$ 偏振矢量 $\epsilon_i^\mu$ 和动量$k_i^\mu$ 构成的运动学分子，而 $D_\Gamma$ 编码了逆传播子。BCJ 或颜色-运动学（CK）对偶指出，只要$c_{\Gamma_1} + c_{\Gamma_2} + c_{\Gamma_3} = 0$ 作为颜色规范群的雅可比恒等式的推论成立，那么相应的分子就满足 $n_{\Gamma_1} + n_{\Gamma_2} + n_{\Gamma_3} = 0$。一旦分子 $n_\Gamma$ 具备满足 CK 对偶的性质，就可以在式（1）中用分子的另一份副本 $\tilde{n}_\Gamma$ 替换色因子 $c_\Gamma$ 。这种 BCJ 双拷贝给出了 $\mathcal{N}=0$ 超引力（爱因斯坦引力与二形式 B 场及标量膨胀子耦合）的散射振幅。

CK对偶及其相关的引力双拷贝性质，揭示了杨-米尔斯理论与引力之间的深刻联系 [3–6]。尽管弦理论给出了树级 CK 对偶的间接证明 [7, 8], ，但我们仍希望直接从场论出发，基于第一原理推导这一结果，尤其是获得一种有效算法，以显式局域且兼容 CK 对偶的方式计算运动学分子。后一特性尤为重要，因为它能让我们全面掌握圈级的 CK 对偶与双拷贝。

从第一原理证明 CK 对偶的一个自然思路，是找出隐藏的“运动学李代数”；若能做到这一点，$n_{\Gamma_1} + n_{\Gamma_2} + n_{\Gamma_3} = 0$ 便可由其雅可比恒等式推出 [9–12]。然而，近年来的研究表明，CK 对偶的核心是一种更精妙的代数结构 [13–20]。为此，我们采用以同伦代数（如同伦李代数或 $L_\infty$ 代数 [21–28] ，以及同伦结合交换代数或 $C_\infty$ 代数 [29]）表述场论的方法。 $C_\infty$ 代数由映射 $m_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.....定义，这些映射具有 $k$ 个输入，并满足某些恒等式。例如，任意空间上的微分形式构成一个 $C_\infty$代数，其中 $m_1 = d$ 是德拉姆微分，$m_2$ 是楔积，而对于 $k \geq 3$ , 所有 $m_k$ 均为零。这样的 $C_\infty$ 代数称为严格代数。将其与色李代数 $\mathfrak{g}$ 作张量积，便在三维流形上得到拓扑陈–西蒙斯理论。杨-米尔斯理论则类似地由一个真正的 $C_\infty$ 代数描述，其中包含非平凡的 $m_3$。其作用量为

$$\begin{aligned} S_{\rm YM} = &\frac{1}{2}\big\langle A_a, m_1(A^a)\big\rangle + \frac{1}{3!} f_{abc}\big\langle A^a, m_2(A^b, A^c)\big\rangle \\ &+ \frac{1}{12} f_{abe} f_{cd}{}^e \big\langle A^a, m_3(A^b, A^c, A^d)\big\rangle \, , \end{aligned} \tag{2}$$

其中，色因子 $f_{abc}$ 被明确剥离。当 $C_\infty$ 代数是

* roberto.bonezzi@physik.hu-柏林.de
† chiaffrc@hu-berlin.de
‡ ohohm@physik.hu-berlin.de§
kallimari@physik.hu-berlin.de

三维流形上的微分形式所构成的严格代数时，第二行中的四次项消失，此时这就是切恩-西蒙斯作用量。相反，当映射 ($m_1$, $m_2$, $m_3$) 定义了去除色因子的杨-米尔斯 $C_\infty$ 代数时，上式就是熟悉的杨-米尔斯作用量。

在本文中，我们展示了一个引人注目的事实：杨-米尔斯理论的 $C_\infty$ 代数可以从超空间上的微分形式代数中获得；该超空间是在时空的基础上扩展一个奇坐标而得到的。为此，我们将超形式空间的一个子空间认定为需要取商的“理想”。更准确地说，尽管这个子空间并不是严格微分形式代数中的理想，但它是一个“同伦意义下”的理想，因此所得商空间继承了杨-米尔斯 $C_\infty$ 代数。

不过需要强调的是，这个代数只是解释 CK对偶 [13, 17]所需的完整同伦代数的第一层。这个代数是 BV$_\infty$ 代数 [30]（称为 BV$^\square_\infty$）的一种推广。为了定义这个代数，我们利用还存在第二个微分 $b$，其满足 $b^2=0$，并且传播子可表示为$\frac{b}{\square}$。虽然完整传播子是非局部的，但在我们的表述中， $b$ 是局部的，可以用来定义一个局部李型括号 $b_2$ ，将其视为 $b$ 不能在 $m_2$上充当导子的失效程度。由此又产生了一个更高阶（局部）映射的无限塔。此前，已有研究 [31, 32] 利用世界线顶点算符代数，探讨了如何从严格代数导出 BV$^\square_\infty$ 代数的映射。本文提出的新方法尤其具有前景之处在于：我们明确识别出一个严格的 BV$^\square$ 代数，并猜想完整的 BV$^\square_\infty$ 代数可以作为其适当的商得到。与 $C_\infty$ 子扇区相比，我们目前尚不知道如何构造完整的 BV$^\square_\infty$ 代数；不过，我们将借此机会在第四节解释它如何编码 CK对偶，并在第五节结论中评论这一代数的推导工作目前的进展。

## II. 超形式代数

我们考虑超空间 $\mathbb{R}^{D|1}$ 上的微分形式代数（德拉姆复形），其坐标为 ($x^\mu$, $c$)，其中 $x^\mu$ 是玻色时空坐标，而 $c$ 是满足 $c^2=0$ 的奇坐标。这类构造此前已在 [33]中研究过。将基一形式视为新的（奇和偶）坐标，定义为

$$C^\mu \equiv dx^\mu\,, \qquad \mathcal{M} \equiv dc\,, \tag{3}$$

其中 $C^\mu C^\nu = -C^\nu C^\mu$，德拉姆复形 $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^{D|1})$ 就成为函数空间或超场空间

$$F(x^\mu, c\,; C^\mu, \mathcal{M})\,, \tag{4}$$

其对 $c, C^\mu, \mathcal{M}$ 的依赖是多项式的。坐标的次数（鬼数 $G$）由 $G(x^\mu)=0$、 $G(c)=+1$、 $G(C^\mu)=+1$和 $G(\mathcal{M})=+2$给出。特别需要注意的是，由于 $\mathcal{M}$ 是玻色的，函数 (4) 可以依赖于 $\mathcal{M}$的任意次幂。这个空间实际上是一个双复形，如图1所示：它按两个次数分解，即鬼数 $G$ 和超形式次数 $N$，后者统计 $C^\mu$和 $\mathcal{M}$的个数。

微分超形式的楔积 $\wedge$ 由超场（4）的逐点乘积编码，而德拉姆微分则可写成一个向量场

$$d := C^\mu \partial_\mu + \mathcal{M}\frac{\partial}{\partial c}\,, \tag{5}$$

它满足 $d^2=0$ ，并通过莱布尼茨法则作用于乘积。超形式空间 ($\Omega^\bullet$, $d$, $\wedge$)（下文采用简写 $\Omega^\bullet \equiv \Omega^\bullet(\mathbb{R}^{D|1})$）构成一个微分分次交换结合代数（dgCom）。

假设度量存在，上述空间还具有进一步的结构：一个（严格）BV$^\square$ 代数。为定义它，回顾 $d$的伴随算子，

$$d^\dagger := \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial C^\mu}\,, \tag{6}$$

它满足 $[d, d^\dagger] = \square$，其中 $\square$ 是达朗贝尔算子。 $d^\dagger$ 是一个二阶算子，因此不满足相对于 $\wedge$的莱布尼茨法则；相反，它的失效定义了一个（分次）李括号，即 Schouten-Nijenhuis括号。Ben-Shahar 和 Johansson 证明，这个 BV$^\square$ 代数（$\Omega^\bullet$, $d$, $d^\dagger$, $\wedge$）解释了切恩-西蒙斯理论玩具模型中的 CK对偶 [14]。

现在，我们对上述代数应用一个同构，将其变为一种等价形式，在这种形式下更容易识别杨-米尔斯运动学空间。这个同构写作 $e^h$，其逆为 $e^{-h}$，其中

$$h := c\, d^\dagger\,, \tag{7}$$

它满足 $h^2=0$和 $G(h)=0$, $N(h)=-1$。该同构将德拉姆微分映射为

$$Q := e^h d\, e^{-h} = d + \Delta\,, \tag{8}$$

其中 $\Delta$ 是一个第二微分，定义为

$$\Delta = c\square - \mathcal{M}\, d^\dagger\,, \tag{9}$$

它满足 $\Delta^2=0$ ，并且与 $d$（反）对易。楔积被映射为

$$\mu := e^h \circ \wedge \circ (e^{-h} \otimes e^{-h})\,, \tag{10}$$

具体来说，它可表示为

$$\mu(F_1, F_2) = F_1 \cdot F_2 + c\left[\frac{\partial F_1}{\partial C^\mu}\cdot \partial^\mu F_2 \pm (1 \leftrightarrow 2)\right]. \tag{11}$$

因此，传输后的乘积就是经过 BV反括号平移的楔积，这与上述 Schouten-Nijenhuis括号相一致。

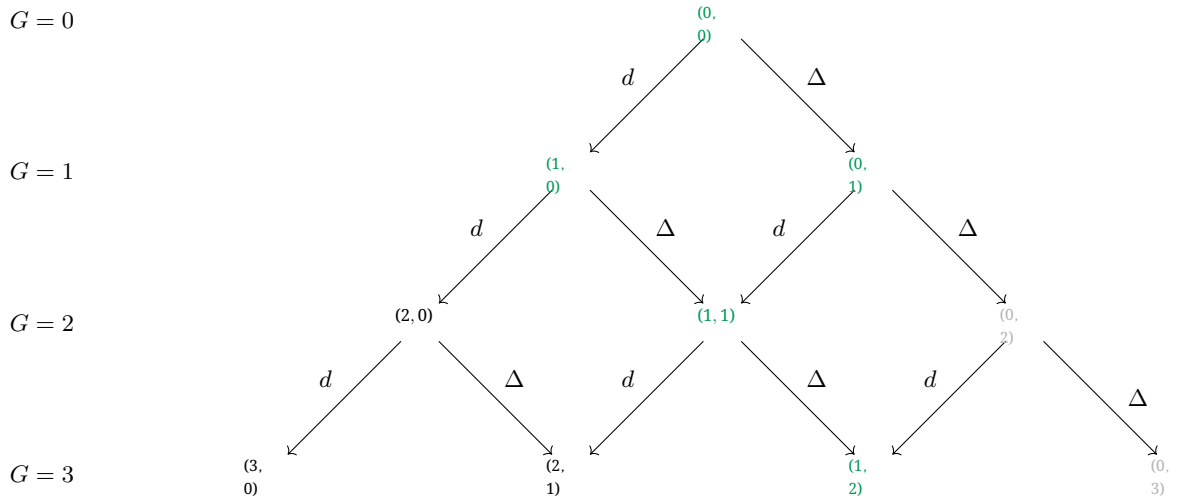



**图 1:** 超形式双复形。上图中的次数 $(p,\ q)$ 由 $(N,\ G-N)$ 给出。可降至杨-米尔斯运动学代数 $\mathcal{K}$ 的空间以绿色显示。灰色空间为零，这是由于 $c^2=0$。

由于我们在上文应用了一个同构，所得代数 $(\Omega^\bullet,\ Q,\ \mu)$ 仍然是一个严格 dgCom 代数。此外，它还带有一个严格的 $\mathrm{BV}^\square$ 代数结构，具体如下。我们定义向量场

$$b := \frac{\partial}{\partial c}\ , \tag{12}$$

就楔积而言，它显然是一阶的，并且与 $d$ 对易。然而，就输运后的 $\mu$ 而言，$b$ 结果是二阶的，并且与 $Q$ 有如下（反）对易子:

$$[Q,b]=\square\ . \tag{13}$$

这些性质可以由恒等式推得

$$\frac{\partial}{\partial c}=e^h\left(\frac{\partial}{\partial c}+d^\dagger\right)e^{-h} \tag{14}$$

以及 $d^\dagger$ 具有相同性质这一事实。因此，微分分次交换代数 $(Q,\ \mu)$ 在此增添了一个第二微分 $b$，它相对于 $\mu$ 是二阶的，并满足 (13)；也就是说，$(\Omega^\bullet,\ Q,\ b,\ \mu)$ 是一个（严格）$\mathrm{BV}^\square$ 代数。

### III. 理想与商

现在，我们将超形式的德拉姆复形分解为一个子空间及其补空间；前者将与杨-米尔斯理论的运动学空间相关联。以超形式次数 $N$（即 $C^\mu$ 和 $\mathcal{M}$的数量）来计数，德拉姆复形 $\Omega^\bullet$ 可分解为

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Omega^n=\Omega^0\oplus\Omega^1\oplus\mathcal{I}\ ,\quad \mathcal{I}=\bigoplus_{n=2}^{\infty}\Omega^n\ , \tag{15}$$

其中，$\mathcal{I}$ 定义了将成为理想的子空间。更准确地说，该空间是以下对象的子链复形:

$(\Omega^\bullet,\ Q)$，因为 $Q$ 将该子空间映射到自身:

$$\forall\chi\in\mathcal{I}:\qquad Q\chi\in\mathcal{I}\ . \tag{16}$$

进而，我们可以将杨-米尔斯运动学空间定义为商空间

$$\mathcal{K}\ :=\ \Omega^\bullet\ /\ \mathcal{I}\ \simeq\ \Omega^0\oplus\Omega^1\ . \tag{17}$$

其元素是任意 $\chi\in\mathcal{I}$对应的等价类 $[F]=[F+\chi]$。随后可以通过以下方式定义 $\mathcal{K}$ 上的微分

$$Q[F]:=[QF]\ , \tag{18}$$

其中我们使用相同的符号 $Q$。$(\mathcal{K},\ Q)$ 是如 [15, 17] 中所述的去色杨-米尔斯理论的链复形。更明确地说，$G=0$ 处的单个空间由去色规范参数 $\lambda(x)$ 组成，而 $G=1$ 处的 (1，0) 和 (0，1) 空间分别包含场 $C^\mu A_\mu(x)$ 和 $c\,\varphi(x)$，其中 $\varphi$ 是一个辅助标量。$\mathcal{K}$ 的其余部分由 (1，1) 和 (1，2) 空间中的超一形式组成，其中 (1，1) 包含矢量方程与标量方程 $c\,C^\mu E_\mu(x)+\mathcal{M}E(x)$，而诺特恒等式 $c\,\mathcal{M}N(x)$ 属于空间 (1，2)。

商空间 (17) 并未从 $(\Omega^\bullet,\ Q,\ b,\ \mu)$ 继承严格的 $\mathrm{BV}^\square$ 代数，因为 $\mathcal{I}$ 不是理想。例如，一般元素与 $\mathcal{I}$ 中元素的输运楔积 $\mu$ 通常不属于 $\mathcal{I}$。不过，就我们的目的而言，只需 $\mathcal{I}$ 是一个“同伦意义下”的理想，这样商空间便继承了 $\mathrm{BV}^\square$ 代数的同伦版本：一个 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数。我们的意思是，可以对 $(\Omega^\bullet,\ Q,\ b,\ \mu)$ 施加适当的 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数态射，之后 $\mathcal{I}$ 就成为通常意义下的理想（至少有一个自变量属于该理想的所有映射，其取值都属于该理想）。于是商空间 (17) 自动继承一个 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数。

为此，我们通过一个 $C_\infty$ 同构重新定义 $\mu$:

$$m_2:=\mu+\partial f_2\ , \tag{19}$$

其中 $f_2$ 是一个次数为–1的分次对称双线性映射，并且我们引入了简写记号

$$\partial f_2 := Q \circ f_2 + f_2 \circ (Q \otimes 1 + 1 \otimes Q)\,. \tag{20}$$

在 $C_\infty$ 代数的范畴中，对于任意 $f_2$，移位乘积（19）应视为等价于 $\mu$。有几种等价的 $f_2$ 选取方式，可使 $\mathcal{I}$ 成为关于（19）的理想。例如，令 $f_2(F_1,\ F_2) = c\,\theta_2(F_1,\ F_2)$，其中 $\theta_2$ 是次数为 $G=-2$的分次对称双线性映射，我们可以取：$\mathcal{I}$ 中的 $\chi$以及其补空间中的 $F$，

$$\begin{aligned} \theta_2(F,\chi) &= (-1)^F \frac{\partial F}{\partial C^\mu}\frac{\partial \chi}{\partial C_\mu}\,, \\ \theta_2(\chi_1,\chi_2) &= -\tfrac{1}{2}\,\mathcal{M}\,\frac{\partial^2\chi_1}{\partial C^\mu \partial C^\nu}\cdot\frac{\partial^2\chi_2}{\partial C_\mu \partial C_\nu}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

否则 $\theta_2$ 为零。由于此时 $\mathcal{I}$ 是关于所得 $m_2$的理想，商空间 $\mathcal{K}$ 继承了 $C_\infty$ 乘积

$$m_2\big([F_1],[F_2]\big) := [m_2(F_1,F_2)]\,. \tag{22}$$

发现 $m_2$ 在 $\mathcal{K}$ 中的非零分量为

$$\begin{aligned} m_2(\lambda_1,\lambda_2) &= \lambda_1\lambda_2\,, \\ m_2(\lambda,\mathcal{A}) &= C^\mu(\lambda A_\mu) + c(\lambda\varphi + A^\mu\partial_\mu\lambda)\,, \\ m_2(\lambda,\mathcal{E}) &= c\,C^\mu(\lambda E_\mu) + \mathcal{M}(\lambda E)\,, \\ m_2(\lambda,N) &= c\,\mathcal{M}(\lambda N)\,, \\ m_2(\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2) &= 2c\,C_\mu\big(\varphi_{[1}A^\mu_{2]} + 2\,A^\rho_{[1}\partial_\rho A^\mu_{2]} + \partial^\mu A^\rho_{[1}A_{2]\rho}\big)\,, \\ m_2(\mathcal{A},\mathcal{E}) &= c\,\mathcal{M}(\varphi E - A^\mu E_\mu + 2\,A^\mu\partial_\mu E)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

其中，我们用 $\mathcal{A}=(A_\mu,\varphi)$ 和 $\mathcal{E}=(E_\mu,E)$ 表示场及其对应方程组成的双重态。

由于在 (19) 中作了 $f_2$ 的平移，所得代数 $(\Omega^\bullet, Q, m_2)$ 不再是严格 dgCom 代数。$m_2$ 的结合性因 $f_2$ 项而遭到破坏，但它在 $C_\infty$ 代数的意义下是同伦结合的。所需的三线性三元乘积为

$$\begin{aligned} m_3 := {}& \mu\circ(f_2\otimes 1 - 1\otimes f_2) + f_2\circ(\mu\otimes 1 - 1\otimes\mu) \\ & + \partial f_2\circ(f_2\otimes 1 - 1\otimes f_2)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

值得注意的是，$\mathcal{I}$ 对这个 $m_3$ 仍然是一个理想。因此，无需进一步平移，也无需带有 $n\geq 4$ 的更高阶 $m_n$。于是，空间 $(\Omega^\bullet, m_1:=Q, m_2, m_3)$ 定义了一个 $C_\infty$ 代数，而 $\mathcal{I}$ 是这个 $C_\infty$ 代数的一个理想。因此，商空间 (17) 继承了一个 $C_\infty$ 代数，其最高的非平凡乘积为 $m_3$；在 $\mathcal{K}$ 中，它唯一的非零分量以三个矢量场 $A^\mu_i$ 为输入，其表达式为

$$m_3^\mu(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3) = A_1^\rho A_{2\rho} A_3^\mu + A_3^\rho A_{2\rho} A_1^\mu - 2\,A_1^\rho A_{3\rho} A_2^\mu. \tag{25}$$

这就是我们由一个简单的超形式代数推导出的杨-米尔斯理论的运动学 $C_\infty$ 代数[15, 29, 34] 。

## IV. 运动学代数

正如引言中所述，$\Omega^\bullet$上的 $C_\infty$ 代数，以及商 $\mathcal{K}$上的 $C_\infty$ 代数，只是支撑 CK 对偶的完整 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数的第一层，接下来我们将转向讨论后者。除了分次对称且同伦结合的乘积 $m_2$之外，$\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数还具有一种“李型”括号：

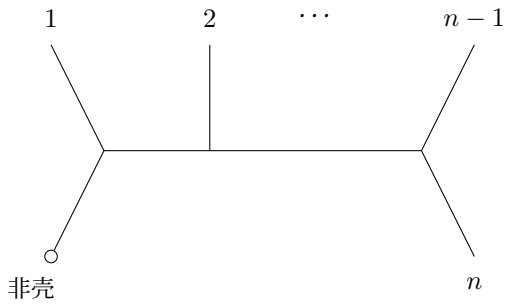
$$b_2 := [b, m_2]\,, \tag{26}$$

它刻画了 $b$无法作为导子作用于 $m_2$的情形。对于严格的 $\mathrm{BV}^\square$ 代数，$b_2$ 是反括号，它是一个分次李括号，满足分次雅可比恒等式，并与 $m_2$满足泊松相容条件。然而，由于此处 $m_2$ 仅在同伦意义下满足结合性，而且由于 $b$ 与 $Q$ 的对易关系为 $\square$，参见式（13），雅可比恒等式和泊松关系都需要修正。这定义了 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数。具体而言，$b_2$的雅可比子，即它不满足雅可比恒等式的程度，满足

$$\mathrm{Jac}_{b_2} + \partial b_3 + 6\,\theta_3\circ(\partial^\mu\otimes\partial_\mu\otimes 1)\circ\pi = 0\,, \tag{27}$$

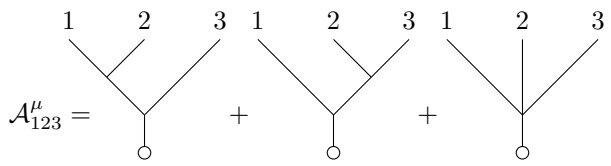
其中，$b_3$ 是运动学代数的三元括号，$\theta_3$是一个与放宽泊松相容性有关的新映射，而 $\pi$ 是某个杨表投影 [17]。对于 $\Omega^\bullet$上的完整 $\mathrm{BV}^\square_\infty$代数，确定 $b_3$ 和 $\theta_3$ 并不困难；但挑战在于，在由 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 同构关联的映射等价类中，找到一个代表元，使得 $\mathcal{I}$ 是一个理想。一旦确定了这样的代表元，式（17）中的商空间 $\mathcal{K}=\Omega^\bullet/\mathcal{I}$ 便自动继承一个 $\mathrm{BV}^\square_\infty$ 代数。我们将在结论中讨论目前正在开展的研究计划，即如何通过算法确定这些映射。

在本小节余下部分，我们将说明上述关系与 CK对偶 的关联；为此，采用 Mafra 和 Schlotterer 给出的以下表述颇为方便 [35–40]。考虑所谓的部分振幅或色序振幅，这些振幅可以由色序费曼规则计算得到（或者等价地，通过运动学 $C_\infty$ 代数 [41–45]的同伦传递得到）。随后，定义 Berends-Giele 流 [46] 或多粒子场 $\mathcal{A}^\mu_{12\ldots n}$。对于 $i=1,2,\ldots n$ 个单粒子标签，它们由相同的色序费曼图给出，但其中一条腿保持非壳状态，并带有相应的传播子。就这些图的局部分子（多粒子偏振）而言，CK对偶 意味着分子满足嵌套对易子的李对称性，而对易子的组合方式由三次图的结构决定。例如，下方三次半梯图对应的分子 $N^\mu_{12\ldots n}$，在其粒子标签上应具有与 $[[[T_1,T_2],\cdots],T_n]$ 相同的对称性。




要更详细地理解这一点，注意从作用量 (2) 可知，色序三次顶点和四次顶点分别由该 $C_\infty$ 代数的二元积 $m_2$ 和三元积 $m_3$描述，而传播子由 $\frac{b}{\Box}$ 给出。经过规范固定后，场满足 $b(A)=0$，因此分子贡献 $bm_2(A_i,A_j) = b_2(A_i,A_j)$ 与运动学括号 (26) 一致。特别地，三次半梯图的分子由二元括号的逐次嵌套 $b_2(b_2(\cdots)\cdots)$ 给出。因此，若 $b_2$ 是严格的李括号，那么分子立刻就满足所需的李对称性，从而推出 CK对偶。

然而， $b_2$ 并未构成严格李代数，不过其失效在散射振幅层面消失，至少在四点时如此。例如，考虑与三粒子场 $\mathcal{A}^\mu_{123}$ 相关的色序四点散射振幅，其图示如下：




其解析表达式为

$$\mathcal{A}_{123} = \frac{b}{s_{123}}\Big(\frac{m_2(bm_2(A_1,A_2),A_3)}{s_{12}} + \frac{m_2(A_1,bm_2(A_2,A_3))}{s_{23}} + m_3(A_1,A_2,A_3)\Big)\,, \tag{28}$$

其中引入了曼德尔斯塔姆变量

$$s_{i_1\ldots i_n} = (k_{i_1}+\cdots+k_{i_n})^2\,, \tag{29}$$

且所有单粒子场 $A^\mu_i$ 均为壳上横向场，具有确定的动量 $k^\mu_i$ 。接下来利用 $m_3$ 的杨图对称性，可将其写为

$$m_3(A_1,A_2,A_3) = m_{3h}(A_1,A_2|A_3) - m_{3h}(A_2,A_3|A_1)\,, \tag{30}$$

其中， $m_{3h}$ 在前两个输入上是反对称的，由此可得 $[b,m_{3h}]=-\theta_{3h}$ [17]。引入三粒子偏振

$$N_{ijk} := b_2(b_2(A_i,A_j),A_k) - s_{ij}\,\theta_{3h}(A_i,A_j|A_k)\,, \tag{31}$$

三粒子场（28）随后可表示为

$$\mathcal{A}_{123} = \frac{1}{s_{123}}\left(\frac{N_{123}}{s_{12}} - \frac{N_{231}}{s_{23}}\right)\,. \tag{32}$$

CK对偶现在要求 $N_{ijk} = -N_{jik}$，这由定义成立，以及 $N_{123}+N_{231}+N_{312} = 0$。这个和由 $b_2$的雅可比子，加上含有 $\theta_3$的项给出。在 BV$^\Box_\infty$ 中，二元括号满足变形的同伦雅可比恒等式（27），并利用 $s_{12}+s_{23}+s_{31}=s_{123}$这一事实，分子的和变为

$$N_{123}+N_{231}+N_{312} = -\partial b_3(A_1,A_2,A_3)\,. \tag{33}$$

右边的项是恰当项，会从散射振幅中消失，从而确立四点振幅层面的 CK对偶。在 [36, 37], 框架中，恰当项 $\partial b_3(A_1,\ A_2,\ A_3)$ 被视为多粒子规范变换，用于将分子平移为 $N_{123}\to N_{123}+\frac{1}{3}\,\partial b_3(A_1,\ A_2,\ A_3)$，以便在一条非壳腿的情况下满足 CK对偶。

## V. 总结与展望

本文提出了一种推导杨-米尔斯理论“运动学代数”的新范式，其出发点是超空间上的微分形式代数。近年来，人们逐渐认识到，颜色-运动学对偶背后的代数结构是巴塔林-维尔科维斯基（BV）代数的一种同伦推广，由 Reiterer 命名为 BV$^\Box_\infty$；然而，迄今为止，如何为标准杨-米尔斯理论显式定义这一代数并推广到所有阶，仍未得到解决。理想情况下，我们希望通过从一种仅包含线性映射和双线性映射的严格代数出发，进行导出构造来获得这一代数。

在这里，我们确定了超空间上的一个微分形式代数，它具有严格的 BV$^\Box$ 代数结构。值得注意的是，这个超形式空间包含真正杨-米尔斯理论的运动学空间作为一个子空间。此外，它在整个空间中的补空间 $\mathcal{I}$ 是一个“同伦意义下的理想”。于是，杨-米尔斯理论的 $C_\infty$ 代数便实现为相应的商代数。

仍需将这一针对 $C_\infty$ 子扇区的导出构造推广到完整的 BV$^\Box_\infty$ 代数。这里的一个挑战是，在整个空间上实现 BV$^\Box_\infty$ 同构，将所有高阶映射变换为使$\mathcal{I}$ 成为理想的形式。为此，近期纯数学领域的研究 [47]或许十分重要。若能建立一种有效的方法来获得这些变换，就可以形成一种算法，以显式局域的方式确定满足 CK 对偶的运动学分子，从而证明杨-米尔斯理论在树级满足 CK 对偶。将此推广到更复杂的杨-米尔斯理论（例如超对称理论） [48, 49]也很有趣。

以算法方式确定更高阶 BV$^\Box_\infty$映射，对于将引力实现为

杨-米尔斯理论的双拷贝，也至关重要。具体而言，我们希望仅凭杨-米尔斯数据，得到非壳且局域的引力拉格朗日量及其微分同胚变换。（参见 [50–54] 的早期研究。）一种颇有希望的捷径，是按照 [55–57] 中的方法对完整的超形式代数进行双拷贝，然后如 [54], 所示，将$\mathcal{N}=0$ 超引力以及双场论 [58–61] 分别确定为相应的商。

**致谢**

我们感谢 Giuseppe Casale、Felipe D´ıaz-Jaramillo、Jan Pulmann、Michael Reiterer 和 Bruno Vallette 在相关项目中进行的启发性讨论、通信与合作。本研究得到德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）资助，项目编号 417533893/GRK2575“重新思考量子场论”及项目编号 9710005691“同调量子场论”。

[1] Z. Bern、J. J. M. Carrasco 和 H. Johansson，“规范理论振幅的新关系”，《物理评论D》 **78** 2008 085011 10 1103 78 085011 ( )，doi: . / [ 0805 3993 [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-ph .[2] Z. Bern、J. J. M. Carrasco 和 H. Johansson，“作为规范理论双拷贝的微扰量子引力”，物理评论快报 **105** (2010年)，061602 doi: 10 1103 105 061602 [ 1004 0476 . / [ ]] PhysRevLett. . arXiv: . hep-th .[3] Z. Bern、T. Dennen、Y. t. Huang 和 M. Kiermaier，“引力是规范理论的平方”，《物理评论D》 **82** 2010 065003 10 1103 82 065003 ( )，doi: . / [ 1004 0693 [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-th .[4] Z. Bern、J. J. Carrasco、M. Chiodaroli、H. Johansson 和 R. Roiban，“颜色与运动学的对偶及其应用”，J. Phys. A **5**733, 333002 2024 10 1088 1751 8121 5 1909( ) no. doi: . / - /ad fd 0 [ 01358 arXiv: . [ ]] hep-th .[5] Z. Bern、J. J. Carrasco、M. Chiodaroli、H. Johansson 和 R. Roiban，“SAGEX 综述：散射振幅，第2章：颜色-运动学对偶与双拷贝简介”，J. Phys. A **55** 44, 443003 2022 10 1088 1751 8121 93 2203( ) no. doi: . / - /ac cf [ 13013 arXiv: . [ ]] hep-th .[6] T. Adamo、J. J. M. Carrasco、M. Carrillo-Gonz´alez、M. Chiodaroli、H. Elvang、H. Johansson、D. O’Connell、R. Roiban 和 O. Schlotterer，“Snowmass 白皮书：双拷贝及其应用”，[ arXiv:2204.06547 [hep-th]].[7] N. E. J. Bjerrum-Bohr、P. H. Damgaard、T. Sonder- gaard 和 P. Vanhove，“规范理论与引力理论的动量核”，高能物理学杂志 **01** (2011)，001 doi:10.1007/JHEP01(2011)001 [arXiv:1010.3933 [hep- th]].[8] C. R. Mafra、O. Schlotterer 和 S. Stieberger，“基于纯旋量的显式 BCJ 分子”，高能物理学杂志 **07**(2011), 092 10 1007 07 2011 092 [ 1104 5224 doi: . /J [ ]] HEP ( ) arXiv: . hep-th .[9] R. Monteiro 和 D. O’Connell，“来自自对偶扇区的运动学代数”，高能物理学杂志 **07** (2011)，007 doi:10.1007/JHEP07(2011)007 [arXiv:1105.2565 [hep- th]].[10]G. Chen、H. Johansson、F. Teng 和 T. Wang，“超越 MHV 扇区的 BCJ 分子运动学代数”，高能物理学杂志 **11** (2019年)，055 doi:10.1007/JHEP11(2019)055 [arXiv:1906.10683 [hep- th]].[11] G. Chen、H. Johansson、F. Teng 和 T. Wang，《Next-to-MHV 杨-米尔斯运动学代数》，高能物理学杂志**10** (2021), 042 10 1007 10 2021 042 [ 2104 12726 doi: . /JHEP ( ) [ ]] arXiv: . hep-th .[12] A. Brandhuber、G. Chen、H. Johansson、G. Travaglini 和 C. Wen，《重质量有效场论与杨-米尔斯理论中 Bern-Carrasco-Johansson 分子的运动学霍普夫代数》，物理评论快报 **128** (2022) 第12期，121601 doi: 10 1103 128 121601 [ 2111 15649 . / [ ]] PhysRevLett. . arXiv: . hep-th .[13] M. Reiterer，《杨-米尔斯理论与颜色-运动学的同伦BV代数》，[arXiv:1912.03110 [math-ph]].[14] M. Ben-Shahar 和 H. Johansson，《切恩-西蒙斯理论的非壳颜色-运动学对偶》，高能物理学杂志**08** (2022), 035 10 1007 08 2022 035 [ 2112 11452 doi: . /JHEP ( ) [ ]] arXiv: . hep-th .[15] R. Bonezzi、F. Diaz-Jaramillo 和 O. Hohm，《双场论的规范结构源自杨-米尔斯理论》，《物理评论D》**106** (2022) 第2期, 026004 doi: 10 1103 106 026004 [ 2203 07397 . / [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-th .[16] L. Borsten、B. Jurco、H. Kim、T. Macrelli、C. Saemann 和 M. Wolf，《来自扭量空间的运动学李代数》，物理评论快报**131** (2023) 第4期，041603 doi: 10 1103 131 041603 [ 2211 13261 . / [ ]] PhysRevLett. . arXiv: . hep-th .[17] R. Bonezzi、C. Chiaffrino、F. Diaz-Jaramillo 和 O. Hohm，《杨-米尔斯理论的规范不变双拷贝：四次理论》，《物理评论D》**107** ( 2023 12, 126015 10 1103 107 126015 ) 第期 doi: . / [ 2212 04513 [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-th .[18] L. Borsten、B. Jurco、H. Kim、T. Macrelli、C. Saemann 和 M. Wolf，《纯旋量作用量中的树级颜色-运动学对偶》，《物理评论D》**108** ( 2023 12, 126012 10 1103 108 126012 ) 第期 doi: . / [ 2303 13596 [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-th .[19] R. Bonezzi、F. Diaz-Jaramillo 和 S. Nagy，《自对偶杨-米尔斯理论的规范无关运动学代数》，《物理评论D》 **108** (2023) 第6期，065007 doi: 10 1103 108 065007 [ 2306 08558 . /PhysRevD. . [ ]] arXiv: . hep-th .[20]M. Ben-Shahar、F. Bonechi 和 M. Zabzine，《由余微分得到的非壳颜色-运动学对偶》，高能物理学杂志 **05** 2025 060 10 1007 05 2025 060 ( )，doi: . / [ 2409 11484 [ ]] JHEP ( ) arXiv: . hep-th .

[21] B. Zwiebach, 《闭弦场论：量子作用量与B-V主方程》, 《核物理B》**390** 1993 33 152 10 1016 0550 3213 93 90388 6 ( ), - [ 9206084 [ ]] doi: . / - ( ) - arXiv:hep-th/ hep-th . [22] T. Lada 和 J. Stasheff, 《面向物理学家的SH李代数导论》, 《国际理论物理杂志》32 (1993年), 1087-1104 doi:10.1007/BF00671791 [arXiv:hep-th/9209099 [ hep-th]]. [23] A. M. Zeitlin, 《杨-米尔斯理论中的同伦李超代数》, 高能物理学杂志09 (2007年), 068 doi:10.1088/1126-6708/2007/09/ 068 [arXiv:0708.1773 [hep-th]]. [24] A. M. Zeitlin, 《形式Maurer-Cartan结构：从共形场论到经典场方程》, 高能物理学杂志 **12** 2007 098 10 1088 1126 6708 2007 12 098 ( ), doi: . / - [ 0708 0955 [ ]] / / / arXiv: . hep-th . [25] A. M. Zeitlin, 《通过弦场论将巴塔林 - 维尔科维斯基杨-米尔斯理论视为同伦切恩-西蒙斯理论》, Int. J. Mod. Phys. A 24 (2009), 1309-1331 doi:10.1142/S0217751X09043031 [ arXiv:0709.1411 [hep-th]]. [26] O. Hohm 和 B. Zwiebach, 《$L_\infty$ 代数与场论》, 《物理进展》65 (2017) 第3-4期, 1700014 doi:10.1002/prop.201700014 [arXiv:1701.08824 [hep-th]]. [27] B. Jurˇco、L. Raspollini、C. S¨amann 和 M. Wolf, 《经典场论的$L_\infty$-代数与巴塔林-维尔科维斯基形式》, 《物理进展》67 7, 1900025 2019 10 1002 1809( ) 第期 doi: . /prop. 201900025 [ 09899 arXiv: . [ ]] hep-th . [28] M. Grigoriev 和 D. Rudinsky, 《局域规范场论的L∞-方法札记》, 《几何与物理杂志》 **190** 2023 104863 10 1016 2023 104863 ( ), doi: . / [ 2303 08990 [ ]] j.geomphys. . arXiv: . hep-th . [29] A. M. Zeitlin, 《共形场论与规范理论的代数结构》, 高能物理学杂志03 (2010), 056 doi:10.1007/JHEP03(2010)056 [arXiv:0812.1840 [hep-th]]. [30] I. Galvez-Carillo、A. Tonks 和 B. Valette, 《同伦巴塔林-维尔科维斯基代数》, 《非交换几何杂志》 6 2012 3, 539 602 10 4171 99 ( ), 第期, [ 0907 2246[ ]] 页码 – doi: . /JNCG/ arxiv: . math-QA . [31] R. Bonezzi、C. Chiaffrino 和 O. Hohm, 《杨-米尔斯理论运动学代数的顶点算符》, 《物理评论D》111 (2025年) 第6期, 065002 doi: 10 1103 111 065002 [ 2408 17341 . / [ ]] PhysRevD. . arXiv: . hep-th . [32]R. Bonezzi、C. Chiaffrino、O. Hohm 和 M. F. Kallimani, 《通过同伦传递从世界线算符代数得到杨-米尔斯运动学代数》, 《物理评论D》112 (2025年) 第10期, 105006 doi:10.1103/dn6l-2t1j [arXiv:2508.17933 [hep-th]]. [33] D. Tamarkin 和 B. Tsygan, 《非交换微分演算、同伦BV代数与形式性猜想》, [arxiv:math/0002116[math-KT]]. [34] L. Borsten、H. Kim、B. Jurˇco、T. Macrelli、C. Saemann 和 M. Wolf, 《同伦代数的双拷贝》, 《物理进展》69 (2021) 第8-9期, 2100075 doi:10.1002/prop.202100075 [arXiv:2102.11390 [hep-th]]. [35] C. R. Mafra 和 O. Schlotterer, 《多粒子SYM运动方程与纯旋量BRST块》, 高能物理学杂志 **07** 2014 153 10 1007 07 2014 153 ( ), doi: . / [ 1404 4986 [ ]] JHEP ( ) arXiv: . hep-th . [36] C. R. Mafra 和 O. Schlotterer, 《超空间与分量中的Berends-Giele递推及BCJ对偶》, 高能物理学杂志03 (2016), 097 doi:10.1007/JHEP03(2016)097 [arXiv:1510.08846 [hep- th]]。[37]S. Lee、C. R. Mafra 和 O. Schlotterer, 《 $D = 10$ SYM 理论中的非线性规范变换与 BCJ 对偶》, JHEP 03 (2016), 090 doi:10.1007/JHEP03(2016)090 [arXiv:1510.08843 [hep- th]]。[38] L. M. Garozzo、L. Queimada 和 O. Schlotterer, 《 $F^3$-和 $F^4$-变形杨-米尔斯散射振幅的 Bern-Carrasco-Johansson 规范中的 Berends-Giele 流》, JHEP **02** 2019 078 10 1007 02 2019 078 ( ), doi: 。 / [ 1809 08103 [ ]] JHEP ( ) arXiv: 。 hep-th 。[39] E. Bridges 和 C. R. Mafra, 《BCJ 规范中 SYM 多粒子超场的算法构造》, JHEP **10** 2019 022 10 1007 10 2019 022 ( ), doi: 。 / [ 1906 12252 [ ]] JHEP ( ) arXiv: 。 hep-th 。[40] C. R. Mafra 和 O. Schlotterer, 《来自纯旋量超弦的树级散射振幅》, 《物理评论》 **1020** 2023 1 162 10 1016 2023 04 001 ( ), - doi: 。 [ 2210 14241 [ ]] /j.physrep. 。 。 arXiv: 。 hep-th 。[41] A. N¨utzi 和 M. Reiterer, 《YM 和 GR 中作为极小模型的散射振幅及其递归刻画》, Co mmun. Math. Phys. 392 (2022) no.2, 427- 482 10 1007 00220 022 04339 4 [ 1812 06454 doi: 。 /s - - [ ]] - arXiv: 。 math-ph 。[42] A. S. Arvanitakis, 《 S 矩阵的 $L_\infty$- 代数》, JHEP **07** 2019 115 10 1007 07 2019 115 ( ), [ 1903 05643 [ ]] doi: 。 /JHEP ( ) arXiv: 。 hep-th 。[43] B. Jurˇco、T. Macrelli、C. S¨amann 和 M. Wolf, 《圈振幅与量子同伦代数》, JHEP **07** 2020 003 10 1007 07 2020 003 ( ), doi: 。 / [ 1912 06695 [ ]] JHEP ( ) arXiv: 。 hep-th 。[44] A. S. Arvanitakis、O. Hohm、C. Hull 和 V. Lekeu, 《同伦传递与有效场论 I：树级》, 《物理进展》 70 (2022) no.2-3, 2200003 doi:10.1002/prop.202200003 [ arXiv:2007.07942 [hep-th]]。[45] R. Bonezzi、C. Chiaffrino、F. Diaz-Jaramillo 和 O. Hohm, 《通过同伦传递获得树级散射振幅》, [ arXiv:2312.09306 [hep-th]]。[46] F. A. Berends 和 W. T. Giele, 《含 n 个胶子的过程的递归计算》, 《核物理B》306 (1988), 759 808 10 1016 0550 3213 88 90442 7 - doi: 。 / - ( ) - A. [47] M. Medina-Mardones、B. Vallette, 《高阶颜色-运动学对偶的代数运算子演算》, [arXiv:2512.12948 [math-ph]]。[48] R. Bonezzi、G. Casale 和 O. Hohm, 《D = 4维最大超对称性的双拷贝》, JHEP 05 (2025), 131 doi:10.1007/JHEP05(2025)131 [arXiv:2501.02058 [ hep- th]]。[49] R. Bonezzi、G. Casale 和 O. Hohm, 《 $D = 10$中的最大超对称性双拷贝》, [arXiv:2508.11753 [hep-th]]。[50] A. Anastasiou、L. Borsten、M. J. Duff、L. J. Hughes 和 S. Nagy, 《引力对称性的杨-米尔斯起源》, 《物理评论快报》113 (2014) no.23, 231606 doi: 10 1103 113 231606 [ 1408 4434 。 / [ ]] PhysRevLett. 。 arXiv: 。 hep-th 。[51] A. Anastasiou、L. Borsten、M. J. Duff、S. Nagy 和 M. Zoccali, 《引力是规范理论的平方：鬼故事》, 《物理评论快报》121 (2018) no.21, 211601 doi: 10 1103 121 211601 [ 1807 02486 。 / [ ]] PhysRevLett. 。 arXiv: 。 hep-th 。[52] L. Borsten 和 S. Nagy, 《从双拷贝到三次阶的纯 BRST 爱因斯坦-希尔伯特拉格朗日量

,”

JHEP **07** 2020 093 10 1007 07 2020 093 ( ), doi: 。 [ 2004 14945 [ ]]
/JHEP ( ) arXiv: 。 hep-th 。[53] L. Borsten 、 B. Jurˇco 、 H. Kim 、 T. Macrelli、C. Sae-mann 和 M. Wolf, 《杨-米尔斯理论的 Becchi-Rouet-Stora-Tyutin-拉格朗日量双拷贝》, 《物理评论快报》**126** (2021) no.19, 191601 doi:
10 1103 126 191601 [ 2007 13803 。 /PhysRevLett. 。 [ ]]
arXiv: 。 hep-th 。[54]F. Diaz-Jaramillo 、 O. Hohm 和 J. Plefka, 《双场论作为杨-米尔斯理论的双拷贝》, 《物理评论D》**105** (2022) no.4, 045012 doi: 10 1103 105 045012 [ 2109 01153 。 /PhysRevD. 。 [ ]]
arXiv: 。 hep-th 。[55] L. Borsten 、 B. Jurco 、 H. Kim 、 T. Macrelli 、 C. Saemann 和 M. Wolf, 《来自度量 BV ■ **73** 2025 1 2, -代数的双拷贝》, 2300270 10 1002 2307
《物理进展》( ) no. - doi: 。 /prop.
202300270 [ 02563 arXiv: 。 hep-th 。 [ ]]
[56] R. Bonezzi、F. Diaz-Jaramillo 和 O. Hohm, 《三维陈-西蒙斯理论与六维 Kodaira-Spencer 引力, ”《物理评论D》**110** （2024）第4期, 045024, doi: 10 1103 110 045024 [ 2404 16830 。/ [ ]]
PhysRevD. . arXiv: . hep-th . [57] M. Ben-Shahar、F. Bonechi 和 M. Zabzine, “BV 中的非壳双拷贝理论”, [arXiv:2506.09869 [hep-th]]。
[58] W. Siegel, “低能超弦中的超空间对偶”, 《物理评论D》**48** （1993年）, 2826-2837, doi:
10 1103 48 2826 [ 9305073 。/P [ ]]
hysRevD. . arXiv:hep-th/ hep-th . [59] C. Hull 和 B. Zwiebach, “双场论”, 高能物理学杂志
**09** 2009 099 10 1088 1126 6708 2009 09 099 ( ), doi: . / - / / / [ 0904 4664 [ ]]
arXiv: . hep-th . [60] O. Hohm 、 C. Hull 和 B. Zwiebach, “ 双场论的背景无关作用量”, 高能物理学杂志**07**（2010年）,
016 10 1007 07 2010 016 [ 1003 5027 doi: . /JHEP ( ) [ ]]
arXiv: . hep-th . [61] O. Hohm、C. Hull 和 B. Zwiebach, “双场论的广义度量表述”, 高能物理学杂志**08** （2010年）, 008, doi:10.1007/JHEP08(2010)008 [arXiv:1006.4823 [hep-th]]。