具有循环 p 分量的离散扭阿贝尔群上的海德定理类比

Gennadiy Feldman（ORCID ID https://orcid.org/0000-0001-5163-4079)

摘要
根据著名的海德定理，给定另一个线性形式时，一个线性形式的条件分布具有对称性，可以刻画实数线上的高斯分布。本文证明了该定理的一个类似结论：对于取值于具有循环 p 分量的离散挠阿贝尔群 X 中的两个独立随机变量，我们证明了相应结论。证明过程中，我们不对线性形式的系数和随机变量的特征函数施加任何限制。证明采用抽象调和分析的方法，并基于对群 X 的特征群上的某个函数方程的求解。

关键词 海德定理 · 自同构 · 离散挠阿贝尔群

数学主题分类主要分类 43A25 · 43A35 · 60B15 · 62E10

arXiv:2601.02489v1 [math.PR] 5 Jan 2026

1 引言

数理统计中的刻画定理是指这样一类陈述：根据随机变量某些函数的性质，推断这些随机变量可能具有的分布。最著名的刻画定理之一由 M. Kac 和 S.N. Bernstein 分别独立证明：如果两个独立随机变量的和与差相互独立，那么这两个随机变量服从高斯分布。在随机变量取值于局部紧阿贝尔群的情形下，许多刻画定理都得到了研究。在其群类比正受到积极研究的定理中，有著名的 Heyde定理 [11], 另见 [12, 定理 13.4.1]。对于两个独立随机变量，该定理可表述如下：

Heyde定理 设 ξ_1 和 ξ_2 是取实数值的独立随机变量，其分布为 μ_j。设α_j、 β_j 为非零常数，且 $\beta_1\alpha_1^{-1}+\beta_2\alpha_2^{-1}\neq 0$。如果线性形式 $L_2=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2$ 在给定 $L_1=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ 时的条件分布是对称的[1], , 那么 μ_j 服从高斯分布。

海德定理的一个群类比最初在 [4] 针对有限阿贝尔群得到证明。随后也研究了其他类的局部紧阿贝尔群，尤其是离散群、紧致全不连通群、 $\boldsymbol{a}$-进索列斯环面[2]。在此过程中，通常假设线性形式的系数是群的拓扑自同构。显然，在这种情况下，我们不妨设 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 且 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$，其中 α 是群的拓扑自同构。事实证明，对于给定的局部紧阿贝尔群，由一个线性形式在给定另一线性形式的条件下的条件分布对称性所刻画的分布，其描述取决于核 $\mathrm{Ker}(I+\alpha)$ 是否为零，以及这些分布的特征函数μ_j 是否为零。

在文章 [9], 中，首次研究了海德定理的群类比，且对 α 以及分布 μ_j 的特征函数没有任何限制。在 [9] 中，独立随机

[1]注意到，给定 L_1 时 L_2 的条件分布对称，当且仅当随机向量 $(L_1,\ L_2)$ 与 $(L_1,\ -L_2)$ 同分布。[2]关于海德定理的群类比，参见例如 [5,6,8,9,13,14], , 另请参见 [7], , 其中还可找到更多参考文献。

变量的取值要么属于某一类紧致全不连通阿贝尔群，要么属于一个p-准循环群。

本文证明了海德定理的一个类似结果，适用于取值于离散挠阿贝尔群（其循环 p-分量）或实数加法群与离散挠阿贝尔群（其循环 p-分量）的直积中的两个独立随机变量。与文章 [9], 一样，我们对 α 以及分布 μ_j 的特征函数不施加任何限制。值得注意的是，原始的海德定理针对任意数量 n 的独立随机变量给出，但对线性形式的系数施加了某些限制。然而，正如 [4], 中所证明的，即使对于有限阿贝尔群，粗略地说，当 $n > 2$ 时，也不存在合理的海德定理类似结果。

我们想强调的是，尽管问题采用概率统计的表述方式，但所讨论的问题属于抽象调和分析。在局部紧阿贝尔群 X 上，群版本的海德定理中可能分布 μ_j 的刻画，等价于刻画群 X 的特征群上概率分布的特征函数（傅里叶变换）类中所谓海德函数方程的解。值得注意的是，海德方程与一些著名的函数方程属于同一系列，例如卡克–伯恩斯坦方程和斯基托维奇–达莫瓦方程；这些方程与相应的刻画定理密切相关（参见 [7, 第二章和第三章]）。许多作者独立于刻画问题研究了这些及类似的方程（例如，J.M. Almira [1], [2], 、J.M. Almira 和 E.V. Shulman [3],、M. Sablik 和 E. Shulman [15], 、E.V. Shulman [16]）。

本文使用抽象调和分析中的标准结果（例如参见 [10]）。设 X 为一个局部紧阿贝尔群， Y 为其特征群。我们还使用记号 X^* 表示 X的特征群。设 $x \in X$ 且 $y \in Y$。用 (x, y) 表示特征 y 在元素 x处的值。对于群 X的子群 K，记 $A(Y, K) = \{y \in Y :$ 对所有 $x \in K\}$，均有 $(x, y) = 1$，称其为湮没子。记 Aut(X) 为 X 的所有拓扑自同构所成的群，并以 I 表示恒等自同构。设 G 为群 X 的闭子群，并设 $\alpha \in$ Aut(X)。若 $\alpha(G) = G$，即 α 在 G 上的限制是群 G的拓扑自同构，则将此限制记为 α_G。称 G 为 X 的特征子群，如果对于所有 $\alpha \in$ Aut(X)，均有 $\alpha(G) = G$。对于 $\alpha \in$ Aut(X)，伴随自同构 $\widetilde{\alpha} \in$ Aut(Y) 定义为：对所有 $x \in X, y \in Y$，有 $(\alpha x, y) = (x, \widetilde{\alpha} y)$。对于自然数 n，记 f_n 为群 X 上的如下公式定义的自同态： $f_n x = nx, x \in X$。令 $X^{(n)} = f_n(X)$。设 $x \in X$ 为有限阶元素。记$\langle x \rangle$ 为由 x生成的 X 的子群。记 $\mathbb{R}$为实数加法群，记 $\mathbb{Z}(n)$为模 n的整数群，即阶为 n的有限循环群。

设 Y 是一个阿贝尔群，设 $f(y)$ 是定义在 Y 上的函数，且 h 是 Y 的一个元素。记有限差分算子为 Δ_h

$$\Delta_h f(y) = f(y + h) - f(y), \quad y \in Y.$$

定义在 Y 上的函数 $f(y)$ 称为多项式，如果

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0$$

对于某个非负整数 n 和所有 y, $h \in Y$。

设 X 是一个局部紧阿贝尔群， μ 和 ν 是 X 上的概率分布。卷积 $\mu * \nu$ 定义为

$$\mu * \nu(B) = \int_X \mu(B - x) d\nu(x)$$

对 X 的任意博雷尔子集 B。记

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x), \quad y \in Y,$$

分布 μ的特征函数（傅里叶变换）。按公式 $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$定义分布 $\bar{\mu}$, 其中 B 是 X的任意博雷尔子集。则 $\hat{\bar{\mu}}(y) = \hat{\mu}(y)$。若群 X 上的分布 μ_1 满足存在 X 上的分布 μ_2 使得 $\mu = \mu_1 * \mu_2$，则称 μ_1 是 μ 的一个因子。对于 $x \in X$，用 E_x 表示集中于元素 x的退化分布。若群 Y 上的函数 $\psi(y)$满足存在群 X 上的分布 μ 使得对所有 $y \in Y$均有 $\psi(y) = \hat{\mu}(y)$，则称其为特征函数。对于群 X 的紧子群 K，用 m_K 表示 K上的 Haar 分布。特征函数 $\widehat{m}_K(y)$具有如下形式

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad y \in A(Y, K), \\ 0 & \text{if} \quad y \notin A(Y, K). \end{cases} \tag{1}$$

2 主要定理

设 $\{H_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ 是离散阿贝尔群族。记 $\mathbf{P}_{\iota \in \mathcal{I}}^{*} H_\iota$ 为群 H_ι在离散拓扑下的弱直积。设 $\{G_\iota : \iota \in \mathcal{I}\}$ 是紧阿贝尔群族。记 $\mathbf{P}$ G_ι 为群 G_ι 在积拓扑下的直积。令

X 为一个阿贝尔群， p 为一个素数。若群 X 中每个元素的阶都是 p的幂，则称群 X 为 p-群。若 X 为一个扭群，则 X 中所有阶为 p 的幂的元素组成的子群称为 X的 p-分量。

本文的主要结果如下定理所述。

定理 2.1 </style}设为一个离散挠阿贝尔群，其循环-分量不含阶为2的元素。设 α 为群 X的一个自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 为取值于 X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。假设在线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 的条件下的条件分布是对称的。则群X 存在一个子群 G 以及一个支撑于 G 中的分布 λ，使得以下陈述成立：

(i) μ_j 是 λ的平移；

(ii) G是包含 λ 的支撑的最小子群；

(iii) $(I + \alpha)(G)$ 是有限群；

(iv) *Haar* 分布 $m_{(I+\alpha)(G)}$ 是 λ 的因子；

(v) 若 η_j 是取值于群 X 中、分布为 λ 的独立同分布随机变量，则给定 $M_1 = \eta_1 + \eta_2$ 时，线性形式 $M_2 = \eta_1 + \alpha\eta_2$ 的条件分布是对称的。

为了证明该定理，我们需要一些引理。我们将以下众所周知的陈述表述为一个引理，这样做很方便（证明见例如 [7, 命题 2.10]）。

引理 2.2 设 X 是一个特征群为 Y 的局部紧阿贝尔群，且 μ 是 X 上的一个分布。那么集合

$$E = \{y \in Y : \hat{\mu}(y) = 1\}, \quad B = \{y \in Y : |\hat{\mu}(y)| = 1\}$$

是群 Y 的闭子群，且分布 μ 支撑于子群 $A(X, E)$。

引理 2.3 ([6], 另见 [7,引理 9。10]) 设 X 是一个第二可数局部紧阿贝尔群，其特征群为 Y。设 H 是 Y 的一个闭子群，且 α 是 X 的一个拓扑自同构。令 $G = A(X, H)$。假设 $H^{(2)} = H$ 且 $\alpha(G) = G$。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2，满足

$$|\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)| = 1, \quad y \in H.$$

假设线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 在给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 的条件分布是对称的。那么，存在分布 μ_j 的若干平移 λ_j，使得 λ_j 支撑于 G。在此过程中，若 η_j 是取值于 X 且分布为 λ_j的独立随机变量，那么线性形式 $M_2 = \eta_1 + \alpha\eta_2$ 在给定 $M_1 = \eta_1 + \eta_2$ 的条件分布是对称的。

引理 2.4 ([7,引理 9。1]) 设 X 是一个第二可数局部紧阿贝尔群，其特征群为 Y，且 α 是 X的一个拓扑自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X、分布分别为 μ_1 和 μ_2的独立随机变量。当且仅当特征函数 $\hat{}$ $\mu_j(y)$满足方程[3]时，线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 在给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 的条件分布是对称的。

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u+\widetilde{\alpha}v) = \hat{\mu}_1(u-v)\hat{\mu}_2(u-\widetilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y. \tag{2}$$

[9]中关于奇数阶有限循环群的推论 2.6 是以下引理的特例。该引理在证明定理 2.1 中发挥着关键作用。

引理 2.5 设 X 是一个奇数阶有限循环群，其特征群为 Y。设 α 是群 X的一个自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是独立随机变量，其取值分别属于 X，且其分布分别为 μ_1 和 μ_2，满足

$$\{y \in Y : |\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)| = 1\} = \{0\}. \tag{3}$$

假设线性形式 $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ 在给定 $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ 条件下的条件分布是对称的。那么 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 与 *Haar* 分布 $m_{(I+\alpha)(X)}$ 是 μ的一个因子。

[7]中的引理 9.17 的以下陈述是一个特例。

引理 2.6 设 Y 是一个阿贝尔群，且 β 是 Y的一个自同构。假设函数$\varphi(y)$满足方程

$$\varphi(u+v) + \varphi(u+\beta v) = \varphi(u-v) + \varphi(u-\beta v) = 0, \quad u, v \in Y. \tag{4}$$

那么函数 $\varphi(y)$满足方程

$$\Delta_{(I-\beta)k_3}\Delta_{2k_2}\Delta_{(I+\beta)k_1}\varphi(y) = 0, \quad y \in Y,$$

其中 k_j、 $j = 1$、2、3 是群 Y 的任意元素。

以下引理众所周知（证明参见例如 [7, 命题 1.30]）。

引理 2.7 设 Y 是一个紧阿贝尔群，且 $f(y)$ 是 Y 上的连续多项式。那么 $f(y) =$ 对所有 $y \in Y$ 都是常数。

[3]方程（2）i 所谓海德函数方程针对两个独立随机变量的一个特例 n.

定理 ***2.1*** 的证明 任意挠阿贝尔群都同构于其p分量的弱直积（[10, (A.3)]）。根据该定理的条件，群 X 的每个 p分量都是循环的。鉴于任意循环 p群都同构于 $\mathbb{Z}(p^k)$，其中 k为某个自然数，我们不妨设

$$X = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}(p_j^{k_j}), \tag{5}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是两两不同的素数构成的集合，使得 $2 \notin \mathcal{P}$ 且所有 $k_j \geq 1$.

记 Y 为群 X的特征群。群 Y 是紧致的，并且与群 $\mathbb{Z}(p_j^{k_j})$的直积拓扑同构，其中 $p_j \in \mathcal{P}$。为避免引入额外的记号，我们假设

$$Y = \mathop{\mathbf{P}}_{p_j \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}(p_j^{k_j}). \tag{6}$$

容易看出，群 X 的任意子群 K 都具有如下形式

$$K = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j \in \mathcal{S}} \mathbb{Z}(p_j^{l_j}), \tag{7}$$

其中 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ 且 $l_j \leq k_j$，即 K 也是一个离散挠阿贝尔群，其循环 p分量不含二阶元素。记 $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, 0, 0, \ldots\ldots)$，其中 $x_j \in \mathbb{Z}(p_j^{k_j})$是群 X的元素。令 $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$。由于对所有 $i \neq j$都有 $p_i \neq p_j$，自同构 α 对群 X 中的元素的作用如下：

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = (\alpha_{\mathbb{Z}(p_1^{k_1})} x_1, \alpha_{\mathbb{Z}(p_2^{k_2})} x_2, \ldots, \alpha_{\mathbb{Z}(p_n^{k_n})} x_n, 0, 0, \ldots). \tag{8}$$

注意到，群 $\mathbb{Z}(p_j^{k_j})$ 的每个自同构都是乘以自然数 m，即与自同态 f_m 相同，其中 m 和 p_j 互素。由（7）和（8）可知，群 X 的任意子群都是特征子群。由此可知，不失一般性，我们可以假设，包含 μ_1 和 μ_2 的支撑的群 X 的最小子群与 X相同。

考虑集合

$$H = \{y \in Y : |\hat{\mu}_1(y)| = |\hat{\mu}_2(y)| = 1\}.$$

由引理 2.2， H 是群 Y的闭子群。由于 f_2 是群 Y的任意闭子群上的拓扑自同构，因此有 $H^{(2)} = H$。考虑到群 X 的任意子群都是特征子群，我们可以应用引理 2.3，将定理的证明归结为条件（3）成立的情形，即 $H = \{0\}$。我们将证明，在这种情况下，存在一个分布 μ，使得下述陈述成立：

(I) $\mu_1 = \mu_2 = \mu$;

(II) X 是包含 μ 的支撑的最小子群;

(III) $(I + \alpha)(X)$ 是有限群;

(IV) Haar 分布 $m_{(I+\alpha)(X)}$ 是 μ 的因子。

这样定理便得以证明。因此，假设条件（3）成立，我们将证明陈述（I）–（IV）。

下面证明陈述（I）。根据引理 2.4，特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$ 满足方程（2）。将方程（2）限制在子群 $\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha})$ 上，得到如下形式

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u-v)=\hat{\mu}_1(u-v)\hat{\mu}_2(u+v),\quad u,v\in\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}). \tag{9}$$

将 $u=v=y$ 代入方程（9），对于所有 $y\in\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha})$，可得 $\hat{\mu}_1(2y)=\hat{\mu}_2(2y)$。由于 f_2是群 Y 的任意闭子群上的拓扑自同构，这意味着对于所有 $y\in\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha})$，有 $\hat{\mu}_1(y)=\hat{\mu}_2(y)$。令

$$\psi(y)=\hat{\mu}_1(y)=\hat{\mu}_2(y),\quad y\in\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}). \tag{10}$$

我们来验证

$$\hat{\mu}_j(y)=0\text{ for all }y\notin\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}),\ j=1,2. \tag{11}$$

取 $y_0\notin\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha})$。首先假设 y_0 是有限阶元素。考虑由元素 y_0生成的子群 $T=\langle y_0\rangle$ 。根据庞特里亚金对偶定理， T 是有限循环群 S的特征群，其中 S 与 T同构。记群 S上的分布 ω_j ，其特征函数为

$$\hat{\omega}_j(y)=\hat{\mu}_j(y),\quad y\in T,\ j=1,2. \tag{12}$$

由于特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$ 满足方程（2），且子群 T 是特征子群，因此特征函数 $\hat{\omega}_j(y)$ 满足方程

$$\hat{\omega}_1(u+v)\hat{\omega}_2(u+\widetilde{\kappa}v)=\hat{\omega}_1(u-v)\hat{\omega}_2(u-\widetilde{\kappa}v),\quad u,v\in T, \tag{13}$$

其中 κ 是群 S 的自同构。由 (3) 和 (12) 可得

$$\{y\in T:|\hat{\omega}_1(y)|=|\hat{\omega}_2(y)|=1\}=\{0\}. \tag{14}$$

设 ζ_1 和 ζ_2 是取值于群 S 中的独立随机变量，其分布分别为 ω_1和 ω_2。由引理 2.4，根据 (13) 可知，在线性形式 $N_2=\zeta_1+\kappa\zeta_2$ 给定 $N_1=\zeta_1+\zeta_2$ 的条件下，其条件分布是对称的。由于 (14) 成立，我们可以将引理 2.5 应用于群 S、自同构 κ、随机变量 ζ_j和分布 ω_j。由引理 2.5 可知，存在群 S 上的分布 ω ，使得 $\omega_1=\omega_2=\omega$ ，且 Haar 分布 $m_{(I+\kappa)(S)}$ 是 ω的一个因子。鉴于 (1) 以及以下事实

$$A(T,(I+\kappa)(S))=\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\kappa}),$$

由上述内容可得，对于所有 $y\notin$，若不属于核$(I+\widetilde{\kappa})$，则 $\hat{\omega}(y)=0$。对于所有 $y\in T$，有 $\widetilde{\alpha}y=\widetilde{\kappa}y$。这意味着，若 $y_0\notin$ 属于核$(I+\widetilde{\alpha})$，则 $y_0\notin$ 属于核$(I+\widetilde{\kappa})$。因此，$\hat{\omega}(y_0)=0$ ，且 $\hat{\omega}_j(y_0)=\omega(y_0)=0$。结合 (12)，可得 $\hat{\mu}_j(y_0)=0, j=1,2$。因此，当 y 是有限阶元素时，我们证明了 (11)。

记 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)$，其中 $y_j\in\mathbb{Z}(p_j^{k_j})$，为群 Y 的元素。现在假设 $y_0=(y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)$ 是一个无限阶元素。令 $y_0^{(n)}=(y_1,y_2,\ldots,y_n,0,0,\ldots)$。元素 $y_0^{(n)}$ 的阶有限，且 $y_0^{(n)}\to y_0$ 如 $n\to\infty$。由 $y_0\notin$ 核$(I+\widetilde{\alpha})$ 可知，对所有充分大的 n，都有 $y_0^{(n)}\notin$ 核$(I+\widetilde{\alpha})$。如上所证，$\hat{\mu}_1(y_0^{(n)})=\hat{\mu}_2(y_0^{(n)})=0$。因此，$\hat{\mu}_1(y_0)=\hat{\mu}_2(y_0)=0$。由此证明了 (11)。鉴于 (10)，我们得到 $\hat{\mu}_1(y)=\hat{\mu}_2(y)$，对所有$y\in Y$均成立。因此 $\mu_1=\mu_2$。令

$$\mu=\mu_1=\mu_2. \tag{15}$$

因此，陈述 (I) 得证。

鉴于（15），命题（II）由条件（3）推出。

下面证明命题（III）。根据引理 2.4，特征函数 $\hat{\mu}_j(y)$ 满足方程（2）。鉴于（15），将方程（2）写成以下形式

$$\hat{\mu}(u+v)\hat{\mu}(u+\widetilde{\alpha}v)=\hat{\mu}(u-v)\hat{\mu}(u-\widetilde{\alpha}v),\quad u,v\in Y. \tag{16}$$

此外，条件（3）可写成以下形式

$$\{y\in Y:|\hat{\mu}(y)|=1\}=\{0\}. \tag{17}$$

令 $P=$核$(I-\widetilde{\alpha})$。由 $\widetilde{\alpha}y=y$ 对所有 $y\in P$ 成立可知，将方程（16）限制在子群 P 上后具有以下形式

$$\hat{\mu}^2(u+v)=\hat{\mu}^2(u-v),\quad u,v\in P. \tag{18}$$

将 $u=v=y$ 代入（18），得到

$$\hat{\mu}^2(2y)=1,\quad y\in P. \tag{19}$$

由于 f_2 是一个 群 Y 的任意闭子群上的拓扑自同构，(19) 表明

$$|\hat{\mu}(y)|=1,\quad y\in P. \tag{20}$$

结合 (17) 和 (20)，我们得出 $P=\mathrm{Ker}(I-\widetilde{\alpha})=\{0\}$。由于群 Y 具有 (6) 的形式，这意味着

$$I-\widetilde{\alpha}\in \mathrm{Aut}(Y). \tag{21}$$

注意，此时 $I-\alpha\in$ Aut(X)。

令 $\nu=\mu*\bar{\mu}$。那么，对于所有 $y\in Y$，$\hat{\nu}(y)=|\hat{\mu}(y)|^2\geq 0$。由于特征函数 $\hat{\mu}(y)$ 满足方程 (16)，特征函数 $\hat{\nu}(y)$ 也满足方程 (16)。

设 $\mathcal{P}=\{p_1,p_2,\dots,p_n,\dots\}$，其中对于 $i<j$，$p_i<p_j$。考虑到子群族

$$Y_k=\mathop{\mathbf{P}}_{p_j\in\mathcal{P},\ p_j\geq k}\mathbb{Z}(p_j^{k_j}),\quad k=1,2,\dots,$$

构成群 Y 零元处的一个开基，我们可以适当地选取一个自然的 l，使得对于所有 $y\in Y_l$，$\hat{\nu}(y)>0$。令 $\varphi(y)=\ln\hat{\nu}(y)$，$y\in Y_l$。由于特征函数 $\hat{\nu}(y)$ 满足方程 (16)，函数 $\varphi(y)$ 满足方程 (4)，其中 $Y=Y_l$ 和 $\beta=\widetilde{\alpha}$。鉴于 $f_2\in$ Aut(Y) 以及 (21)，由引理 2.6 可知，函数 $\varphi(y)$ 满足方程

$$\Delta_h^3\varphi(y)=0,\quad y,h\in(I+\widetilde{\alpha})(Y_l),$$

即，函数 $\varphi(y)$ 是群 $(I+\widetilde{\alpha})(Y_l)$ 上的连续多项式。由于 $\varphi(0)=0$ 且子群 $(I+\widetilde{\alpha})(Y_l)$ 是紧致的，由引理 2.7 可得，对于所有 $y\in(I+\widetilde{\alpha})(Y_l)$，都有 $\varphi(y)=0$。因此，对于所有 $y\in(I+\widetilde{\alpha})(Y_l)$，都有 $|\hat{\mu}(y)|=1$。根据 (17)，我们有

$$(I+\widetilde{\alpha})(Y_l)=\{0\},\quad j=1,2. \tag{22}$$

Put

$$X_k=\mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j\in\mathcal{P},\ p_j\geq k}\mathbb{Z}(p_j^{k_j}),\quad k=1,2,\dots \tag{23}$$

鉴于 $Y_k=X_k^*$，由 (22) 可得

$$\alpha_{X_l}=-I. \tag{24}$$

考虑到 (5)、(23) 和 (24)，我们得到

$$(I+\alpha)(X)=\mathop{\mathbf{P}}_{p_j\in\mathcal{P},\ p_j<l}\mathbb{Z}(p_j^{k_j})$$

是一个有限群。因此，命题 (III) 得证。

我们来证明命题 (IV) 也成立。由 (10)、(11) 和 (15) 可知，分布 μ 的特征函数可以写成如下形式

$$\hat{\mu}(y)=\begin{cases}\psi(y) & \text{if} \quad y\in \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}),\\ 0 & \text{if} \quad y\notin \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}).\end{cases} \tag{25}$$

考虑 Haar 分布 $m_{(I+\alpha)(X)}$。考虑到 $A(Y,\ (I+\alpha)(X))$ =Ker$(I+\widetilde{\alpha})$ 这一事实以及 (1)，特征函数 $\widehat{m}_{(I+\alpha)(X)}(y)$ 具有如下形式

$$\widehat{m}_{(I+\alpha)(X)}(y)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad y\in \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}),\\ 0 & \text{if} \quad y\notin \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}).\end{cases} \tag{26}$$

由 (25) 和 (26) 可知，对于所有 $y\in Y$，$\hat{}\mu(y)=\widehat{m}_{(I+\alpha)(X)}(y)\hat{}\mu(y)$。因此，$\mu=m_{(I+\alpha)(X)}*\mu$，命题 (IV) 也得证。定理得证。□

以下陈述由定理 2.1 的证明得出。

推论 2.8 设 X 是一个离散挠阿贝尔群，其循环 p-分量不含阶为 2 的元素。设 Y 是群 X 的特征群。假设定理2.1 的所有条件均成立，且特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足条件 (3)。那么 $\mu_1=\mu_2=\mu$, X 是包含 μ 的支撑的最小子群，$(I+\alpha)(X)$ 是一个有限群，*Haar* 分布$m_{(I+\alpha)(X)}$ 是 μ 的因子，并且 $I-\alpha\in \mathrm{Aut}(X)$。

推论 2.9 设 X 是一个离散挠阿贝尔群，其循环 p-分量不含阶2的元素。假设定理 2.1 的所有条件均成立。则以下陈述成立：

(i) 若 核$(I+\alpha)=\{0\}$，则群 X 存在一个有限子群 G，使得 μ_j 是 *Haar* 分布 m_G的平移；
(ii) 若分布 μ_j 的特征函数不为零，则μ_j 是支撑于核$(I+\alpha)$中的某个分布的平移。

证明。 由定理 2.1，存在群 X 的一个子群 G，使得 $(I+\alpha)(G)$ 是一个有限群，并且分布 μ_j 是支撑于 G 中的某个分布 λ 的平移。

下面证明陈述 (i)。由于核$(I+\alpha)=\{0\}$ 且 X 是一个具有循环 p-分量的离散挠阿贝尔群，因此我们有 $I+\alpha\in$ Aut(X)。这意味着 $(I+\alpha)(G)=G$。因此G 是一个有限群，且 $m_{(I+\alpha)(G)}=m_G$。由定理 2.1，Haar 分布 $m_{(I+\alpha)(G)}$ 是 λ的一个因子。由此可知，Haar 分布 m_G 是 λ的一个因子。考虑到分布 λ 支撑于 G中，我们得到 $\lambda=m_G$。

证明命题（ii）。记 H 为群 G的特征群。由定理 2.1，Haar 分布 $m_{(I+\alpha)(G)}$ 是 λ的一个因子。这意味着特征函数 $\lambda(h)$ 具有如下形式

$$\hat{\lambda}(h)=\begin{cases}\psi(h) & \text{if} \quad h\in \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_G),\\ 0 & \text{if} \quad h\notin \mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_G),\end{cases} \tag{27}$$

其中， $\psi(h)$ 是子群 $\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_G)$ 上的特征函数。由于特征函数 $\widehat{\ }\widehat{\ }\mu_j(y)$ 不为零，特征函数 $\lambda(h)$ 也不为零。结合式 (27)，这意味着 $\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_G)=H$，即对所有 $h\in H$， $\widetilde{\alpha}_G h=-h$。因此，对所有 $g\in G$， $\alpha_G g=-g$。这意味着 $G=\mathrm{Ker}(I+\alpha_G)\subset\mathrm{Ker}(I+\alpha)$，即 λ 支撑于 $\mathrm{Ker}(I+\alpha)$。 □

注 2.10 我们来讨论定理 2.1 中子群 G 的唯一性问题。

假设 $\mathrm{Ker}(I+\alpha)=\{0\}$，并证明在这种情况下 G 是唯一确定的。事实上，设定理 2.1 的所有条件均成立。由推论 2.9 的 (i) 项可知，此时 $\mu_j=E_{x_j}*m_G$, $j=1$， 2，其中 $x_j\in X$，且 G 是实数集 X 的有限子群。设 $\mu_j=E_{\tilde{x}_j}*m_{\widetilde{G}}$,$\sim j=1$， 2，其中 $\tilde{x}_j\in X$，且 G 是实数集 X 的有限子群。因此 $E_{x_1}*m_G=E_{\tilde{x}_1}*m_{\widetilde{G}}$。这意味着 $\widetilde{\ }G=G$。

假设 $\mathrm{Ker}(I+\alpha)\neq\{0\}$。取 x_1， $x_2\in X$，使得

$$x_1+\alpha x_2=0 \tag{28}$$

and

$$x_0\in\mathrm{Ker}(I+\alpha). \tag{29}$$

取 $\mu_j=E_{x_j+x_0}$, $j=1$， 2。由 (28) 和 (29) 可知，特征函数 $\widehat{\ }\mu_j(y)$ 满足方程（2）。设 ξ_j 是取值于群 X、分布为 μ_j 的独立随机变量。设 G 是由 x_0 生成的 X 子群。那么 $\mu_j=E_{x_j}*E_{x_0}$, $j=1$， 2，且定理 2.1 的陈述 (i)–(v) 对 $\lambda=E_{x_0}$ 和 G 均成立。由于 $\mathrm{Ker}(I+\alpha)\neq\{0\}$，我们可以取 $x_0\neq 0$。因此 $\sim\quad\sim G\neq\{0\}$。显然，定理 2.1 的陈述 (i)–(v) 对 $\lambda=E_0$ 和 $G=\{0\}$ 也成立。

如果假设群 X 的每个 p-分量都同构于 $\mathbb{Z}(p)$，则定理 2.1 的陈述 (iii) 和 (iv) 可以加强。与定理 2.1 的陈述 (iii) 和 (iv) 的证明不同，我们在证明相应陈述时不使用引理 2.6 和 2.7。我们的证明基于以下针对离散阿贝尔群的海德定理类比。

引理 2.11 ([5], 另见 [7, 定理 10。8]) 设 X 是一个不含阶为 2 的元素的可数离散阿贝尔群。设 α 是 X 的一个自同构，满足条件

$$\mathrm{Ker}(I+\alpha)=\{0\}.$$

设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于群 X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和 μ_2。如果线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时的条件分布是对称的，那么$\mu_j=m_K*E_{x_j}$，其中 K是 X的一个有限子群，且 $x_j\in X$, $j=1,2$。此外， $\alpha(K)=K$。

定理 2.12 设 X 是如下形式的离散阿贝尔群

$$X=\mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}(p_j),$$

其中 $\mathcal{P}$ 是一个两两不同的素数集合，满足 $2\notin\mathcal{P}$。设 α 是群 X的一个自同构。设 ξ_1 和 ξ_2 是取值于 X 中的独立随机变量，其分布分别为 μ_1 和μ_2。假设线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 在给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时的条件分布是对称的。那么，群 X 存在一个子群 G，以及一个支撑于 G中的分布 λ，使得下列陈述成立：

(i) μ_j 是 λ的平移；

(ii) G是包含 λ的支撑的最小子群；

(iii) $G = G_1 \times G_2$，其中 $G_1 = (I+\alpha)(G)$ 是一个有限群，且 G_2 是 G的子群；

(iv) $\lambda = m_{G_1} * \omega$，其中分布 ω 支撑于子群 G_2；

(v) 若 η_j 是取值于群 X 且服从分布 λ 的独立同分布随机变量，则给定 $M_1 = \eta_1 + \eta_2$ 时，线性形式 $M_2 = \eta_1 + \alpha\eta_2$ 的条件分布是对称的。

证明。记 Y 为群 X 的特征群。群 Y 与群 $\mathbb{Z}$ 的直积 (p_j) 拓扑同构，其中 $p_j \in \mathcal{P}$。为避免引入额外的记号，我们假设

$$Y = \mathop{\mathbf{P}}_{p_j \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}(p_j).$$

按照定理 2.1 的证明中的论证，我们可以假设条件（3）成立。我们将证明，在这种情况下，存在分布 μ 和 ω，使得以下陈述成立：

（I） $\mu_1 = \mu_2 = \mu$;

（II） X 是包含分布 μ 的支撑的最小子群;

(III); $X = G_1 \times G_2$, where $G_1 = (I+\alpha)(X)$ is a finite group and G_2 is a subgroup of X

(IV) $\mu = m_{G_1} * \omega$，其中分布 ω 支撑于子群 G_2。

于是定理得证。

命题 (I) 和 (II) 的证明与定理 2.1 中命题 (I) 和 (II) 的证明相同。注意，在证明命题 (I) 和 (II) 时，我们没有使用引理 2.6 和 2.7。

我们来证明命题 (III)。群 $\mathbb{Z}(p_j)$ 的每个自同构都是乘以一个自然数 m，即与自同态 f_m 一致，其中 $m \in \{1, 2, \ldots, p_j - 1\}$。此外，若 $m \neq p_j - 1$，则核$(I + f_m) = \{0\}$ 且 $f_{p_j-1} = -I$。令

$$\mathcal{P}_1 = \{p_j \in \mathcal{P} : \alpha_{\mathbb{Z}(p_j)} \neq -I\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{p_j \in \mathcal{P} : \alpha_{\mathbb{Z}(p_j)} = -I\}$$

$$G_1 = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j \in \mathcal{P}_1} \mathbb{Z}(p_j), \quad G_2 = \mathop{\mathbf{P}^*}_{p_j \in \mathcal{P}_2} \mathbb{Z}(p_j).$$

于是 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$，因此

$$X = G_1 \times G_2. \tag{30}$$

显然,

$$I + \alpha_{G_1} \in \mathrm{Aut}(G_1), \tag{31}$$

$$\alpha_{G_2} = -I, \tag{32}$$

用 π 表示群 G_1 上具有特征函数

$$\hat{\pi}(y) = \hat{\mu}(y), \quad y \in G_1^*. \tag{33}$$

特征函数 $\hat{\mu}(y)$ 满足方程 (16)。由于 $\widetilde{\alpha}(G_1^*) = G_1^*$，特征函数 $\hat{\pi}(y)$ 满足方程

$$\hat{\pi}(u+v)\hat{\pi}(u+\widetilde{\alpha}_{G_1}v) = \hat{\pi}(u-v)\hat{\pi}(u-\widetilde{\alpha}_{G_1}v), \quad u, v \in G_1^*. \tag{34}$$

设 ζ_1 和 ζ_2 是取值于群 G_1 、分布为 π的独立同分布随机变量。由引理 2.4，从 (34) 可得，给定 $N_1=\zeta_1+\zeta_2$ 时线性形式$N_2=\zeta_1+\alpha_{G_1}\zeta_2$ 的条件分布是对称的。考虑到 (31)，我们可以将引理 2.11 应用于离散群 G_1、自同构 α_{G_1}、随机变量 ζ_1 和 ζ_2，以及分布$\pi_1=\pi_2=\pi$。由此可得，群 G_1 存在有限子群 F，并且存在元素 $g_j\in G_1$，使得

$$\pi_j = m_F * E_{g_j}, \quad j=1,2. \tag{35}$$

考虑到 (33)，由 (35) 得到

$$\hat{\mu}(y)=\hat{\pi}(y)=\widehat{m}_F(y)(g_j,y), \quad y\in G_1^*, \ \ j=1,2.$$

由 (1) 可知，这意味着

$$|\hat{\mu}(y)|=1, \quad y\in A(G_1^*,F). \tag{36}$$

由于条件 (17) 得到满足，由 (36) 可得 $A(G_1^*,\ F)=\{0\}$，即 $G_1=F$。因此，G_1是一个有限群。由 (30)–(32) 可知 $G_1=(I+\alpha)(X)$。至此，命题 (III) 得证。

下面证明命题 (IV)。由 (30) 可知，群 Y与群 G_1^* 和 G_2^*的直积拓扑同构。为避免引入新记号，我们假设 $Y=G_1^*\times G_2^*$，并用 $(a,\ b)$ 表示，其中 $a\in G_1^*$、$b\in G_2^*$是群 Y的元素。我们有

$$\mathrm{Ker}(I+\widetilde{\alpha})=A(Y,(I+\alpha)(X))=A(Y,G_1)=G_2^*.$$

分布 μ 的特征函数具有形式 (25)。因此

$$\hat{\mu}(a,b)=\begin{cases}\psi(b) & \text{if} \quad a=0,\\ 0 & \text{if} \quad a\neq 0.\end{cases} \tag{37}$$

设 ω 是群 X 上的分布，其特征函数为

$$\hat{\omega}(a,b)=\psi(b), \quad (a,b)\in Y. \tag{38}$$

由于对所有 $a\in G_1^*$，都有 $\hat{\omega}(a,b)=1$，且 $A(X,G_1^*)=G_2$，由引理 2.2 可知，ω 支撑于 G_2。还需验证 $\mu=m_{G_1}*\omega$。考虑到 (1) 以及 $A(Y,G_1)=G_2^*$ 这一事实，特征函数 $\widehat{m}_{G_1}(a,b)$ 具有如下形式

$$\widehat{m}_{G_1}(a,b)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad a=0,\\ 0 & \text{if} \quad a\neq 0.\end{cases} \tag{39}$$

由 (37)–(39) 可得，对所有 $(a,b)\in Y$，都有 $\hat{\mu}(a,b)=\widehat{m}_{G_1}(a,b)\hat{\omega}(a,b)$。因此 $\mu=m_{G_1}*\omega$，命题 (IV) 也得到了证明。定理得证。 □

3 实数加法群与具有循环 p-分量的离散挠阿贝尔群的直积的 Heyde 定理

考虑形如 $X=\mathbb{R}\times K$ 的群，其中 K 是一个离散挠阿贝尔群。记 t,k，其中 $t\in\mathbb{R}$、$k\in K$ 是群 X 的元素。令 $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$。由于 $\mathbb{R}$ 是群 X 的零元所在的连通分支，而 K 是由有限阶元素组成的 X 的子群，因此 $\mathbb{R}$ 和 K 是 X 的特征子群。这意味着 α 对群 X 的元素的作用如下：$\alpha(t,\ k)=(at,\alpha_K k)$，其中 $a\neq 0$。我们将 α 写成如下形式：$\alpha=(a,\alpha_K)$。

本节证明群 $\mathbb{R}\times K$ 的海德定理的以下推广，其中K 是一个各循环 p 分量均不含二阶元素的离散挠阿贝尔群。

定理 3.1 设 $X=\mathbb{R}\times K$，其中 K 是一个各循环 p 分量均不含阶 2 元素的离散挠阿贝尔群。设 $\alpha=(a,\alpha_K)$ 是群 X 的一个拓扑自同构。设ξ_1 和 ξ_2 是取值于 X 、分布分别为 μ_1 和 μ_2的独立随机变量。假设给定 $L_1=\xi_1+\xi_2$ 时，线性形式 $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ 的条件分布是对称的。

1. 若 $a\neq -1$，则存在群 K 的子群 G 、定义在 $\mathbb{R}$ 上的高斯分布 γ_j ，以及支撑于 G 的分布 ω ，使得以下陈述成立：

(i) μ_j 是分布 $\lambda_j=\gamma_j*\omega$ 的平移；(ii) G 是包含分布 ω 的支撑的最小子群；(iii) $(I+\alpha)(G)$ 是有限群；(iv) *Haar* 分布 $m_{(I+\alpha)(G)}$ 是 ω 的一个因子；(v) 若 η_j 是取值于群 X 且分布为 λ_j 的独立随机变量，则线性形式 $M_2=\eta_1+\alpha\eta_2$ 在给定 $M_1=\eta_1+\eta_2$ 时的条件分布是对称的。

2. 若 $a=-1$，则存在群 K 的子群 G，以及支撑于 $\mathbb{R}\times G$ 的分布 μ，使得以下陈述成立：

(i) μ_j 是 μ 的平移；(ii) $(I+\alpha)(\mathbb{R}\times G)$ 是有限群；(iii) *Haar* 分布 $m_{(I+\alpha)(\mathbb{R}\times G)}$ 是 μ 的一个因子；(iv) 若 η_j 是取值于群 X 且分布为 μ 的独立同分布随机变量，则线性形式 $M_2=\eta_1+\alpha\eta_2$ 在给定$M_1=\eta_1+\eta_2$ 时的条件分布是对称的。

证明需要以下引理。

引理 3.2 ([9]) 设 Y 是一个阿贝尔群， β 是 Y 的一个自同构，且满足 $I-\beta\in\mathrm{Aut}(Y)$。设 $f(y)$ 和 $g(y)$ 是定义在群 Y 上的函数，满足方程

$$f(u+v)g(u+\beta v)=f(u-v)g(u-\beta v),\quad u,v\in Y.$$

则 $f(y)$ 和 $g(y)$ 满足方程

$$f(y)=f(-(I+\beta)(I-\beta)^{-1}y)g(-2\beta(I-\beta)^{-1}y),\quad y\in Y, \tag{40}$$

$$g(y)=g((I+\beta)(I-\beta)^{-1}y)f(2(I-\beta)^{-1}y),\quad y\in Y. \tag{41}$$

假设不等式 $0\leq f(y)\leq 1$, $0\leq g(y)\leq 1$, $y\in Y$ 均成立。令 $\kappa=-f_4\beta(I-\beta)^{-2}$。设 $\kappa^m y_0=y_0$ 对某个 $y_0\in Y$ 及某个自然数 m 成立。则

$$f(y_0)=g(-2\beta(I-\beta)^{-1}y_0), \tag{42}$$

$$g(y_0)=f(2(I-\beta)^{-1}y_0). \tag{43}$$

定理 ***3.1*** 的证明 记群 X 的特征群为 Y，群 K 的特征群为 L 。群 Y 与群 $\mathbb{R}\times L$ 拓扑同构。记 $(s,\ l)$,

其中 $s \in \mathbb{R}$、 $l \in L$ 是群 Y 的元素。根据引理 2.4，特征函数 $\hat{\mu}_j(s,\ l)$ 满足方程（2），其形式为

$$\hat{\mu}_1(s_1+s_2,l_1+l_2)\hat{\mu}_2(s_1+as_2,l_1+\widetilde{\alpha}_K l_2) \\ =\hat{\mu}_1(s_1-s_2,l_1-l_2)\hat{\mu}_2(s_1-as_2,l_1-\widetilde{\alpha}_K l_2),\quad s_j\in\mathbb{R},\ l_j\in L. \quad (44)$$

1. 假设 $a \neq -1$。将 $l_1 = l_2 = 0$ 代入方程（44），并对群 $\mathbb{R}$ 应用引理 2.4 和海德定理，可得

$$\hat{\mu}_j(s,0)=\exp\{-\sigma_j s^2+ib_j s\},\quad s_j\in\mathbb{R},\ j=1,2,$$

其中 $\sigma_j \geq 0$， $b_j \in \mathbb{R}$。由于 $\sigma_1 + a\sigma_2 = 0$，这意味着要么 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，要么 $\sigma_1 > 0$ 且 $\sigma_2 > 0$。

用 γ_j 表示群 $\mathbb{R}$ 上特征函数为下式的高斯分布

$$\hat{\gamma}_j(s)=\hat{\mu}_j(s,0)=\exp\{-\sigma_j s^2+ib_j s\},\quad s_j\in\mathbb{R},\ j=1,2. \quad (45)$$

1a. 假设 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，即

$$\hat{\gamma}_j(s)=\hat{\mu}_j(s,0)=\exp\{ib_j s\},\quad s_j\in\mathbb{R},\ j=1,2,$$

其中 $b_1 + ab_2 = 0$。令

$$\lambda_j=\mu_j * E_{-b_j},\quad j=1,2.$$

那么对所有 $s_j \in \mathbb{R}$， $j = 1$， 2， $\lambda_j(s,\ 0) = 1$。由引理 2.2，分布 λ_j 支撑于 $A(X,\ \mathbb{R}) = K$。此外，特征函数 $\lambda_j(0,\ l)$ 在群 L 上满足方程（2）。设 ζ_j 为取值于群 K 且分布为 λ_j 的独立随机变量。由引理 2.4，给定 $N_1 = \zeta_1 + \zeta_2$ 时线性形式 $N_2 = \zeta_1 + \alpha_K\zeta_2$ 的条件分布是对称的。群 K 是一个不含二阶元素、具有循环 p-分量的离散挠阿贝尔群。将定理 2.1 应用于群 K、自同构 α_K、随机变量 ζ_j 和分布 λ_j，即可得到该定理的陈述。在此情形下，高斯分布 γ_j 是退化的。

1b. 假设 $\sigma_1 > 0$ 和 $\sigma_2 > 0$。将 $s_1 = s_2 = 0$ 代入方程（44），得到 t

$$\hat{\mu}_1(0,l_1+l_2)\hat{\mu}_2(0,l_1+\widetilde{\alpha}_K l_2)=\hat{\mu}_1(0,l_1-l_2)\hat{\mu}_2(0,l_1-\widetilde{\alpha}_K l_2),\quad l_j\in L. \quad (46)$$

用 ω_j 表示群 K 上特征函数为.....的分布

$$\hat{\omega}_j(l)=\hat{\mu}_j(0,l),\quad l\in L,\ j=1,2.$$

设 ζ_1 和 ζ_2 是取值于群 K 的独立随机变量，其分布分别为 ω_1 和 ω_2。令

$$H=\{(0,l)\in Y:|\hat{\mu}_1(0,l)|=|\hat{\mu}_2(0,l)=1\}.$$

根据引理 2.2， H 是 Y 的闭子群。此外， $H^{(2)} = H$。考虑到引理 2.4，并将引理 2.3 应用于群 K、自同构 α_K、独立随机变量 ζ_j 和分布 ω_j，我们将定理的证明归结为 $H = \{0\}$ 的情形。我们将证明，在这种情况下， $G = K$、结论 1(ii)–1(iv) 均成立，并且 $\mu_j = \gamma_j * \omega$ $j = 1$， 2，即结论 1(i) 也成立。因此，定理得证。

由此可得 $H = \{0\}$

$$\{l\in L:|\hat{\omega}_1(l)|=|\hat{\omega}_2(l)|=1\}=\{0\}. \quad (47)$$

根据引理 2.4，给定 $N_1 = \zeta_1 + \zeta_2$时，线性形式 $N_2 = \zeta_1 + \alpha_K\zeta_2$ 的条件分布是对称的。由于（47）成立，我们可以将推论 2.8 应用于群 K、自同构 α_K、随机变量 ζ_j和分布ω_j。由此可得，存在一个分布 ω，使得$\omega_1 = \omega_2 = \omega$，$K$ 是包含 ω支撑的最小子群，$(I + \alpha)$（K）是一个有限群，并且 Haar 分布$m_{(I+\alpha)(K)}$ 是 ω的一个因子。因此，（47）意味着结论 1(ii)–1(iv) 成立。

尚需证明陈述 1(i)，即 $\mu_j = \gamma_j * \omega$, $j = 1$，2。考虑到 $(I+\alpha)(K) = (I + \alpha_K)(K)$，由上文可得

$$\hat{\omega}(l) = \hat{\mu}_1(0, l) = \hat{\mu}_2(0, l) = \begin{cases} \psi(l) & \text{if} \quad l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K), \\ 0 & \text{if} \quad l \notin \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K), \end{cases} \tag{48}$$

其中 $\psi(l)$ 是子群 $\mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K)$ 上的特征函数。

考虑方程（44），假设 l_1，$l_2 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K)$。由于对所有 $l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K)$ 都有 $\widetilde{\alpha}_K l = -l$，因此

$$\begin{aligned} &\hat{\mu}_1(s_1 + s_2, l_1 + l_2)\hat{\mu}_2(s_1 + as_2, l_1 - l_2) \\ &\qquad = \hat{\mu}_1(s_1 - s_2, l_1 - l_2)\hat{\mu}_2(s_1 - as_2, l_1 + l_2), \quad s_j \in \mathbb{R},\ l_j \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K). \end{aligned} \tag{49}$$

将 $s_1 = -as$, $s_2 = s$, $l_1 = -l$, $l_2 = l$ 代入方程（49），得到

$$\hat{\mu}_1((1 - a)s, 0)\hat{\mu}_2(0, -2l) = \hat{\mu}_1(-(1 + a)s, -2l)\hat{\mu}_2(-2as, 0), \quad s \in \mathbb{R},\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K). \tag{50}$$

由（45）可知，对所有 $s \in \mathbb{R}$，均有 $\hat{\mu}_2(-2as, 0) \neq 0$。考虑到 $a \neq -1$，且 f_2 是群 L 的任意子群的自同构，由（50）可得，存在一些函数 $F_1(s)$、$s \in \mathbb{R}$ 和 $G_1(l)$、$l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K)$，使得

$$\hat{\mu}_1(s, l) = F_1(s)G_1(l), \quad s \in \mathbb{R},\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K).$$

此外，鉴于 $F_1(0) = G_1(0) = 1$，这意味着

$$F_1(s) = \hat{\mu}_1(s, 0),\ s \in \mathbb{R}, \qquad G_1(l) = \hat{\mu}_1(0, l),\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K).$$

因此

$$\hat{\mu}_1(s, l) = \hat{\mu}_1(s, 0)\hat{\mu}_1(0, l), \quad s \in \mathbb{R},\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K). \tag{51}$$

代入　　将 $s_1 = s$, $s_2 = -s$, $l_1 = l_2 = l$ 代入方程 (49)，并作类似推导，可得

$$\hat{\mu}_2(s, l) = \hat{\mu}_2(s, 0)\hat{\mu}_2(0, l), \quad s \in \mathbb{R},\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K). \tag{52}$$

由 (45) 和 (48)，从 (51) 和 (52) 可得

$$\hat{\mu}_j(s, l) = \hat{\gamma}_j(s)\hat{\omega}(l), \quad s \in \mathbb{R},\ l \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K),\ j = 1, 2. \tag{53}$$

将 $l_1 = l_2 = l$ 代入方程 (46)，其中 l_1，$l_2 \in$属于核$(I - \widetilde{\alpha}_K)$，得到

$$\hat{\mu}_1(0, 2l)\hat{\mu}_2(0, 2l) = 1, \quad l \in \mathrm{Ker}(I - \widetilde{\alpha}_K).$$

由于 f_2 是群 L的任意闭子群上的拓扑自同构，因此我们由此得到

$$|\hat{\omega}(l)| = |\hat{\mu}_1(0, l)| = |\hat{\mu}_2(0, l|) = 1, \quad l \in \mathrm{Ker}(I - \widetilde{\alpha}_K).$$

考虑到 (47) 和 (48)，这意味着 Ker$(I-\widetilde{\alpha}_K)=\{0\}$。因此，$I-\widetilde{\alpha}_K$ 是群 L的拓扑自同构。此外，f_2 也是群 L的拓扑自同构。由于群 L的任意闭子群都是特征子群，因此可知 $\widetilde{\alpha}_K$、$I-\widetilde{\alpha}_K$和 f_2都是将子群 Ker$(I+\widetilde{\alpha}_K)$ 映到自身的单射。这意味着 $\widetilde{\alpha}_K$、$I-\widetilde{\alpha}_K$和 f_2 都是将集合 $L\setminus$ Ker$(I+\widetilde{\alpha}_K)$ 映到自身的单射。

Put $s_1=-as$, $s_2=s$, $l_1=\widetilde{\alpha}_K l$, $l_2=l$，其中 $l\notin$Ker$(I+\widetilde{\alpha}_K)$，见方程（44）。我们得 t

$$\hat{\mu}_1((1-a)s,(I+\widetilde{\alpha}_K)l)\hat{\mu}_2(0,2\widetilde{\alpha}_K l)$$
$$=\hat{\mu}_1(-(1+a)s,-(I-\widetilde{\alpha}_K)l)\hat{\mu}_2(-2as,0),\quad s\in\mathbb{R},\ l\notin\operatorname{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_K).\quad(54)$$

由于 $2\widetilde{\alpha}_K l\notin$Ker$(I+\widetilde{\alpha}_K)$，由（48）可得 $\hat{}\mu_2(0,2\widetilde{\alpha}_K l)=0$，因此方程（54）的左端等于零。于是方程（54）的右端也等于零。由（45）可知，对于所有 $s\in\mathbb{R}$，$\hat{}\mu_2(-2as,0)\neq 0$，并由（54）得 $\hat{}\mu_1(-(1+a)s,-(I-\widetilde{\alpha}_K)l)=0$。由于 $a\neq -1$，且 $I-\widetilde{\alpha}_K$是集合$L\setminus$ Ker$(I+\widetilde{\alpha}_K)$到其自身的单射，我们得到

$$\hat{\mu}_1(s,l)=0,\quad s\in\mathbb{R},\ l\notin\operatorname{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_K).\quad(55)$$

将 $s_1=s$、$s_2=-s$、$l_1=l_2=l$（其中 $l\notin$核$(I+\widetilde{\alpha}_K)$）代入方程（44），并作类似推导，可得

$$\hat{\mu}_2(s,l)=0,\quad s\in\mathbb{R},\ l\notin\operatorname{Ker}(I+\widetilde{\alpha}_K).\quad(56)$$

考虑到（48）和（53），由（55）和（56）可得

$$\hat{\mu}_j(s,l)=\hat{\gamma}_j(s)\hat{\omega}(l),\quad s\in\mathbb{R},\ l\in L.$$

因此 $\mu_j=\gamma_j*\omega$、$j=1$，2，即陈述 1(i) 得证。于是，当 $a\neq -1$ 时，定理得证。

2. 现在假设 $a=-1$，即 $\alpha=(-1,\ \alpha_K)$。此时定理的证明按照与 [9] 中定理 2.1 的第 3 和第 4 项证明相同的思路进行。

将 $s_1=s_2=0$ 代入方程（44）。考察所得方程，并将引理 2.3 和引理 2.4 应用于群 K，可假设

$$\{l\in L:|\hat{\mu}_1(0,l)|=|\hat{\mu}_2(0,l)|=1\}=\{0\}.\quad(57)$$

我们将证明，在这种情况下，若令 $G=K$，陈述 2(i)–2(iv) 均成立。

由于 $(I+\alpha)(X)=(I+\alpha_K)(K)$，由定理 2.1 应用于群 K 可知，$(I+\alpha)(\mathbb{R}\times K)$ 是一个有限群。因此，陈述 2(ii) 成立。

考虑到（57），由推论 2.8 可得 $I-\alpha_K\in$ Aut(K)。由于$\alpha=(-1,\ \alpha_K)$，这意味着 $I-\alpha\in$ Aut(X)，从而 $I-\widetilde{\alpha}\in$Aut(Y)。令 $\nu_j=\mu_j*\bar{\mu}_j$。则对所有 $y\in Y$，$j=1$，2，均有 $\hat{}\nu_j(y)=|\hat{}\mu_j(y)|^2\geq 0$。令 $f(y)=\hat{}\nu_1(y)$，$g(y)=\hat{}\nu_2(y)$，$y\in Y$。由于特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 满足方程（2），特征函数 $\hat{}\nu_j(y)$ 也满足方程（2），其形式为

$$f(u+v)g(u+\widetilde{\alpha}v)=f(u-v)g(u-\widetilde{\alpha}v),\quad u,v\in Y.$$

令 $\kappa=-f_4\widetilde{\alpha}(I-\widetilde{\alpha})^{-2}$。则 $\kappa\in$Aut(Y)。由 $\alpha=(-1,\alpha_K)$ 可得

$$\kappa=(1,-f_4\widetilde{\alpha}_K(I-\widetilde{\alpha}_K)^{-2}).\quad(58)$$

现在我们证明，若 $f(y)\neq 0$，则 $y\in$核$(I+\widetilde{\alpha})$。注意，核$(I+\widetilde{\alpha})=\mathbb{R}\times$核$(I+\widetilde{\alpha}_K)$，并假设 $f(y_1)\neq 0$在元素 $y_1=(s_1,\ l_1)\in Y$处。

首先假设 l_1 是有限阶元素。由 (58) 以及群 L 的任意闭子群都是特征子群这一事实可知，对于某个 m，有 $\kappa^m y_1 = y_1$ 。我们看到，引理 3.2 的所有条件均已满足，其中 $\beta = \widetilde{\alpha}$ 和 $y_0 = y_1$。因此 (40)–(43) 成立。考虑由元素 l_1 生成的群 L 的子群 $\langle l_1 \rangle$。令

$$y_2 = -2\widetilde{\alpha}(I - \widetilde{\alpha})^{-1} y_1 = (s_1, -2\widetilde{\alpha}_K (I - \widetilde{\alpha}_K)^{-1} l_1) = (s_1, l_2),$$

其中 $l_2 = -2\widetilde{\alpha}_K (I - \widetilde{\alpha}_K)^{-1} l_1$。我们有 $-f_2 \widetilde{\alpha}_K (I - \widetilde{\alpha}_K)^{-1} \in \mathrm{Aut}(L)$。这意味着 $l_2 \in \langle l_1 \rangle$。此外，元素 l_1 和 l_2 具有相同的阶，因此 $\langle l_1 \rangle = \langle l_2 \rangle$。将 $\beta = \widetilde{\alpha}$ 和$y_0 = y_1$ 代入（42），得到 $g(y_2) \neq 0$。令

$$z_1 = -(I + \widetilde{\alpha})(I - \widetilde{\alpha})^{-1} y_1 = (0, -(I + \widetilde{\alpha}_K)(I - \widetilde{\alpha}_K)^{-1} l_1). \tag{59}$$

由（40）和（42）可知，此时 $f(z_1) = 1$。根据引理 2.2， $f(y) = 1$ 作用于子群 $\langle z_1 \rangle$的每个元素上。令

$$z_2 = (I + \widetilde{\alpha})(I - \widetilde{\alpha})^{-1} y_2 = (0, (I + \widetilde{\alpha}_K)(I - \widetilde{\alpha}_K)^{-1} l_2). \tag{60}$$

由于 $g(y_2) \neq 0$ 且对于某个 m有 $\kappa^m y_2 = y_2$ ，将 $\beta = \widetilde{\alpha}$ 和 $y_0 = y_2$ 代入（43），由（41）可得 $g(z_2) = 1$。根据引理 2.2， $g(y) = 1$ 作用于子群 $\langle z_2 \rangle$的每个元素上。由于元素l_1 和 l_2 具有相同的阶，由（59）和（60）可知，元素 z_1 和 z_2 也具有相同的阶。因此 $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$。于是，我们证明了 $f(y) = g(y) = 1$ 作用于子群$\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$的每个元素上。鉴于 $z_1, z_2 \in L$，由（ 57 ）可得 $z_1 = 0$。这意味着 $l_1 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}_K)$，从而 $y_1 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。

现在假设 l_1 是无限阶元素，且 $y_1 \notin \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。由于 $Y \setminus \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$ 是开集，且 $f(y_1) \neq 0$，我们可以选取元素 y_1 的一个邻域 U，使得对所有 $y \in U$，都有 $U \subset Y \setminus \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$ 且 $f(y) \neq 0$。显然，存在元素 $\tilde{y} = (\tilde{s}, \tilde{l}) \in U$，使得 $\tilde{l}$ 是有限阶元素。如上所证， $\tilde{y} \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。这意味着 $y_1 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。由此得到的矛盾说明 $y_1 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。

类似地论证可得，若 $g(y_1) \neq 0$ 在元素 $y_1 \in Y$ 处，则 $y_1 \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$。因此，特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 表示如下

$$\hat{\mu}_j(y) = \begin{cases} \psi_j(y) & \text{if} \quad y \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}), \\ 0 & \text{if} \quad y \notin \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha}), \end{cases} \tag{61}$$

其中 $\psi_j(y)$ 是群 $\mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$ 上的一些特征函数。考虑方程（2）对特征函数 $\hat{}\mu_j(y)$ 限制在子群 $\mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$ 上的情形，我们确信，对于所有 $y \in \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$，$\psi_1(y) = \psi_2(y)$。根据（61），这意味着对于所有 $y \in Y$，$\hat{}\mu_1(y) = \hat{}\mu_2(y)$。因此 $\mu_1 = \mu_2$。令 $\mu = \mu_1 = \mu_2$。于是，陈述 2(i) 得证。

令 $\psi(y) = \psi_1(y) = \psi_2(y)$。由（61）可知，特征函数 $\hat{}\mu(y)$ 具有（25）的形式。根据陈述 2(ii)，$(I + \alpha)(X)$ 是一个有限群。考虑到 $A(Y, (I + \alpha)(X)) = \mathrm{Ker}(I + \widetilde{\alpha})$ 这一事实以及（1），特征函数 $\widehat{m}_{(I+\alpha)(X)}(y)$ 具有（26）的形式。这意味着对于所有 $y \in Y$，$\hat{}\mu(y) = \widehat{m}_{(I+\alpha)(X)}(y) \hat{}\mu(y)$。因此 $\mu = m_{(I+\alpha)(X)} * \mu$，即 Haar 分布$m_{(I+\alpha)(X)}$ 是分布 μ 的一个因子。陈述 2(iii) 得证。

陈述 2(iv) 可由陈述 2(i) 得出。因此，在 $a = -1$ 的情况下，定理得证。至此，定理已完全得证。□

致谢

感谢审稿人仔细阅读手稿并提出有益意见。

资助 作者未披露任何资助。

数据可用性声明 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突作者声明不存在利益冲突。

参考文献

1. Almira, J.M.：多项式作为某些函数方程解的刻画。J. Math. Anal. Appl. **459**, 1016–1028 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.036 2. Almira, J.M.：利用 Aichinger方程刻画多项式函数。Aequationes Math.**97**, 899–907 (2023). https://doi.org/10.1007/s00010-022-00926-x 3. Almira, J.M., Shulman, E.V.：关于 Levi–Civita 和 Wilson函数方程的某些推广。Aequationes Math.**91**, 921–931 (2017). https://doi.org/10.1007/s00010-017-0489-4 4. Feldman, G.M.：有限阿贝尔群上的海德定理。J. Theoret. Probab. **17**, 929–941 (2004). https://doi.org/10.1007/s10959-004-0583-0 5. Feldman, G.M.：离散阿贝尔群上概率分布的一个刻画定理。Theory Probab. Appl. **63**, 594–612 (2019). https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989271 6. Feldman, G.M.：海德定理在某些局部紧阿贝尔群上的推广。数学研究成果。**77**, 文章 177, 1–20 (2022). https://doi.org/10.1007/s00025-022-01719-z 7. Feldman, G.：局部紧阿贝尔群上概率分布的刻画。数学调查与专著，**273**, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州 (2023) 8. Feldman, G.：不含在拓扑上同构于二维环面的子群的局部紧阿贝尔群上的海德定理。J. Fourier Anal. Appl. **30**, 文章 34, 1–16 (2024). https://doi.org/10.1007/s00041-024-10092-0 9. Feldman, G.：海德定理在某类紧致全不连通阿贝尔群和 p-拟循环群上的一个类似结果。数学研究成果。**80**, 文章 63, 1–21 (2025). https://doi.org/10.1007/s00025-025-02382-w 10. Hewitt, E., Ross, K. A.：抽象调和分析，**1**：拓扑群结构、积分理论、群表示，第 2 版，《数学科学基础丛书》，**115**, Springer-Verlag，纽约–柏林 (1994) 11. Heyde, C.C.：通过某一条件分布的对称性刻画正态分布。Sankhya, Ser. A.**32**, 115–118 (1970). http://www.jstor.org/stable/25049642 12. Kagan, A. M., Linnik, Yu. V., Rao C.R.：《数理统计中的刻画问题》，Wiley 概率与数理统计丛书，John Wiley & Sons，纽约 (1973) 13. Myronyuk, M.：群 $\mathbb{R}^n \times D$ 上的海德定理，其中 D 是离散阿贝尔群。概率论杂志 **36**, 593–604 (2023). https://doi.org/10.1007/s10959-022-01168-y

14. Myronyuk, M.：局部紧阿贝尔群上 Klebanov 定理的一个类似结果。概率论杂志 **37**, 2646–2664 (2024). https://doi.org/10.1007/s10959-024-01339-z 15. Sablik, M., Shulman, E.：指数有理数。数学研究成果 **79**, 文章 35, 1–11 (2024). https://doi.org/10.1007/s00025-023-02060-9 16. Shulman, E.V.：关于平衡柯西方程及其相关问题。Aequationes Math. **99**, 1763–1772 (2025) https://doi.org/10.1007/s00010-025-01155-8

乌克兰国家科学院 B. Verkin 低温物理与工程研究所，Nauky 大道 47 号，哈尔科夫，61103，乌克兰，电子邮箱：gennadiy_f@yahoo.co.uk