arXiv:2601.02501v1 [math.PR] 5 Jan 2026

随机跟随领头者系统的长时间渐近性

Sayan Banerjee、Amarjit Budhiraja 和 Dilshad Imon

摘要

我们引入并分析实数轴上的一类相互作用粒子系统，它结合了随机竞速模型和（确定性）跟驰模型的特点。该粒子系统演化为一个连续时间纯跳过程：领头粒子以恒定跳跃率独立运动，其跳跃时刻服从指数分布，跳跃大小独立同分布，且服从分布 θ；其余粒子则以与其到前方紧邻粒子的距离相等的速率，在指数分布的时刻向前跳跃，跳跃大小从相应间距中均匀抽取。因此，该动力学刻画了争夺领头位置的竞争，以及距离依赖的随机相互作用。我们主要研究相关的 间隙过程，它表示粒子间距构成的向量。我们证明了间隙过程存在唯一的平稳分布，并证明其具有均匀几何遍历性。此外，当领头粒子的跳跃大小服从指数分布时，我们明确给出了平稳分布，其形式为相互独立的指数分布之乘积。对于这一情形，我们还推导了混合时间的上下界，表明对于含有 n 个粒子的系统，该时间的标度介于 $\Theta(n)$ 和 $O(n(\log n)^2)$ 之间。作为混合时间结果的一项应用，我们建立了函数极限定理，在适当的空间和时间标度以及大粒子数极限下，刻画粒子状态在大时间尺度上的涨落。最后，当领头粒子的跳跃具有重尾但可积的分布时，我们证明，在平稳状态下，每个间距的有限阶矩至少比领头粒子的跳跃大小分布多一阶。总之，这些结果全面分析了具有状态依赖速率、跳跃大小和局部相互作用的相互作用跳跃系统的稳定性及其向平衡态的收敛。该模型为研究非扩散粒子系统中的遍历性、显式不变分布和混合行为提供了一个易于处理的框架。

AMS 2010 主题分类： 60K35,65C35,82C22, 46N30.

关键词： 相互作用粒子系统、最近邻相互作用、随机稳定性、遍历性、长时间行为、混合时间、Hammersley 过程、棍棒过程。

1 引言

1.1 研究动机与模型

复杂系统的动力学通常涉及个体代理之间的局部相互作用，从而产生涌现集体行为。本文聚焦于实数轴上 n 粒子之间一种特定的相互作用：每个粒子都会“跟随”位于其前方的粒子（或多个粒子），从而使整个系统呈现“群集行为”。目前用于理解此类现象的两种不同建模方法是随机赛跑模型和领头粒子跟随模型。

随机赛跑模型是一种研究群体内部竞争动力学的框架。例如， [9] 提出了这样一个系统：任意粒子都会向前跳跃一段距离，该距离从 0 到其与领头粒子之间的距离中均匀地随机选取。领头粒子则试图通过跳跃来保持其位置，跳跃距离从均匀分布中随机选取，其分布宽度等于它相对于下一位最强个体的领先距离。所有粒子都具有相同的恒定跳跃率。

另一方面，跟驰模型是基于常微分方程的确定性系统，用于描述个体根据指定领头者或一群领头成员的行为调整自身行为的情形。在交通流中，跟驰模型分析车辆如何根据前车调整速度和车距，也可视为计算交通流解的一种数值方法（[24], [39], [27]）。论文 [24] 提出了这样一种模型，其中车辆的速度是其与紧邻前车之间距离的非线性函数——也就是说，每位驾驶员都会根据前车的速度调整自己的车速。该模型还包含一位总领头者（最前方的车辆），其行驶速度不受系统中其他车辆状态的影响。对这一经典模型的扩展包括 [39] ，该研究探讨了一种交通流模型，其中某辆车的速度取决于其前方特定距离范围内所有其他车辆的相对位置。

受这两类研究的启发，本文提出并分析一种相互作用粒子系统。该系统融合了两种范式的特点，同时也为动力学引入了新的特征。我们的模型在实数轴上演化为一个纯跳过程。领头粒子（或称“领头者”）按照更新报酬过程向前移动，以恒定速率跳跃，且跳跃大小相互独立，并服从分布 θ。其余粒子则响应紧邻其前方的粒子而前进： i^{th} 粒子以自身与正前方粒子之间的距离作为跳跃速率向前跳跃。此外，跳跃后的新位置从其当前位置与前方粒子的位置之间的区间内均匀抽取。因此，该系统保留了跟驰模型中指定领头粒子所体现的不对称性，同时引入了类似激烈竞争框架的竞争性、距离依赖的随机动力学。这类动力学可用于模拟多种现象，例如交通流、生物群集以及一维介质中的能量输运。此外，它也为一系列处理无限流体工作负载的服务器提供了一个自然模型：工作必须依次经过所有服务器才能离开系统，而非领头服务器会根据各自本地的队列长度调整处理速率。我们将这一模型称为随机跟随领头者系统。

随机跟随领头者系统与*Hammersley* 过程之间存在联系。该过程由 [26, 1], 引入并分析，随后 [33, 42, 15], 等许多学者对其进行了研究；这项研究的动机是考察当 $n \to \infty$时， $\{1, \ldots, n\}$ 的均匀随机排列中最长递增子序列的渐近性质。文献中研究了该过程的若干变体，我们在此介绍一种与我们的系统最为接近的描述。从实数轴上的粒子点过程 $\mathcal{P}(0)$出发，构造过程 $\{\mathcal{P}(t) = (P_j(t) : j \in \mathbb{Z}) : t \geq 0\}$，其中对所有 $j \in \mathbb{Z}, t \geq 0$， $P_j(t) > P_{j+1}(t)$。过程从 $\mathcal{P}(0)$开始，按照如下方式，通过在 $\mathbb{R}^2$ 上的单位强度时空泊松点过程中向上移动一条水平线来更新。对于$t > 0$，如果水平线 $y = t$ 上、 $\mathcal{P}(t-)$中两个相邻点 $P_i(t-)$与$P_{i+1}(t-)$之间出现一个点 P，那么对所有 $j \neq i + 1$， $P_{i+1}(t) = P$，且 $P_j(t) = P_j(t-)$。这个过程可视为一个含有无限多个粒子的随机跟随领头者系统，这些粒子按索引排列

为 $\mathbb{Z}$ （没有领头粒子），因为任一粒子 P_{j+1} 都以速率 $P_j - P_{j+1}$ 向前跳跃至区间（P_{j+1}, P_j）中均匀选取的位置。对我们的 n粒子随机跟随领头者系统中，以均匀选取的粒子为中心观察到的粒子系统，当 $n \to \infty$时取其局部弱极限，便得到 Hammersley 过程。因此，本文提出的技术或有助于分析 Hammersley 过程的性质，例如局部稳定性、收敛速率和流体动力学行为。有关此问题的补充评论，请参见第 1.3 节（第 4 项）。

1.2 问题与挑战

本文研究的核心对象是相关间隙过程的长期行为，即粒子间距的集合。间隙过程的演化具有马尔可夫性，并编码了有关粒子相对构型的全部信息。由此产生了几个自然而有趣的问题：间隙过程是否存在唯一的平稳分布？如果存在，其成立条件是什么？该过程以多快的速度趋近平衡态？在某些特殊情况下，例如领头者的跳跃大小服从指数分布时，不变分布具有怎样的结构？领头者的增量的尾部行为又如何影响平稳间隙的正则性?

对间隙过程的研究面临若干挑战。由于领头粒子之后每个粒子的跳跃率和跳跃大小均与其前方的间隙成正比，这会导致动力学中出现对‘非常大’和‘非常小’的间隙高度敏感的二次非线性。当系统中存在非常大的间隙时，相关粒子会表现出异常高的速度并发生大幅跳跃。较小的间隙则会导致显著减速，从而在系统中形成‘瓶颈’。此外，由于状态空间既无界又不可数，并且动力学中还存在上述非线性和奇异性，传统上用于马尔可夫链混合时间分析的技术（例如 [34]）并不能直接应用。

1.3 我们的贡献

我们提出了新颖的 技术来应对上述挑战，并作出以下贡献 .

1. 在定理 3.1 中，我们利用 Lyapunov函数方法结合弱 Feller 性质，证明了对于每个有限的系统规模 n，间隙过程的平稳分布的存在性与唯一性。

2. 在定理 3.2 中，我们证明了一致几何遍历性，表明收敛至平衡态的速率为指数分布，并且达到与平稳状态的规定距离以内所需的时间与初始构型无关。为此，我们建立了小集的下界条件，并将其与某些“小”集合的命中时间的指数矩界相结合。这种一致遍历性体现了系统中的二次非线性：即使初始构型与平稳间隙分布相距甚远，粒子也会迅速组织起来，使其间隙构型接近平衡态。

3. 在领头粒子的跳跃服从单位均值指数分布这一特殊情形下，我们在定理 3.3 中明确地将平稳分布确定为一组相互独立、速率为

1 的指数分布，分别对应所有间隙。这一关键的因子化性质使我们能够更深入地研究其长期行为，详见下文第 4 项。

4. 在指数型领头粒子情形中，我们研究混合时间，即间隙过程的分布接近平稳分布（按全变差距离衡量）所需的时间。在定理 3.5 中，我们得到了混合时间的 $\Theta(n)$ 下界和 $O(n(\log n)^2)$ 上界，二者共同刻画了混合时间，精确到对数因子。

证明结合了耦合构造、方差界和区分统计量，借鉴了现代马尔可夫链混合理论的思路（[34]）。然而，自然的耦合无法保持系统的“单调性”，因此我们需要一种新颖的耦合，详见第 4 节。这种耦合在定理 3.2 的证明中也发挥着关键作用。此外，小间距导致的减速需要谨慎处理最坏情况——即所有粒子都堆叠在同一位置（所有间隙均为零）——并推导出一个“大小适中”的间隙沿粒子链向下传播所需时间的估计；这种传播使粒子能够进行“足够的”移动。我们通过与一个相关粒子系统进行耦合来实现这一点，并将该系统称为“冻结边界”过程（见第 6.3.2 节）。

在推论 3.6 中，我们通过建立函数中心极限定理，展示了混合时间估计的一项应用。我们证明，从任意构型出发，在适当大的时间下，对间隙过程的某个泛函进行适当的重新缩放和重新中心化后，当 $n \to \infty$ 时，该泛函依分布收敛到标准布朗运动。

混合时间估计的另一项潜在应用，是证明 [42] 的**棍棒过程** 的水动力学极限；该过程可以视为从标记粒子角度观察到的 Hammersley 过程。棍棒过程存在一个由 $\lambda > 0$ 索引的一参数平稳分布族，其分布为速率为 λ 的独立同分布指数分布的乘积分布（关于这一点的一些说明，见注 3.4）。论文 [42] 证明，当初始构型是棍棒过程某个平稳剖面的微小扰动时，对于某些 $\lambda > 0$，在适当的中心化以及时空缩放下，间隙（即棍棒过程中的“棍棒”）服从相互独立的指数分布，并由伯格斯方程给出水动力学极限。我们预计，本研究中用于获得混合时间结果的技术将有助于建立适用于更一般初始剖面的类似流体动力学行为。我们将在未来的工作中对此进行研究。

5. 最后，我们将分析扩展到领头粒子的跳跃具有重尾但可积尾部的情形。在这一情形下，平稳分布的显式公式不再存在。然而，我们在定理 3.7 中证明，如果领头粒子的增量分布具有有限的 k^{th} 矩，那么在平稳状态下，每个间距都具有有限的 $(k+1)^{th}$ 矩。这一结果体现了一种**正则化** 效应：领头粒子运动的随机性被跟随粒子的运动“平滑”了。

1.4 其他相关工作

本文研究相互作用随机粒子系统，其中相互作用取决于粒子的相对位置。这类模型由 [14] 称为**拓扑相互作用粒子系统**，广泛应用于生态学、进化生物学、工程学和数理金融等领域。

一个典型例子是*Atlas* 模型，它是源于随机投资组合理论 [23] 的基于秩的扩散的一种特殊情形。在该模型中，一个 n 维扩散由相互独立的布朗运动构成，但秩最低粒子会额外获得正漂移 γ，从而产生吸引相互作用。这一机制在有限维度（$n < \infty$）和无限维度（$n = \infty$）下都会带来丰富的长期行为；例如，参见 [38, 40, 41, 17, 18, 6, 29, 30, 43, 31, 2]。

受进化生物学启发的相关模型也得到了广泛研究 [11, 10,12, 13, 21, 3]。例如， [21] 研究了这样一个系统：粒子以单位速率繁殖，后代的位置根据位移核抽样确定，并在每次繁殖时移除最左侧的粒子。排队系统的负载均衡模型中也存在吸引性的拓扑相互作用：新到达的任务会被分配到较短的队列，以维持均衡 [37, 35, 19,7]。在概率学和物理学背景下，人们都分析了表现出吸引行为的连续空间追逐模型和领导者—跟随者模型；例如参见 [5, 9, 28]。与此同时，大量文献研究了基于晶格的吸引系统，如选民模型、接触过程和排斥过程 [32]。

人们通过各种模型对群集现象进行了广泛研究。*Cucker-Smale*模型 描述了具有连续轨迹的粒子系统中的群集行为，其中粒子的速度会通过与群体中其他粒子的相互作用而更新 [16]。近年来，[4, 8], 从概率学角度研究了纯跳模型中的群集行为， [25, 45, 44] 则在分布式并行模拟的背景下对其进行了研究。在所有这些模型中，粒子之间通过经验测度的充分规则的泛函相互作用，例如基于均值或分位数的相互作用。此类平均场相互作用 与我们模型中的最近邻相互作用 在性质上有所不同，因此需要采用截然不同的方法。从这个意义上说，随机跟随领头者系统可视为一种用于描述群集行为的非平均场局部相互作用模型。

1.5 符号说明

我们将一个 k 维向量（$x_1, \dots x_k$） $\in \mathbb{R}^k$ 记作 $\mathbf{x}$。集合 $\{1, \dots, n\}$ 将记作 $[n]$。对于波兰空间 $\mathcal{S}$，$C_b(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 上所有实值有界连续函数构成的类。 $\mathcal{S}$ 上的 Borel σ-域记作 $\mathcal{B}(\mathcal{S})$。$(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ 上的概率测度空间记作 $\mathcal{P}(\mathcal{S})$，并赋予弱收敛拓扑。对于取值于波兰空间 $\mathcal{S}$ 的随机变量X， $\mathcal{L}(X)$ 表示 X 的概率律；给定一个子 σ-域$\mathcal{G}$， $\mathcal{L}(X \mid \mathcal{G})$ 表示在给定 $\mathcal{G}$ 条件下 X 的条件分布（它是一个 $\mathcal{G}$-可测的、取值于 $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ 的随机变量）。随机变量 X 具有概率律 θ 这一表述通常简写为 $X \sim \theta$。对于波兰空间 $\mathcal{S}$，我们将函数空间 $\mathcal{D}([0, \infty) : \mathcal{S})$ 记作由函数$f : [0, \infty) \to \mathcal{S}$ 构成的空间，其中函数右连续且具有有限左极限（RCLL），并赋予通常的 Skorokhod 拓扑。给定一个 $T > 0$，空间 $\mathcal{D}([0, T] : \mathcal{S})$ 类似地定义。对于函数 $f \in \mathcal{D}([0, \infty) : \mathcal{S})$，我们将其在 $t \in [0, \infty)$ 处的左极限记作 $f(t-)$。对于两个取值于波兰空间 $\mathcal{S}$ 的随机变量 X 和 Y， $X \overset{d}{=} Y$ 表示 X 和 Y 具有相同的概率律。对于 μ， $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$，我们将它们之间的全变差距离定义为

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} := \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

对于概率测度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，我们使用记号 $\mu \leq_d \nu$ 表示 μ 在随机序意义下被 ν支配。我们用 $\mathbb{E}_W$ 表示相对于随机变量

W的分布的期望。有时，若 $\mathcal{L}(W) = \theta$，我们将这样的期望记为 $\mathbb{E}_\theta$。我们用 $\lceil\cdot\rceil$（分别用$\lfloor\cdot\rfloor$）：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}_0$ 表示大于（分别小于）或等于给定非负实数的最小（分别最大）整数。 n维向量 (1,1,...1) 记作 $\mathbf{1}$。Exp(λ) 表示均值为 λ^{-1} 的指数随机变量的分布。区间 (a,b) 上的连续均匀分布记作 $\mathrm{U}(a,b)$。

2 模型描述

考虑 n 个粒子在实数轴上向前运动。领头粒子以速率 1 在相互独立的指数分布时间间隔后向前跳跃，且每次跳跃大小都是一个独立的、取值于 $(0, \infty)$ 的随机变量，其分布为 θ。其余粒子也在相互独立的指数分布时间间隔后跳跃，跳跃速率等于它们与正前方紧邻粒子的距离。此外，这些粒子中的任意一个跳跃时，都会移动到自身与正前方紧邻粒子之间区间内均匀选取的随机位置。$\mathbf{X}(t)$ 表示时间 t 时各粒子位置组成的 n维向量。粒子按降序编号——领头粒子标记为 X_1，其后依次标记为 X_2 等。因此，对于每个 $t \geq 0$,

$$X_n(t) < X_{n-1}(t) < \cdots < X_2(t) < X_1(t).$$

在本文中，我们主要研究相关的 $(n-1)$维间隙过程。我们将时间 t 时第 i^{th} 个粒子与第 $(i+1)^{th}$ 个粒子之间的间距记为

$$Y_i(t) := X_i(t) - X_{i+1}(t),\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

因此， 与 n 粒子系统相关的间隙过程在时间 $t \geq 0$ b 记作 y

$$\mathbf{Y}(t) := (Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_{n-1}(t)).$$

注意，对于 $i \in [n]\backslash\{1\}$，给定系统截至某个时间 $t > 0$ 的状态， i^{th} 粒子以速率 $Y_i(t-)$ 从其当前位置 $X_i(t-)$ 跳至新位置；该新位置服从 $\mathrm{U}(X_i(t-)\ X_{i-1}(t-))$ 分布。或者，我们也可以说，在给定 $\mathbf{X}(s) : s < t\}$且已知跳跃在时刻 t 发生这一事件的条件下，其跳跃大小是一个取值于 $\mathrm{U}(0,\ Y_{i-1}(t-))$ 的随机变量。为使记号和表述简洁，在语境清楚时，我们会在非正式描述中省略“–”（例如，写作 $t-$时），以及条件语句中的限定语，例如“已知跳跃发生这一事件”。

本节余下部分，令 U 表示一个 $\mathrm{U}(0,\ 1)$ 随机变量，并在每个跳跃时刻独立抽取。根据前文所述的动力学，记作$Y_1(t)$ 的前导间距可以以速率 1 增加一个服从 θ 分布的随机变量（若第一个粒子跳跃），或者以速率 $Y_1(t)$ 减少 $Y_1(t)U$ （若第二个粒子跳跃）。注意，新的间距值也服从 $\mathrm{U}(0,\ Y_1(t))$ 分布。

其余间隙的行为类似——时间 t 时的 i^{th} 间距，对于 $i \in [n-1]\setminus\{1\}$，记作 $Y_i(t)$，其可能以 $Y_{i-1}(t)$ 的速率增加 $Y_{i-1}(t)U$ ，也可能以 $Y_i(t)$ 的速率减少 $Y_i(t)U$ 。

令 $\mathcal{L}_n$ 表示与 n 粒子系统相关的间隙的 $\mathbb{R}_+^{n-1}$值马尔可夫过程 $\mathbf{Y} = (Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots,\ Y_{n-1})$ 的生成元。于是，对于有界可测映射 $f\colon\ \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_n f(\mathbf{y}) := \mathbb{E}_U[f(\mathbf{y} - y_{n-1}Ue_{n-1}) - f(\mathbf{y})]y_{n-1} \tag{2.1}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-2}\mathbb{E}_U[f(\mathbf{y}+y_iU(e_{i+1}-e_i))-f(\mathbf{y})]y_i+\mathbb{E}_\theta[f(\mathbf{y}+Ze_1)-f(\mathbf{y})],$$

其中，Z 表示一个服从 θ 分布的随机变量，其累积分布函数为 F_θ，而 U 是一个 U(0，1) 随机变量；$\mathbb{E}_\theta$（分别地，$\mathbb{E}_U$）表示关于 Z （分别地，U）的期望。下文始终假设 θ 的均值有限。均值无穷的情形需要对我们的技术作一些修改，但我们预计总体方法仍可适用于该情形。为减少模型中的参数，我们还假设 $\mathbb{E}_\theta(Z)=1$；情形 $\mathbb{E}_\theta(Z)\neq 1$ 可类似处理。

注意，我们可以将 (2.1) 改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_nf(\mathbf{y})=&\int_0^{y_{n-1}}f(\mathbf{y}-ue_{n-1})du+\sum_{i=1}^{n-2}\int_0^{y_i}f(\mathbf{y}+u(e_{i+1}-e_i))du\\&+\int_0^{\infty}f(\mathbf{y}+ue_1)\,F_\theta(du)-f(\mathbf{y})\left(\sum_{i=1}^{n-1}y_i+1\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

最后，考虑路径空间 $\Omega=\mathcal{D}([0,\infty):\mathbb{R}_+^{n-1})$ [分别为 $\tilde{\Omega}=\mathcal{D}([0,\infty);\mathbb{R}^n)$，$\mathcal{F}$ [分别为 $\tilde{\mathcal{F}}$] Ω [（分别为 Ω]）上的相应 Borel σ-域。在这两个可测空间上，我们分别用 $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}$ [和 $\tilde{\mathbb{P}}_{\mathbf{x}}$]表示当$\mathbf{Y}$ [（分别为$\mathbf{X}$] ）的初值为$\mathbf{Y}(0)=\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}$ [（分别为$\mathbf{X}(0)=\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$]）时所诱导的概率测度。我们进一步用 $\mathbb{P}_\mu$表示$\mathbf{Y}$在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上诱导的概率测度，其中 $\mathbf{Y}(0)\sim\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$。滥用记号，$(\Omega,\mathcal{F})$（分别为 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}})$）上的典范坐标过程仍记为$\mathbf{Y}$ （分别为$\mathbf{X}$）。

3 主要结果

本文的第一个结果涉及间隙过程的稳定性。

定理 3.1。 间隙的马尔可夫过程$\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n-1})'$具有唯一的平稳分布 π_n。

证明基于构造一个合适的Lyapunov函数。

下一个定理给出了间隙过程$\mathbf{Y}$的一致几何遍历性。为此，回顾马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}$。对于 $t\in[0,\infty)$，考虑$\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}$ 的转移概率核，其可定义为

$$\mathbb{P}^t(\mathbf{y},A):=\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(\mathbf{Y}(t)\in A),\ t\geq 0,\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1},\ A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1}).\tag{3.1}$$

下面的定理将证明，该转移概率核以一致几何速率在全变差距离下收敛到唯一的平稳分布——也就是说，几何速率与初始构型$\mathbf{y}$无关。

定理 3.2。 存在 $\kappa\in(0,\infty)$ 和 $\beta\in(0,1)$，使得对每个 $t>0$，以下结论均成立：

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}\|\mathbb{P}^t(\boldsymbol{y},\cdot)-\pi_n\|_{TV}\leq\kappa\beta^t.$$

一致遍历性的证明通过建立一个关键的小化性质，以及证明某个命中时间的指数矩有限来完成。

在接下来的几个结果中，我们考虑领头者的跳跃大小服从指数分布的情形。我们证明，在这种情形下，间隙的平稳分布具有显式形式，由下文定理中的指数分布的乘积给出。

定理 3.3。 假设 θ 是速率为 1 的指数随机变量的分布。那么，$\mathbf{Y}$ 的平稳分布 π_n 的分布为 $Exp(1)^{\otimes(n-1)}$。

证明依赖于说明，与上文定义的 π_n 相对应的密度满足 $\mathcal{L}_n^*\pi_n = 0$，其中 $\mathcal{L}_n^*$ 是 $\mathcal{L}_n$ 的伴随算子（见 (2.2)）。

注 *3.4*。对于 $\lambda > 0$，令 $\hat{X}^\lambda(t) := X(\lambda^{-1}t)/\lambda$，且 $\hat{Y}^\lambda(t) := Y(\lambda^{-1}t)/\lambda$。假设与上述定理一样，$\theta$ 是速率为 *1* 的指数随机变量的分布。那么，通过简单的缩放论证，很容易验证马尔可夫过程 $\hat{Y}^\lambda$ 具有唯一的平稳分布 $Exp(\lambda)^{\otimes(n-1)}$。此外，$\hat{X}^\lambda$ 的分布与原始未缩放过程的一种变体相同：在该变体中，领头粒子以速率 λ^{-1} 进行跳跃，跳跃大小服从 $Exp(\lambda)$，而后续粒子的行为与原系统完全相同。这一观察揭示了第 *1.3* 节（条目 *4*）中所述棍棒过程的一参数平稳分布族背后的机制。

对于下一个结果，我们再次考虑 θ 服从参数为 1 的指数分布的情形。我们的目标是量化从任意初始分布出发的间隙过程在时间 t 的分布达到与其平稳分布适当接近所需的时间。为此，我们采用 $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ 中概率测度之间的全变差距离。给定间隙的初始构型（分布）$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$，记对应于 $t \in [0,\infty)$ 的转移核（类似于 (3.1)），为

$$\mathbb{P}^t(\mu, A) := \mathbb{P}_\mu(\mathbf{Y}(t) \in A),\ \ t \geq 0,\ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1}),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1}).$$

定义

$$d(t) := \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})} \left\| \mathbb{P}^t(\mu, \cdot) - \pi_n \right\|_{\mathrm{TV}} \tag{3.2}$$

并将该过程的混合时间定义为

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) := \inf\{t \geq 0 : d(t) \leq \varepsilon\}, \quad t_{\mathrm{mix}} := t_{\mathrm{mix}}\left(\frac{1}{4}\right).$$

利用全变差距离的压缩性质，对于 $l > 0$，我们有 ，

$$d(l t_{\mathrm{mix}}) \leq 2^{-l}, \tag{3.3}$$

因此，

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \leq \lceil \log_2 \varepsilon^{-1} \rceil t_{\mathrm{mix}}.$$

参见 [34, 公式 4.33-4.34]。现在我们给出 t_{mix} 关于粒子系统规模 n 的上下界。

定理 3.5。 假设 θ 服从 $Exp(1)$ 分布。那么，存在与 n 无关的常数 c_1、 $c_2 > 0$，使得间隙过程 $\mathbf{Y}$ 的混合时间 t_{mix} 满足

$$c_1 n \le t_{mix} \le c_2 n (\log n)^2.$$

为建立下界，我们借鉴了 [34, 第7节3]中的思想。该方法依赖于寻找一个合适的区分统计量，即一个映射 $\phi : \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$，使得对于一组非空的初始条件 $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$， $\phi(\mathbf{Y}(t))$的分布与 ϕ 在平稳状态下的分布之间的距离可以从下方进行界定。由于， $d(t)$被定义为最坏情况下的全变差距离（对 $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$中的所有 μ 取上确界），这将为 t_{mix}提供一个下界。

为了获得上界，我们构造间隙过程的一个耦合 $(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2)$，使得其中一个过程（设为$\mathrm{Y}_2$）从平稳状态开始——即，$\mathrm{Y}_2(0) \sim \pi_n$，而另一个过程（$\mathrm{Y}_1$）的初始构型具有任意分布 μ in $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$。我们将该耦合记为 P_{μ,π_n}。具体而言，P_{μ,π_n} 是定义在 $\mathcal{D}([0,\infty) : \mathbb{R}_+^{2(n-1)})$上的概率测度，满足 $\mathrm{P}_{\mu,\pi_n}(\mathrm{Y}_1 \in \cdot) = \mathrm{P}_{\mu}(\mathrm{Y} \in \cdot)$ 且 $\mathrm{P}_{\mu,\pi_n}(\mathrm{Y}_2 \in \cdot) = \mathrm{P}_{\pi_n}(\mathrm{Y} \in \cdot)$，其中 $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2$是 $\mathcal{D}([0,\infty) : \mathbb{R}_+^{2(n-1)})$上的 $(n-1)$维坐标过程。将 $(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2)$ 的耦合时间记为 τ_{coup}，定义为

$$\tau_{\mathrm{coup}} := \inf\{t \ge 0 : \mathbf{Y}_1(s) = \mathbf{Y}_2(s) \text{ for all } s \ge t\}. \tag{3.4}$$

利用 τ_{coup} 的尾概率上界，可以得到 $d(t)$ 的上界（见 [34, 推论 5.5]）。具体而言，我们利用以下事实:

$$d(t) \le \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})} \mathbf{P}_{\mu,\pi_n}\{\tau_{\mathrm{coup}} > t\}. \tag{3.5}$$

结合这两种思路，我们便得到定理 3.5 中关于 t_{mix} 的所述上界。

根据上述结果以及注 3.4 中的观察，我们得到以下推论。回顾注 3.4 中的缩放过程（其中 $\lambda = n$）$\mathbf{X}^n$ 和$\mathbf{Y}^n$。

推论 3.6. 设 $t_n \in \mathbb{R}_+$ 满足 $n^2 \, {}^{t_n}_{(\log n)^2} := \alpha_n \longrightarrow \infty$ ，当 $n \to \infty$ 时。对于 $n \in \mathbb{N}$，固定 $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$。假设 $X_1(0) = 0$，且$\mathbf{Y}(0)$ 服从 μ_n。对于 $x \in [0,1]$，定义

$$U^n(x) := \sqrt{n}\left(\hat{X}_1^n(t_n) - \hat{X}_{\lfloor nx \rfloor}^n(t_n) - x\right), \; x \in [0,1].$$

Then U^n 依分布收敛于一个标准布朗运动，收敛空间为 $\mathcal{D}([0,1] : \mathbb{R})$ $n.$

我们的最终结果涉及领头者的跳跃大小服从幂律分布的情形。对于这一情形，我们证明间隙的尾部比领头粒子跳跃分布的尾部更轻，这可通过某个更高阶矩的有限性来量化。该结果可视为随机跟随领导者动力学下的一种“正则化”形式。

定理 3.7。 假设对于某个 $k \ge 1$, $\mathbb{E}_\theta Z^k < \infty$。那么，在 π_n 下， i^{th} 间距， $Y_i(\cdot)$，对于$i = 1, \ldots, n-1$，对任意 $t \ge 0$ 满足:

$$\mathbb{E}_{\pi_n}[Y_i(t)]^{k+1} < \infty,$$

其中， $\mathbb{E}_{\pi_n}$ 表示在概率测度 $\mathbb{P}_{\pi_n}$ 下的期望，后一个测度如下面的 (2.2) 所介绍。

证明依赖于构造适当的李雅普诺夫函数，以量化 π_n.的可积性性质

3.1 组织结构

本文其余部分的组织如下。第 4 节介绍针对 n 粒子系统的耦合，该耦合在本文后续多个阶段中发挥关键的技术作用。第5节确立间隙过程唯一平稳分布的存在性（定理 3.1），并证明一致遍历性（定理 3.2）。在第 6 节中，我们分析指数型领头粒子情形，得到乘积形式平稳分布（定理 3.3）、混合时间界（定理 3.5）以及在空间尺度变换和大粒子数极限下的函数极限定理（推论 3.6）。最后，第7节考察重尾情形，并推导出间隙高阶矩的有限性（定理 3.7）。

4 耦合构造

本节将介绍一个用于 n 粒子系统的耦合。这也将自动为相应的间隙过程提供一个耦合。耦合的构造及其下文所讨论性质中涉及的思想，将在本文其余部分的多个阶段中使用。

˜考虑如下所述的、从 **(x ˜x)** 出发的 n 粒子系统之间的耦合 **(X,X)**。由于我们关注的是该粒子系统所对应的间隙过程，因此只˜考虑 $x_1 = \tilde{x}_1$ 的情形，即领头粒子 X_1 和 X_1 从同一位置出发。在我们的耦合下，领头粒子使用相同的跳跃时刻和跳跃大小共同演化，因此它们的位置在所有时间都相等。

两个系统中其余粒子的动力学如下。在任意给定时刻，考虑每个系统中的第 $(i+1)^{th}$ 个粒子，它根据其前方间距的大小跳跃，即根据 i^{th} 间距跳跃。回顾一下，间距越大，粒子的跳跃率越高（速度越快）。我们引入一种耦合，使得两个粒子中较慢的一个每次跳跃时，较快的一个也随之跳跃。此外，跳跃大小被设定为使 i^{th} 间隙此时变得相等。我们将这种跳跃称为<style id='5'>合并跳跃。除此之外，较快粒子还可以进行额外的跳跃——但耦合的构造保证它在跳跃后仍然是<style id='7'>较快粒子。也就是说，两个 i^{th} 间隙中较大的一个会一直保持较大，直到合并跳跃发生。注意，在这种耦合下，即使第 $(i+1)^{th}$ 个粒子发生合并跳跃，也不能保证它们此时位于同一位置（因为两个系统中的第 i 个粒子可能位于不同位置），也不能保证 i^{th} 间隙在之后的所有时刻都保持相同（因为两个系统中第 i 个粒子的向前跳跃可能破坏这一相等性）。然而，如果它们前方的所有 i 粒子都已经合并，即它们在两个系统中的位置相同（因此在所描述的耦合下，它们在未来所有时刻都将具有相同的状态），则这两个性质都能得到保证。因此，该系统从前向后依次合并。

现在我们对耦合构造作出精确描述。考虑任意给定的时间，粒子 $X_{i+1}(\cdot)$ 和 $\tilde{X}_{i+1}(\cdot)$（$i+1^{th}$），并将它们前方对应的间距分别记为 $Y_i(\cdot) := X_i(\cdot) - X_{i+1}(\cdot)$ 和 $Y_i(\cdot) := X_i(\cdot) - X_{i+1}(\cdot)$（˜ ˜ ˜）。如前所述，我们将前方间距较小（分别为较大）的粒子称为较慢粒子（分别为较快粒子），也就是说，若 $Y_i(\cdot) < Y_i(\cdot)$，则 $X_{i+1}(\cdot)$ 是较慢粒子，反之亦然。我们记 $m_i(\cdot) = Y_i(\cdot) \wedge Y_i(\cdot)$

以及 $n_i(\cdot) = Y_i(\cdot) \vee Y_i(\cdot) - Y_i(\cdot) \wedge Y_i(\cdot)$。较快粒子必须以速率 $m_i(\cdot) + n_i(\cdot)$ 跳跃，而较慢粒子以速率 $m_i(\cdot)$ 跳跃。我们按如下方式构造耦合。在时间 t，两个系统中第 $(i+1)$ 对粒子的跳跃以速率 $m_i(t) + n_i(t)$ 发生。跳跃分为以下两种类型：

1. 以概率 $\frac{n_i(t)}{m_i(t)+n_i(t)}$，较快粒子按照跳跃长度分布 $\mathrm{U}(0, n_i(t))$ 进行跳跃，而较慢粒子不跳跃。
2. 以概率 $\frac{m_i(t)}{m_i(t)+n_i(t)}$，较快粒子跳跃一个由随机变量 U^* 表示的量，其分布为 $\mathrm{U}(n_i(t) - m_i(t) + n_i(t))$。此外，在这种情况下，较慢粒子同时跳跃 $U^* - n_i(t)$。

在继续之前，我们先证明上述方案确保 $(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 是由马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}$ 描述的 n-粒子系统的有效耦合。为此，只需检查上述耦合构造中每个系统内粒子的边际跳跃率和跳跃大小分布是否与所研究粒子系统中的相应量一致。再次考虑给定时间 t 的 $(i+1)^{th}$ 个粒子，$X_{i+1}(\cdot)$ 和 $\tilde{X}_{i+1}(\cdot)$。不失一般性，假设 $Y_i(t) < Y_i(t)$——也就是说，在时刻 t，X_{i+1}（分别为 $\tilde{X}_{i+1}$）是较慢（分别为较快）的粒子（同样，为简化记号，以下均以 t 代替 $t-$，并省略明确写出的条件事件）。因此，我们有 $m_i(t) = Y_i(t)$，且 $n_i(t) = Y_i(t) - Y_i(t)$。于是，在上述耦合动力学下，$X_{i+1}(t)$ 的跳跃率为 $\frac{m_i(t)}{m_i(t)+n_i(t)}(m_i(t) + n_i(t)) = Y_i(t)$，而 $\tilde{X}_{i+1}(t)$ 的跳跃率为 $m_i(t) + n_i(t) = \tilde{Y}_i(t)$。时刻 t 的 $X_{i+1}(\cdot)$ 跳跃大小（以发生跳跃为条件）为 $U^* - n_i(t)$，显然服从 $\mathrm{U}(0, m_i(t))$，或等价地，服从 $\mathrm{U}(0, Y_i(t))$。最后，$X_{i+1}(\cdot)$ 的跳跃大小可表示为 $\chi U' + (1-\chi)U^* \sim \mathrm{U}(0, Y_i(t))$，我们将其记为 J；其中，U' 是一个取值于 $\mathrm{U}(0, n_i(t))$ 的随机变量，χ 是一个成功概率为 $\frac{n_i(t)}{m_i(t)+n_i(t)}$ 的伯努利随机变量，且 χ、U'、U^* 相互独立。这就验证了，在上述耦合构造下，$\mathbf{X}$（分别为 $\tilde{\mathbf{X}}$）的分布为 $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}$（分别为 $\mathbb{P}_{\tilde{\mathbf{x}}}$）。

现在，我们将对耦合作一些重要观察。首先请注意，当两个过程中的 i^{th} 间隙变得相等时，X_{i+1} 和 $\tilde{X}_{i+1}$ 会同时跳跃，且跳跃长度相同，该长度由一个在间距范围内均匀分布的随机变量给出。如前所述，我们将第二类跳跃称为合并跳跃。我们称 $(i+1)^{th}$ 粒子已经合并，如果对于每个 $j \in [i]$，X_j 和 $\tilde{X}_j$ 都处于相同位置，随后 X_{i+1} 和 $\tilde{X}_{i+1}$ 发生一次合并跳跃。请注意，发生这样的跳跃后，对于每个 $j \in [i+1]$，X_j 和 $\tilde{X}_j$ 在所有未来时刻都相同。

现在，利用上述耦合构造（$\mathbf{X}$，$\tilde{\mathbf{X}}$），考虑间隙的马尔可夫过程（$\mathbf{Y}$ $\tilde{\mathbf{Y}}$），其初始值为（$\mathbf{Y}(0)$ $\tilde{\mathbf{Y}}(0)$）=（$\mathbf{y}$ $\tilde{\mathbf{y}}$）$\in \mathbb{R}_+^{2(n-1)}$。由于（$\mathbf{x}$ $\tilde{\mathbf{x}}$）是任意的（除 $x_1 = \tilde{x}_1$ 之外），（$\mathbf{y}$ $\tilde{\mathbf{y}}$）可以取 $\mathbb{R}_+^{2(n-1)}$ 中的任意值。我们将相应的（$\mathbf{Y}$，$\tilde{\mathbf{Y}}$）的联合分布记为 $\mathbb{P}_{\mathbf{y},\,\tilde{\mathbf{y}}}$，并将期望记为 $\mathbb{E}_{\mathbf{y},\,\tilde{\mathbf{y}}}$。注意，马尔可夫过程（$\mathbf{Y}$，$\tilde{\mathbf{Y}}$）具有如下生成元：对于有界可测的 $f:\ \mathbb{R}_+^{2(n-1)} \to \mathbb{R}$，

$$\mathcal{L}_n^{(\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{Y}})} f(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbb{E}_\theta \left[f(\mathbf{y} + Ze_1, \tilde{\mathbf{y}} + Ze_1) - f(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=2}^{n-2} y_i^* \mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{y}+y_i^* U(e_{i+1}-e_i)\mathbf{1}_{y_i>\tilde{y}_i}, \tilde{\mathbf{y}}+y_i^* U(e_{i+1}-e_i)\mathbf{1}_{y_i\le\tilde{y}_i})-f(\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}})\right] \\
&+\sum_{i=2}^{n-2} y_i' \mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{y}+(y_i^*\mathbf{1}_{y_i>\tilde{y}_i}+y_i' U)(e_{i+1}-e_i), \tilde{\mathbf{y}}+(y_i^*\mathbf{1}_{y_i\le\tilde{y}_i}+y_i' U)(e_{i+1}-e_i))-f(\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}})\right] \\
&+y_{n-1}^* \mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{y}-y_{n-1}^* U e_{n-1}\mathbf{1}_{y_{n-1}>\tilde{y}_{n-1}}, \tilde{\mathbf{y}}-y_{n-1}^* U e_{n-1}\mathbf{1}_{y_{n-1}\le\tilde{y}_{n-1}})-f(\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}})\right] \\
&+y_{n-1}' \mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{y}-(y_{n-1}^*\mathbf{1}_{y_{n-1}>\tilde{y}_{n-1}}+y_{n-1}U')e_{n-1}, \tilde{\mathbf{y}}-(y_{n-1}^*\mathbf{1}_{y_{n-1}\le\tilde{y}_{n-1}}+y_{n-1}U')e_{n-1})-f(\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}})\right],
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

其中 $y_i' := y_i \wedge \tilde{y}_i$，$y_i^* := (y_i \vee \tilde{y}_i) - y_i'$，$Z \sim \theta$ 以及 $U \sim \mathrm{U}(0,1)$。在上述公式中，第一行描述两个系统中领头粒子的同步跳跃；第二行和第四行描述较快粒子的跳跃；第三行和第五行描述两个粒子的合并跳跃。注意，每次一个既不是领头粒子也不是最后一个粒子的粒子发生跳跃时，都会使间隙过程的两个坐标发生变化，从而产生上述表达式中的 $e_{i+1}-e_i$ 项。

5 间隙过程的稳定性

本节将证明定理 3.1 和定理 3.2。第一个定理表明，间隙过程$\mathbf{Y}$具有唯一的平稳分布；第二个定理则表明，该过程的分布以几何速率收敛至平稳状态，且关于初始条件均匀成立（以全变差距离衡量）。

5.1 平稳分布的存在性与唯一性

本节将证明马尔可夫族$\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}$ 存在唯一的平稳分布（定理 3.1）。我们先给出关于间隙过程弱 Feller 性质的以下结果。回忆一下，若波兰空间 $\mathcal{S}$ 上的马尔可夫过程 $\{\mathbf{Z}(t) : t \ge 0\}$ 满足如下条件，则称其具有弱 Feller 性质：对于任意 $f \in C_b(\mathcal{S})$ 及任意 $t \ge 0$，函数 $\mathbf{z} \mapsto \mathbb{E}_{\mathbf{z}}(f(\mathbf{Z}(t)))$（其中 $\mathbb{E}_{\mathbf{z}}$ 表示在 $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$ 几乎必然成立时的期望）属于 $C_b(\mathcal{S})$。回忆一下，上一节引入了如下耦合：$\tilde{}$ 个粒子系统的$(n-1)$维间隙过程 $(\mathbf{Y},\mathbf{Y})$ 的联合分布记为 $\mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}$，其中$\mathbf{Y}^n(0) = \mathbf{y}$ 且$\mathbf{Y}^n(0) = \tilde{}\mathbf{y}$。

引理 5.1。 固定 $n \in \mathbb{N}$。对于任意 $t \ge 0$、 $\delta > 0$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$,

$$
\lim_{\tilde{\mathbf{y}}\to\mathbf{y}} \mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} |Y_i^n(t) - \tilde{Y}_i^n(t)| \ge \delta\right) = 0.
$$

In 特别地， n 粒子系统的间隙过程具有弱 *Feller* 性质 .

*Pr*哎。 我们将计算作用于 f 的式 (4.1) 中的生成元： $\mathbb{R}_+^{2(n-1)} \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$
f(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - \tilde{x}_i|, \ (\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}_+^{2(n-1)}. \tag{5.1}
$$

我们将逐一处理式 (4.1) 右侧的五项（将其中的 y 替换为 x）。显然，由 $\mathbb{E}_\theta\left[f(\mathbf{x}+Ze_1,\ \tilde{}\mathbf{x}+Ze_1)-f(\mathbf{x}\ \tilde{}\mathbf{x})\right]$ 给出的第一项为 0。

现在，对于第二项，考虑求和中的 i^{th} 分量。对于 i^{th} 分量，消去未变化的量后，我们得到

$$x_i^*\Big[\mathbb{E}_U|x_i-x_i^*U\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}-\tilde{x}_i+x_i^*U\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}|+\mathbb{E}_U|x_{i+1}+x_i^*U\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}-\tilde{x}_{i+1}-x_i^*U\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}| \\ -|x_i-\tilde{x}_i|-|x_{i+1}-\tilde{x}_{i+1}|\Big].$$

注意，在上面的表达式中，$[\cdot]$ 内的项中，第一项与第三项之差为 $-x_i^*\mathbb{E}_U(U)=-\frac{x_i^*}{2}$，而第二项与第四项之差至多为 $x_i^*\mathbb{E}_U(U)=\frac{x_i^*}{2}$。因此，上述表达式非正。由此可知，对于我们选择的 f，(4.1) 中的第二项非正，即

$$\sum_{i=2}^{n-2}x_i^*\mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{x}+x_i^*U(e_{i+1}-e_i)\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i},\tilde{\mathbf{x}}+x_i^*U(e_{i+1}-e_i)\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i})-f(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\right]\le 0.$$

接下来考察 (4.1) 中的第三项，并查看求和的 i^{th} 分量。我们像之前一样进行消去，得到

$$x_i'\Big[\mathbb{E}_U|x_i-x_i^*\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}-x_i'U-\tilde{x}_i+x_i^*\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}+x_i'U| \\ +\mathbb{E}_U|x_{i+1}+x_i^*\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}+x_i'U-\tilde{x}_{i+1}-x_i^*\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}-x_i'U|-|x_i-\tilde{x}_i|-|x_{i+1}-\tilde{x}_{i+1}|\Big]. \quad (5.2)$$

在上式中，$[\cdot]$ 内表达式的第一项等于 0，即

$$\mathbb{E}_U|x_i-x_i^*\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}-x_i'U-\tilde{x}_i+x_i^*\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}+x_i'U|=0.$$

对于第二项，注意到 $\mathbb{E}_U|x_{i+1}+x_i^*\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}+x_i'U-\tilde{x}_{i+1}-x_i^*\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}-x_i'U|$ 可由 $|x_{i+1}-\tilde{x}_{i+1}|+x_i^*$ 作为上界。结合观察结果 $x_i^*=|x_i-\tilde{x}_i|$，可知第二项非正，因此 (5.2) 中的表达式也非正。因此，采用上述 f 选择时，(4.1) 右侧的第三项同样非正，即

$$\sum_{i=2}^{n-2}x_i'\mathbb{E}_U\left[f(\mathbf{x}+(x_i^*\mathbf{1}_{x_i>\tilde{x}_i}+x_i'U)(e_{i+1}-e_i),\tilde{\mathbf{x}}+(x_i^*\mathbf{1}_{x_i\le\tilde{x}_i}+x_i'U)(e_{i+1}-e_i))-f(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\right]\le 0.$$

(4.1) 中的第四项可简化为以下表达式

$$x_{n-1}^*[|x_{n-1}-\tilde{x}_{n-1}|-x_{n-1}^*\mathbb{E}_U(U)-|x_{n-1}-\tilde{x}_{n-1}|]=-\frac{(x_{n-1}^*)^2}{2}\le 0.$$

最后，(4.1) 中的第五项可化简为

$$x_{n-1}'[-|x_{n-1}-\tilde{x}_{n-1}|]\le 0.$$

综合这些观察结果，我们看到，取 f 如（5.1）所示，

$$\mathcal{L}_n^{(\mathbf{Y},\tilde{\mathbf{Y}})}f(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\le 0\ \text{ for all }\ (\mathbf{x},\tilde{\mathbf{x}})\in\mathbb{R}_+^{2(n-1)}.$$

不妨设在耦合系统中，领头粒子从˜0处开始，并注意到在我们的耦合下，对所有 t都有 $X_1(t) = X_1(t)$。我们注意到，对于 $M < \infty$，在˜集合 $\{X_1(t) \le M\}$上，$\{\mathbf{Y}(s),\ \mathbf{Y}(s)\ 0 \le s \le t\}$ 取值于一个有界集合中，$\mathbb{P}_{\mathbf{y},\ \tilde{\mathbf{y}}}$ 几乎处处成立。令$\tau_M =$ 下确界$\{t \ge 0 :\ X_1(t) \ge M\}$，由Dynkin公式可得

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|Y_i^n(t\wedge\tau_M) - \tilde{Y}_i^n(t\wedge\tau_M)\right|\right) \le \sum_{i=1}^{n-1}|y_i - \tilde{y}_i|. \tag{5.3}$$

在得到上述不等式时，我们使用了以下事实：与 $\mathcal{L}_n^{(\mathbf{Y},\mathbf{Y})}$ 相关、作用于函数 f 的 carré-du-champ 算子在 $\{$（$\mathbf{Y}(s)$ ˜$\mathbf{Y}(s)$）上有界：$0 \le s < \tau_M\}$，因此 Dynkin公式中的局部鞅实际上是鞅。

因此，我们得出，对于每个 $t \ge 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|Y_i^n(t) - \tilde{Y}_i^n(t)\right| \ge \delta\right) &\le \mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|Y_i^n(t) - \tilde{Y}_i^n(t)\right| \ge \delta,\ X_1(t) \ge M\right)\\ &\quad + \delta^{-1}\mathbb{E}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|Y_i^n(t\wedge\tau_M) - \tilde{Y}_i^n(t\wedge\tau_M)\right|\right)\\ &\le \mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}(X_1(t) \ge M) + \delta^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}|y_i - \tilde{y}_i|,\end{aligned}$$

其中第一个不等式使用了马尔可夫不等式。令 $M \to \infty$ 和 ˜$\mathbf{y} \to \mathbf{y}$，即可立即得到引理的第一个结论。引理的第二个结论是第一个结论的直接推论。

□

现在我们证明间隙过程$\mathbf{Y}$.的平稳分布的存在性和唯一性。

5.1.1 定理3.1的证明

证明基于构造一个适当的 Lyapunov函数。对于 $i \in [n-1]$，考虑函数 q_i :$\mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$，定义为 q_i（$\mathbf{y}$）$= y_i$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$。利用（2.1），我们得到，对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$,

$$\mathcal{L}_n q_1(\mathbf{y}) = \mathbb{E}_\theta(Z) + y_1\mathbb{E}_U(-y_1U) = 1 - \frac{y_1^2}{2}, \tag{5.4}$$

其中 $Z \sim \theta$ 和 $U \sim$ U(0，1)。

此外，对于 $i \in [n-1] \setminus \{1\}$,

$$\mathcal{L}_n q_i(\mathbf{y}) = y_{i-1}\mathbb{E}_U(y_{i-1}U) + y_i\mathbb{E}_U(-y_iU) = \frac{y_{i-1}^2 - y_i^2}{2}. \tag{5.5}$$

现在，让我们考虑*Lyapunov*函数 V： $\mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$V(\mathbf{y}) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i y_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\alpha^i q_i(\mathbf{y}),\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}, \tag{5.6}$$

其中取 $\alpha = 10^{-1}$. 将生成元 $\mathcal{L}_n$ 作用于 V，得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n V(\mathbf{y}) &= \alpha\left(1 - \frac{y_1^2}{2}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha^i \left(\frac{y_{i-1}^2 - y_i^2}{2}\right) \\ &= \alpha - \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\alpha^i - \alpha^{i+1}}{2}\right) y_i^2 - \frac{\alpha^{n-1}}{2} y_{n-1}^2 \\ &= \alpha - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\alpha^i - \alpha^{i+1}}{2}\right) y_i^2 - \frac{\alpha^n}{2} y_{n-1}^2.\end{aligned}$$

因此，我们得出：

$$\mathcal{L}_n V(\mathbf{y}) \le \alpha - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i^2. \tag{5.7}$$

定义紧集 $K := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i^2 \le \frac{4\alpha}{1-\alpha}\}$，则有

$$\mathcal{L}_n V(\mathbf{y}) \le -\alpha + 2\alpha \mathbf{1}_K(\mathbf{y}), \ \ y \in \mathbb{R}_+^{n-1}. \tag{5.8}$$

由引理 5.1 推得的马尔可夫过程 $\mathbf{Y}(\cdot)$ 的弱 Feller 性质，加上这一点，说明该过程必定至少存在一个平稳分布 π_n （参见 [22, 推论 1.18]）。

接下来，我们证明平稳分布 π_n 唯一。只需构造所考虑的马尔可夫过程的一个耦合 $\tilde{(\mathbf{Y},\mathbf{Y})}$，其分布记为 $\mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}$，且当初始状态为 $(\mathbf{y}\ \tilde{\mathbf{y}})$ 时，使得相关的耦合时间 τ_{coup} （定义见 (3.4)）满足 $\mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}(\tau_{\text{coup}} < \infty) > 0$，对所有 $(\mathbf{y}\ \tilde{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}_+^{2(n-1)}$ 均成立。该结论的证明见 [8, 引理 6.2] （后一个结果所需的可测性条件可由构造立即得到）。

我们回顾第 4 节中构造的耦合，并注意到，由粒子$\tilde{}$系统 $(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 所给出的耦合会自然地产生一个间隙过程的耦合，记为$\tilde{(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}$。注意，该耦合的构造保证：对于 $i \ge 2$，若粒子 X_j 均已与 X_j 在 $j \le i-1$合并，且粒子对 (X_i, X_i) 中较慢的粒子发生跳跃，则 X_i 和 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}X_i$ 会跳至同一位置。因此，从粒子对 (X_2, X_2) 出发（回忆一下，(X_1, X_1) 一开始便一起运动），并依次合并后续粒子，可确保这些过程的耦合时间以正概率有限。更精确地说，对于所述耦合 $(\mathbf{X}, \mathbf{X})$，考虑这样一个事件： $2n$维过程的前 $(n-1)$ 次跳跃$\tilde{}$ $\tilde{}$依次为：(X_2, X_2) 发生一次合并跳跃，随后 (X_3, X_3) 发生一次合并跳跃$\tilde{}$，依此类推。显然，经过前 $(n-1)$ 次跳跃后，$\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}$ 的状态（$\mathbf{Y}\tilde{}$和 $\mathbf{Y}$ 的状态亦然）变得相同，并在此后的所有时间保持相等。由于该事件以正概率发生，我们得出 $\mathbb{P}_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}(\tau_{\text{coup}} < \infty) > 0$。 π_n 的唯一性随即成立。 □

5.2 一致遍历性

为证明一致遍历性，我们需要两个关键要素。首先，我们推导出一项小化性质，从而为间隙过程在任意非空紧集 C_0 上的转移概率提供适当的下界。接下来，我们对命中某个特定紧集 C 的时间的指数矩给出界，且该界对初始构型均匀成立。

后者将通过利用式 (5.7) 中建立的漂移性质来实现。我们选取的集合 C 根据式 (5.6) 中引入的Lyapunov函数定义如下:

$$C := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1} : V(\mathbf{y}) \leq 4\}. \tag{5.9}$$

我们将该集合对应的命中时间记为 $\tau_C := \inf\{t \geq 0 : \mathbf{Y}(t) \in C\}$. 在下面的引理中，我们推导所需的小化估计。按照Meyn和Tweedie[36], 的术语，这意味着对于该马尔可夫过程，任意紧集 C_0 都是一个小集。

引理 5.2. 取一个非空紧集 $C_0 \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$。存在 $\epsilon > 0$ 和 $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$，使得对每个 $t > 0$，都存在一个 $c(t) > 0$，使得对所有 $\boldsymbol{y} \in C_0$,

$$\mathbb{P}^t(\boldsymbol{y}, A) \geq \epsilon c(t)\nu(A), \quad \textit{for every } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1}). \tag{5.10}$$

此外，对于每个 $0 < a \leq b < \infty$，$\inf^{t\in[a,b]} c(t) > 0$ 。

证明。 为了证明上述结论对 $\mathbb{R}_+^{n-1}$ 中的每个 Borel集都成立，我们先对一类“良好”的集合子类证明该结论，然后利用单调类论证完成证明。定义集合类如下:

$$\mathcal{S}^\circ := \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} [c_i, a_i) : \ 0 \leq c_i < a_i \leq \infty \right\},$$
$$\mathcal{S} := \left\{ \cup_{j=1}^m S_j : m \in \mathbb{N}, S_j \in \mathcal{S}^\circ \text{ for all } 1 \leq j \leq m, S_i \cap S_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

记 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\epsilon)$ 为 $\mathbb{R}_+^{n-1}$ 的所有子集的集合，这些子集对于给定的 ϵ，对所有 $\mathbf{y} \in C_0$ 都满足小化条件 (5.10)。由于 $\mathcal{G}$ 是一个在不交并下封闭的单调类，而 $\mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{S}^\circ$ 中集合的有限不交并构成的代数，因此只需证明：对于某个 $\epsilon > 0$，小化条件 (5.10) 对 $\mathcal{S}^\circ$ 中所有集合、$\mathbf{y} \in C_0$ 以及 $t > 0$ 均成立，并且存在合适的 $c(t)$。任取 $\mathbf{y} \in C_0$，并考虑 $H := \prod_{i=1}^{n-1}[c_i, a_i) \in \mathcal{S}^\circ$ 和 $t > 0$。我们将构造一个包含于 $\{\mathbf{Y}(t) \in H\}$ 中的事件，并利用该事件在 $\mathbb{P}_\mathbf{y}$ 下的概率，得到 $\mathbb{P}^t(\mathbf{y}, H)$. 的下界。然后，我们将适当选取 ϵ 和 $\nu(\cdot)$，使其与 t 无关，从而使所需的小化条件成立。

回忆一下，领头粒子的跳跃大小分布记为 θ。选取 $\lambda > 0$，使得$\theta_{\lambda,\ n} := \theta([\lambda, \lambda(1 + \frac{1}{n-1})]) > 0$。固定 $t > 0$，并将时间区间 $[0, t]$ 划分为 n 个等长区间: $\{[t_{i-1}, t_i] : \ 1 \leq i \leq n\}$，其中 $t_i := \frac{it}{n}$。我们将以 $[0, \lambda]^{n-1}$上的均匀测度作为 ν，从而证明 (5.10)。因此，在为集合 $H = \prod_{i=1}^{n-1}[c_i, a_i)$ 证明该估计时，只需考虑对每个 $i \in [n-1]$, $a_i \leq \lambda$ 的情形。

The 我们将使用的包含于 $\{\mathbf{Y}(t) \in H\}$ 中的事件 B 定义如下。在 B 上,

在时间区间 $[t_0, t_1]$内，领头粒子 X_1 恰好跳跃 $(n-1)$ 次，每次跳跃的长度至少为 λ，至多为 $\lambda\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$。 —

- 在此区间内，所有其他粒子状态均保持不变。
- 在时间区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 内，除第 i^{th} 个粒子外，所有粒子的状态均保持不变。

- 在此时间区间内， X_i 恰好跳跃一次，其跳跃长度满足：跳跃后，$(i-1)^{th}$ 间距， $Y_{i-1}(\cdot) \in [c_{i-1}, a_{i-1})$。

注意， $B \subset \{\mathbf{Y}(t) \in H\}$。我们记为 $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ ，其中 B_i 是在时间区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 内满足上述要求的事件（对于 $i=1$，对应前两条项目；对于 $i>1$，对应最后两条项目）。于是， $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B) = \mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_1) \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_i|B_1, \ldots, B_{i-1})$。

由于 C_0 是紧致的，存在一个 $\alpha > 0$ ，使得对所有 $\mathbf{y} \in C_0$ 都有 $\sum_{j=1}^{n-1} y_j \leq \alpha$ 。由于对于每个$i = 1, \ldots, n$，在事件 $\bigcap_{j=1}^{i} B_j$ 上，领头粒子在时间区间$[0, t_i]$内发生（$n-1$）次跳跃，且每次跳跃的大小都不超过 $\lambda\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$，因此在 $\bigcap_{j=1}^{i} B_j$ 上，

$$\sum_{i=1}^{n-1} Y_i(s) \leq \alpha + n\lambda, \quad \text{for every } s \in [0, t_i]. \tag{5.11}$$

现在我们来求 $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_1)$ 的一个下界。第一颗粒子在区间 $[t_0, t_1]$ 内按描述的方式运动的概率为 $e^{-tn^{-1}} \binom{t}{n}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}(\theta_{\lambda,n})^{n-1}$。 X_2在此时间区间内不发生跳跃的概率至少为 $e^{-tn^{-1}(y_1+n\lambda)}$。此外，给定粒子 X_2 不移动，其他粒子均不在 $[t_0, t_1]$ 内发生跳跃的概率下界为$e^{-tn^{-1}\sum_{i=2}^{n-1} y_i}$。因此，利用式 (5.11)（取 $i=1$），可得

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_1) \geq e^{-tn^{-1}(1+\sum_{i=1}^{n-1} y_i + n\lambda)} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{(\theta_{\lambda,n})^{n-1}}{(n-1)!} \geq e^{-tn^{-1}(1+\alpha+2n\lambda)} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{(\theta_{\lambda,n})^{n-1}}{(n-1)!}.$$

现在我们来考虑 $i \in [n] \backslash \{1\}$。给定其前方的粒子在区间 $[t_{i-1}, t_i]$内均不移动， i^{th} 粒子在该区间内恰好跳跃一次的概率至少为 $e^{-tn^{-1}Y_{i-1}(t_{i-1})} Y_{i-1}(t_{i-1}) \frac{t}{n}$。这里我们利用了这样一个事实：在前方粒子不移动这一事件下，粒子的跳跃率随时间非增。注意，在 $\cap_{j=1}^{i-1} B_j$ 上， $Y_{i-1}(t_{i-1}) > \lambda$。此外，给定 $\cap_{j=1}^{i-1} B_j$，且 X_i 前方的粒子在 $[t_{i-1}, t_i]$内均不移动，单次跳跃后，间距 $Y_{i-1}(\cdot)$ 缩小至区间 $[c_{i-1}, a_{i-1})$内某个值的概率为 $\frac{a_{i-1}-c_{i-1}}{Y_{i-1}\ t_{i-1}}(\ )$。当 $i \neq n$ 时，给定 i^{th} 粒子前方的粒子均不移动，$(i+1)^{th}$ 粒子在此时间区间内不发生跳跃的概率至少为 $e^{-tn^{-1}(Y_i(t_{i-1}) + Y_{i-1}(t_{i-1}))}$。这是因为，在 i^{th} 粒子前方的粒子均不移动这一事件下，i^{th} 粒子跳跃后，$(i+1)^{th}$ 粒子的跳跃率会增加。对于任意 $j \neq 1$、 i、 $i+1$，给定前方的粒子在整个区间内均静止不动，j^{th} 粒子在此区间内不移动的条件概率等于 $e^{-tn^{-1}(Y_{j-1}(t_{i-1}))}$。第一颗粒子在此区间内不跳跃的概率就是$e^{-tn^{-1}}$。综合以上观察，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_i|B_1, \ldots, B_{i-1}) \\
&\geq e^{-tn^{-1}\left(1+\sum_{j=1}^{n-1} Y_j(t_{i-1})\right)} e^{-tn^{-1}Y_{i-1}(t_{i-1})} Y_{i-1}(t_{i-1}) \frac{t}{n} \frac{[a_{i-1} - c_{i-1}]}{Y_{i-1}(t_{i-1})} \\
&= e^{-tn^{-1}\left(1+\sum_{j=1}^{n-1} Y_j(t_{i-1}) + Y_{i-1}(t_{i-1})\right)} \frac{[a_{i-1} - c_{i-1}]t}{n}.
\end{aligned}$$

利用 (5.11)，我们得出

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_i|B_1, \ldots, B_{i-1}) \geq e^{-tn^{-1}(1+2(\alpha+n\lambda))} \frac{[a_{i-1} - c_{i-1}]t}{n}.$$

回忆起 $B \subset H$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^t(\mathbf{y}, H) \geq \mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B) &= \mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_1) \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\mathbf{y}}(B_i | B_1, \ldots, B_{i-1}) \\ &\geq e^{-t(1+2(\alpha+n\lambda))} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{(\theta_{\lambda,n})^{n-1}}{(n-1)!} \prod_{i=2}^{n} \left(\frac{[a_{i-1} - c_{i-1}]t}{n}\right).\end{aligned}$$

因此，令

$$\epsilon = \frac{(\theta_{\lambda,n})^{n-1}}{(n-1)!} n^{-2(n-1)} \lambda^{n-1}, \; c(t) = e^{-t(1+2(\alpha+n\lambda))} \left(\frac{t}{n}\right)^{2(n-1)},$$

并令 ν 为 $[0,\lambda]^{n-1}$ 上的均匀测度，即

$$\nu(H) = \nu\left(\prod_{i=1}^{n-1}[c_i, a_i)\right) = \lambda^{-(n-1)} \prod_{i=1}^{n-1}(a_i - c_i),$$

对于 $\mathcal{S}^\circ$ 中的集合 $H = \prod_{i=1}^{n-1}[c_i, a_i) \subseteq [0,\lambda]^{n-1}$，我们有小化条件 $\mathbb{P}^t(\mathbf{y}\ H) \geq \epsilon c(t)\nu(H)$ 成立，对每个 $t > 0$、$\mathbf{y} \in C_0$ 和 $H \in \mathcal{S}^\circ$ 均成立。另请注意，对于所有 $0 < a \leq b < \infty$，$\inf_{t\in[a,b]} c(t) > 0$。结论由此得证。 □

现在我们考虑 (5.9) 中引入的紧集 C，并证明对于 C 的命中时间，其指数矩有限，且对所有初始构型均匀成立。

引理 5.3. 存在 $\eta \in (0,\infty)$ 使得

$$\sup_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{y}} e^{\eta\tau_C} < \infty.$$

证明。 证明利用了 (5.6) 中定义的 Lyapunov函数 V 的漂移性质 (5.7)，该性质借助相应的指数超鞅给出了 τ_C 尾概率的界。

我们首先注意到，对漂移不等式 (5.7) 作如下修改会更符合我们的目的。根据柯西–施瓦茨不等式，对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i^2\right).$$

注意到，对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i = \frac{\alpha}{1-\alpha}$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i^2 \geq \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i y_i\right)^2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) [V(\mathbf{y}) - 1]^2.$$

结合　　结合式（5.7），我们现在得到以下对漂移不等式的修正，

$$\mathcal{L}_n V(\mathbf{y}) \leq \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha} [V(\mathbf{y}) - 1]^2 = \alpha - \alpha' [V(\mathbf{y}) - 1]^2, \; \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}, \tag{5.12}$$

其中 $\alpha' := \frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha}$。

现在定义一列停时 $\tau_i := \inf\{t \geq 0 : V(\mathbf{Y}(t)) \leq \lambda_i\}$ 对 $i \in \mathbb{N}$，其中$\lambda_i = 4^i$。我们还定义 $\tau_\infty := 0.$。注意，对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，$\tau_C = \tau_1 = \sum_{i=1}^{\infty}(\tau_i - \tau_{i+1})$，几乎必然成立。因此，对于任意 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(\tau_C \geq t) = \mathbb{P}_{\mathbf{y}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\tau_i - \tau_{i+1}) \geq t\right).$$

定义 $\beta_i := 2^{-i}$，对 $i \in \mathbb{N}$成立。由于 $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(\tau_C \geq t) &= \mathbb{P}_{\mathbf{y}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\tau_i - \tau_{i+1}) \geq t\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\left(\tau_i - \tau_{i+1} \geq t\beta_i\right).\end{aligned} \tag{5.13}$$

对于稍后将适当选取的 $\theta > 0$，定义过程 $\zeta(t) := e^{\theta t}V(\mathbf{Y}(t))$。利用Dynkin公式可得

$$M(t) := \zeta(t) - V(\mathbf{y}) - \int_0^t \left[e^{\theta s}\mathcal{L}_n V(\mathbf{Y}(s)) + \theta e^{\theta s}V(\mathbf{Y}(s))\right] ds,\ t \geq 0$$

is 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}$ 下，对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，它是一个 $\mathcal{F}_t$-局部鞅，其中 $\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathbf{Y}(s) : s \leq t\}$.

注意到，根据（5.12），对于 $s \in [t \wedge \tau_{i+1}, t \wedge \tau_i)$，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n V(\mathbf{Y}(s)) &\leq \alpha - \alpha' - \alpha' V(\mathbf{Y}(s))^2 + 2\alpha' V(\mathbf{Y}(s)) \\ &\leq \alpha - \alpha' + \alpha'(2 - \lambda_i)V(\mathbf{Y}(s)).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathcal{L}_n V(\mathbf{Y}(s)) + \theta V(\mathbf{Y}(s)) \leq \alpha - \alpha' + \alpha'(2 + \theta - \lambda_i)V(\mathbf{Y}(s)).$$

由于 $\alpha = 10^{-1}$，我们有 $\alpha - \alpha' < 0.$。现在令 $\theta = \frac{\lambda_i}{2}$，我们有

$$\mathcal{L}_n V(\mathbf{Y}(s)) + \theta V(\mathbf{Y}(s)) \leq 0,\ s \in [t \wedge \tau_{i+1}, t \wedge \tau_i),\ i \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

由 M 的局部鞅性质以及（5.14），我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[\left(e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_i \wedge t)}V(\mathbf{Y}(\tau_i \wedge t)) - e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_{i+1} \wedge t)}V(\mathbf{Y}(\tau_{i+1} \wedge t))\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_{i+1} \wedge t}\right] \leq 0$$

因此，由于 $V \geq 1$,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_i \wedge t - \tau_{i+1} \wedge t)} \mid \mathcal{F}_{\tau_{i+1} \wedge t}\right] \leq \mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_i \wedge t - \tau_{i+1} \wedge t)}V(\mathbf{Y}(\tau_i \wedge t)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{i+1} \wedge t}\right] \leq V(\mathbf{Y}(\tau_{i+1} \wedge t)),\ \mathbb{P}_{\mathbf{y}}\text{ a.s.} \tag{5.15}$$

这里利用了 carré-du-champ 项 $\mathcal{L}_n(V^2)(\mathbf{y}) - 2V(\mathbf{y})\mathcal{L}_n V(\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}_+^{n-1}$ 的紧致子集上有界这一事实，并采用了与（5.3）中所用论证类似的方法。

现在我们论证，对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}$ ，几乎处处有，

$$\tau_i < \infty \text{ and } \mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left(e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_i-\tau_{i+1})}\right) \le \lambda_{i+1}, \text{ for every } i \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

通过递归论证完成 (5.16) 的证明。固定$\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，并选择足够大的 i^*，使得对于所有 $i \ge i^*+1$， $V(\mathbf{y}) \le \lambda_i$。于是，(5.16) 对 $i \ge i^*+1$ 成立。现在假设 (5.16) 对某个满足 $i^*+1 \ge i > 1$ 的 i 成立，并考虑 $i-1$，且不失一般性地假设 $V(\mathbf{y}) > \lambda_i$ （否则可应用前面的论证）。任取 $t > 0$。由 (5.15),

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_{i-1}(\tau_{i-1}\wedge t-\tau_i\wedge t)}\right] \le \mathbb{E}_{\mathbf{y}}V(\mathbf{Y}(\tau_i \wedge t)).$$

此外，由于对于 $0 \le s < \tau_i$， $V(\mathbf{Y}(s)) > \lambda_i$，根据 (5.12)，对于所有 $s \in [0, \tau_i \wedge t$， $\mathcal{L}_n V(\mathbf{Y}(s)) < 0$。结合 (5.8)、Dynkin公式和单调收敛可得

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_{i-1}(\tau_{i-1}\wedge t-\tau_i\wedge t)}\right] \le \mathbb{E}_{\mathbf{y}}V(\mathbf{Y}(\tau_i \wedge t)) \le V(\mathbf{y}).$$

利用单调收敛，令 $t \to \infty$ 趋于极限后，我们得到:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_{i-1}(\tau_{i-1}-\tau_i)}\right] \le V(\mathbf{y}).$$

特别地， $\tau_{i-1} < \infty$, $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}$ 几乎必然成立。这也表明

$$e^{\frac{1}{2}\lambda_{i-1}(\tau_{i-1}\wedge t-\tau_i\wedge t)} \to e^{\frac{1}{2}\lambda_{i-1}(\tau_{i-1}-\tau_i)} \text{ in } L^1(\mathbb{P}_{\mathbf{y}}).$$

结合鞅收敛定理和 (5.15)，可得

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_{i-1}-\tau_i)} \mid \mathcal{F}_{\tau_i-}\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_{i-1}\wedge t-\tau_i\wedge t)} \mid \mathcal{F}_{\tau_i\wedge t}\right] \le \lim_{t\to\infty} V(\mathbf{Y}(\tau_i \wedge t)) = V(\mathbf{Y}(\tau_i)) \le \lambda_i,$$

其中 $\mathcal{F}_{\tau_i-} := \sigma(\cup_{t\ge 0}\mathcal{F}_{\tau_i\wedge t})$。取期望可得

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_{i-1}-\tau_i)}\right] \le \lambda_i$$

至此完成递推步骤，并证明了 (5.16)。

利用马尔可夫不等式，对于 $i \ge 1$，我们现在得到

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\left(\tau_i - \tau_{i+1} \ge t\right) \le e^{-\frac{1}{2}\lambda_i t}\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left(e^{\frac{1}{2}\lambda_i(\tau_i-\tau_{i+1})}\right) \le \lambda_{i+1}e^{-\frac{1}{2}\lambda_i t}.$$

将其代入式 (5.13)，得到

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(\tau_C \ge t) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i+1}e^{-\frac{1}{2}\lambda_i\beta_i t} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i+1}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}t}.$$

注意到

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_i}t \ge \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}, \text{ for } t \ge 1,\ i \ge 1.$$

因此，

$$\mathbb{P}_{\mathbf{y}}(\tau_C \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i+1} e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}} = \Lambda e^{-\frac{1}{2}t}, \text{ for } t \geq 1,$$

其中 $\Lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i+1} e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{i+1} e^{-2^{i-2}} < \infty$。现在可以通过直接论证得出，对于 $0 < \eta < \frac{1}{2}$，

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}} e^{\eta \tau_C} \leq e^{\eta} + 2\eta\Lambda \frac{1}{1-2\eta} e^{\eta - \frac{1}{2}}.$$

结论得证。 □

现在我们将使用 [20, 定理 5.2] 来完成一致遍历性的证明。为此，我们将在下一个结果中证明马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}}$ 是 ψ-不可约的（回顾[20]中的这一概念）。

回顾引理 5.2 中得到的测度 ν 和常数 ϵ，它们使小化条件 (5.10) 成立。

命题 5.4。在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ 上定义测度 ψ 为 $\psi(A) := \nu(A)$，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1})$。那么马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{y}}\}_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}}$ 是 ψ-不可约的。

证明。要证明 ψ-不可约性，只需证明对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$和满足 $\psi(B) > 0$ 的 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1})$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{\mathbf{Y}(t) \in B\}} \, dt > 0.$$

现在固定满足 $\psi(B) > 0$ 的 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n-1})$。回顾在 (5.9) 中定义的集合 C。由于 C 是紧致的，根据引理 5.2，存在一个 $\epsilon > 0$，使得

$$\mathbb{P}^t(\mathbf{y}', B) \geq \varepsilon \nu(B),$$

对任意 $t \in [1, 2]$，$\mathbf{y}' \in C$，均成立。

固定 $t_0 > 0$。那么对于任意 $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2]$

$$\mathbb{P}^t(\mathbf{y}, B) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \mathbb{P}^{t-t_0}(\mathbf{y}', B) \, \mathbb{P}^{t_0}(\mathbf{y}, d\mathbf{y}') \geq \varepsilon \nu(B) \mathbb{P}^{t_0}(\mathbf{y}, C), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

Thus

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{\mathbf{Y}(t) \in B\}} \, dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}^t(\mathbf{y}, B) \, dt \geq \int_{t_0+1}^{t_0+2} \mathbb{P}^t(\mathbf{y}, B) \, dt \geq \varepsilon \nu(B) \mathbb{P}^{t_0}(\mathbf{y}, C), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

因此，为完成证明，只需证明存在 $t_0 > 0$，使得对于任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，$\mathbb{P}^{t_0}(\mathbf{y}, C) > 0$。

利用与引理 5.2 中类似的事件构造，可以很容易看出这一点。我们将时间区间 $[0, t_0]$ 划分为 $(n-1)$ 个等长区间。考虑如下事件：在这些区间中的每一个区间内，至多有一个粒子跳跃，且该粒子恰好跳跃一次。此外，这些跳跃依次发生

（ X_{i+1} 的可能跳跃发生在第 i 个区间内；领头粒子不跳跃），并且粒子的跳跃大小满足：跳跃之后，相应的间隙变得小于 $3n^{-1}$。如果第 i 个间隙已经小于 $3n^{-1}$，那么在第 i 个时间区间内没有粒子移动。在此事件下，$\mathbf{Y}(t_0) \in C$。由于该事件具有严格为正的概率（当然，这取决于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$），结论得证。 □

现在我们可以完成一致遍历性的证明。

5.3 定理 3.2 的证明

回顾引理 5.3 中的 η，并将函数 V_0 定义为

$$V_0(\mathbf{y}) := 1 - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta}\mathbb{E}_{\mathbf{y}} e^{\eta \tau_C}, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

引理 5.2 表明，按照 Down、Meyn 和 Tweedie 的术语（参见 [20, 第 3] 节），对于马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}$ 中任意的 $t > 0$，集合 C 是 $\varepsilon c(t)\nu$-小集。根据引理 5.3，V_0 是 $\mathbb{R}_+^{n-1}$ 上的有界函数。这表明定理 6.2] 的条件均已满足。因此，V_0 满足 [20, 第 5] 节中的漂移条件 $\mathcal{D}_T$。由此，利用命题 5.4，并注意到 $V_0 \geq 1$，结论可由定理 5.2] 立即得出。 □

6 领头粒子的指数分布跳跃幅度

在本节中，我们考虑 θ 服从参数为 1 的指数分布的情形，即领头粒子以相互独立且服从参数为 1 的指数分布的随机长度向前跳跃。我们给出此情形下平稳分布的显式公式。随后，我们得到过程达到混合所需时间关于系统规模 n 的界。

6.1 平稳密度

在本节中，我们证明定理 3.3。证明的关键是验证 π_n =服从参数为 1 的指数分布时，其密度满足马尔可夫过程的平稳伴随方程。结合定理 3.1 中确立的平稳分布唯一性，即可证明该结论。

6.1.1 定理 3.3 的证明

为了证明 π_n 的分布为参数为 1 的指数分布，我们首先计算生成元 $\mathcal{L}_n$ 的伴随算子，记为 $\mathcal{L}_n^*$。伴随算子 $\mathcal{L}_n^*$ 由以下恒等式刻画：

$$\int_{\mathbf{y}\geq 0} f(\mathbf{y})\mathcal{L}_n g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{y}\geq 0} g(\mathbf{y})\mathcal{L}_n^* f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \tag{6.1}$$

该式对所有具有紧支集的可测函数 f, $g : (0, \infty)^{n-1} \to \mathbb{R}$ 均成立。计算出 $\mathcal{L}_n^*$ 后，我们将证明

$$\mathcal{L}_n^* \Pi_n(\mathbf{y}) = 0, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$$

其中 Π_n 是一个服从参数为 1 的指数分布$^{\otimes(n-1)}$的随机变量的密度:

$$\Pi_n(\mathbf{y}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{y_i>0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

现在固定如上所述的 f, g 。利用（2.2），可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}\geq 0} f(\mathbf{y})\mathcal{L}_n g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_{n-1}} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}-ue_{n-1})\, du\, d\mathbf{y} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2}\int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_i} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}+u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{\infty} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}+ue_1)e^{-u}\, du\, d\mathbf{y} - \int_{\mathbf{y}\geq 0} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y})\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 1\right) d\mathbf{y}. \quad (6.2)\end{aligned}$$

对于（6.2）右端的第一项，交换积分次序并作变量代换$\mathbf{z} = \mathbf{y} - ue_{n-1}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_{n-1}} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}-ue_{n-1})\, du\, d\mathbf{y} &= \int_0^{\infty}\int_{\mathbf{y}\geq ue_{n-1}} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}-ue_{n-1})\, d\mathbf{y}\, du \\ &= \int_0^{\infty}\int_{\mathbf{z}\geq 0} g(\mathbf{z})f(\mathbf{z}+ue_{n-1})\, d\mathbf{z}\, du.\end{aligned}$$

对于（6.2）右端第二项中求和号下的每个量，按照上述类似步骤，并作相应的变量代换$\mathbf{z} = \mathbf{y} + u \cdot (e_{i+1} - e_i)$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_i} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}+u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{y} &= \int_0^{\infty}\int_{\mathbf{y}\geq ue_i} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}+u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{y} \\ &= \int_0^{\infty}\int_{\mathbf{z}\geq ue_{i+1}} g(\mathbf{z})f(\mathbf{z}-u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbf{z}\geq 0}\int_0^{z_{i+1}} g(\mathbf{z})f(\mathbf{z}-u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{z}.\end{aligned}$$

最后，将$\mathbf{z} = \mathbf{y} + ue_1$ 代入第三项，可得

$$\int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{\infty} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y}+ue_1)e^{-u}\, du\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{z}\geq 0}\int_0^{z_1} f(\mathbf{z}-ue_1)g(\mathbf{z})e^{-u}\, du\, d\mathbf{z}.$$

因此，我们可以将（6.2）中的恒等式改写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}\geq 0} f(\mathbf{y})\mathcal{L}_n g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{\infty} g(\mathbf{y})f(\mathbf{y}+ue_{n-1})\, du\, d\mathbf{y} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2}\int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_{i+1}} g(\mathbf{y})f(\mathbf{y}-u(e_{i+1}-e_i))\, du\, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\mathbf{y}\geq 0}\int_0^{y_1} f(\mathbf{y}-ue_1)g(\mathbf{y})e^{-u}\, du\, d\mathbf{y} - \int_{\mathbf{y}\geq 0} f(\mathbf{y})g(\mathbf{y})\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 1\right) d\mathbf{y}\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{y}\geq 0} g(\mathbf{y}) \left[\int_0^\infty f(\mathbf{y} + ue_{n-1})\, du + \sum_{i=2}^{n-1} \int_0^{y_i} f(\mathbf{y} - u(e_i - e_{i-1}))\, du \right.$$
$$\left. + \int_0^{y_1} f(\mathbf{y} - ue_1) e^{-u}\, du - f(\mathbf{y}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 1 \right) \right] d\mathbf{y}.$$

因此，与（6.1）比较可得伴随算子的如下公式：

$$\mathcal{L}_n^* f(\mathbf{y}) = \int_0^\infty f(\mathbf{y} + ue_{n-1})\, du + \sum_{i=2}^{n-1} \int_0^{y_i} f(\mathbf{y} - u(e_i - e_{i-1}))\, du + \int_0^{y_1} f(\mathbf{y} - ue_1) e^{-u}\, du$$
$$- f(\mathbf{y}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 1 \right).$$

现在很容易验证，对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，

$$\mathcal{L}_n^* \Pi_n(\mathbf{y}) = e^{-\sum_{i=1}^{n-1} y_i} \left[\int_0^\infty e^{-u}\, du + \sum_{i=2}^{n-1} \int_0^{y_i} du + \int_0^{y_1} du - \sum_{i=1}^{n-1} y_i - 1 \right] = 0.$$

结论得证。 □

6.2 混合时间——下界

本节给出第 3 节所定义的马尔可夫族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}}$ 的混合时间 t_{mix} 的下界。由于 t_{mix} 定义为对 $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ 中所有初始分布取上确界，因此，为了得到下界，只需考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ 的一个适当子类。

为此，固定任意 $\delta \in (0,1)$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$定义测度类 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(\delta) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$，如下：

$$\mathcal{A}_n(\delta) := \left\{ \mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1}) : \mathbb{E}_{\mu_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i(0) \right) \leq (1-\delta)(n-1) \text{ and } \text{Var}_{\mu_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i(0) \right) \leq n-1 \right\},$$

其中，$\mathbb{E}_{\mu_n}$ 和 Var_{μ_n} 分别是关于概率测度 $\mathbb{P}_{\mu_n}$的期望和方差。注意，$\mathcal{A}_n(\delta)$非空，因为在 $(1-\delta)\mathbf{1}_{n-1}$ 处具有单位质量的测度属于 $\mathcal{A}_n(\delta)$，其中 $\mathbf{1}_{n-1}$ 是由 $(n-1)$ 个 1 组成的维向量。

6.2.1 下界的证明

证明基于确定一个合适的 区分统计量 ϕ，使得 $\phi(\mathbf{Y}(t))$ 的期望值与平稳状态下的期望值（即 $\int \phi d\pi_n$）之间的差异能够得到适当的下界。具体而言，我们使用了 [34, 命题 7.12]中的事实：对于波兰空间 $\mathcal{S}$上的概率测度 μ、ν，以及定义在 $\mathcal{S}$ 上的实值函数 f，满足 $\int f^2 d\mu < \infty$、$\int f^2 d\nu < \infty$，如果对于某个 $r > 0$，

$$|\mathbb{E}_\mu f - \mathbb{E}_\nu f| \geq r \left[\frac{\text{Var}_\mu(f) + \text{Var}_\nu(f)}{2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

则可推出

$$\|\mu-\nu\|_{\mathrm{TV}} \geq 1-\frac{4}{4+r^2}. \tag{6.3}$$

我们指出， [34]中的证明是针对有限状态空间上的测度写的，但该论证可以直接推广到一般的波兰空间。

我们将利用 (6.3)，对 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta)$ 的 $\|\mathbb{P}^t(\mu_n,\cdot)-\pi_n\|_{\mathrm{TV}}$ 给出一个下界，其中 $\delta \in (0,1)$ 取适当的值。进而，我们可以得到混合时间的一个下界估计。

定义函数 $\phi : \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$，将其作为区分统计量:

$$\phi(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n-1} y_i.$$

注意，对于定理 3.1 中得到的平稳分布 π_n ，我们有

$$\mathbb{E}_{\pi_n}(\phi) = (n-1) \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}_{\pi_n}(\phi) = (n-1). \tag{6.4}$$

还要注意，由于领头粒子的跳跃大小服从指数分布，对于任意 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta)$ 和 $t \geq 0\mathbb{E}_{\mu_n}(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2(t))$，且因此 $\mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t)))^2$，有限。现在我们对 $|\mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t))) - (n-1)|$，其中 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta)$，给出一个合适的下界。

由 (5.4)-(5.5) 可知，对于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$,

$$\mathcal{L}_n\phi(\mathbf{y})) = \left(1-\frac{y_1^2}{2}\right) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{y_{i-1}^2-y_i^2}{2}\right) = 1-\frac{1}{2}y_{n-1}^2.$$

通过一个论证 ，并利用 $\mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t)))^2 < \infty$，我们可知 t

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t))) &= \mathbb{E}_{\mu_n}\phi(\mathbf{Y}(0)) + \int_0^t \mathbb{E}_{\mu_n}\mathcal{L}_n\phi(\mathbf{Y}(s))\, ds \\ &\leq (1-\delta)(n-1) + t - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}_{\mu_n} Y_{n-1}^2(s)\, ds,\end{aligned}$$

其中，最后一行是利用上述 $\mathcal{L}_n\phi$ 的公式并注意到对于任意 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta)$ 得出的,

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i(0)\right) \leq (1-\delta)(n-1).$$

因此我们有

$$\mathbb{E}_{\pi_n}(\phi) - \mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t)) \geq \delta(n-1) - t + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}_{\mu_n} Y_{n-1}^2(s)\, ds.$$

因此，对于 $t \in (0, \frac{\delta n}{2})$ 和 $n \geq 2$，我们有

$$|\mathbb{E}_{\pi_n}(\phi) - \mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t))| \geq (\delta(n-1)-t)\,.$$

接下来，我们考虑方差。由 (6.4)，$\mathrm{Var}_{\pi_n}(\phi) = (n-1)$。现在，我们考虑 $\mathrm{Var}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t))$. 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t)) &= \mathrm{Var}_{\mu_n}(X_1(t) - X_n(t)) \le \mathbb{E}_{\mu_n}[X_1(t) - X_n(t)]^2 \le \mathbb{E}_{\mu_n}[X_1(t) - X_n(0)]^2 \\ &\le 2\mathbb{E}_{\mu_n}[X_1(t) - X_1(0)]^2 + 2\mathbb{E}_{\mu_n}[X_1(0) - X_n(0)]^2 \\ &\le 2(2t + t^2) + 2(n-1) + 2(1-\delta)^2(n-1)^2.\end{aligned}$$

固定 $\varepsilon \in (0, \delta/2)$ 和 $n \ge 2$。取 $t = n\varepsilon$。那么

$$\mathrm{Var}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(n\varepsilon)) \le 2[2n\varepsilon + n^2\varepsilon^2 + (1-\delta)^2(n-1)^2 + n - 1].$$

因此,

$$\sigma^2 := \frac{1}{2}[\mathrm{Var}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(n\varepsilon)) + \mathrm{Var}_{\pi_n}(\phi)] \le \left[\frac{n-1}{2} + 2n\varepsilon + n^2\varepsilon^2 + (1-\delta)^2(n-1)^2 + n - 1\right]$$

and

$$\begin{aligned}A_n(\varepsilon, \delta) &:= \frac{1}{\sigma^2}|\mathbb{E}_{\pi_n}(\phi) - \mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(t)))|^2 \\ &\ge (\delta(n-1) - n\varepsilon)^2 \left[\frac{n-1}{2} + 2n\varepsilon + n^2\varepsilon^2 + (1-\delta)^2(n-1)^2 + n - 1\right]^{-1}.\end{aligned}$$

注意,

$$\limsup_{\delta\to 1}\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon, \delta) = \limsup_{\delta\to 1}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{(\delta-\varepsilon)^2}{(\varepsilon^2 + (1-\delta)^2)} = \limsup_{\delta\to 1}\frac{\delta^2}{(1-\delta)^2} = \infty.$$

因此，我们可以找到 $\delta_0 \in (0,1)$、$\varepsilon_0 \in (0, \delta_0/2)$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \ge n_0$ 和 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta_0)$,

$$|\mathbb{E}_{\pi_n}(\phi) - \mathbb{E}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(n\varepsilon_0)))| > 2\left(\frac{1}{2}[\mathrm{Var}_{\mu_n}(\phi(\mathbf{Y}(n\varepsilon_0)) + \mathrm{Var}_{\pi_n}(\phi)]\right)^{1/2}.$$

由 (6.3)，现在可知，对于 $n \ge n_0$ 和 $\mu_n \in \mathcal{A}_n(\delta_0)$,

$$\|\pi_n - \mathbb{P}^{n\varepsilon_0}(\mu^n, \cdot)\|_{\mathrm{TV}} \ge 1 - \frac{4}{4 + 2^2} = 1/2.$$

因此，对所有 $n \ge n_0$，都有 $t_{\mathrm{mix}} \ge \varepsilon_0 n$，从而完成了定理 3.5 中下界的证明。
□

6.3 混合时间 - 上界

本节将证明定理 3.5 中的上界，即证明混合时间至多为 $n(\log n)^2$. 的量级。在继续之前，我们先简要概述一下我们的思路。

6.3.1 方法

如第 3 节所述，这一证明的关键思路是构造一个合适的耦合，并利用耦合时间的尾概率，得到间隙过程在给定时间的分布与平稳分布之间距离的上界。进而，我们便可得到混合时间 t_{mix} 的上界。

˜回顾第 4 节中构造的、由过程 $\mathbf{Y}$,$\mathbf{Y}$ 定义的耦合。在这种耦合下，如果 $Y_i(\cdot) \wedge \tilde{Y}_i(\cdot)$ 足够大——例如达到 $O(1)$——那么 i^{th} 间隙将在 $O(1)$ 时间内合并。主要的挑战在于处理间隙非常小的情形。具体而言，目前尚不清楚如何根据间距的下界，对混合时间进行先验控制，并且这一控制要对所有间隙均匀成立。为了解决这一困难，我们引入一个新的粒子系统，它刻画了可能间隙配置中的最坏情况。在这个系统中，除领头粒子外，所有粒子都堆叠在同一位置；领头粒子则领先其余粒子 $O(1)$ 的距离。此外，该系统中的领头粒子和最后一个粒子都不移动，因此我们将这个系统称为冻结边界过程。通过控制该系统中最后一个间隙达到 $O(1)$ 所需的时间，我们能够为模型得到一个合适的估计。

证明首先构造冻结边界过程。然后，我们证明使最后一个间隙变得大于 $(2e)^{-1}$ 所需的时间，其量级为系统规模的平方。随后，我们将严格证明，冻结边界过程确实是最坏情况；也就是说，在适当的“良集”上，前两个粒子之间的间距在原始粒子系统中向后‘传播’的速度快于在冻结边界过程中的速度。再结合对相应“坏集”概率的适当估计，即可完成上界的证明。

6.3.2 冻结边界过程

对于每个 $1 < m \leq n$，考虑一个由 m 个粒子组成的粒子系统，记为 $\mathbf{Z}_m(\cdot) := (Z_1(\cdot)\ Z_2(\cdot).....,\ Z_m(\cdot))$。第一个（即领头）粒子 Z_1 固定在 1 处，最后一个粒子 Z_m 固定在 0 处。也就是说，对于每个 $t \geq 0$，都有 $Z_1(t) = 1$，以及 $Z_m(t) = 0$。其余粒子均从 0 出发，即对于 $i \in [m]/\{1\}$, $Z_i(0) = 0$。与原始粒子系统类似，对于每个 $i \in [m-1]$ 和 $t \geq 0$，均有 $Z_i(t) \geq Z_{i+1}(t)$。除领头粒子（Z_1）和最后一个粒子（Z_m）外，其他粒子遵循与原始系统相同的动力学。也就是说，在给定的时间时刻 t，对于每个 $i \in [m-1] \setminus \{1\}$，$i^{th}$ 粒子 Z_i 的跳跃率为 $Z_{i-1}(t) - Z_i(t)$，其跳跃大小由一个取值于 $\mathrm{U}(0, Z_{i-1}(t) - Z_i(t))$ 的随机变量给出。注意，只要 i^{th} 粒子与 $(i-1)^{th}$ 粒子占据相同的位置（$Z_i(\cdot) = Z_{i-1}(\cdot)$），由于初始构型的选择，这种情况在该系统中以正概率发生，i^{th} 粒子就无法移动。因此，粒子按照其标签顺序离开“0”位置。我们将 $\mathbf{Z}_m$ 所定义的空间上的概率测度记为 $\mathbb{P}^*$，相应的期望记为 $\mathbb{E}^*$。

在下面的引理中，我们估计该系统中的倒数第二个粒子（Z_{m-1}）至少向前移动（$2e$）$^{-1}$长度所需的时间。由于最后一个粒子固定在 0，这也对应于最后一个间隙增大到至少（$2e$）$^{-1}$所需的时间。

引理 6.1。令 $\beta(m) \equiv \beta := \text{下确界}\{t > 0 :\ Z_{m-1}(t) \geq \frac{1}{2e}\}$. 那么，存在一个 $c \in (0,\ \infty)$，使得

对所有 $m > 1$

$$\mathbb{E}^*\beta(m) \le cm^2.$$

证明。定义一列停时，$\delta_1 = 0$, $\delta_i := $ 下确界$\{t \ge \delta_{i-1} : \ Z_i(t) \ge (1-\frac{1}{m})^{i-1}\}$。注意，对于每个 $m \ge 2$, $(1-\frac{1}{m})^m > \frac{1}{2e}$ 均成立。因此，$\beta \le_d \delta_{m-1}$。

我们注意到，由于领头粒子不移动，δ_2 服从参数为 $1/m$ 的指数分布，因此 $\mathbb{E}^*\delta_2 = m$。

现在考虑 Z_3。令 $\mathcal{F}_t^{\mathbf{Z}} := \sigma\{\mathbf{Z}_m(s) : \ s \le t\}$。那么在事件 $\{Z_3(\delta_2) \ge \left(1-\frac{1}{m}\right)^2\}$ 上，$\mathbb{E}^*((\delta_3 - \delta_2) \mid \mathcal{F}_{\delta_2}^{\mathbf{Z}}) = 0$，并且由于对于所有 $t \ge 0$ 都有 $Z_2(t+\delta_2) \ge 1-\frac{1}{m}$，在事件 $\{Z_3(\delta_2) < \left(1-\frac{1}{m}\right)^2\}$ 上，

$$\mathcal{L}\left(\delta_3 - \delta_2 \mid \mathcal{F}_{\delta_2}^{\mathbf{Z}}\right) \le_d \mathrm{Exp}\left((1-\frac{1}{m}) - (1-\frac{1}{m})^2\right)$$

因此，在该事件上，

$$\mathbb{E}^*\left(\delta_3 - \delta_2 \mid \mathcal{F}_{\delta_2}^{\mathbf{Z}}\right) \le \left((1-\frac{1}{m}) - (1-\frac{1}{m})^2\right)^{-1} = \frac{m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)}.$$

综合这些观察

$$\mathbb{E}^*(\delta_3 - \delta_2) \le \frac{m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)}.$$

类似地，对于 Z_i，如果 $Z_i(\delta_{i-1}) \ge \left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-1}$，则 $\delta_i = \delta_{i-1}$。如果情况并非如此，由于对于所有 $t \ge 0$ 都有 $Z_{i-1}(t+\delta_{i-1}) \ge (1-\frac{1}{m})^{i-2}$，在事件 $\{Z_i(\delta_{i-1}) < \left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-1}\}$ 上，

$$\mathcal{L}\left(\delta_i - \delta_{i-1} \mid \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}^{\mathbf{Z}}\right) \le_d \mathrm{Exp}\left((1-\frac{1}{m})^{i-2} - (1-\frac{1}{m})^{i-1}\right)$$

因此，在该事件上，

$$\mathbb{E}^*\left(\delta_i - \delta_{i-1} \mid \mathcal{F}_{\delta_{i-1}}^{\mathbf{Z}}\right) \le \left((1-\frac{1}{m})^{i-2} - (1-\frac{1}{m})^{i-1}\right)^{-1} = \frac{m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-2}}$$

因此

$$\mathbb{E}^*(\delta_i - \delta_{i-1}) \le \frac{m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-2}}.$$

因此，利用$\delta_{m-1} = \sum_{i=2}^{m-1}(\delta_i - \delta_{i-1})$这一事实，我们最终得到

$$\mathbb{E}^*\beta \le \mathbb{E}^*\delta_{m-1} \le \sum_{i=2}^{m-1} \frac{m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{i-2}} = m\left[\frac{(\frac{m}{m-1})^{m-2} - 1}{\frac{m}{m-1} - 1}\right].$$

由于 $\lim_{m\to\infty}(\frac{m}{m-1})^{m-2} = e$，我们可以找到一个常数 $c > 0$，使得 $\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-2} \le c$对每个 $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$都成立。因此我们有

$$\mathbb{E}^*\beta \le cm(m-1) \le cm^2,$$

完成引理的证明。 □

在得到了冻结边界过程中最后一个间隙变得足够大所需时间的期望上界后，我们现在将证明：相较于由领头粒子的任意非递减轨迹 $X_1(\cdot)$ 驱动的原始粒子系统，该过程移动得更慢。

任取 $m \in \mathbb{N}$，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$，并记 $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ 为非递减函数的类 f：$[0,\infty) \to [x_1, \infty)$。对于 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 和 $f \in \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$，记 $\tilde{\mathbb{P}}^{f,\ \mathbf{x}^m}$ 为 m 粒子系统 $\mathbf{X}_m$ 的分布（为方便记号，省略 f），其中 $\mathbf{X}_m(0) = \mathbf{x}$，$X_1(t) = f(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立，而其余粒子（给定 $X_1(\cdot)$ 的轨迹后）的动力学与原系统相同。

$\mathbf{X}_m$ 的初始构型取自集合

$$\mathcal{S}_0(m) := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{m-1} \geq x_m = 0,\ x_1 \geq 1\}. \tag{6.5}$$

当上下文明确时，我们将在 $\mathcal{S}_0(m)$ 中省略 m。注意，当 $\mathbf{X}_m$ 的初始构型属于 $\mathcal{S}_0$ 时，对每个 $i \in [m]$，$Z_i(0) \leq X_i(0)$。现在证明，对于这样的初始构型，对每个 $i \in [m]$ 和 $t \geq 0$，以及领头粒子路径的任意此类选择 f，$Z_i(t) \leq_d X_i(t)$。

引理 6.2。任取 $m \in \mathbb{N}$。对于任意 $t \geq 0$ 和 $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}^*(Z_i(t) \geq r) \leq \inf_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}_0} \inf_{f \in \mathcal{F}_{\boldsymbol{s}}} \tilde{\mathbb{P}}^{f,m}_{\boldsymbol{s}}(X_i(t) \geq r),$$

对于每个 $i \in [m]$.

~ ~证明。只需针对每个 $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_0$ 和 $f \in \mathcal{F}_{\mathbf{s}}$，构造一个耦合 $(\mathbf{X}_m, \mathbf{Z}_m)$，其联合分布记为 $\mathbb{P}'_{\mathbf{s}}$，使得 ~$\mathbf{X}_m \overset{d}{=} \mathbf{X}_m$，其中 $\mathbf{X}_m$ 的分布为 $\mathbb{P}^{f,\ \mathbf{s}^m}$，~$\mathbf{Z}_m \overset{d}{=} \mathbf{Z}_m$，并且对于任意 $t \geq 0$ 和~ ~ $j \in [m]$，$Z_j(t) \leq X_j(t)$，$\mathbb{P}'_{\mathbf{s}}$-几乎处处成立。

~ ~我们考虑以下耦合。令 $\mathrm{X}_m(0) = \mathrm{X}_m(0) = \mathrm{s}$，且 $\mathrm{Z}_m(0) = \mathrm{Z}_m(0) = ~(0, \ldots, 0, 1)$。记 $\mathrm{s} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$，并令 $X_1(t) = f(t)$ $t \geq 0$，我们按如下方式构造其余过程。在任意时刻 t，以速率~ ~$X_1(t)$发生（可能的）跳跃事件。首先，抽取一个随机变量 $U \sim \mathrm{U}(0, X_1(t))$。~ ~ ~$\mathbf{X}^{m|1} = (X_2, \ldots, X_m)$过程中的跳跃如下所述。

~ ~ ~1. 若 $U \notin (X_m(t)\ X_1(t))$，则 $\mathbf{X}^{m|1}$ 过程中的粒子均不发生跳跃。

2. 若 $U \in (\tilde{X}_m(t)\ \tilde{X}_1(t))$，则我们找到 $i \in [m] \setminus \{1\}$，使得 $U \in (\tilde{X}_i(t)\ \tilde{X}_{i-1}(t))$。粒子 i^{th} ~ ~ X_i 跳跃的大小为 $U - X_i(t)$，其余粒子保持不变。

~ ~ ~在上述描述的可能发生跳跃事件的时刻，$\mathbf{Z}_{m|1,m} = (Z_2, \ldots, Z_{m-1})$ 可能发生如下跳跃。与上述相同，U

~ ~1. 若 $U \geq 1$ 或 $U \leq Z_{m-1}(t)$，则 $\mathbf{Z}_{m|1,m}$ 过程中的粒子均不发生跳跃。

2. 如果 $\tilde{Z}_{m-1}(t) < U < 1$，我们找到 $j \in [m] \setminus \{1, m\}$ 使得 $U \in (\tilde{Z}_j(t)\ \tilde{Z}_{j-1}(t))$。$j^{th}$ 粒子 ~ ~Z_j 发生了大小为 $U - Z_j(t)$ 的跳跃，其余粒子保持不变。

为验证这确实是一个有效的耦合，请注意，在时间 t， i^{th} 粒子˜在 $\mathbf{X}^{m|1}$ 过程中的跳跃率为

$$\frac{\tilde{X}_{i-1}(t)-\tilde{X}_i(t)}{\tilde{X}_1(t)-\tilde{X}_m(t)}\cdot\frac{\tilde{X}_1(t)-\tilde{X}_m(t)}{\tilde{X}_1(t)}\tilde{X}_1(t)=\tilde{X}_{i-1}(t)-\tilde{X}_i(t).$$

˜ ˜ ˜ ˜此外，在给定 $U\in(X_i(t)\ X_{i-1}(t)\ U)$ 的条件下，X_i的分布为 U(t(X_{i-1})t)。因此， i^{th} 中的粒子在 ˜$\mathbf{X}_m$ 过程中的跳跃大小分布与$\mathbf{X}_m$ 过程中的相同。对$\mathbf{Z}_m$ 过程的验证类似。通过计算马尔可夫过程$\mathbf{X}_m$ 和$\mathbf{Z}_m$的生成元，可以对此进行形式化检验。

˜ ˜ ˜接下来，我们论证，对于每个 $j\in[m]$, $Z_j(t)\ \le X_j(t)$, 以及每个 $t\ge 0$。注意，由于 Z_1 固定为 1，我们只考虑非平凡情形: ˜ ˜ $j\neq 1$。还要回顾一下，对每个 Z_j， $\le X_j(0)$ $j(0)$ 都成立。因此，只需证明：如果上述跳跃事件在时间 t发生，并因此导致某个˜ ˜ ˜ ˜ ˜的 $j\in[m-1]$ 发生跳跃，那么，如果对所有 Z_j 都有 $Z_j(t)$ $\le X_j(t)$，则 $Z_\ell(t-)\ \le X_\ell(t-)$。

为此，我们回顾一下先前用于描述跳跃动力学的均匀随机变量 U。由于我们考虑的是 Z_j 在时间 t 发生跳跃的情形，因此必有 U 位于 Z_j 前方、但在 Z_{j-1} 后方，即 $U\in(Z_j(t-)\ Z_{j-1}(t-))$。此外，跳跃之后，$Z_j$ 的新位置由 U 给出，即 $Z_j(t)=U.$。现在，我们先考虑 U 位于 X_j 前方的情形，即 $U>X_j(t-)$。由于我们已经知道 U 位于 Z_{j-1} 后方（$U<Z_{j-1}(t-)$），˜ ˜这意味着 U 必然位于 X_{j-1} 后方（$U<X_{j-1}(t-)$）。因此，在这种情况下，我们有

˜ ˜ ˜ ˜$U\in(X_j(t-)\ X_{j-1}(t-))$，这意味着在给定时刻 t， X_j 和 Z_j 都跳到实数轴上的同一位置，即 U。也就是说，我们得到 $X_j(t)\ =Z_j(t)$ $=U$。因此，跳跃之后过程之间的不等式仍然成立，即对所有 $\ell\in[n-1]$， $Z_\ell(t)\ \le X_\ell(t)$。另一方面，如果 $U\le X_j(t-)$，那么不等式显然成立，因为跳跃之后有

˜ ˜ ˜$Z_j(t)\ =U\le X_j$ (t)。由此我们得出，对每个 $j\in[m]$ 以及任意 $t\ge 0$， $Z_j(t)\ \le X_j(t)$，$\mathbb{P}'_{\mathbf{s}}$-几乎必然成立，结论得证。 □

注记 6.3. 设 $n\ge 3$ 和 $3\le m\le n$。作为引理 *6.2* 的直接推论，对于任意 $m-1\le n'\le n-1$, 当实数集 n' 维系统中的第 n' 个粒子在$(n'+1)$处从0 开始，且第$(n'-m+2)$个粒子从大于1的位置开始时，我们现在得到如下随机占优性质。设，

$$\mathcal{S}_0^n(m,n'):=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n: x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_{n-1}\ge x_n,\ x_{n'+1}=0,\ x_{n'-m+2}\ge 1\}.$$

那么，对于任意 $m-1\le n'\le n-1$,

$$\mathbb{P}^*\left(Z_{m-1}(t)\ge(2e)^{-1}\right)\le\inf_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}_0^n(m,n')}\tilde{\mathbb{P}}_{\boldsymbol{s}}\left(X_{n'}(t)\ge(2e)^{-1}\right),\quad t\ge 0.$$

这表明，令 $\beta_X^{n'}:=$下确界$\{t\ge 0:\ \ X_{n'}(t)\ \ge(2e)^{-1}\}$，我们有，

$$\sup_{m-1\le n'\le n-1}\ \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{S}_0^n(m,n')}\tilde{\mathbb{E}}_{\boldsymbol{s}}\beta_X^{n'}\le\mathbb{E}^*\beta(m).$$

作为注记 6.3 和引理 6.1 的直接推论，我们得到以下推论。

推论 6.4。 固定 $n \geq 3$。对于 $3 \leq m \leq n$ 和 $m-1 \leq n' \leq n-1$，令

$$\xi^{n'}(m) := \inf\{t \geq 0 : X_{n'+1}(t) > 0\} \wedge \beta_X^{n'}.$$

于是，存在 $c > 0$，使得对于任意 $m = 3$、……、n，

$$\sup_{m-1 \leq n' \leq n-1} \sup_{s \in \mathcal{S}_0^n(m,n')} \tilde{\mathbb{E}}_s \xi^{n'}(m) \leq cm^2.$$

现在我们将 利用上述推论完成混合时间上界的证明 .

6.3.3 上界的证明

如前文所述，证明基于考察一个适当的耦合，并利用（3.5）中的不等式，通过耦合时间的尾概率获得关于 t_{mix} 的界。因此，~ ~我们再次考虑第 4 节中引入的粒子（$\mathbf{X}$、$\mathbf{X}$）（相应地，间隙（$\mathbf{Y}$、 $\mathbf{Y}$））之间的耦合，其中 $\mathbf{Y(0)}$ 具有某个初始分布 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^{n-1})$，且 ~ $\mathbf{Y}$ 为平稳的：对于每个 $t \geq 0$，$\mathbf{Y}(t) \sim \pi_n$。记这些过程所定义空间上的概率测度为 $\mathbb{P}_{\mu,\ \pi_n}$。记相应的耦合时间为 τ_{coup}。证明的思路是确定一个“良集” ~，在该集合上我们可以应用推论 6.4。然后，我们将利用 $\mathbf{Y}$ 的平稳性来控制这个良集补集的概率。最后，结合这两个步骤，得到 τ_{coup} 的尾概率上界。

我们首先构造良集。固定 $r > 0$，并假设 n 足够大，使得 $n - 1 \geq \lfloor r \log n \rfloor + 1$。考虑集合：

$$A_{n,r} := \{\exists i \in [\lfloor r \log n \rfloor + 1, n-1] \text{ and } l \in [n^3], \text{ such that } \tilde{Y}_j(l) < 1,\ \forall j \in [i - \lfloor r \log n \rfloor, i]\}.$$

~回顾一下，$\mathbf{Y}$ 是平稳的，因此$A_{n,\ r}$ 的概率可估计如下。

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(A_{n,r}) =& \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\bigcup_{l=1}^{n^3} \bigcup_{i=\lfloor r \log n \rfloor + 1}^{n-1} \{\tilde{Y}_j(l) < 1,\ \forall j \in [i - \lfloor r \log n \rfloor, i]\right) \\
&\leq \sum_{l=1}^{n^3} \sum_{i=\lfloor r \log n \rfloor + 1}^{n-1} \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(\tilde{Y}_j(l) < 1,\ \forall j \in [i - \lfloor r \log n \rfloor, i]) \\
&\leq n^3(n - r \log n)\pi_n(\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1} : y_j < 1,\ \forall j \in [i - \lfloor r \log n \rfloor, i]) \\
&\leq n^3(n - r \log n)(1 - e^{-1})^{r \log n}. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

~注意，在 $A_{n,\ r}^c$（即我们的良集）上，对于 $\mathbf{X}$ 过程中任意一个粒子，在所有整数时间 $\leq n^3$，我们都能在其前方的 $r \log n$ 个间隙中找到至少一个大于 1 的间距。因此，粒子构型在局部上类似于 $\mathcal{S}_0$ 在 (6.5) 中定义的构型，从而使我们能够将系统与冻结边界过程进行局部比较。

回顾第 4 节，在我们的耦合构造下，两个系统中的粒子（因此也包括间隙）会从前向后依次合并。还要回顾，在我们的耦合~$X_1(t) = X_1(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 都成立。因此，我们定义停时： $\tau_0' = 0$ 以及对于 $k \in [n-1]$,

$$\tau_{2k-1}' := \left\{t \geq \lceil \tau_{2k-2}' \rceil : Y_k(t) \wedge \tilde{Y}_k(t) \geq \frac{1}{2e}\right\} \wedge \inf\{t \geq \lceil \tau_{2k-2}' \rceil : Y_k(t) = \tilde{Y}_k(t)\},$$

$$\text{and } \tau'_{2k} := \inf\{t \geq \tau'_{2k-1} : Y_k(t) = \tilde{Y}_k(t)\}.$$

注意，$\tau_{\text{coup}} \leq \tau'_{2(n-1)}$。

回想一下，在我们的耦合下，在任意给定的时间 t，k^{th} 间隙将以速率 $Y_k(t) \wedge \tilde{Y}_k(t)$ 合并；而在较慢粒子移动之前，$Y_k(t) \wedge Y_k(t)$ 是非递减的。因此，对于 $t \geq \tau'_{2k-1}$，k^{th} 间距的合并速率至少为 $(2e)^{-1}$。于是，对每个 $k \in [n-1]$，我们有

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}(\tau'_{2k} - \tau'_{2k-1}) \leq 2e. \tag{6.7}$$

现在考虑 $(\tau'_{2k-1} - \tau'_{2k-2})$。我们先考虑 $k \in [\lfloor r \log\ n \rfloor]$。令

$$\tau_{0,k} := \inf\{t \geq \tau'_{2k-2} : Y_1(t) \wedge \tilde{Y}_1(t) \geq 1\}.$$

注意到

$$\tau_{0,k} \leq \tau'_{0,k} := \inf\{t \geq \tau'_{2k-2} : X_1(t) - X_1(t-) = \tilde{X}_1(t) - \tilde{X}_1(t-) > 1\}.$$

由于 X_1（等价地，X_1）发生大小大于 1 的跳跃的概率为 e^{-1}，因此大小大于 1 的跳跃次数构成速率为 e^{-1} 的泊松过程。因此，

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}(\tau_{0,k} - \tau'_{2k-2}) \leq \mathbb{E}_{\mu,\pi_n}(\tau'_{0,k} - \tau'_{2k-2}) = e.$$

此外，$(\tau'_{2k-1} - \tau_{0,k})+$ ——也就是说，在 $\tau_{0,k}$ 之后，使 $Y_k(\cdot) \wedge Y_k(\cdot)$ 大于 $(2e)^{-1}$ 所需的额外时间——可以利用推论 6.4 中定义的停时 ξ 来估计。具体来说，令 $\mathcal{F}_t \doteq \sigma\{(\mathbf{X}(s), \mathbf{X}(s)) : 0 \leq s \leq t\}$，在给定 $\mathcal{F}_{\tau_{0,k}}$的条件下，如果我们考虑时刻 $\tau_{0,k}$ 这对粒子 (X_{k+1}, X_{k+1}) 中较慢粒子的位置，以及已经合并的前 k个粒子的位置，那么将这 $(k+1)$ 个粒子的构型重新居中，使得时刻 $\tau_{0,k}$较慢的第 $(k+1)$ 个粒子位于位置 0 后，该构型属于 $\mathcal{S}_0$，其中 $m = k+1$。考虑在给定 $\mathcal{F}_{\tau_{0,k}}$的条件下，这个规模为 $k+1$的粒子系统在 $t \geq \tau_{0,k}$内的演化。注意，若该较慢粒子在它与前方粒子的间距（即 $Y_k(\cdot) \wedge Y_k(\cdot)$）大于 $(2e)^{-1}$之前发生跳跃，那么这 $(k+1)^{th}$ 个粒子无论如何都会合并。因此，利用取 $n' = k$ 和 $m = k+1$的推论 6.4，我们得出，对任意 $k \in [\lfloor r \log n \rfloor]$,

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}(\tau'_{2k-1} - \tau_{0,k}) \leq c(r \log n + 1)^2.$$

因此，对于 $k \in [\lfloor r \log n \rfloor]$,

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}((\tau'_{2k-1} - \tau'_{2k-2})) \leq e + c(r \log n + 1)^2. \tag{6.8}$$

接下来，我们考虑 $k > r \log\ n$。回想一下，在 τ'_{2k-2} 时，前 $k-1$ 个间隙已经合并，因此，对于每个 $j \in [k-1]$ 和 $t > \tau'_{2k-2}$，$Y_j(t) = Y_j(t)$。考虑集合

$$B_{k,r} = \{\text{there exists } j \in \{k, k-1,\ k-2, \ldots,\ k-\lfloor r \log n \rfloor+1\} \text{ such that } Y_j(\lceil \tau'_{2k-2} \rceil) = \tilde{Y}_j(\lceil \tau'_{2k-2} \rceil) \geq 1\}.$$

于是，在事件 $B_{k,\ r}$ 上，标记为 $\{k, k-1, \ldots, j\}$ 的粒子以及粒子对 $(X_{k+1},\ X_{k+1})$ 中较慢粒子在时刻 $\lceil \tau'_{2k-2} \rceil$ 的位置（以该较慢粒子为中心重新定位，使其位于 0 ）定义了类 $\mathcal{S}_0$ 中一个满足 $m = k - j + 2$ 的构型。因此，利用这一事实

$k-j \le r\log n-1$，由推论 6.4（应用于 $n'=k$ 和 $m=k-j+2$）可知，在$B_{k,\ r}$上，

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2k-1}-\tau'_{2k-2})\,|\,\mathcal{F}_{\lceil\tau'_{2k-2}\rceil}\right)\le c(r\log n+1)^2.$$

因此，

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2k-1}-\tau'_{2k-2})\mathbf{1}_{B_{k,r}}\right)\le c(r\log n+1)^2. \tag{6.9}$$

我们还注意到，对于 $k=\lfloor r\log\ n\rfloor+1,\ldots,n-1$,

$$A^c_{n,r}\cap\{\tau'_{2k-2}\le(n-1)n^2\}\subset B_{k,r}. \tag{6.10}$$

将其与 (6.7) 及马尔可夫不等式结合，对于 $k=\lfloor r\log\ n\rfloor+1,\ldots,n-1$，我们得到，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2k}>kn^2,\,\tau'_{2k-2}\le(k-1)n^2,\,A^c_{n,r}\right)&\le\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2k-1}-\tau'_{2k-2}>n^2/2,\,B_{k,r}\right)\\&\quad+\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2k}-\tau'_{2k-1}>n^2/2\right)\\&\le\frac{2c(r\log n+1)^2}{n^2}+\frac{4e}{n^2}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

利用 (6.6),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2\right)&\le\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2,A^c_{n,r}\right)+\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(A_{n,r})\\&\le\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2,A^c_{n,r}\right)+n^3(n-r\log n)(1-e^{-1})^{r\log n}.\end{aligned}$$

此外，利用 (6.11),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2,A^c_{n,r}\right)&\le\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2,\tau'_{2(n-2)}\le(n-2)n^2,A^c_{n,r}\right)\\&\quad+\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-2)}>(n-2)n^2,A^c_{n,r}\right)\\&\le\frac{2c(r\log n+1)^2}{n^2}+\frac{4e}{n^2}+\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-2)}>(n-2)n^2,A^c_{n,r}\right).\end{aligned}$$

类似地，利用 (6.11)，令 $k=n-2,n-3,\ldots,\lfloor r\log\ n\rfloor+1$，并对 $k\in[\lfloor r\log n\rfloor]$ 使用 (6.7) 和 (6.8), 我们现在得到某个 $c'>0$（不依赖于 n）

$$\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>(n-1)n^2\right)\le\frac{c'(r\log n+1)^2}{n}+n^3(n-r\log n)(1-e^{-1})^{r\log n}, \tag{6.12}$$

现在我们估计$\mathbb{P}_{\mu,\ \pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)}>t\right)$对于 $t\in(0,\ (n-1)n^2)$。由（6.9）和（6.10）可知

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2k-1}\wedge(n-1)n^2-\tau'_{2k-2}\wedge(n-1)n^2)\,\mathbf{1}_{A^c_{n,r}}\right)\\&\le\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2k-1}-\tau'_{2k-2})\,\mathbf{1}_{\{A^c_{n,r},\tau'_{2k-2}\le(n-1)n^2\}}\right)\le\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2k-1}-\tau'_{2k-2})\,\mathbf{1}_{B_{k,r}}\right)\le c(r\log n+1)^2.\end{aligned} \tag{6.13}$$

将 (6.13) 与 (6.7) 结合，并对 k 求和，得到

$$\mathbb{E}_{\mu,\pi_n}\left((\tau'_{2(n-1)}\wedge(n-1)n^2)\mathbf{1}_{A^c_{n,r}}\right)\le 2en+cn(r\log n+1)^2. \tag{6.14}$$

最后，对于 $t \in (0,\ (n-1)n^2)$，利用 (6.6)、(6.12) 和 (6.14)，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(\tau_{\text{coup}} > t) &\le \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)} > t\right)\\ &\le \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)} > (n-1)n^2\right) + \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}\left(\tau'_{2(n-1)} \wedge (n-1)n^2 > t,\ A^c_{n,r}\right) + \mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(A_{n,r})\\ &\le \frac{c'(r\log n+1)^2}{n} + \frac{2en + cn(r\log n+1)^2}{t} + 2n^3(n - r\log n)(1-e^{-1})^{r\log n}.\end{aligned}$$

现在，取足够大的 n_0 和 r，并令 $t = c^* n(\log n)^2$，其中 c^*足够大，则对所有 $n \ge n_0$，有

$$\mathbb{P}_{\mu,\pi_n}(\tau_{\text{coup}} > c^* n(\log n)^2) \le \frac{1}{4},$$

这意味着对于 $n \ge n_0$，有 $t_{\text{mix}} \le c^* n(\log n)^2$。对于 $n < n_0$，由定理 3.2 可知 t_{mix} 有限，因此我们可以取足够大的 c^*，使得上述界对所有 n都成立。由于 c^*，r 和 n_0 的选取均与 μ无关，这就完成了上界的证明。

□

6.4 定理 3.5 的证明

第 6.2.1 节证明了定理 3.5 中的下界，而第 6.3.3 节证明了上界。至此，定理得证。

□

6.5 函数极限定理

本节证明推论 3.6。回顾一下，对于波兰空间 $\mathcal{S}$，$\mathcal{P}(\mathcal{S})$ 表示定义在 $\mathcal{S}$ 上、配备弱收敛拓扑的概率测度空间。该拓扑可由如下定义的有界-*Lipschitz*距离度量。令

$$\text{BL}(\mathcal{S}) := \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \text{ such that } \sup_{x\in\mathcal{S}} |f(x)| \le 1,\ |f(x) - f(y)| \le |x-y| \text{ for all } x, y \in \mathcal{S}\}.$$

对于 μ，$\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$，定义

$$d_{\text{BL}}(\mu,\nu) := \sup_{f\in \text{BL}(\mathcal{S})} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

则 d_{BL} 在 $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ 上定义了一个距离，并且 μ_n 在 $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ 中的序列弱收敛于 $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ 当且仅当 $d_{\text{BL}}(\mu_n, \mu) \to 0$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，在某个概率空间上考虑随机变量 $(X_1^n(\infty) \ldots X_n^n(\infty))$，使得$X_1^n(\infty) = 0$，并且 $Y_i^n(\infty) = X_i^n(\infty) - X_{i+1}^n(\infty)$，$i = 1$，……，$n-1$、$Y_1^n(\infty)$……，$Y_{n-1}^n(\infty)$ 是独立同分布的参数为 1 的指数分布。定义 $X_i^n(\infty) := X_i^n(\infty)/n$，$Y_j^n(\infty) := Y_j^n(\infty)/n$，$i \in [n]$，$j \in [n-1]$。对于 $x \in [0,1]$，定义

$$U_\infty^n(x) := \sqrt{n}\left(\hat{X}_1^n(\infty) - \hat{X}_{\lfloor nx\rfloor}^n(\infty) - x\right).$$

那么，将 U_∞^n 在 $\mathcal{D}([0,1]: \mathbb{R})$ 上的概率律记为 Θ_n，将标准布朗运动 $\{W(t) : 0 \le t \le 1\}$ 在 $\mathcal{D}([0,1]: \mathbb{R})$ 上的概率律记为 Θ，根据 Donsker定理，我们有

$d_{\mathrm{BL}}(\Theta_n,\ \Theta)\ \to 0$，当 $n\to\infty$ 时。现在令 U^n 如推论陈述中所述，并用 Θ^n 表示 U^n 在 $\mathcal{D}([0,1]:\mathbb{R})$ 上的分布。那么

$$d_{\mathrm{BL}}(\bar{\Theta}^n,\Theta)\le d_{\mathrm{BL}}(\bar{\Theta}^n,\Theta^n)+d_{\mathrm{BL}}(\Theta^n,\Theta).$$

此外，令 d 如 (3.2) 所示， c_2 如定理 3.5 所示，由该定理和 (3.3) 可得，

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{BL}}(\bar{\Theta}^n,\Theta^n)&\le\|\bar{\Theta}^n-\Theta^n\|_{\mathrm{TV}}\le\|\mathbb{P}^{n^{-1}t_n}(\mu_n,\cdot)-\pi_n\|_{\mathrm{TV}}\\&\le d\left(\frac{\alpha_n}{c_2}c_2n(\log n)^2\right)\le d\left(\frac{\alpha_n}{c_2}t_{\mathrm{mix}}\right)\le 2^{-\alpha_n/c_2}.\end{aligned}$$

Thus

$$d_{\mathrm{BL}}(\bar{\Theta}^n,\Theta)\le 2^{-\alpha_n/c_2}+d_{\mathrm{BL}}(\Theta^n,\Theta).$$

令 $n\to\infty$，即可得到结论。

7 领头者跳跃—幂律

本节考虑领头者的跳跃大小服从重尾分布的情形。我们证明，若领头者的跳跃大小具有 k 有限阶矩，则在平稳状态下，间距大小至少具有 $(k+1)$ 阶有限矩。

7.1 定理 3.7 的证明

我们先概述证明思路。利用 $\mathbb{E}_\theta Z^k<\infty$ 这一事实，我们首先证明在平稳状态下，第一间距 Y_1 的 $(k+1)^{th}$ 阶矩有限。接着证明，在平稳状态下，$(i-1)^{th}$ 间距的 $(k+1)^{th}$ 阶矩存在，蕴含 i^{th} 间距的同阶矩也存在。递归地运用这一论证，即可完成定理的证明。这两个步骤都基于利用适当的Lyapunov函数的漂移性质。

定义 $\psi_1:\ \mathbb{R}_+^{n-1}\to\mathbb{R}$ 为 $\psi_1(\mathbf{y})=y_1^k$。则

$$\mathcal{L}_n\psi_1(\mathbf{y})=\mathbb{E}_\theta[(y_1+Z)^k-y_1^k]+y_1\mathbb{E}_U[U^ky_1^k-y_1^k].$$

用 μ_j 表示 Z的 j^{th} 矩，并注意到取值于 U(0,1) 的随机变量的 k^{th} 矩为 $\frac{1}{k+1}$，我们得到

$$\mathcal{L}_n\psi_1(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}y_1^{k-j}\mu_j-\frac{k}{k+1}y_1^{k+1}.$$

由于当 y_1 很大时，上式右侧的主导项为 $-\frac{k}{k+1}y_1^{k+1}$，因此我们可以找到一个有限常数 c_k，使得

$$\mathcal{L}_n\psi_1(\mathbf{y})\le-\frac{k}{2(k+1)}y_1^{k+1}+c_k\ \text{for all}\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}_+^{n-1}.\tag{7.1}$$

固定 $m \in \mathbb{N}$ 并定义 $\psi_1^{(m)}$: $\mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$ 为 $\psi_1^{(m)}(\mathbf{y}) := y_1^k \wedge m$。对于 $t > 0$, 令 $G_t, G_t^{(m)}$: $\mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G_t(\mathbf{y}) := \frac{1}{t}[\psi_1(\mathbf{y}) - \mathbb{E}_{\mathbf{y}}(\psi_1(\mathbf{Y}(t)))],\ G_t^{(m)}(\mathbf{y}) := \frac{1}{t}[\psi_1^{(m)}(\mathbf{y}) - \mathbb{E}_{\mathbf{y}}(\psi_1^{(m)}(\mathbf{Y}(t)))]. \tag{7.2}$$

注意，对于每个 $t > 0$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $|G_t(\mathbf{y})| < \infty$。这是由不等式$Y_1(t) \le X_1(t)$（不失一般性地假设领头粒子从 0 出发）以及 $\mathbb{E}_\theta Z^k$的有限性所导致的。另请注意，当 $\psi_1(\mathbf{y}) \le m$时， $G_t^{(m)}(\mathbf{y}) \ge G_t(\mathbf{y})$; 而当 $\psi_1(\mathbf{y}) > m$时, $G_t^{(m)}(\mathbf{y}) \ge 0$。因此我们有

$$G_t^{(m)}(\mathbf{y}) \ge G_t(\mathbf{y}) \wedge 0 \ \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

此外，令对于 $r > 0, \tau_r := \inf\{t \ge 0\colon\ y_1 \ge r\}$，则有

$$\psi_1(\mathbf{Y}(t \wedge \tau_r)) - \psi_1(\mathbf{y}) = \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L}_n \psi_1(\mathbf{Y}(s))ds + M(t \wedge \tau_r)$$

其中 $t \mapsto M(t \wedge \tau_r)$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{y}}$ 下是一个鞅。因此，由 (7.1) 可得,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}[\psi_1(\mathbf{Y}(t \wedge \tau_r))] - \psi_1(\mathbf{y}) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{t\wedge\tau_r} \mathcal{L}_n \psi_1(\mathbf{Y}(s))ds \le c_k t \tag{7.3}$$

令 $r \to \infty$ 趋于无穷，并使用单调收敛

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}[\psi_1(\mathbf{Y}(t))] - \psi_1(\mathbf{y}) \le c_k t \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}. \tag{7.4}$$

因此,

$$G_t^{(m)}(\mathbf{y}) \ge G_t(\mathbf{y}) \wedge 0 = \left(\frac{1}{t}[\psi_1(\mathbf{y}) - \mathbb{E}_{\mathbf{y}}(\psi_1(\mathbf{Y}(t)))]\right) \wedge 0 \ge -c_k.$$

此外，再次使用单调收敛，对于所有 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，当 $m \to \infty$ 时， $G_t^{(m)}(\mathbf{y}) \to G_t(\mathbf{y})$。利用 Fatou 引理并回忆 π_n 是平稳的，我们有,

$$\int G_t(\mathbf{y})\pi_n(d\mathbf{y}) \le \liminf_{m\to\infty} \int G_t^{(m)}(\mathbf{y})\pi_n(dy) = 0. \tag{7.5}$$

由 (7.1) 和 (7.3) 中的第一个等式,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}[\psi_1(\mathbf{Y}(t \wedge \tau_r))] - \psi_1(\mathbf{y}) \le -\frac{k}{2(k+1)} \mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{t\wedge\tau_r} [Y_1(s)]^{k+1} ds + c_k t.$$

Thus

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{t\wedge\tau_r} [Y_1(s)]^{k+1} ds \le -\frac{2(k+1)}{k} \frac{1}{t} \left(\mathbb{E}_{\mathbf{y}}[\psi_1(\mathbf{Y}(t \wedge \tau_r))] - \psi_1(\mathbf{y})\right) + 2c_k \frac{k+1}{k}.$$

令 $r \to \infty$ ，并利用单调收敛（等式左右两侧均如此），

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{y}} \int_0^{t} [Y_1(s)]^{k+1} ds \le \frac{2(k+1)}{k} G_t(y) + 2c_k \frac{k+1}{k}.$$

对 π_n 积分，由 (7.5) 可得，

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_{\pi_n}[Y_1(s)]^{k+1}ds \le \frac{2(k+1)}{k}\int G_t(y)\pi_n(d\mathbf{y}) + 2c_k\frac{k+1}{k} \le 2c_k\frac{k+1}{k}.$$

因此，由于 π_n 是平稳的

$$\mathbb{E}_{\pi_n}[Y_1(t)]^{k+1} \le 2c_k\frac{k+1}{k} < \infty \text{ for all } t \ge 0.$$

接下来，假设对于某些 $i = 2,\ldots,n-2$，在平稳状态下，$(k+1)^{th}$ 阶 $(i-1)^{th}$ 间距的矩有限，即

$$\mathbb{E}_{\pi_n}[Y_{i-1}(t)]^{k+1} < \infty \text{ for all } t \ge 0. \tag{7.6}$$

现在考虑 i^{th} 间距。令 $\psi_i, \psi_i^{(m)}$： $\mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{R}$ 当 $\psi_i(\mathbf{y}) = y_i^k$、$\psi_i^{(m)}(\mathbf{y}) = y_i^k \wedge m$时。注意到

$$\mathcal{L}_n\psi_i(\mathbf{y}) = A(\mathbf{y}) + B(\mathbf{y}),$$

其中

$$A(\mathbf{y}) := y_i\int_0^1 [u^k y_i^k - y_i^k]\,du,\ B(\mathbf{y}) := y_{i-1}\int_0^1 [(y_i + uy_{i-1})^k - y_i^k]\,du.$$

Then

$$A(\mathbf{y}) = -\frac{k}{k+1}y_i^{k+1}$$

and

$$B(\mathbf{y}) \le y_{i-1}\int_0^1 (y_i + uy_{i-1})^k\,du \le \frac{1}{k+1}(y_i + y_{i-1})^{k+1}.$$

现在利用加权杨氏不等式可知，存在 $a_k, h_k > 0$ 使得

$$\mathcal{L}_n\psi_i(\mathbf{y}) = A(\mathbf{y}) + B(\mathbf{y}) \le -a_k y_i^{k+1} + h_k y_{i-1}^{k+1},\ \text{for all } \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n-1}. \tag{7.7}$$

现在，对于 $m \in \mathbb{N}$，定义 G_t^i、$G_{,t}^{i\ (m)}$，如（7.2）所示，只需将其中的 $\psi_1, \psi_1^{(m)}$ 分别替换为 $\psi_i, \psi_i^{(m)}$。然后，按照（7.4）中的局部化论证，我们得到

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}}[\psi_i(\mathbf{Y}(t))] - \psi_1(\mathbf{y}) \le h_k\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbf{y}}(Y_{i-1}^{k+1}(s))ds.$$

这与之前类似，表明

$$G_t^{i,(m)}(\mathbf{y}) + \frac{h_k}{t}\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbf{y}}(Y_{i-1}^{k+1}(s))ds \ge 0.$$

利用 $\mathbb{E}_{\pi_n}(Y_{i-1}^{k+1}(t)) < \infty$ 这一事实，我们现在由 Fatou 引理以及 π_n 的平稳状态得到

$$\int G_t^i(\mathbf{y})\pi_n(d\mathbf{y}) \le \liminf_{m\to\infty}\int G_t^{i,(m)}(\mathbf{y})\pi_n(dy) = 0. \tag{7.8}$$

利用（7.7），一..... 局部化论证和单调收敛，如下文 (7.5) 所示，现在表明 t

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\int_0^t [Y_i(s)]^{k+1}ds \le \frac{1}{a_k}G_t^i(y) + \frac{h_k}{a_k}\frac{1}{t}\mathbb{E}_{\mathbf{y}}\int_0^t [Y_{i-1}(s)]^{k+1}ds.$$

对上述不等式关于 π_n 积分，并利用（7.8）和（7.6），得到

$$\mathbb{E}_{\pi_n}[Y_i(t)]^{k+1} \le \frac{h_k}{a_k}\mathbb{E}_{\pi_n}[Y_{i-1}(t)]^{k+1} < \infty.$$

结论得证。 □

致谢。 SB 和 DI 的研究部分由美国国家科学基金会 NSF-CAREER奖（DMS- 2141621）资助。AB 的研究部分由美国国家科学基金会（DMS-2134107，DMS-2152577）资助。SB 和 AB 的研究由美国国家科学基金会提供的 RTG奖（DMS-2134107）资助。AB 在2025年秋季驻留于加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所期间，完成了本研究的部分工作。此次访问由美国国家科学基金会第 DMS-1928930 号拨款资助。

参考文献

[1] D. Aldous 和 P. Diaconis。Hammersley相互作用粒子过程与最长递增子序列。 *Probability theory and related fields*，103(2):199–213，1995。[2] L. Andreis、A. Asselah 和 P. D. Pra。具有非对称相互作用的相互作用随机游走系统的遍历性。 *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*，55(1):590 – 606，2019。网址：https://doi.org/10.1214/18-AIHP893。[3] R. Atar。通过自由边界问题的唯一性研究带选择机制的粒子系统的流体力学。 *arXivpreprint arXiv:2011.07535*，2020。[4] M. Bal´azs、M. Z. R´acz 和 B. T´oth。群集与价格建模：具有吸引相互作用的跳跃粒子。载于 *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*，第50卷，第425–454页，2014。[5] S. Banerjee。布朗康加舞队列。 *Probability Theory and Related Fields*，165:901–961，2016。[6] S. Banerjee 和 A. Budhiraja。无限Atlas模型不变分布的吸引域。 *TheAnnals of Probability*，50(4):1610–1646，2022。[7] S. Banerjee、A. Budhiraja 和 B. Estevez。并行队列中的负载均衡与基于秩的扩散。 *Mathematics of Operations Research*（即将出版），2024。[8] S. Banerjee、A. Budhiraja 和 D. Imon。快速大幅跳跃下的群集行为：稳定性、混沌与行波，2024。网址：https://arxiv.org/abs/2404.13117。[9] D. Ben-Avraham、S. N. Majumdar 和 S. Redner。激烈竞争的玩具模型。 *Journal of Statistical Mechanics:Theory and Experiment*，2007(04):L04002，2007。[10] J. Berestycki、E. Brunet、J. Nolen 和 S. Penington。无限蜂群极限下的布朗蜜蜂。 *arXiv preprintarXiv:2006.06486*，2020。[11] J. Berestycki、E. Brunet、J. Nolen 和 S. Penington。分枝布朗运动与选择机制所产生的自由边界问题。 *Transactions of the American Mathematical Society*，2021。[12] N. Berestycki 和 L. Zhao。多维Brunet–Derrida粒子系统的形状。 *arXiv preprintarXiv:1305.0254*，2013。[13] E. Brunet 和 B. Derrida。截断导致的前沿速度变化。 *Physical Review E*，56(3):2597，1997。

[14] G. Carinci、A. De Masi、C. Giardina 和 E. Presutti。 *Free boundary problems in PDEs and particle systems*。Springer 数学物理简明丛书，第16卷，2016。[15] E. Cator 和 P. Groeneboom。具有源与汇的Hammersley 过程。 *The Annals of Probability*，33(3): 879 – 903，2005。网址：https://doi.org/10.1214/009117905000000053。[16] P. Cattiaux、F. Delebecque 和 L. P

´ 、 *The Annals of* edeches。 *Applied Probability* 28 5 3239 3286, 2018 10 1214 18 1400 随机 Cucker–Smale 模型：新旧进展。，( ): – 。网址：https://doi.org/ 。 / -AAP 。[17] A. Dembo、M. Jara 和 S. Olla。无限 Atlas 过程：收敛至平衡态。载于 *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques* 55, 607 619 ´ 2019 ，，第 卷 页码 – 。Institut Henri Poincare，。[18] A. Dembo 和 L.-C. Tsai。Atlas 模型的平衡涨落。 *Annals of Probability* 45 6 4529 4560, ，(B): – 。 2017

[19] M. V. der Boor、S. C. Borst、J. S. Van Leeuwaarden 和 D. Mukherjee。网络化系统中的可扩展负载均衡：近期进展综述。 *SIAM Review*，64(3):554–622，2022。[20] D. Down、S. P. Meyn 和 R. L. Tweedie。马尔可夫过程的指数遍历性与一 *The Annals* 致遍历性。*of Probability* 23 4 1671 1691, 1995 ，

( ): – 。[21] R. Durrett 和 D. Remenik。Brunet–Derrida 粒子系统、自由边界问题与 Wiener–Hopf 方程。 *Annals of Probability*，39(6):2043–2078，2011。[22] A. Eberle。马尔可夫过程。 *Lecture Notes at University of Bonn*，2020。[23] R. Fernholz 和 I. Karatzas。随机投资组合理论：概述。 *Handbook of numerical analysis*，15: 89–167，2009。[24] D. C. Gazis、R. Herman 和 R. W. Rothery。交通流的非线性跟驰模型。 *Operations research* 9 4 545 567, 1961 ，( ): – 。

[25] A. G. Greenberg、S. Shenker 和 A. L. Stolyar。大型并行系统中的异步更新。 *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review* 24 1 91 103, 1996 ，( ): – 。

[26] J. M. Hammersley 等。研究的几点初步成果。载于 *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability*，第1卷，第345–394页，1972。[27] H. Holden 和 N. H. Risebro。跟驰模型可视为交通流 Lighthill-Whitham-Richards 模型的数值近似。 *arXiv preprint arXiv:1702.01718*，2017。[28] M.-O. Hongler、R. Filliger 和 O. Gallay。一维主体动力学中的局部与非局部重心相互作用。*Mathematical Biosciences & Engineering*，11(2):303–315，2013。[29] T. Ichiba、S. Pal 和 M. Shkolnikov。基于秩的模型的收敛速率及其在投资组合理论中的应用。 *Probability Theory and Related Fields*，156(1-2):415–448，2013。[30] B. Jourdain 和 F. Malrieu。通过累积分布函数相互作用的粒子系统的混沌传播与 Poincar´e 不等式。 *The Annals of Applied Probability*，18(5):1706 – 1736，2008。网址：https://doi.org/10. 1214/07-AAP513。[31] B. Jourdain 和 J. Reygner。基于排名的相互作用扩散过程的混沌传播，以及标量拟线性抛物方程的长期行为。 *Stochastic Partial Differential Equations: Analysis and Computations*，1 3 455 506，2013 ( ): – 。[32] C. Kipnis 和 C. Landim。 *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*，第320卷。Springer 科学与商业媒体，2013。[33] J. Krug 和 J. Garcia。 ℝ上的非对称粒子系统。 *Journal of Statistical Physics*，99(1):31–55，2000。[34] D. A. Levin 和 Y. Peres。 *Markov chains and mixing times*，第107卷。美国数学学会，2017。[35] Y. Lu、Q. Xie、G. Kliot、A. Geller、J. R. Larus 和 A. Greenberg。加入空闲队列：一种适用于动态可扩展网络服务的新型负载均衡算法。 *Performance Evaluation*，68(11):1056–1071，2011。[36] S. P. Meyn 和 R. L. Tweedie。 *Markov chains and stochastic stability*。Springer 科学与商业媒体，2012。[37] M. Mitzenmacher。随机负载均衡中的两种选择的力量。*IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 12 10 1094 1104, 2001 ，( ): – 。

[38] S. Pal 和 J. Pitman。具有依赖排名漂移的一维布朗粒子系统。 *The Annals of Applied Probability* 18 6 2179 2207, 2008 ，( ): – 。

[39] J. Ridder 和 W. Shen。交通流非局部模型的行波解。 *arXiv preprint arXiv:1808.03734*，2018。[40] A. Sarantsev。竞争布朗粒子的无限系统。

Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités , , *et Statistiques* 53 4 2279 2315, 2017
( ) : – 。[41] A. Sarantsev 和 L.-C. Tsai。竞争布朗粒子无限系统的平稳间距分布。*Electronic Journal of Probability*, 22，2017。[42] T. Sepp
¨ ¨ *Annals of probability* 176 204, 2001

alainen。一维全非对称黏性过程的平衡态扰动。，页码 – 。[43] M. Shkolnikov。通过秩相互作用的扩散过程的大型系统。*Applications* 122 4 1730 1747, 2012 *Stochastic Processes and their* ,

( ) : – 。[44] A. Stolyar。具有平均场相互作用的粒子系统的大尺度行为：行波解。*Advances in Applied Probability*, 55(1):245–274，2023。[45] A. L. Stolyar。具有平均场相互作用的粒子系统：平稳分布的大尺度极限。*Stochastic Systems*，13(3):343–359，2023。

S. Banerjee, A. Budhiraja, and D. Imon,
Department of Statistics and Operations Research
University of North CarolinaChapel Hill,
NC 27599, USAemail: sayan@email.unc.edu
email: budhiraj@email.unc.edu
email: idilshad@unc.edu