arXiv:2601.02513v1 [math.NA] 5 Jan 2026

旋转浅水方程适定的能量/熵稳定边界条件

预印本

Kenneth Duru[1] 和 Chuqiao Xu[2,3]

[1]德克萨斯大学埃尔帕索分校数学科学系，美国 [2]澳大利亚国立大学数学科学研究所，堪培拉，澳大利亚[3]山东大学数学学院，中国济南

摘要

我们推导并分析了向量不变形式下二维线性与非线性旋转浅水方程的适定、能量稳定和熵稳定边界条件。研究重点是亚临界流，这类流动常见于大气、海洋及地转流应用中。我们考虑具有光滑边界的空间区域，并基于质量通量、黎曼不变量和伯努利势构造线性和非线性边界条件，从而确保所得初边值问题具有可证明的熵稳定性和能量稳定性。线性分析较为全面，给出了证明线性初边值问题解的存在性、唯一性和能量稳定性的充分条件。对于允许更一般解的非线性初边值问题，我们的目标是构造能够保证熵稳定性的非线性边界条件。我们为非线性初边值问题引入线性相容性和线性稳定性的概念，并证明：若一个非线性初边值问题同时满足线性相容性和线性稳定性，则对于足够规则的初始数据和边界数据，在有限时间区间内存在唯一的光滑解。线性和非线性初边值问题均可通过高阶精度数值方法高效求解。通过采用高阶分部求和算子离散空间导数，并利用罚函数技术弱施加边界条件，我们构造了适用于曲线网格、具有可证明能量稳定性和熵稳定性的数值格式。我们还给出了大量数值实验，以验证这些方法的精度，并展示所提出的边界条件和数值格式的鲁棒性。

1 引言

浅水方程（SWE）是流体动力学中的一组基本方程，最初由圣维南于 1871 [1]提出。它们是在假设流体层厚度远小于运动水平尺度的条件下，对纳维–斯托克斯方程沿深度方向取平均而推导出来的。旋转浅水方程（RSWE）在这一框架中纳入旋转效应，尤其是在动量方程中加入科里奥利力项，而标准浅水方程中没有这一项。这些方程在海洋学和气象学等多个领域中至关重要，可用于模拟大气流 [2, 3], 洋流 [4], 地球物理波传播、潮汐和河流动力学等现象。由于结构简洁，RSWE 和浅水方程为描述大尺度空间范围内的关键流体行为提供了稳健的数学框架，同时避免了完整三维模型的复杂性。

非线性浅水方程组通常以守恒形式推导，将质量和动量等守恒变量作为预报量来演化。然而，在足够光滑的条件下，浅水方程组可以改写为所谓的向量不变形式，该形式演化原始变量，即质量和速度矢量。例如，在气象学中，采用浅水方程组的向量不变形式，以确保精确的离散能量守恒 [5, 6],、精确的涡度动力学以及稳定的离散地转平衡 [7, 8]。为减少可能污染模拟结果的数值伪影的影响，数值方法应保留物理模型固有的重要不变量。例如，在中纬度天气系统中，涡度动力学发挥着

至关重要的作用。离散涡度守恒有助于防止重力势能——可能是大气能量中占比最大的部分——虚假地产生绝对涡度，从而扰乱气象信号 [9]。

众所周知，适定边界条件（边界条件）及其稳定且精确的数值实现，对于确保偏微分方程（PDE）的数值模拟具有稳健性、可靠性和收敛性至关重要 [10–13]。立方球网格上的周期边界条件通常足以在球面上精确求解 RSWE，从而实现有效的全球尺度大气模拟 [5,14–16]。然而，在许多实际应用中——例如区域尺度或有限区域大气模型 [2,17–20] 以及海洋流动模型 [4]——具有稳定数值实现的非周期适定边界条件对于开展精确可靠的数值模拟是必不可少的。例如，在海洋模拟中，侧向边界条件对于精确模拟开尔文波及其相关的涡旋运动是必要的 [21,22]。在其他场景中，例如区域海域的海啸模拟，计算域边界并非物理边界。因此，必须采用人工的无反射边界条件，同时确保初边值问题（初边值问题）的适定性和稳定性。在局地天气预报以及区域或有限区域大气模型中 [2,17–20],，通常会在计算域边界处指定由全球模型导出的边界数据。因此，区域模型的边界闭合必须产生适定边界条件，并显著减少边界失配误差 [17–19]。

本研究的首要目标是为具有光滑边界的空间区域上的线性和非线性旋转浅水方程构建适定且稳定的边界条件。次要目标是以便于采用各种数值方法实现的方式来表述这些边界条件，例如有限差分、有限体积、有限元和间断伽辽金方法。此外，本研究还旨在为曲线网格上的线性和非线性初边值问题开发可证明具有能量稳定性和熵稳定性的高阶精度数值格式。

针对适定初边值问题开发稳健的高阶精度数值方法，通常始于在连续层面确立能量稳定性或熵稳定性。借助求和分部（SBP）算子 [13,23–26]，并谨慎处理边界条件（例如同时近似项（SAT） [10,27,28]等罚方法），便可在离散层面有效模拟这种连续分析。对于线性问题，初边值问题理论旨在确定保证能量稳定性所需的最少边界条件数目 [10,11,29]。相比之下，对未经线性化的非线性双曲型初边值问题进行分析和构造，面临着重大挑战。不过，近期已有研究开始探讨对浅水方程等具有非线性边界条件的系统进行非线性分析（例如参见 [30,31]）。这里的一个关键疑问是：尽管熵稳定性（定义为熵泛函有界）是必要条件，但仅有熵稳定性不足以确立非线性初边值问题的适定性。与线性问题不同，非线性问题中达到熵稳定性所需的最少边界条件数目，可能不同于线性理论所规定的数目 [12,29]。我们认为，保持线性与非线性表述之间的一致性对于获得可靠结果至关重要。具体而言，我们主张非线性初边值问题经线性化后，应得到一个适定的线性初边值问题。确保这种线性相容性和稳定性，有助于证明：对于足够光滑的初始和边界数据，解的存在唯一性至少能在有限且足够短的时间区间内成立。

由旋转浅水方程建模的流体动力学，其基本性质可用一个称为弗劳德数的无量纲数来表征，定义为 $\mathrm{Fr} = |\mathbf{u}|/\sqrt{gh}$，其中$\mathbf{u}$ 为深度平均流速， h 为水深， g 为重力加速度。从物理上看， h 必须为正（$h > 0$）。流动状态根据 Fr 的取值分类：$\mathrm{Fr} < 1$时为亚临界，$\mathrm{Fr} = 1$时为临界，$\mathrm{Fr} > 1$时为超临界。本研究聚焦于亚临界流（$\mathrm{Fr} < 1$），这类流动常见于大气、海洋及地转流现象。

我们考虑边界光滑的空间区域，并以质量通量和伯努利势为基础建立线性和非线性边界条件，从而确保相应的初边值问题具有可证明的熵稳定性和能量稳定性。我们对线性初边值问题进行了全面分析；与 [12,29], 类似，本文给出了建立解的存在性、唯一性和能量稳定性的充分条件。非线性初边值问题允许更一般的解，我们的目标是推导能够保证此类问题熵稳定性的非线性边界条件。为此，我们引入非线性初边值问题的线性相容性和线性稳定性概念。我们证明，若一个非线性初边值问题同时满足线性相容性和线性稳定性，则对于有限时间区间内充分正则的初始和边界数据，存在唯一的光滑解。线性和非线性初边值问题均可通过高阶精度数值方法高效求解。具体而言，我们采用高阶求和分部算子 [23,24,32,33] 进行空间离散，并通过同时近似项 [10,27,28], 弱施加边界条件，从而构造出在曲线网格上可证明具有能量稳定性和熵稳定性的数值格式。文中给出了详细的数值实验，以验证方法的精度，并展示边界条件及整体数值框架的鲁棒性。本研究将 [10], 中针对一维浅水方程的结果推广至几何复杂区域和曲线网格上的二维线性与非线性旋转浅水方程。

本文其余部分安排如下。第 2 节以向量不变形式介绍二维旋转浅水方程，并推导总能量和熵的演化方程。第 3 节介绍模型的线性化，

推导边界条件，并证明线性初边值问题的适定性。随后，我们构造了既满足熵稳定性、又适用于非线性旋转浅水方程的非线性边界条件，并在第 4 节分析非线性初边值问题。第 5 节介绍适用于线性和非线性初边值问题的高阶精度求和分部-同时逼近项方法，并证明其数值稳定性。第 6 节给出了详细的数值实验。最后，第 7 节总结主要发现，并讨论未来研究的潜在方向。

2 非线性旋转浅水方程的向量不变形式

非线性二维旋转浅水方程的向量不变形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega \mathbf{u}^{\perp} + \nabla G = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F} = h\mathbf{u}, \quad G = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + gh, \quad \omega = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} + f_c, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$(x,\ y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为空间变量，$t \in [0,T]$ 表示时间，$T > 0$ 为终止时间。预报流场变量为水深 $h > 0$ 和流速$\mathbf{u} = [u,v]^T$，其中$\mathbf{u}^{\perp} = [-v,u]^T$。请注意，这与方程的通量形式不同；在通量形式中，预报变量是守恒变量，即水深 $h > 0$ 和动量$\mathbf{u}h$。诊断流场变量为质量通量$\mathbf{F}$、伯努利势 G 和绝对涡度ω。这里，f_c 为科里奥利频率，$g > 0$ 为恒定的重力加速度。此外，我们假设空间区域足够光滑，且 $\partial\Omega$表示区域的边界，$\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \in \mathbb{R}^2$ 是区域 $\partial\Omega$边界上的外法向单位向量。

我们为旋转浅水方程补充光滑的初始条件

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x,y), \quad h|_{t=0} = h_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega. \tag{2.2}$$

我们还需要在区域 $\partial\Omega$ 的边界处施加适当的边界条件，以封闭系统并确保初边值问题适定。下一节将对此进行详细讨论。

例如，在气象学中，常采用浅水方程 (2.1) 的向量不变形式，以实现精确的离散能量守恒 [5,8,16],、精确的涡度动力学以及离散的定常地转平衡。本文关注区域模型中的非线性能量平衡，尤其是涉及非周期边界条件的情形。

我们将单元能量 e定义为动能与势能之和，并将总能量 $E(t)$定义为单元能量在空间区域上的积分

$$e = \frac{1}{2}h|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2}gh^2, \quad E(t) = \int_{\Omega} e d\Omega. \tag{2.3}$$

对于亚临界流，当 $\mathrm{Fr} = |\mathbf{u}|/\sqrt{gh} < 1$时，单元能量是预报变量 $(h,\ \mathbf{u})$ 的凸函数，因此定义了数学熵 [5,10]。

定义 1. 若旋转浅水方程 (2.1) 满足初始条件 (2.2)、适当的边界条件及齐次边界数据，且对所有 $t \in [0,T]$ 均有 $dE(t)/dt \le 0$，则称其稳定。

因此，数值方法应尽可能对总能量和熵进行界定，从而确保非线性稳定性和鲁棒性。单元能量 e 满足一个连续性方程。为此，我们对单元能量求时间导数，并利用 (2.1) 消去预报变量的时间导数，得到

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + G\frac{\partial h}{\partial t} = - \underbrace{\mathbf{F} \cdot (\omega \mathbf{u}^{\perp})}_{h\omega(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\perp}) = h\omega(uv-uv) = 0} - \mathbf{F} \cdot \nabla G - G\nabla \cdot \mathbf{F}. \tag{2.4}$$

我们得到能量 e 的连续性方程

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \big(G\mathbf{F}\big) = 0, \quad G\mathbf{F} = \frac{1}{2}gh\mathbf{F} + e\mathbf{u}, \tag{2.5}$$

其中用到了以下恒等式

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^{\perp} = h(uv - uv) = 0, \quad \nabla \cdot \big(G\mathbf{F}\big) = \mathbf{F} \cdot \nabla G + G\nabla \cdot \mathbf{F}.$$

注意，$G\mathbf{F} = (\frac{1}{2}gh\mathbf{F} + e\mathbf{u})$ 是能量通量。因此，能量通量可分解为由重力引起的压力通量 $\frac{1}{2}gh\mathbf{F}$ $g > 0$ 以及由流动 $\mathbf{u}$输运的输运通量 $e\mathbf{u}$。

在空间区域上对方程 (2.5) 积分，可得总能量守恒，

$$\frac{d}{dt}E(t)=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}ed\Omega=\mathrm{BT}:=-\oint_{\partial\Omega}GF_n dS,\quad GF_n=\frac{1}{2}gh^2u_n+eu_n, \tag{2.6}$$

其中，BT 为边界项，$F_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}=hu_n$ 为法向质量通量，$u_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ 为边界 $\partial\Omega$ 上的法向速度，G为伯努利势。在周期区域上，式 (2.6) 右端的轮廓积分为零，从而保证总能量守恒，即对于所有 $t\in[0,T]$，均有 $E(t)=E(0)$，因此确保了稳定性。在光滑几何上的周期边界条件通常足以保证定义在球面上的全球模型的适定性。在离散层面，可通过设计适当的数值通量或同时近似项来抵消边界项 BT，或确保计算区域边界上的 BT ≤ 0，从而实现周期边界条件。

对于定义在有界区域上的区域模型，非周期边界条件对于准确表示边界处的各种物理现象至关重要 [21, 22]。它们使得能够在区域边界上施加全局数据约束，例如，[**?**，17–20]。因此，适定边界条件对于确保模型稳定性和数值解的收敛至关重要。虽然线性双曲型初边值问题的适定性理论相对成熟，但相应的非线性双曲型初边值问题理论仍不够完善。本研究的主要目标之一，是为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的空间区域 Ω 上的非线性旋转浅水方程 (2.1) 建立适定且稳定的非线性边界条件。第二个目标是以便于在数值方法中实现的方式构造这些非线性边界条件。最后，本研究旨在为光滑几何上的非线性初边值问题建立可证明具有能量稳定性和熵稳定性的数值格式。

对于线性问题，初边值问题理论旨在确定建立能量稳定性所需的最少边界条件数 [10–12, 29]。相比之下，对于非线性问题，证明稳定性所需的最少边界条件数可能与线性理论规定的数量不同 [30, 31]。然而，我们认为，保持线性与非线性初边值问题之间的相容性，对于获得可靠结果至关重要。具体而言，我们主张，非线性初边值问题经过线性化后，应得到一个适定的线性初边值问题。这种线性相容性对于在有限时间内，针对足够光滑的初始和边界数据证明唯一解的存在性至关重要。

3 旋转浅水方程初边值问题的线性理论

本节将对非线性旋转浅水方程（2.1）进行线性化，并简要介绍线性双曲型偏微分方程初边值问题的理论。我们将把该理论应用于线性化旋转浅水方程，并推导出适定边界条件。首先，我们$\widetilde{\ }$以扰动变量的形式引入零均值量，即 $u=U+\widetilde{u}$、$v=V+\widetilde{v}$和 $h=H+h$，其$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$常均值状态为 $H>0$、U、V。舍去阶数为 $\mathcal{O}$（$\widetilde{u}^2$，$\widetilde{v}^2$，h^2，$\widetilde{u}h$，$\widetilde{v}h$，$\widetilde{u}\widetilde{v}$）的非线性项后，我们得到向量不变形式的二维线性旋转浅水方程

$$\begin{cases}\frac{\partial h}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{F}=0,\\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\omega\mathbf{U}^{\perp}+f_c\mathbf{u}^{\perp}+\nabla G=\mathbf{0},\\ \mathbf{F}=H\mathbf{u}+\mathbf{U}h,\quad G=\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}+gh,\quad \omega=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u},\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\end{cases} \tag{3.1}$$

其中$\mathbf{U}=[U,V]^T$和$\mathbf{U}^{\perp}=[-V,U]^T$，为方便起见，我们省略了波动场上的波浪号。注意，$\mathbf{F}=Uh+Hu$ 是线性质量通量，$G=\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}+gh$ 是线性伯努利势。与前文一样，对于线性旋转浅水方程（3.1），我们将单元能量 e 定义为动能与势能之和，并将总能量 $E(t)$定义为空间区域上单元能量的积分

$$e=\tfrac{1}{2}H|\mathbf{u}|^2+\tfrac{1}{2}gh^2,\quad E(t)=\int_{\Omega}ed\Omega, \tag{3.2}$$

其中 $g>0$ 和 $H>0$。注意，总能量是预报变量（h,$\mathbf{u}$）的加权 L_2-范数。因此，能量有界即可确立线性旋转浅水方程（3.1）的稳定性，并有望确立其适定性。与非线性情形一样，我们证明单元能量遵循守恒律演化。式（3.2）中定义的能量 e 的连续性方程为

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla\cdot\big(gHh\mathbf{u}+e\mathbf{U}\big)=0. \tag{3.3}$$

与上述非线性旋转浅水方程类似，请注意，能量通量 $gHh\mathbf{u}+e\mathbf{U}$ 分解为重力 $g>0$ 产生的压力通量 $gHh\mathbf{u}$以及由背景流 $\mathbf{U}$输运的输运通量 $e\mathbf{U}$。

在空间区域上对方程 (3.3) 积分，可得总能量守恒，

$$\frac{d}{dt}E(t)=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}ed\Omega=\mathrm{BT},\quad \mathrm{BT}:=-\oint_{\partial\Omega}\left(gHhu_n+eU_n\right)dS, \tag{3.4}$$

其中，BT 为边界项，$u_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ 和 $U_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$ 分别为边界上的法向速度。在周期区域上，由右端轮廓积分定义的边界项 BT（见式 (3.4)）为零，因此总能量守恒，即对于所有 $t\in[0,T]$，$E(t) = E(0)$，从而确保周期解的稳定性。在离散层面，可通过设计适当的数值通量或同时近似项，使其抵消计算区域边界上的能量通量轮廓积分，从而实现周期边界条件。

对于具有非周期边界条件的区域模型，仅有稳定性并不能保证初边值问题适定。边界条件的定义方式可能导致解不存在，或使解空间不唯一，从而令初边值问题不适定。所幸，线性双曲型初边值问题的适定性理论已相当成熟。我们将简要概述相关内容，并请读者参阅 [11,12,29]，以了解更全面的讨论。

3.1 线性旋转浅水方程初边值问题的适定性

我们首先将线性旋转浅水方程 (3.1) 改写为标准形式，即一阶双曲型偏微分方程组。定义未知向量场 $\mathbf{q} = [h,u,v]^T$。二维空间中线性旋转浅水方程的初边值问题可表述如下：

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = D\mathbf{q}, \quad D\mathbf{q} := -\left(A\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + B\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + C\mathbf{q}\right), \quad (x,y)\in\Omega, \quad t>0, \tag{3.5a}$$

$$\mathbf{q}(x,y,t) = \mathbf{q}_0(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \quad t=0, \tag{3.5b}$$

$$\mathcal{B}\mathbf{q}(x,y,t) = \mathbf{d}(x,y,t), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \quad t\geq 0, \tag{3.5c}$$

其中系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} U & H & 0 \\ g & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} V & 0 & H \\ 0 & V & 0 \\ g & 0 & V \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_c \\ 0 & f_c & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

这里，$\mathbf{q}_0$ 和$\mathbf{d}$ 是初始和边界数据，$\mathcal{B}$ 是边界算子，用于在区域 Ω 的边界$\partial\Omega$上对$\mathbf{q}$ 施加边界条件。请注意，边界算子 $\mathcal{B}$ 尚未定义，需要确定其形式，使初边值问题 (3.5a)–(3.5c) 适定。下面的分析将考虑齐次边界数据；不过，分析也可以扩展到非齐次边界数据，但这会使代数推导变得复杂。

下面将介绍推导边界算子 $\mathcal{B}$ 以及证明初边值问题 (3.5a)–(3.5c) 适定性所需的相关记号。首先，定义加权 $L^2(\Omega)$ 内积和范数

$$(\mathbf{p},\mathbf{q})_W := \int_\Omega \mathbf{p}^T W\mathbf{q}\, d\Omega, \quad \|\mathbf{q}\|_W^2 := (\mathbf{q},\mathbf{q})_W = \int_\Omega e\, d\Omega, \quad W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

请注意，W是对角且正定的，并且 $e = \mathbf{q}^T W\mathbf{q} > 0, \quad \forall \mathbf{q} = [h,u,v]^T \in \mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$，以及 $E = \|\mathbf{q}\|_W^2 > 0$，其中$e$ 是单元能量，E 是式 (3.2) 中定义的总能量。引入加权矩阵将很有用

$$WA = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} gU & gH & 0 \\ Hg & HU & 0 \\ 0 & 0 & HU \end{bmatrix}, \quad WB = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} gV & 0 & gH \\ 0 & HV & 0 \\ Hg & 0 & HV \end{bmatrix}, \quad WC = \frac{H}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_c \\ 0 & f_c & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

注意，加权矩阵 WA和 WB是对称的，而加权矩阵 WC是反对称矩阵，即 $(WA)^\top = WA$、$(WB)^\top = WB$，且 $(WC)^\top = -WC$。

定义 2。 如果存在唯一解$\mathbf{q} = [h,u,v]^T$，且满足以下条件，则初边值问题(3.5a)–(3.5c) 是适定的：

$$\|\mathbf{q}\|_W \leq Ke^{\mu t}\|\mathbf{q}_0\|_W,$$

其中常数 $K>0$、$\mu\in\mathbb{R}$ 与初始数据$\mathbf{q}_0$无关。

初边值问题 (3.5a)–(3.5c) 的适定性与微分算子 D 的有界性有关。我们引入函数空间

$$\mathbb{V} = \left\{\mathbf{q} \mid \mathbf{q}(x,y)\in\mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{q}\|_W < \infty, \quad x\in\Omega, \quad \{\mathcal{B}\mathbf{q} = 0, \quad (x,y)\in\partial\Omega\}\right\}. \tag{3.9}$$

以下定义将会很有用。

定义 3. 若存在与 $\mathbf{q} \in \mathbb{V}$无关的 $\exists \mu \in \mathbb{R}$，使得微分算子 D 在函数空间 $\mathbb{V}$ 中是半有界的，

$$(\mathbf{q}, D\mathbf{q})_W \leq \mu \|\mathbf{q}\|_W^2, \ \forall \mathbf{q} \in \mathbb{V}.$$

引理 1. 考虑(3.5a) 中给出的线性微分算子 D，并令其满足边界条件 (3.5c)，$\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$。令$\mathrm{BT} = -\oint_{\partial\Omega}($ $gHhu_n + eU_n)dS$ 为(3.4) 中给出的边界项，并令 W 为定义加权 L^2-范数 (3.7)的对角正定权矩阵。若 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$ 使得边界项$\mathrm{BT} \leq 0$，则 D 是半有界的。

证明。 现在考虑 $(\mathbf{q}\ D\mathbf{q})_W$，并注意到 (3.8) 中给出的加权常系数矩阵是对称的。通过分部积分可得

$$(\mathbf{q}, D\mathbf{q})_W + (\mathbf{q}, D\mathbf{q})_W = \mathrm{BT}.$$

因此，对于边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$，若 $\mathrm{BT} \leq 0$，则

$$(\mathbf{q}, D\mathbf{q})_W = \frac{1}{2}\mathrm{BT} \leq 0.$$

上界对应于 $\mu = 0$ 的情形。显然，对于 $(\mathbf{q}\ D\mathbf{q})_W = 0$，$D$ 是半有界的。 □

通常可以对边界条件进行如下表述 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$，使得 $\mathrm{BT} \leq 0$。一个直接的例子是周期边界条件，此时 $\mathrm{BT} = 0$。然而，对于非周期边界条件，边界算子绝不能破坏解的存在唯一性。现在我们将介绍 D 最大半有界性的定义，该定义将确保初边值问题 (3.5a)–(3.5c) 适定。

定义 4. 在 (3.5a) 中定义的微分算子 D，若其在函数空间 $\mathbb{V}$ 中半有界，但在任何边界条件更少的函数空间中都不半有界，则称其为最大半有界。

最大半有界性与初边值问题的适定性有着内在联系。我们将在以下定理中阐述这一结果。读者可参阅 [12]，了解更详尽的讨论。

定理 1 3 5 3 5 D D $_W \leq$。考虑初边值问题 (.a)–(.c)。$\mu\|$ $\|_W^2$
若微分算子最大半有界，($\mathbf{q}\mathbf{q}$)$\mathbf{q}$，则该问题适定。也就是说，存在唯一解 $\mathbf{q}$ 满足估计

$$\|\mathbf{q}\|_W \leq Ke^{\mu t}\|\mathbf{q}_0\|_W, \quad K = 1.$$

证明。 我们考虑

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{q}\|_W^2 = \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\right)_W + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \mathbf{q}\right)_W = (\mathbf{q}, D\mathbf{q})_W + (D\mathbf{q}, \mathbf{q})_W \tag{3.10}$$

半有界性给出

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{q}\|_W^2 \leq 2\mu\|\mathbf{q}\|_W^2 \iff \frac{d}{dt}\|\mathbf{q}\|_W \leq \mu\|\mathbf{q}\|_W. \tag{3.11}$$

由格朗沃尔引理可得

$$\|\mathbf{q}\|_W \leq e^{\mu t}\|\mathbf{q}_0\|_W, \tag{3.12}$$

由此，依据定义 2，我们得到适定性所要求的结果。 □

注意，根据引理 1，$\mathrm{BT} \leq 0$ 意味着微分算子 D 在函数空间 $\mathbb{V}$中是半有界的。因此，为了确保最大半有界性，我们需要确定使 $\mathrm{BT} \leq 0$成立所需的最少边界条件数。还值得注意的是，尽管这里考虑的是齐次边界数据，但该分析可以扩展到非齐次边界数据，尤其是在 $\mu < 0$时。更多详细讨论和示例，请参见 [11,29,34]及其中的参考文献。此外，本研究后续进行的数值实验也证实，我们的结果可扩展到非齐次边界数据。

3.2 适定的线性边界条件

现在，我们将为线性初边值问题 (3.5a)–(3.5c) 建立适定边界条件。适定边界条件要求微分算子 D 在函数空间 $\mathbb{V}$ 中具有最大半有界性。也就是说，我们需要确定最少数量的边界条件，使得 D 在 $\mathbb{V}$ 中半有界。首先，我们将确定使 $\mathrm{BT} \leq 0$ 成立所需的最少边界条件数量，随后再给出边界条件的形式。

亚临界流的边界条件数量。首先，我们考虑外法向单位向量 $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$，并引入变量

$$U_n = n_x U + n_y V, \quad u_n = n_x u + n_y v, \qquad u_s = n_y u - n_x v, \quad c = \sqrt{gH} > 0, \tag{3.13}$$

其中，U_n、u_n 为边界上的法向速度，u_s 为边界上的切向速度，$c > 0$ 为重力波速。当 $U_n < 0$ 时，该边界称为**流入边界**；当$U_n \geq 0$时，称为**流出边界**。我们还引入无量纲变量$\mathbf{p}$以及由下式定义的边界矩阵 M

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} h' \\ u'_n \\ u'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h/H \\ u_n/c \\ u_s/c \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} U_n & c & 0 \\ c & U_n & 0 \\ 0 & 0 & U_n \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

考虑边界项

$$\mathrm{BT} = -\oint_{\partial\Omega} (gHhu_n + eU_n)\, dS = -\frac{c^2 H}{2} \oint_{\partial\Omega} \left(\mathbf{p}^T M \mathbf{p}\right) dS.$$

利用由下式给出的特征分解 $M = S\Lambda S^T$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = U_n + c, \quad \lambda_2 = U_n - c, \quad \lambda_3 = U_n, \tag{3.15}$$

以及线性变换

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = S^\top \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h' + u'_n \\ h' - u'_n \\ \sqrt{2} u'_s \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

边界项 BT 可改写为

$$\mathrm{BT} = -\frac{c^2 H}{2} \oint_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_3 w_3^2\right) dS. \tag{3.17}$$

边界条件的数量取决于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的符号，而这些符号又取决于法向流速 U_n 相对于特征波速 c 的大小，并由弗劳德数 $\mathrm{Fr} = |\mathbf{U}|/c$ 决定。具体而言，边界条件的数量必须等于边界矩阵 M 的负特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的数量。对于亚临界流，当 $0 \leq \mathrm{Fr} < 1$ 时，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$，且 $\lambda_3 = U_n$ 的符号与背景法向流速 U_n相同。因此，在流入边界处，我们有 $\lambda_3 = U_n < 0$；在流出边界处，我们有 $\lambda_3 = U_n \geq 0$。下方表1汇总了不同流动条件下边界条件的数量。

边界类型	$\lambda_1 = U_n + c$	$\lambda_2 = U_n - c$	$\lambda_3 = U_n$	边界条件数量
流入：$U_n < 0$	> 0	< 0	< 0	2
流出：$U_n \geq 0$	> 0	< 0	≥ 0	1

表1：亚临界流的特征值符号及边界条件数量。

亚临界流的适定且稳定的边界条件。对于亚临界流，当 $0 \leq \mathrm{Fr} < 1$ 时，我们构造流入边界条件，当 $U_n \neq 0$,

$$\{\mathcal{B}\mathbf{p} = \mathbf{d},\ (x, y) \in \partial\Omega\} \equiv \{w_2 - \gamma w_1 = d_1;\ w_3 = d_2;\ \text{if } U_n < 0\}, \tag{3.18}$$

以及流出边界条件

$$\{\mathcal{B}\mathbf{p} = \mathbf{d},\ (x, y) \in \partial\Omega\} \equiv \{w_2 - \gamma w_1 = d_1;\ \text{if } U_n \geq 0\}, \tag{3.19}$$

其中 d_1 和 d_2 是边界数据。这里，$\gamma \in \mathbb{R}$ 是边界反射系数。以下引理对边界反射系数 γ作出约束。

引理2. 考虑在(3.17) 中定义的边界项BT，以及(3.18)–(3.19) 中的边界条件，其齐次边界数据为$\mathbf{d}=0$，适用于亚临界流 $0\le \mathrm{Fr}<1$，其中 $\lambda_1>0$ 且 $\lambda_2<0$。若 $0\le\gamma^2\le-\lambda_1/\lambda_2$，则边界项永不为正，即$\mathrm{BT}\le 0$。

证明。 设 $w_2=\gamma w_1$ 并考虑 $\lambda_1 w_1^2+\lambda_2 w_2^2=w_1^2\left(\lambda_1+\lambda_2\gamma^2\right)$. 注意， $\lambda_1>0$、 $\lambda_2<0$，且若 $\gamma^2\le-\lambda_1/\lambda_2$则 $\left(\lambda_1+\lambda_2\gamma^2\right)\ge 0$。因此，当 $\lambda_3=U_n<0$ 时，流入边界条件 (3.18) 给出

$$\mathrm{BT}=-\frac{c^2H}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\lambda_1 w_1^2+\lambda_2 w_2^2+\lambda_3 w_3^2\right)dS=-\frac{c^2H}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\gamma^2\right)w_1^2\right)dS\le 0.$$

类似地，若 $\gamma^2\le-\lambda_1/\lambda_2$ 则 $\left(\lambda_1+\lambda_2\gamma^2\right)\ge 0$ 且 $\lambda_3=U_n\ge 0$，流出边界条件 (3.19) 给出

$$\mathrm{BT}=-\frac{c^2H}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\lambda_1 w_1^2+\lambda_2 w_2^2+\lambda_3 w_3^2\right)dS=-\frac{c^2H}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\left(\lambda_1+\lambda_2\gamma^2\right)w_1^2+\lambda_3 w_3^2\right)dS\le 0.$$

□

我们将以定理总结本节，该定理证明了由线性浅水方程 (3.1) 的向量不变形式、初始条件 (2.2) 以及边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q}=0$定义的初边值问题的适定性，其中 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 由 (3.18)–(3.19) 给出。

定理 2. 考虑由线性旋转浅水方程的向量不变形式(3.1)、初始条件(2.2)及边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q}=0$定义的初边值问题，其中 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 由 (3.18)–(3.19) 给出，且 $0\le\gamma^2\le-\lambda_1/\lambda_2$。对于亚临界流，当 $0\le\mathrm{Fr}=|\mathbf{U}|/\sqrt{gH}<1$ 时，该初边值问题是适定的。也就是说，存在唯一的$\mathbf{q}=[h,u,v]^T$满足以下估计，

$$\|\mathbf{q}\|_W\le\|\mathbf{q}_0\|_W,\quad \forall\, t\in[0,T],$$

其中$\mathbf{q}_0=[h_0,u_0,v_0]^T$ 是紧支撑初始数据。

证明。 利用引理 1、定理 1 和引理2，即可完成定理的证明。 □

定理 2 证明了线性初边值问题存在唯一解且具有稳定性。然而，由 (3.18)–(3.19) 给出的边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q}=0$ 略显晦涩。我们将给出一些在若干建模场景中具有重要意义的物理边界条件，并依据定理 2 检验这些物理边界条件，以确定它们与线性旋转浅水方程 (3.1) 耦合时，能否构成适定初边值问题。

例 1 (线性黎曼不变量)。 黎曼不变量是双曲型偏微分方程组中信息的自然载体，对于设计有效的边界条件至关重要。例如，它们有助于将质量、压力或能量等量从边界输送到计算域中。此外，黎曼不变量还可用于推导透明或吸收边界条件，这对于减少区域模型和开放系统的计算域人工边界处不必要的反射至关重要。

我们将区分 具有 $U_n<0$ 的流入边界和具有 $U_n\ge 0$的流出边界。这里，黎曼 n 边界上的不变量 为

$$r_1:=\sqrt{\frac{g}{H}}h+u_n,\quad r_2:=\sqrt{\frac{g}{H}}h-u_n,\quad r_3:=u_s. \tag{3.20}$$

注意，在具有 $U_n<0$的流入边界处，特征速度为 $\lambda_1=U_n+c>0$ 的 r_1 是出射黎曼不变量，而 r_2 和 r_3 分别对应特征速度 $\lambda_2=U_n-c<0$、 $\lambda_3=U_n<0$，是边界上的入射黎曼不变量。然而，在具有 $U_n\ge 0$ 的流出边界处， r_1 和 r_3 是出射黎曼不变量，而 r_2 是边界上的入射黎曼不变量。我们将通过入射黎曼不变量传递边界数据 $\mathbf{d}$，以此指定边界条件。

对于 $U_n<0$，我们构造流入边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q}=\begin{cases}r_2:=\sqrt{\frac{g}{H}}h-u_n=d_1\equiv w_2-\gamma w_1=d_1/c, & \gamma=0,\\ r_3:=u_s=d_2\equiv\ w_3=d_2/c,\end{cases}\qquad \textit{if}\, U_n<0. \tag{3.21}$$

注意，如果 $U_n<0$，那么 $\gamma^2=0\le-\lambda_1/\lambda_2<1$.当 $U_n\ge 0$ 时，我们有

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q}=r_n:=\sqrt{\frac{g}{H}}h-u_n=d_1\equiv w_2-\gamma w_1=d_1/c,\quad \gamma=0,\ \textit{if}\, U_n\ge 0. \tag{3.22}$$

同理，若 $U_n\ge 0$，则 $\gamma^2=0<1\le-\lambda_1/\lambda_2$. 因此，流入和流出边界条件 (3.21)–(3.22) 满足引理*2*，并且从定理 *2* 的意义上说，将构成一个适定初边值问题。注意，当采用齐次数据 $\mathbf{d}=0$ 时，我们得到所谓的吸收/透射边界条件。

例2 (线性质量通量)。 质量通量可用于控制质量和物质如何经由边界输运进入计算域。例如，无质量通量边界条件可用于确保没有质量穿过边界输运。在流入处，给定 $U_n < 0$，我们建立流入质量通量边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = \begin{cases} F_n := U_n h + H u_n = d_1 \equiv w_2 - \gamma w_1 = d_1/H, \quad \gamma = -\lambda_1/\lambda_2 = -\frac{U_n+c}{U_n-c}, \\ F_s := u_s = d_2 \equiv \ w_3 = \frac{d_2}{c}, \end{cases} \quad \textit{if } U_n < 0. \tag{3.23}$$

与前文一样，注意，如果 $U_n < 0$，那么 $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 < -\lambda_1/\lambda_2 < 1$。因此，入流边界条件(3.23) 满足引理 *2*；与向量不变形式的线性旋转浅水方程(3.1)耦合时，将得到定理 *2* 意义下的适定初边值问题。

在流出边界处，当 $U_n \geq 0$ 时，流出质量通量边界条件为

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = F_n := U_n h + H u_n = d_1 \equiv w_2 - \gamma w_1 = d_1/H, \quad \gamma = -\lambda_1/\lambda_2 = -\frac{U_n + c}{U_n - c}, \quad \textit{if } U_n \geq 0. \tag{3.24}$$

注意，如果 $U_n \geq 0$，那么 $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 \geq -\lambda_1/\lambda_2 \geq 1.$。特别地，当 $U_n = 0$ 时，有等式 $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 = -\lambda_1/\lambda_2 = 1$，且满足引理*2*。然而，当 $U_n > 0$ 时，有 $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 > -\lambda_1/\lambda_2 > 1$，这违反了引理*2*。因此，当 $U_n > 0$时，严格流出质量通量边界条件(3.24) 在定理 *2* 的意义下不适定。

例3 （线性伯努利原理）。 伯努利原理可用于规定压力或能量如何穿过计算域的边界传输。对于满足 $U_n < 0$ 的流入边界，我们构造流入伯努利边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = \begin{cases} G_n := U_n u_n + gh = d_1 \equiv w_2 - \gamma w_1 = d_1/c, \quad \gamma = \lambda_1/\lambda_2 = \frac{U_n+c}{U_n-c}, \\ G_s := u_s = d_2 \equiv \ w_3 = \frac{d_2}{c}, \end{cases} \quad \text{如果 } U_n < 0. \tag{3.25}$$

注意，如果 $U_n < 0$，则 $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 \leq -\lambda_1/\lambda_2 < 1$。因此，流入边界条件 (3.25) 满足引理*2*；当与向量不变形式的线性旋转浅水方程 (3.1)耦合时，将得到定理 *2*意义下的适定初边值问题。

当 $U_n \geq 0$时，流出伯努利边界条件为

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = G_n := U_n u_n + gh = d_1 \equiv w_2 - \gamma w_1 = d_1/c, \quad \gamma = \lambda_1/\lambda_2 = \frac{U_n + c}{U_n - c}, \quad \textit{if } U_n \geq 0. \tag{3.26}$$

因此，如果 $U_n \geq 0$ $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 \geq -\lambda_1/\lambda_2 \geq 1.$ $U_n = 0$ $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 = -\lambda_1/\lambda_2 = 1$ *2* $U_n > 0$ $\gamma^2 = \lambda_1^2/\lambda_2^2 > -\lambda_1/\lambda_2 > 1$ 那么.....同样，当 时，我们有等式，并且满足引理。然而，当 时，我们有 ，这违反了引理*2*。因此，当 $U_n > 0$时，严格流出伯努利势边界条件 (3.26) 在定理 *2*意义下是不适定的。

如上面的例子所示，请注意，在流入边界处，当 $U_n < 0$ 时，或者当 $U_n = 0$ 时，我们有更大的灵活性，此时三个物理边界条件 (3.21)、(3.23) 和 (3.26) 均给出稳定且适定的边界条件。然而，在满足 $U_n > 0$ 的严格流出边界处，灵活性较小，因为只有线性黎曼边界条件 (3.21) 能在此处给出稳定且适定的初边值问题。

4 旋转浅水方程初边值问题的非线性理论

本节将上一节的线性分析推广至非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1)。特别需要强调的是，非线性分析必须与线性分析所得结论相一致。具体而言，流入边界和流出边界处边界条件的数量必须与线性理论一致。任何不一致都意味着某个有效的线性化与线性分析相矛盾，从而削弱非线性理论的有效性。非线性初边值问题的一项关键且总体性的要求是，非线性边界条件的构造应使其线性化后得到一个符合定理 2 的适定线性初边值问题。这种相容性对于确立唯一光滑解的存在性和稳定性至关重要。

4.1 非线性稳定性与线性相容性

对于非线性向量不变旋转浅水方程 (2.1)，我们的主要目标是设计非线性边界条件，使我们能够证明总能量/熵稳定性。首先，考虑外法向单位向量 $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$，并引入变量

$$u_n = n_x u + n_y v, \qquad u_s = n_y u - n_x v, \quad F_n = h u_n, \quad G_n = \frac{1}{2} u_n^2 + g h^2, \tag{4.1}$$

其中， u_n 是边界上的法向速度， u_s 是边界上的切向速度。我们可以将由 (2.6) 给出的总能量/熵演化方程 $E(t)$ 的右端改写为

$$\frac{d}{dt}E(t) = \mathrm{BT} := -\oint_{\partial\Omega} GF_n dS, \quad GF_n = F_n G_n + \frac{1}{2} h u_n u_s^2, \tag{4.2}$$

其中 BT 为边界项。以下定义对于接下来的非线性分析至关重要

定义 5. 对于亚临界流，若齐次边界数据$\mathbf{d} = 0$ 满足 $dE(t)/dt = \mathrm{BT} \leq 0$，则非线性向量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 的非线性边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q} = \mathbf{d}$ 是能量/熵稳定的，其中 $E(t)$ 表示总能量/熵，且BT表示边界项。

与前文一样，非线性初边值问题的稳定性和适定性与边界项 BT 密切相关。一个必要条件是非线性边界条件必须确保边界项始终不为正，即 BT ≤ 0。然而，与线性情形不同，对于非线性问题，确保 BT ≤ 0 所需的最少边界条件数量可能不足以保证适定性。这种做法也可能与线性理论相矛盾。例如，无质量通量 ($F_n = 0$) 或无滑移 ($u_n = 0$) 等自然边界条件，无论流动状况如何，都会导致 BT $= 0$ 。正如线性分析所示（见表1），在流入边界处，单个边界条件不足以使线性旋转浅水方程的初边值问题适定。因此，以下两个定义对于本研究至关重要。

定义 6. 对于亚临界流，非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 的非线性边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$ 是线性一致的，当且仅当在流入边界和流出边界上，由非线性边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q}$规定的边界条件数量与线性理论所要求的边界条件数量一致，如表*1*所示。

定义 7. 对于亚临界流，非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 的非线性边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$ 是线性稳定的，当且仅当边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 的线性化满足引理*2*。

如果非线性边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 既线性一致又线性稳定，那么下面的定理保证：对于足够光滑且具有紧支撑的初始数据，在有限时间 $t \in [0, T]$内，存在光滑唯一解，且该解稳定。

定理 3. 考虑亚临界流下满足边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q} = \mathbf{d}$ 及初始条件 (2.2) 的非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1)，其初始数据相容 $\mathbf{q}_0 = [h_0(x,y)\ u_0(x,y)\ v_0(x,y)]^T \in \mathbb{R}^3$。设 $[H, U, V]^T \in \mathbb{R}^3$为满足 $H > 0$ 的任意常状态，且$\mathbf{q} = [H + \widetilde{h}, U + \widetilde{u}, V + \widetilde{v}]^T$使初边值问题的线性化成立，即对 (2.1)–(2.2)进行线性化。若边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q} = 0$ 线性一致且线性稳定，则对每个紧支撑且光滑的初始数据 $\widetilde{\mathbf{q}}_0 = [\widetilde{h}_0, \widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0]^T$，存在唯一解 $\widetilde{\mathbf{q}} = [\widetilde{h}, \widetilde{u}, \widetilde{v}]^T$，满足如下估计，

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}\|_W \leq \|\widetilde{\mathbf{q}}_0\|_W, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

证明。 证明可参考上一节的线性分析进行改写，尤其是定理 2 的证明。

□

对于足够光滑的初始和边界数据以及有限时间 $t \in [0, T]$，可利用定理 3 证明非线性初边值问题的适定性。

4.2 稳定的非线性边界条件。

现在，我们将为非线性向量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 构造非线性稳定且线性一致的边界条件。这里的讨论受到一维结果以及 [10] 中分析的启发。令 F_n 和 G_n 分别表示式 (4.1) 中定义的非线性法向质量通量和伯努利势。对于 $u_n < 0$，我们构造流入边界条件

$$\mathcal{B}\mathbf{q} = \begin{cases} \alpha G_n - \beta F_n = d_1, \\ u_s = d_2, \end{cases} \quad \text{if } u_n < 0. \tag{4.3}$$

当 $u_n \geq 0$ 时，我们采用流出边界条件

$$\mathcal{B}\mathbf{q} = \alpha G_n - \beta F_n = d_1, \quad \text{if } u_n \geq 0. \tag{4.4}$$

注意，根据构造，非线性边界条件 (4.3)–(4.4) 是线性一致的，也就是说，在流入边界处有两个边界条件，其中 $u_n < 0$；在流出边界处有一个边界条件，其中 $u_n \geq 0$。这里的参数 α 和 β 是实数形式的非线性权重，其取值将通过确保熵稳定性来确定。下面的引理对边界参数 α 和 β 加以约束。

引理 3. 考虑在(4.2) 中定义的非线性边界项BT 以及边界条件(4.3)–(4.4)，其中齐次边界数据为$\mathbf{d} = 0$。对于亚临界流 $0 \leq \mathrm{Fr} = |\mathbf{u}|/\sqrt{gh} < 1$，若 $\alpha \geq 0$、 $\beta \geq 0$ 且 $|\alpha| + |\beta| > 0$，则边界项始终非正，即BT ≤ 0。

证明。 注意，若 $\alpha G_n - \beta F_n = 0$，且 $\beta = 0$、 $\alpha > 0$ 或 $\alpha = 0$、 $\beta > 0$，则 $F_n G_n = 0$。我们首先考虑满足 $u_n < 0$ 的流入边界及边界条件 (4.3)。因此，若 $u_s = 0$ 且 $\beta = 0$、 $\alpha > 0$ 或 $\alpha = 0$、 $\beta > 0$，则有 BT $= 0$。现在假设 $\alpha > 0$ 且 $\beta \geq 0$，则有 $G_n = (\beta/\alpha)F_n \implies F_n G_n = (\beta/\alpha)F_n^2 \geq 0$。因此，对于流入边界条件 (4.3)，有

$$\mathrm{BT} := -\oint_{\partial\Omega} \left(F_n G_n + \frac{1}{2} h u_n u_s^2 \right) dS = -\oint_{\partial\Omega} \frac{\beta}{\alpha} |F_n|^2 dS \leq 0.$$

现在我们将注意力转向 具有 $u_n \geq 0$ 的流出边界条件 (4.4)。同样，如果 $\beta = 0$ 或 $\alpha = 0$，则 $F_n G_n = 0$，并且我们有 e

$$\mathrm{BT} := -\oint_{\partial\Omega} \left(F_n G_n + \frac{1}{2} h u_n u_s^2 \right) dS = -\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} h u_n u_s^2 \right) dS \leq 0.$$

最后，如果 $\alpha > 0$ 且 $\beta \geq 0$，则具有 $u_n \geq 0$ 的流出边界条件 (4.4) 给出

$$\mathrm{BT} := -\oint_{\partial\Omega} \left(F_n G_n + \frac{1}{2} h u_n u_s^2 \right) dS = -\oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\beta}{\alpha} |F_n|^2 + \frac{1}{2} h u_n u_s^2 \right) dS \leq 0.$$

证明完毕。 □

利用引理 3，我们可以证明以下定理，该定理保证亚临界流下非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 的非线性初边值问题具有能量/熵稳定性。

定理 4. 考虑由非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 定义的亚临界流非线性初边值问题，其满足边界条件 $\mathcal{B}\mathbf{q} = \mathbf{d}$以及初始条件 (2.2)。设非线性边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 由(4.3)–(4.4)给出，且齐次边界数据为 $\mathbf{d} = 0$。若 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$,并且 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 > 0$，则

$$\frac{d}{dt} E(t) = \mathrm{BT} \leq 0 \iff E(t) \leq E(0), \quad \forall\, t \geq 0.$$

证明。 证明依据由 (2.6) 和 (4.2) 给出的总能量/熵演化方程 $E(t)$，即$dE(t)/dt = \mathrm{BT}$。随后，引理 3 保证 BT ≤ 0，最后通过时间积分完成证明。 □

定理 4 证明了亚临界流下非线性旋转浅水方程初边值问题解的稳定性，似乎与证明线性初边值问题适定性的定理 2 类似。然而，与其非线性对应定理 4 不同，线性结果定理 2 更为全面，证明了线性初边值问题存在唯一解且具有稳定性。

对于非线性初边值问题，定理 3 可用于证明在初始数据和边界数据具有适当正则性的情况下，存在唯一光滑解且具有稳定性。然而，定理 3 依赖线性理论定理 2，并要求非线性边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q}$ 满足线性一致性和线性稳定性，参见定义 6–7。与上文一样，我们将给出一些具有物理意义的非线性边界条件示例，并利用定理 4 证明非线性稳定性。

例 4（非线性黎曼不变量）。 我们考虑非线性黎曼不变量，它们是系统中信息的自然载体，并用其构造适定边界条件。这里，边界上的非线性黎曼不变量为

$$r_1 := 2\sqrt{gh} + u_n, \quad r_2 := 2\sqrt{gh} - u_n, \quad r_3 := u_s. \tag{4.5}$$

现在，我们将利用非线性黎曼不变量，为非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 构造非线性稳定且线性一致的边界条件。对于 $u_n < 0$，流入边界条件为

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = \begin{cases} r_2 := 2\sqrt{gh} - u_n = d_1 \iff \alpha G_n - \beta F_n = d_1, \\ r_3 := u_s = d_2, \end{cases} \quad \textit{if } u_n < 0. \tag{4.6}$$

当 $u_n \geq 0$ 时，我们有流出边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} = r_2 := 2\sqrt{gh} - u_n = d_1 \iff \alpha G_n - \beta F_n = d_1, \quad \textit{if } u_n \geq 0. \tag{4.7}$$

这里，非线性系数 α、 β 为

$$\alpha = \frac{2}{c} > 0, \quad \beta = \frac{c + u_n}{hc} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{u_n}{c}\right), \quad c = \sqrt{gh} > 0. \tag{4.8}$$

对于满足 $|u_n|/c < \mathrm{Fr} = |\mathbf{u}|/c < 1$ 的亚临界流，必须有 $\alpha, \beta > 0$。由 (4.6)–(4.7) 定义的非线性边界算子 $\mathcal{B}\boldsymbol{q}$ 满足引理 *3* 和定理 *4*。因此，非线性黎曼不变量边界条件 (4.6)–(4.7) 在流入边界和流出边界均为熵稳定。根据构造，边界条件 (4.6)–(4.7) 是线性一致的。在例 *1* 中，我们已证明线性化边界算子——线性黎曼不变量——在流入边界（$u_n < 0$）和流出边界（$u_n \geq 0$）均稳定。因此，非线性边界条件 (4.6)–(4.7) 也具有线性稳定性。随后，我们可以应用定理 *3*，证明对于足够正则的初始和边界数据，在足够短的时间区间内，存在唯一的光滑解且该解稳定。

例 5（非线性质量通量）。 质量通量可用于控制质量和物质如何穿过计算域的边界输运。例如，无质量通量边界条件可用于确保没有质量穿过边界输运。非线性质量通量对应于在 (4.3)–(4.4) 中设定 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$，由此得到质量通量方程 $-u_n h = d_1$，其中 d_1 是边界的质量通量数据。对于 $u_n < 0$，我们构造流入质量通量边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} := \begin{cases} -u_n h = d_1, \\ u_s = d_2, \end{cases} \quad \textit{if } u_n < 0. \tag{4.9}$$

当 $u_n \geq 0$流出质量通量边界条件为

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} := -u_n h = d_1, \ \textit{if } u_n \geq 0. \tag{4.10}$$

因此，由非线性质量通量边界条件(4.9)–(4.10) 定义的非线性边界算子 $\mathcal{B}\boldsymbol{q}$ 满足引理 *3* 和定理 *4*。因此，非线性质量通量边界条件(4.9)–(4.10) 在流入边界和流出边界处均为熵稳定。如上所述，边界条件(4.9)–(4.10) 按构造具有线性一致性。在例*2*中，我们已证明线性化边界算子（线性质量通量）在流入边界处稳定，在流出边界处不稳定。因此，非线性流入边界条件(4.9) 线性稳定，而非线性流出边界条件(4.10) 线性不稳定。值得特别注意的是，非线性初边值问题(2.1) 配合(4.9)–(4.10)具有非线性能量/熵稳定性，并且在流入边界处支持更一般的解（ $u_n < 0$ ），在流出边界处也支持更一般的解（$u_n \geq 0$）。

例6（非线性伯努利原理）。 伯努利原理可用于规定压力或能量如何通过计算域的边界传递。非线性伯努利边界条件对应于令 $\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$ 在 (4.3)–(4.4) 中成立，从而得到伯努利方程 $\frac{1}{2}u_n^2 + gh = d_1$，其中 d_1是边界的压力能量数据。对于 $u_n < 0$，我们构造流入伯努利边界条件

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} := \begin{cases} \frac{1}{2}u_n^2 + gh = d_1 \\ u_s = d_2, \end{cases} \quad \textit{if } u_n < 0. \tag{4.11}$$

当 $u_n \geq 0$时，流出速度通量边界条件为

$$\mathcal{B}\boldsymbol{q} := \frac{1}{2}u_n^2 + gh = d_1, \ \textit{if } u_n \geq 0. \tag{4.12}$$

由非线性伯努利边界条件 (4.11)–(4.12) 定义的非线性边界算子 $\mathcal{B}\boldsymbol{q}$ 满足引理 *3*和定理 *4*。因此，非线性伯努利边界条件 (4.11)–(4.12) 在流入和流出边界处均为熵稳定。如上所述，边界条件 (4.11)–(4.12) 按构造是线性一致的。在例*3*中，我们已证明，线性化边界算子（即线性伯努利原理）在流入处稳定，在流出处不稳定。还值得注意的是，非线性初边值问题 (2.1) 配以 (4.11)–(4.12)，具有非线性能量/熵稳定性，并且在流入边界处支持更一般的解，其中 $u_n < 0$ ；在流出边界处也支持更一般的解，其中 $u_n \geq 0$。

4.3 科里奥利力项对远场边界数据的影响

旋转浅水方程通过纳入动量方程中的科里奥利力项$f_c \neq 0$，主要体现了旋转参考系的影响；标准浅水方程中则没有这一项。科里奥利力可能不会直接影响非线性初边值问题解的适定性或稳定性，但当背景流速非零时，这一项会显著改变远场边界数据。在这种情况下，若未考虑科里奥利力的影响，可能会导致明显偏差，进而产生污染整个解的误差。现在我们将分析科里奥利力对边界数据的影响。

首先，在 $t = 0$ 处，对于非线性旋转浅水方程初边值问题，我们考虑初始数据

$$\mathbf{q}_0(x, y) = [H + \widetilde{h}_0(x, y), U + \widetilde{u}_0(x, y), V + \widetilde{v}_0(x, y)]^\top, \quad (x, y) \in \Omega,$$

其中 H，$\mathbf{U} = [U, V]^T$是常量背景状态，而 $[\widetilde{h}_0(x,\ y)\ \widetilde{u}_0(x,\ y)\ \widetilde{v}_0(x,\ y)]^\top$ 是常量背景状态的局部光滑扰动，且其支撑紧包含于 $(x,\ y) \in \Omega$ 中。特别地，这些扰动及其导数在边界 $\partial\Omega$ 和远场处完全为零。我们引入远场数据 H_∞，$\mathbf{U}_\infty$，它在 Ω 中空间不变，并满足初始条件 $H_\infty(0) = H$，$\mathbf{U}_\infty(0) = \mathbf{U}$。远场数据满足常微分方程（ODE）

$$\begin{cases} \frac{dH_\infty}{dt} = 0, \quad H_\infty(0) = H, \\ \frac{d\mathbf{U}_\infty}{dt} + f_c \mathbf{U}_\infty^\perp = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}_\infty(0) = \mathbf{U} = [U, V]^\top. \end{cases} \tag{4.13}$$

注意，对于所有 $t \geq 0$， $H_\infty(t) = H$ 均成立；并且当 $f_c = 0$时，我们还有 $\mathbf{U}_\infty(t) = \mathbf{U}$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。因此，对于标准的非线性浅水方程（SWE），当 $f_c = 0$ 时，远场速度数据不随时间变化。然而，对于非线性旋转浅水方程（RSWE），当 $f_c \neq 0$ 时，远场速度数据由常微分方程（ODE）（4.13）的解给出，

$$H_\infty(t) = H, \quad U_\infty(t) = U\cos(f_c t) + V\sin(f_c t), \quad V_\infty(t) = V\cos(f_c t) - U\sin(f_c t).$$

因此，若背景流速度为零，$\mathbf{U} = 0$，则远场流速数据也为零，$\mathbf{U}_\infty = \mathbf{U} = 0$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。类似地，对于满足 $f_c = 0$ 的标准非线性浅水方程，我们同样有$\mathbf{U}_\infty(t) = \mathbf{U}$，对所有 $t \geq 0$ 均成立。

当背景流速度非零时，$\mathbf{U} \neq 0$，我们引入旋转变量

$$\overline{U}_n(t) = n_x U_\infty(t) + n_y V_\infty(t), \quad \overline{U}_s(t) = n_y U_\infty(t) - n_x V_\infty(t),$$

其中，$\mathbf{n} = [n_x, n_y]^\top$ 是边界上的单位法向量，$U_n(t)$ 是远场速度数据的法向分量，$U_s(t)$ 是其切向分量。

为确保相容性并避免边界数据不匹配，边界算子必须与远场边界数据相匹配。例如，由非线性黎曼不变量 (4.6)–(4.7) 定义的非线性边界算子 $\mathcal{B}\mathbf{q} = \mathbf{d}$ 给出

$$\begin{cases} 2\sqrt{gh} - u_n = d_1 = 2\sqrt{gH} - \overline{U}_n, \\ u_s = d_2 = \overline{U}_s. \end{cases} \tag{4.14}$$

对于非线性质量通量边界条件 (4.9)–(4.10)，我们有

$$\begin{cases} -u_n h = d_1 = -\overline{U}_n H, \\ u_s = d_2 = \overline{U}_s. \end{cases} \tag{4.15}$$

非线性伯努利边界条件 (4.11)–(4.12) 给出

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_n^2 + gh = d_1 = \frac{1}{2}\overline{U}_n^2 + gH, \\ u_s = d_2 = \overline{U}_s. \end{cases} \tag{4.16}$$

在下一节中，我们将推导线性和非线性初边值问题的数值近似，并证明数值稳定性。

5 数值方法与分析

现在，我们将介绍在几何复杂空间区域 $(x,\ y) \in \Omega$ 上求解线性和非线性初边值问题的数值方法。我们将引入一种保结构曲线网格变换，将偏微分方程组从物理区域 $(x,\ y) \in \Omega$ 映射到参考单位正方形 $(q,\ r) \in [0,1]^2$。我们将使用求和分部有限差分算子 [13,23,32,33] 来近似参考区域中的空间导数。边界条件将通过同时近似项 [27,28]，以弱形式实施，并且我们选择罚参数，使半离散近似满足与连续能量估计相类似的能量估计。

5.1 结构保持的曲线坐标变换

我们假设 Ω 在几何上较为复杂，但足够光滑，因此 $(x,y) \in \Omega$ 与单位正方形 $(q,r) \in [0,1]^2$ 之间存在可逆映射，即 $(x,y) \leftrightarrow (q,r)$。给定一个二维标量场 $u(x,y)$，偏导数满足以下曲线坐标变换恒等式

$$u_x = q_x u_q + r_x u_r, \quad u_y = q_y u_q + r_y u_r, \tag{5.1}$$

and

$$u_x = \frac{1}{J}\left((Jq_x u)_q + (Jr_x u)_r\right), \quad u_y = \frac{1}{J}\left((Jq_y u)_q + (Jr_y u)_r\right). \tag{5.2}$$

下标表示偏导数。这里，q_x, r_x, q_y, r_y 是度量导数，$J > 0$ 是由度量关系给出的曲线坐标变换的雅可比行列式

$$Jq_x = y_r, \quad Jr_x = -y_q, \quad Jq_y = -x_r, \quad Jr_y = x_q, \quad J = x_q y_r - x_r y_q > 0. \tag{5.3}$$

因此，这两个恒等式——非守恒变换 (5.1) 和守恒变换 (5.2)——在连续层面上是等价的。然而，在离散化并引入空间导数的离散近似后，它们会产生不同的离散算子。事实上，对于稳定且一致的离散近似，离散导数算子将收敛到连续导数算子。

定义 8. 若采用非守恒变换(5.1) 和守恒变换 (5.2)对非线性旋转浅水方程(2.1) 和线性旋转浅水方程 (3.1)进行曲线坐标变换，并且总能量/熵的演化方程(2.6) 和 (3.4) 仅通过分部积分即可推导得出，无需使用链式法则或乘积法则，则称该变换为结构保持变换。

为确保结构保持，我们将使用非守恒变换 (5.1) 对梯度算子 $\boldsymbol{\nabla}$ 进行变换，并使用守恒变换 (5.2) 对散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ 和旋度 $\boldsymbol{\nabla}\times$ 算子进行变换。即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} G &= \begin{bmatrix} q_x G_q + r_x G_r \\ q_y G_q + r_y G_r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{J}\left((Jq_xF_u)_q + (Jr_xF_u)_r\right) + \frac{1}{J}\left((Jq_yF_v)_q + (Jr_yF_v)_r\right), \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} &= \frac{1}{J}\left((Jq_xF_v)_q + (Jr_xF_v)_r\right) - \frac{1}{J}\left((Jq_yF_u)_q + (Jr_yF_u)_r\right).\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $G:\Omega\to\mathbb{R}$是一个标量场，$\mathbf{F}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ 是一个向量场。对于采用曲线坐标变换 (5.4) 的非线性旋转浅水方程 (2.1) 和线性旋转浅水方程 (3.1)，我们可以证明该变换具有结构保持性。具体而言，无需使用链式法则/乘积法则，仅通过分部积分，我们就可以证明变换后的连续算子 [5]具有总能量和总涡量守恒性质，并保持稳态线性地转平衡。

本文主要致力于为旋转浅水方程的非线性和线性初边值问题设计能量/熵稳定数值方法。与上述内容相同，总能量/熵 $E(t)$ 是空间区域上单元能量/熵的积分

$$E(t) = \int_\Omega e d\Omega = \int_0^1\int_0^1 eJdqdr, \tag{5.5}$$

其中，单元能量 e 对于非线性旋转浅水方程由（2.3）定义，对于线性旋转浅水方程则由（3.2）定义。定义边界项

$$\mathrm{BT} := -\sum_{\xi=q,r}\int_0^1 \left(\left(\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}J\left(\frac{1}{2}gh^2u_n + eu_n\right)\right)\Big|_{\xi=0} + \left(J\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\left(\frac{1}{2}gh^2u_n + eu_n\right)\right)\Big|_{\xi=1}\right)\frac{dqdr}{d\xi}, \tag{5.6}$$

对于变换后的 非线性旋转浅水方程（2.1）及曲线坐标变换（5.4），边界项

$$\begin{aligned}\mathrm{BT} &:= -\sum_{\xi=q,r}\int_0^1 \left(\left(\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}J\left(gHhu_n + eU_n\right)\right)\Big|_{\xi=0} + \left(J\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\left(gHhu_n + eU_n\right)\right)\Big|_{\xi=1}\right)\frac{dqdr}{d\xi} \\ &= -\frac{c^2H}{2}\sum_{\xi=q,r}\int_0^1 \left(\left(\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}J\left(\lambda_1w_1^2 + \lambda_2w_2^2 + \lambda_3w_3^2\right)\right)\Big|_{\xi=0} + \left(J\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}\left(\lambda_1w_1^2 + \lambda_2w_2^2 + \lambda_3w_3^2\right)\right)\Big|_{\xi=1}\right)\frac{dqdr}{d\xi},\end{aligned} \tag{5.7}$$

对于通过曲线坐标变换（5.4）得到的线性旋转浅水方程（3.1）。仅使用分部积分而不使用链式法则和乘积法则，可以证明总能量 $E(t)$ 的演化方程为

$$\frac{dE}{dt} = \mathrm{BT}, \tag{5.8}$$

其中，边界项 BT 由（5.6）和（5.7）定义。接下来，我们将介绍变换算子（5.4）的离散近似，并尽可能在离散层面复现总能量的演化方程（5.8）。

5.2 半离散近似

我们将参考计算正方形 $(q,\ r)\ \in\ [0,1]^2$ 离散为沿各轴均匀间隔的网格，$\xi\in\{q,r\}$。对于每个 $\xi\in\{q,r\}$，考虑单位区间的均匀离散 $\xi\in[0,1]$

$$\xi_i = \frac{i-1}{n_\xi - 1}, \quad i\in\{1,2,\ldots,n_\xi\}, \tag{5.9}$$

其中，n_ξ 表示 ξ 轴上使用的网格点数。

我们将使用传统的 SBP 算子 [13,23] 来近似空间导数 $\partial/\partial\xi$。对于每个 $\xi\in\{q,r\}$，定义 $H_\xi = \mathrm{diag}\left(h_1^{(\xi)},\ldots,h_{n_\xi}^{(\xi)}\right)$，其中 $h_j^{(\xi)}>0$ 对所有 $j\in\{1,\ldots,n_\xi\}$均成立。我们考虑 SBP导数算子D_ξ： $\mathbb{R}^{n_\xi}\mapsto\mathbb{R}^{n_\xi}$，使得 SBP性质成立

$$(D_\xi\boldsymbol{f})^\top H_\xi\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}^\top H_\xi(D_\xi\boldsymbol{g}) = f(\xi_{n_\xi})g(\xi_{n_\xi}) - f(\xi_1)g(\xi_1), \tag{5.10}$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f(\xi_1)\ldots,f(\xi_{n_\xi}))^\top$、 $\boldsymbol{g}=(g(\xi_1)\ldots,g(\xi_{n_\xi}))^\top$是从关于 ξ变量的弱可微函数中采样得到的向量。

一维求和分部算子可以使用张量积扩展到更高的空间维度 $\otimes$。令 $f:(q,\ r)\to\mathbb{R}$ 表示二维标量函数，令 $f_{ij}:=f(q_i,\ r_j)$ 表示相应的二维网格函数。二维标量网格函数 f_{ij}按行重排为长度为 n_qn_r的向量 $\boldsymbol{f}$。对于 $\xi\in\{q,r\}$，定义二维空间离散算子

$$\boldsymbol{D}_q=(D_q\otimes I_{n_r}),\quad \boldsymbol{D}_r=\left(I_{n_q}\otimes D_r\right),\quad \boldsymbol{H}=(H_q\otimes H_r),$$

其中， I_{n_ξ}是大小为 $n_\xi\times n_\xi$的单位矩阵。矩阵算子 $\boldsymbol{D}_\xi$将近似于 ξ方向上的偏导算子。在 $\mathbb{R}^{n_q\times n_r}$上，通过 $\boldsymbol{H}$诱导出的离散内积为

$$\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}\rangle_{\boldsymbol{H}}:=\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n_r}f_{ij}g_{ij}h_i^{(q)}h_j^{(r)},\tag{5.11}$$

离散总能量定义为

$$E_d(t)=\sum_{i=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n_r}e_{ij}J_{ij}h_i^{(q)}h_j^{(r)},\tag{5.12}$$

其中， e_{ij}是在网格上采样得到的单元能量。

接下来，我们使用 求和分部算子来近似变换后的微分算子（5.4），可得 e

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}_d\cdot\mathbf{F}=J^{-1}\left((\mathbf{D}_q(Jq_xF_u)+\mathbf{D}_r(Jr_xF_u))+(\mathbf{D}_q(Jq_yF_v)+\mathbf{D}_r(Jr_yF_v))\right),\\&\boldsymbol{\nabla}_dG=\begin{bmatrix}q_x\mathbf{D}_qG+r_x\mathbf{D}_rG\\q_y\mathbf{D}_qG+r_y\mathbf{D}_rG\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\nabla}_d\times\mathbf{F}=J^{-1}\left((\mathbf{D}_q(Jq_xF_v)+\mathbf{D}_r(Jr_xF_v))-(\mathbf{D}_q(Jq_yF_u)+\mathbf{D}_r(Jr_yF_u))\right).\end{aligned}\tag{5.13}$$

通过将连续算子（5.4）替换为离散算子（5.13），可推导出曲线网格上非线性旋转浅水方程（2.1）的半离散近似。我们有

$$\begin{cases}\frac{dh}{dt}+\boldsymbol{\nabla}_d\cdot\mathbf{F}=0,\\\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\omega\mathbf{u}^\perp+\boldsymbol{\nabla}_dG=\mathbf{0},\\\mathbf{F}=h\mathbf{u},\quad G=\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+gh,\quad \omega=\boldsymbol{\nabla}_d\times\mathbf{u}+f_c.\end{cases}\tag{5.14}$$

同样地，我们还近似 在线性旋转浅水方程（3.1）中使用网格上的离散微分算子（5.13），得到 g

$$\begin{cases}\frac{dh}{dt}+\boldsymbol{\nabla}_d\cdot\mathbf{F}=0,\\\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\omega\mathbf{U}^\perp+f_c\mathbf{u}^\perp+\boldsymbol{\nabla}_dG=\mathbf{0},\\\mathbf{F}=H\mathbf{u}+\mathbf{U}h,\quad G=\mathbf{U}\cdot\mathbf{u}+gh,\quad \omega=\boldsymbol{\nabla}_d\times\mathbf{u}.\end{cases}\tag{5.15}$$

我们使用由 $\boldsymbol{H}_\xi$导出的数值求积规则近似边界积分（5.6）–（5.7），从而得到离散边界项

$$\mathrm{BT}_d:=-\sum_{\xi=q,r}\sum_{j=1}^{\frac{n_qn_r}{n_\xi}}\left(\left(J_j\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}\left(\frac{1}{2}gh_j^2u_{nj}+eu_{nj}\right)\right)\Big|_{\xi_1=0}+\left(J_j\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}\left(\frac{1}{2}gh_j^2u_{nj}+eu_{nj}\right)\right)\Big|_{\xi_{n_\xi}=1}\right)\frac{h_j^{(q)}h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}},\tag{5.16}$$

对于半离散 非线性旋转浅水方程 (5.14)。半离散线性旋转浅水方程 (5.15) 给出离散边界项 s

$$\mathrm{BT}_d:=-\sum_{\xi=q,r}\sum_{j=1}^{\frac{n_qn_r}{n_\xi}}\left(\left(\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}J_j\left(gHh_ju_{nj}+e_jU_n\right)\right)\Big|_{\xi_1=0}+\left(J_j\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}\left(gHh_ju_{nj}+e_jU_n\right)\right)\Big|_{\xi_{n_\xi}=1}\right)\frac{h_j^{(q)}h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}},\tag{5.17}$$

利用特征分解 (3.16)，可将半离散线性旋转浅水方程中定义于 (5.17) 的边界项改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{BT}_d=&-\frac{c^2H}{2}\sum_{\xi=q,r}\sum_{j=1}^{\frac{n_qn_r}{n_\xi}}\left(\left(\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}J_j\left(\lambda_1w_{1j}^2+\lambda_2w_{2j}^2+\lambda_3w_{3j}^2\right)\right)\Big|_{\xi_1=0}\right)\frac{h_j^{(q)}h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}}\\&-\frac{c^2H}{2}\sum_{\xi=q,r}\sum_{j=1}^{\frac{n_qn_r}{n_\xi}}\left(\left(J_j\sqrt{\xi_{xj}^2+\xi_{yj}^2}\left(\lambda_1w_{1j}^2+\lambda_2w_{2j}^2+\lambda_3w_{3j}^2\right)\right)\Big|_{\xi_{n_\xi}=1}\right)\frac{h_j^{(q)}h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

定理 5。 考虑半离散非线性旋转浅水方程 (5.14) 和半离散线性旋转浅水方程 (5.15)，其中总半离散能量 $E_d(t)$ 由 (5.12) 给出。若离散导数算子满足 ***SBP***性质 (5.10)，则总半离散能量 $E_d(t)$ 的演化方程为 $dE_d/dt = \mathrm{BT}_d$，其中边界项BT_d 由(5.16)和 (5.17) 给出。

证明。 由于连续能量变化率 (5.8) 仅通过分部积分推导得出，因此 SBP 将给出类似的演化方程，其描述的总离散能量由 (5.12) 给出。 □

请注意，我们尚未在边界处施加边界条件 (3.18)–(3.19) 或 (4.3)–(4.4)。

5.3 稳定的数值边界处理方法

现在我们将施加边界条件并证明数值稳定性。我们将在半离散近似 (5.14) 和 (5.15) 中添加同时近似项，即编码边界算子的源项，并选择合适的惩罚权重，以确保数值稳定性。

对于 ξ轴上的边界，我们作如下假设

$$\mathrm{SAT}_\xi = \begin{bmatrix} \mathrm{SAT}_\xi^h \\ \mathrm{SAT}_\xi^u \end{bmatrix},$$

其中，$\mathrm{SAT}_\xi^h\Big|_{ij} \in \mathbb{R}$ 是质量方程的同时近似项，$\mathrm{SAT}_\xi^u\big|_{ij} \in \mathbb{R}^2$ 是速度方程的同时近似项。通过将同时近似项附加到式 (5.14) 右端，可得到非线性旋转浅水方程初边值问题的半离散近似:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} + \boldsymbol{\nabla}_d \cdot \mathbf{F} = \sum_{\xi=q,r} \mathrm{SAT}_\xi^h, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \omega \mathbf{u}^\perp + \boldsymbol{\nabla}_d G = \sum_{\xi=q,r} \mathrm{SAT}_\xi^u, \\ \mathbf{F} = h\mathbf{u}, \quad G = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + gh, \quad \omega = \boldsymbol{\nabla}_d \times \mathbf{u} + f_c. \end{cases} \tag{5.19}$$

同理，对于线性旋转浅水方程，将同时近似项附加到式 (5.15) 右端，可得:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} + \boldsymbol{\nabla}_d \cdot \mathbf{F} = \sum_{\xi=q,r} \mathrm{SAT}_\xi^h, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \omega \mathbf{U}^\perp + f_c \mathbf{u}^\perp + \boldsymbol{\nabla}_d G = \sum_{\xi=q,r} \mathrm{SAT}_\xi^u, \\ \mathbf{F} = H\mathbf{u} + \mathbf{U}h, \quad G = \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} + gh, \quad \omega = \boldsymbol{\nabla}_d \times \mathbf{u}. \end{cases} \tag{5.20}$$

下面将推导并分析同时近似项和惩罚项的具体形式。需要牢记的是，同时近似项确保相容性和数值稳定性至关重要。数值稳定性的定义对接下来的分析十分重要。

定义 9. 考虑亚临界流的半离散近似(5.19) 和 (5.20)，其中边界条件通过同时近似项弱施加。若对于齐次边界数据$\mathbf{d} = 0$，有 $dE_d(t)/dt = \mathbb{BT}_n \le 0$，则称半离散近似(5.19) 或(5.20) 是能量/熵稳定的，其中 $E_d(t)$ 是由式 (5.12) 定义的总半离散能量 / 熵。

我们将从线性旋转浅水方程的同时近似项开始，稍后再讨论非线性旋转浅水方程。

5.3.1 线性旋转浅水方程的同时近似项

Her接下来，我们将推导线性旋转浅水方程的同时近似项。在边界上的每一点，我们设定同时近似项

$$\mathrm{SAT}_j^n = \left(W^{-1}RPS\right) \begin{bmatrix} \tau_h \left(w_2 - \gamma w_1 - d_1\right) \\ \tau_n \left(w_2 - \gamma w_1 - d_1\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{SAT}_j^s = \left(W^{-1}RPS\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_s U_n \left(w_3 - d_2\right) \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

其中的 3×3矩阵为

$$W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ 0 & n_y & -n_x \end{bmatrix},$$

其中， τ_h、 τ_n 和 τ_s 是通过要求数值稳定性来确定的罚参数， $\boldsymbol{m} = [m_x, m_y]^\top = [n_y, -n_x]^\top$ 是边界上的切向单位向量。注意， $u_s = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{u}$ 是边界上速度场的切向分量。值得注意的是，SAT^n 和SAT^s 编码了由（3.18）–（3.19）定义的边界算子；如果 w_1、 w_2、 w_3严格满足边界条件，它们将消失。

以下恒等式

$$\begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}^\top W\mathrm{SAT}_j^n = \tau_h w_1 \left(w_2 - \gamma w_1 - d_1\right) + \tau_n w_2 \left(w_2 - \gamma w_1 - d_1\right), \quad \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix}^T W\mathrm{SAT}_j^s = \tau_s w_3 U_n \left(w_3 - d_1\right),$$

将有助于下面的稳定性分析。

我们引入单位向量 $e_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n_\xi}$、 $e_n = [0, \cdots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ 以及边界投影矩阵

$$\mathbf{e}_{q,1} = \left(e_1 e_1^T \otimes I_{n_r}\right), \quad \mathbf{e}_{q,n_q} = \left(e_n e_n^T \otimes I_{n_r}\right), \quad \mathbf{e}_{r,1} = \left(I_{n_q} \otimes e_1 e_1^T\right), \quad \mathbf{e}_{r,n_r} = \left(I_{n_q} \otimes e_n e_n^T\right). \tag{5.22}$$

线性旋转浅水方程的 ξ轴同时近似项为

$$\mathrm{SAT}_\xi = \begin{cases} \frac{c^2 H}{2} \boldsymbol{H}_\xi^{-1} \left(\mathbf{e}_{\xi,1} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \left(\mathrm{SAT}^n + \mathrm{SAT}^s\right) + \mathbf{e}_{\xi,n_\xi} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \left(\mathrm{SAT}^n + \mathrm{SAT}^s\right)\right), & \text{if } U_n < 0, \\ \frac{c^2 H}{2} \boldsymbol{H}_\xi^{-1} \left(\mathbf{e}_{\xi,1} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \mathrm{SAT}^n + \mathbf{e}_{\xi,n_\xi} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \mathrm{SAT}^n\right), & \text{if } U_n > 0, \end{cases} \tag{5.23}$$

其中，SAT^n 和SAT^s 由(5.21)给出。此处，$\mathbf{e}_{\xi,1}$ 和$\mathbf{e}_{\xi,n_\xi}$ 在(5.22)中定义，是将同时近似项投影到相应边界 $\xi_1 = 0$ 和 $\xi_{n_\xi} = 1$上的投影矩阵。我们假设边界数据 $\boldsymbol{d} = 0$ 为齐次，并在边界上的每个点引入数值边界项

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} -\left(\lambda_1 w_{1j}^2 + \lambda_2 w_{2j}^2 + \lambda_3 w_{3j}^2\right) + \tau_h w_{1j} \left(w_{2j} - \gamma w_{1j}\right) + \tau_n w_{2j} \left(w_{2j} - \gamma w_{1j}\right) + \tau_s U_n w_{3j}^2, & \text{if } U_n < 0, \\ -\left(\lambda_1 w_{1j}^2 + \lambda_2 w_{2j}^2 + \lambda_3 w_{3j}^2\right) + \tau_h w_{1j} \left(w_{2j} - \gamma w_{1j}\right) + \tau_n w_{2j} \left(w_{2j} - \gamma w_{1j}\right), & \text{if } U_n \geq 0. \end{cases} \tag{5.24}$$

下面的引理对罚参数作出限制，并确保边界项 $\mathbb{BT}_j$ 始终不为正。

引理4。 考虑由(5.24)定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$ ，其中 $\lambda_1 = U_n + c > 0$、 $\lambda_2 = U_n - c < 0$ 和$\lambda_3 = U_n$。若 $\gamma^2 \leq -\lambda_1/\lambda_2$，且 $\tau_n = \lambda_2$、 $\tau_h = \gamma\lambda_2$ 和 $\tau_s \geq 1$，则边界项始终不为正，即$\mathbb{BT}_j \leq 0$。

证明。 考虑由(5.24)定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$ ，并令 $\tau_n = \lambda_2$、 $\tau_h = \gamma\lambda_2$，可得

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} -\left(\lambda_1 + \lambda_2\gamma^2\right) w_{1j}^2 + U_n(\tau_s - 1) w_{3j}^2, & \text{if } U_n < 0 \\ -\left(\lambda_1 + \lambda_2\gamma^2\right) w_{1j}^2 - U_n w_{3j}^2, & \text{if } U_n \geq 0. \end{cases}$$

注意，利用 $\lambda_1 > 0$ 和 $\lambda_2 < 0$ ，我们有 $\gamma^2 \leq -\lambda_1/\lambda_2 \implies \left(\lambda_1 + \lambda_2\gamma^2\right) \geq 0$。如果 $\tau_s \geq 1$ ，则边界始终不为正，即 $\mathbb{BT}_j \leq 0$。 □

现在我们将陈述一个定理，该定理保证线性半离散近似 (5.20) 的稳定性。

定理 6。 考虑采用 *SAT* (5.23) 的半离散近似 (5.20) ，以及处于亚临界流动状态的向量不变线性旋转浅水方程 (3.1) ，其中有 $\lambda_1 = U_n + c > 0$、 $\lambda_2 = U_n - c < 0$ 和 $\lambda_3 = U_n$。如果 $\gamma^2 \leq -\lambda_1/\lambda_2$，且 $\tau_n = \lambda_2 < 0$、 $\tau_h = \gamma\lambda_2$ 和 $\tau_s \geq 1$，那么该半离散近似 (5.20) 是能量稳定的。也就是说，在齐次边界数据 $\boldsymbol{d} = 0$ 下，我们有

$$\frac{dE_d}{dt} = \mathbb{BT}_n := \sum_{\xi=q,r} \sum_{j=1}^{\frac{n_q n_r}{n_\xi}} \left(J_j \left(\sqrt{\xi_{xj}^2 + \xi_{yj}^2}\, \mathbb{BT}_j\right)\Big|_{\xi_1=0} + \left(J_j \sqrt{\xi_{xj}^2 + \xi_{yj}^2}\, \mathbb{BT}_j\right)\Big|_{\xi_{n_\xi}=1}\right) \frac{h_j^{(q)} h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}} \leq 0,$$

其中，边界项 $\mathbb{BT}_j$ 由(5.24)给出。

接下来，我们将推导非线性旋转浅水方程的同时近似项，并证明数值稳定性。

5.3.2 非线性旋转浅水方程的同时近似项

与之前一样，我们在边界上的每个点处设置同时近似项

$$\mathrm{SAT}^n = \begin{bmatrix} \tau_h \left(\alpha G_n - \beta F_n - d_1\right) \\ \tau_n \mathbf{n} \left(\alpha G_n - \beta F_n - d_1\right) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{SAT}^s = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_s \mathbf{m} u_n \left(u_s - d_2\right) \end{bmatrix}, \tag{5.25}$$

其中， τ_h、 τ_n 和 τ_s 是将通过确保数值稳定性来确定的罚参数。这里， $\boldsymbol{n} = [n_x, n_y]^\top$和 $\boldsymbol{m} = [m_x, m_y]^\top = [n_y, -n_x]^\top$ 分别是边界上的单位法向量和单位切向量。注意， $u_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ 是边界上的法向速度分量，而 $u_s = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{u}$ 是边界上速度场的切向分量。还应注意，同时近似项^n 和同时近似项^s 编码了式（4.3）、（4.4）所定义的非线性边界算子；如果 G_n， F_n， u_s 严格满足非线性边界条件，它们将为零。与之前一样，以下恒等式

$$\begin{bmatrix} G \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix}^\top \mathrm{SAT}^n = \tau_h G \left(\alpha G_n - \beta F_n - d_1\right) + \tau_n F_n \left(\alpha G_n - \beta F_n - d_1\right), \quad \begin{bmatrix} G \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix}^\top \mathrm{SAT}^s = \tau_s u_n u_s \left(u_s - d_1\right),$$

将有助于非线性稳定性分析。

ξ轴上的非线性旋转浅水方程同时近似项为

$$\mathrm{SAT}_\xi = \begin{cases} \boldsymbol{H}_\xi^{-1} \left(\mathbf{e}_{\xi,1} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \left(\mathrm{SAT}^n + \mathrm{SAT}^s\right) + \mathbf{e}_{\xi,n_\xi} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \left(\mathrm{SAT}^n + \mathrm{SAT}^s\right) \right), & \text{if } u_n < 0, \\ \boldsymbol{H}_\xi^{-1} \left(\mathbf{e}_{\xi,1} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \mathrm{SAT}^n + \mathbf{e}_{\xi,n_\xi} \sqrt{\boldsymbol{\xi}_x^2 + \boldsymbol{\xi}_y^2} \mathrm{SAT}^n \right), & \text{if } u_n > 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

其中，SAT^n 和 SAT^s 由 (5.25) 给出。

这里，$\mathbf{e}_{\xi,\,1}$ 和 $\mathbf{e}_{\xi,\,n_\xi}$ 在 (5.22) 中定义，是将同时近似项投影到相应边界 $\xi_1 = 0$ 和 $\xi_{n_\xi} = 1$上的投影矩阵。同样，假设齐次边界数据 $\boldsymbol{d} = 0$，并在边界上的每一点引入数值边界项

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} -\left(G_j F_{nj}\right) + \tau_h G_j \left(\alpha G_{nj} - \beta F_{nj}\right) + \tau_n F_{nj} \left(\alpha G_{nj} - \beta F_{nj}\right) + \tau_s h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} < 0 \\ -\left(G_j F_{nj}\right) + \tau_h G_j \left(\alpha G_{nj} - \beta F_{nj}\right) + \tau_n F_{nj} \left(\alpha G_{nj} - \beta F_{nj}\right), & \text{if } u_{nj} \geq 0. \end{cases} . \tag{5.27}$$

注意， $G_n = gh + \frac{1}{2} u_n^2$ 和 $G = gh + \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} u_s^2 = G_n + \frac{1}{2} u_s^2$。

下面的引理对罚参数加以约束，并确保边界项 BTj 始终不为正。

引理 5. 考虑由 (5.27) 定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$，其中 $u_n + c > 0$、 $u_n - c < 0$。并假设 $\alpha \geq 0$、$\beta \geq 0$，且 $|\alpha| + |\beta| > 0$。如果边界参数 α、β 以及惩罚权重 τ_h、 τ_n 和 τ_s 满足

1: When $\alpha = 0$, $\beta > 0$: $\tau_h = -1/\beta$, $\tau_n \geq 0$ and $\tau_s \geq 1/2$.

2: When $\alpha > 0$, $\beta = 0$: $\tau_h \leq 0$, $\tau_n = 1/\alpha$ and $\tau_s \geq 1/2$,

3: When $\alpha > 0$, $\beta > 0$: $\tau_h = -1/(2\beta)$, $\tau_n = 1/(2\alpha)$ and $\tau_s \geq 1/2$,

那么边界始终不会为正，即 $\mathbb{BT}_j \leq 0$。

证明。 情形 1：考虑由 (5.27) 定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$，其中 $\alpha = 0$ 和 $\beta > 0$，并令 $\tau_h = -1/\beta$，则有

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} -\tau_n \beta F_{nj}^2 + \tau_s h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} < 0 \\ -\tau_n \beta F_{nj}^2, & \text{if } u_{nj} \geq 0. \end{cases} .$$

因此，若 $\tau_n \geq 0$且 $\tau_s \geq 1/2$，则 $\mathbb{BT}_j \leq 0$。

情形 2：考虑由 (5.27) 定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$，其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta = 0$，并令 $\tau_n = 1/\alpha$，则有

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} \tau_h \alpha G_j G_{nj} + \left(\tau_s - \frac{1}{2}\right) h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} < 0 \\ \tau_h \alpha G_j G_{nj} - \frac{1}{2} h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} \geq 0. \end{cases} .$$

其中我们使用了 $G_n = gh + \frac{1}{2} h u_n^2$和 $G = gh + \frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{2} u_s^2 = G_n + \frac{1}{2} u_s^2$。注意， $G_j > 0$、 $G_{nj} > 0$ 和 $G_j G_{nj} > 0$，因此如果 $\alpha > 0$， $\tau_h \leq 0$和 $\tau_s \geq 1/2$，那么 $\mathbb{BT}_j \leq 0$。

情形 3：考虑由 (5.27) 定义的边界项 $\mathbb{BT}_j$，其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$，并令 $\tau_h = -1/(2\beta)\tau_n = 1/(2\alpha)$，我们有

$$\mathbb{BT}_j = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2\beta} G_j G_{nj} - \frac{\beta}{2\alpha} F_{nj}^2 + \left(\tau_s - \frac{1}{4}\right) h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} < 0 \\ -\frac{\alpha}{2\beta} G_j G_{nj} - \frac{\beta}{2\alpha} F_{nj}^2 - \frac{1}{4} h_j u_{nj} u_{sj}^2, & \text{if } u_{nj} \geq 0. \end{cases}.$$

如上所述，我们使用了 $G_n = gh + \frac{1}{2}u_n^2$ 和 $G = gh + \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}u_s^2 = G_n + \frac{1}{2}u_s^2$。注意，$G_j > 0$、$G_{nj} > 0$ 和 $G_j G_{nj} > 0$，因此若 $\tau_s \geq 1/2 > 1/4$，则 $\mathbb{BT}_j \leq 0$。 □

下面的定理保证了非线性旋转浅水方程初边值问题的非线性半离散近似 (5.19) 的稳定性。

定理 7. 考虑亚临界流动条件下非线性矢量不变形式旋转浅水方程 (2.1) 的半离散近似 (5.19)，$u_n + c > 0$，$u_n - c < 0$。若边界参数 α、β 以及罚参数 τ_h、τ_n、τ_s 满足引理 *5* 的条件，则半离散近似(5.19) 是能量/熵稳定的，也就是说，对于齐次边界数据 $\boldsymbol{d} = 0$，我们有

$$\frac{dE_d}{dt} = \mathbb{BT}_n := \sum_{\xi=q,r} \sum_{j=1}^{\frac{n_q n_r}{n_\xi}} \left(J_j \left(\sqrt{\xi_{xj}^2 + \xi_{yj}^2}\, \mathbb{BT}_j \right) \Big|_{\xi_1 = 0} + \left(J_j \sqrt{\xi_{xj}^2 + \xi_{yj}^2}\, \mathbb{BT}_j \right) \Big|_{\xi_{n_\xi} = 1} \right) \frac{h_j^{(q)} h_j^{(r)}}{h_j^{(\xi)}} \leq 0,$$

其中，边界项 $\mathbb{BT}_j$ 由(5.27)给出。

在下一 节中，我们将给出一些数值示例，以验证本文所进行的分析 .

6 数值结果

本节将针对不同网格类型下的二维线性与非线性旋转浅水方程初边值问题开展数值实验，以验证前几节的理论分析。我们开发了一个求解器，用于实现此前针对这些问题推导的求和分部-同时近似项格式。具体而言，我们考虑一个笛卡尔网格和两个曲线网格，如图 1 所示。计算域代表了区域尺度和有限区域气候模拟中常见的几何形状 [2, 17–20]。这些实验旨在验证该方法的精度，并通过数值方式评估边界条件和求和分部-同时近似项格式的稳定性与鲁棒性。值得注意的是，本研究采用的求和分部算子在内部具有四阶精度，边界闭合则具有二阶精度。对于足够光滑的解，我们预期全局收敛阶为三阶 [35, 36]。在时间积分方面，我们采用低存储四阶五阶段显式龙格-库塔方法 [37], ，并根据稳定性要求选择显式时间步长 $dt > 0$ ，

$$dt = \frac{\mathrm{CFL}}{c} \min_{\xi \in \{q,r\}} \sqrt{\frac{h_\xi^2}{\xi_x^2 + \xi_y^2}}. \tag{6.1}$$

其中，CFL $= 0.5$ 是 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 数，$c = |\mathbf{U}| + \sqrt{gH} > 0$ 是背景波速，ξ_x, ξ_y 是曲线坐标变换的度量导数，$h_\xi > 0$ 是用于在参考区域的 ξ 轴上进行离散的均匀空间步长，$(q, r) \in [0, 1]^2$。表2总结了线性和非线性浅水方程组的数值实验中共用的部分参数。接下来的数值实验中

g	f_c	H	L	U	V
9.81	2	2	100	$-0.5\sqrt{gH}$	$-0.5\sqrt{gH}$

表2：数值实验中使用的参数。

我们将考虑黎曼边界条件 (3.21)–(3.22) 和 (4.6)–(4.7)，并据此提供边界数据。我们还验证了流入处质量通量边界条件 (3.23)、(4.9) 以及伯努利边界条件 (3.25)、(4.11) 的稳定性，但此处不予报告。

6.1 精度

在本节中，我们使用制造解方法 (MMS) [38] 验证数值方法的精度。我们考虑如下给定的精确制造解：

$$\begin{aligned} u_e &= \cos(\pi t)\sin(5\pi x/L)\sin(5\pi y/L), \\ v_e &= \sin(\pi t)\cos(5\pi x/L)\cos(5\pi y/L), \\ h_e &= 1 + 0.2\cos(\pi t)\cos(5\pi x/L)\cos(5\pi y/L). \end{aligned} \tag{6.2}$$

图1展示了初始水深在三种不同几何形状上的分布：笛卡尔网格、海贝几何以及立方球网格的一个面板。我们构造源项、初始和边界数据，使其与解析解（6.2）相匹配。我们将模拟运行至终止时间 $t = 10$，并采用一系列逐渐加密的网格分辨率，其中$n_\xi = 21$、41、81、161、321， $\xi \in \{q, r\}$。通过将数值解与

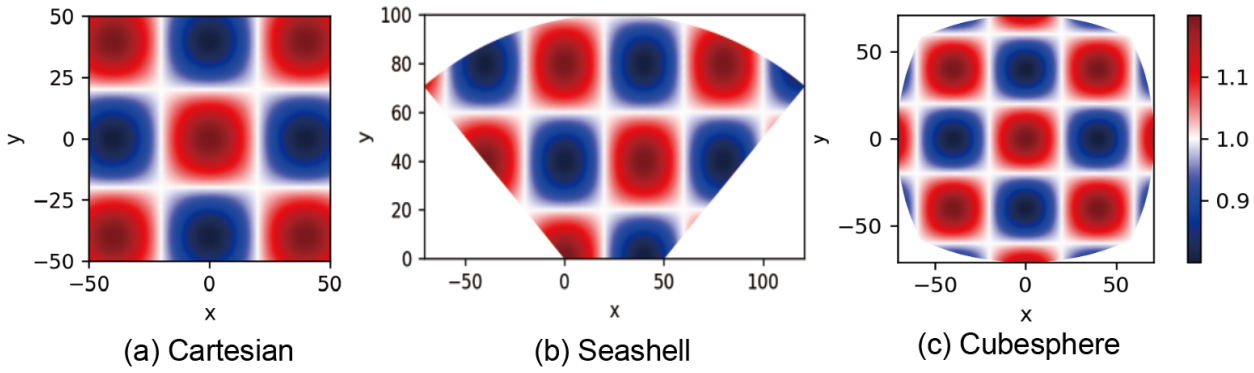

图1：不同网格类型下， $t = 0$ 处 MMS 解 6.2 的水深 h 分布图

在终止时间 $t = 10$ 处的精确解进行比较，并使用 l_2 范数计算数值误差。我们绘制了终止时间处的 l_2 误差随网格分辨率 dx $= 1/(n_\xi - 1)$ 的变化。图2展示了线性旋转浅水方程初边值问题的数值误差及其收敛率。同样，图3展示了非线性旋转浅水方程初边值问题的数值误差及其收敛率。请注意，对于线性旋转浅水方程初边值问题和非线性旋转浅水方程初边值问题，误差均以$O(\text{dx}^3)$的速率收敛至零，见图2–3。这是该数值方法预期的最优收敛率 [36]。我们还将模拟运行了更长时间，但未观察到任何不稳定现象。

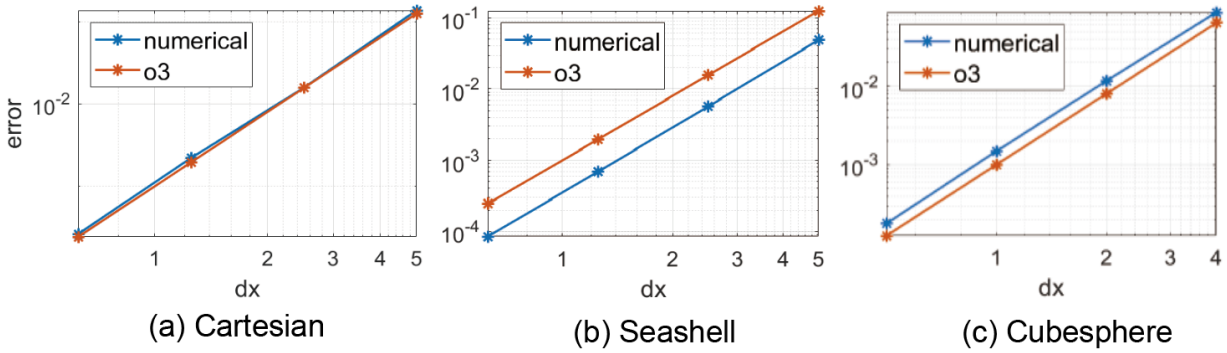

图 2：采用制造解法的二维线性浅水方程在不同网格类型下的收敛率

6.2 初始高斯剖面

接下来，我们将在三种不同的计算几何上模拟初始二维高斯剖面的演化，并通过数值方法研究波与边界的相互作用。我们考虑一种具有恒定

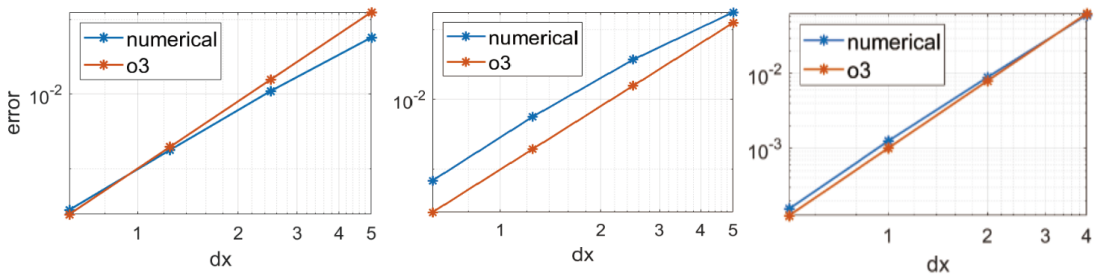

图3：采用制造解法的二维非线性浅水方程在不同网格类型下的收敛率

背景状态 U， V， H如表2所示。我们仅在初始水深中加入高斯扰动，其形式为 $\sim h_0(x, y) = H + \sigma_0 h_0(x, y)$，其中 $\sigma_0 = 0.1H$和 $h_0(x, y)$的表达式为

$$\widetilde{h}_0(x,y) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{9}\right) \tag{6.3}$$

其中，(x_0, y_0)（见表3）是高斯分布的中心位置。

	笛卡尔网格	海贝壳网格	立方球网格
(x_0, y_0)	$(25, 25)$	$(50, 60)$	$(25, 25)$

表3：不同网格类型下的 (x_0, y_0) 值

6.2.1 线性RSWE初边值问题

请注意，对于线性旋转浅水方程（3.1），我们演化时间依赖扰动，因为背景状态 H, U, V作为参数包含在线性化方程中。因此，对于线性RSWE初边值问题，我们采用齐次边界数据的黎曼边界条件~（3.21）–（3.22）。我们考虑水深的初始条件 $h_0 = h_0$，并将速度场的初始条件设为零，即 $u_0 = 0$、 $v_0 = 0$。

我们在两个方向上均匀离散参考区域 $(q, r) \in [0, 1]^2$，网格数为 $n_\xi = 151\, \xi \in \{q, r\}$。我们计算数值解直至终止时间 $T = 20$。图4–6展示了三种几何形状下粒子速度的 y 分量**v** 的快照。图4–6显示了初始高斯剖面的演化，特别是解如何在恒定背景流速场的作用下旋转、扩散并被输运。请注意，由于黎曼边界条件（3.21）–（3.22）具有非反射特性，解离开计算域时几乎没有反射。不过，与到达边界处的波的初始振幅相比，数值反射可认为较小。

6.2.2 非线性RSWE初边值问题

接下来，我们考虑带有非线性黎曼边界条件 (4.6)–(4.7) 的非线性旋转浅水方程 (2.1)。对于非线性旋转浅水方程初边值问题~RSWE，我们考虑水深的初始条件 $h_0(x, y) = H + \sigma_0 h_0(x, y)$，以及速度场的常值初始条件，即 $u_0 = U, v_0 = V$，并设扰动为零。非齐次边界数据的构造考虑了科里奥利力项 f_c 的影响，并确保与初始数据相容，具体讨论见第 4.3 节以及 (4.14)–(4.16)。如前所述，这种构造旨在避免与远场边界数据不匹配。

如上所述，我们将参考区域 $(q, r) \in [0, 1]^2$ 在两个方向上均匀划分为 $n_\xi = 151$ 个网格， $\xi \in \{q, r\}$。我们计算数值解直至终止时间 $T = 20$。图7–9分别展示了三种几何形状下粒子速度**v** 的y分量快照。图7–9展示了初始高斯剖面的非线性动力学，尤其是解如何旋转、扩散和传播。图7–9所示的非线性动力学与图4–6所示的线性动力学略有不同。对于非线性旋转浅水方程，科里奥利力项的旋转效应比线性情形显著得多。

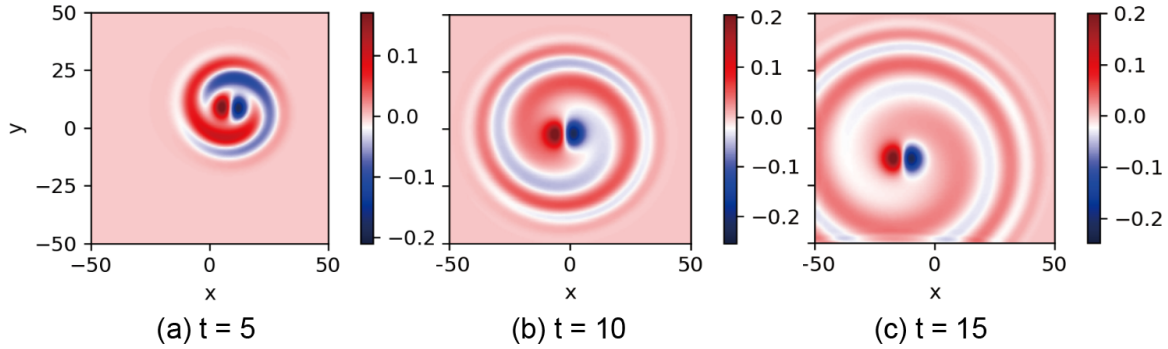

图 4：在线性 RSWE 二维矩形几何上， y 分量粒子速度 $\mathbf{v}$ 在 $t = 5$、10、15。时的快照

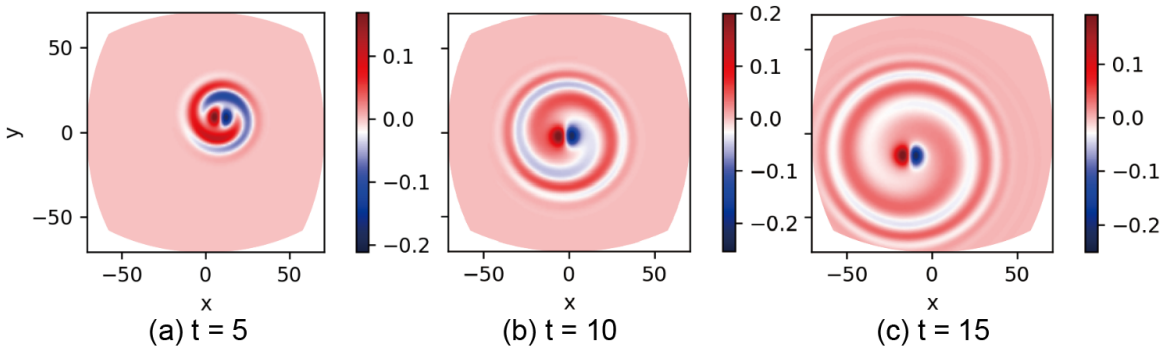

图 5：在线性 RSWE 立方球几何的面板上， y 分量粒子速度 $\mathbf{v}$ 在 $t = 5$、10、15。时的快照

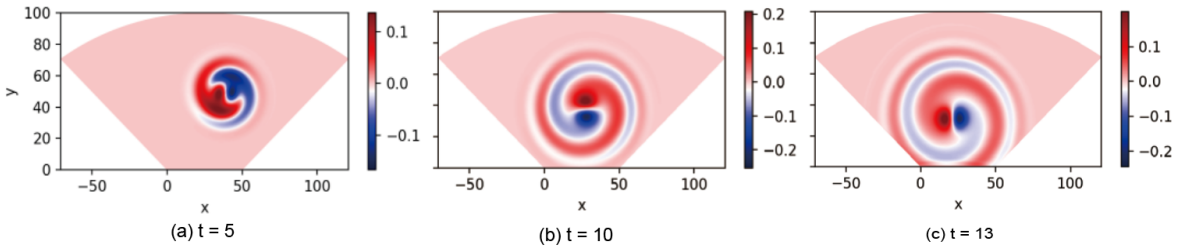

图 6：在线性 RSWE 海贝几何的面板上， y 分量粒子速度 $\mathbf{v}$ 在 $t = 5$、10、15。时的快照

我们还注意到，由于非线性黎曼边界条件(4.6)–(4.7)具有非反射特性，解离开计算域时几乎没有反射。不过，与抵达边界的波的初始振幅相比，数值反射可以认为很小。

7 结论与未来工作

在本研究中，我们以向量不变形式推导并分析了具有光滑边界的空间区域上二维线性与非线性旋转浅水方程的适定、能量稳定和熵稳定边界条件。我们重点研究了亚临界流，这类流动常见于大气、海洋和地转流动问题中。我们利用质量通量、黎曼不变量和伯努利势构造了线性和非线性边界条件，从而确保初边值问题在可证明的意义下具有熵稳定性和能量稳定性。

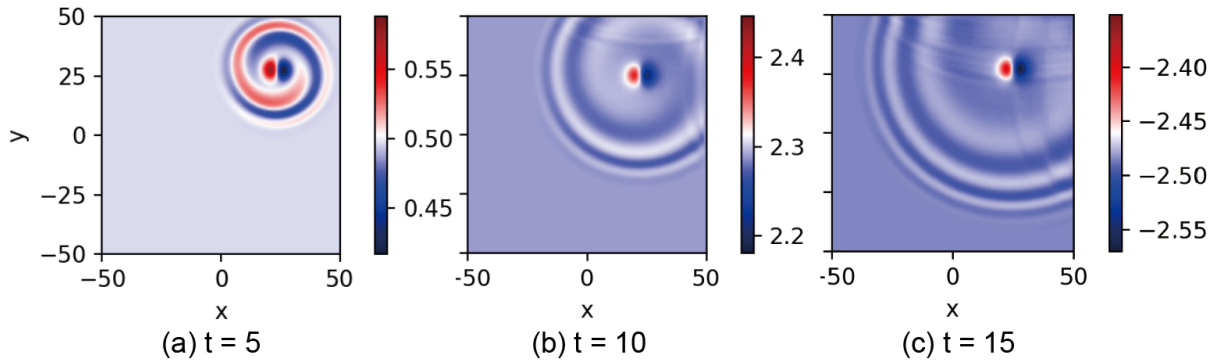

图7：二维矩形几何上非线性旋转浅水方程在 $t = 5$，10、15。时刻的粒子速度 y 分量$\mathbf{v}$ 的快照。

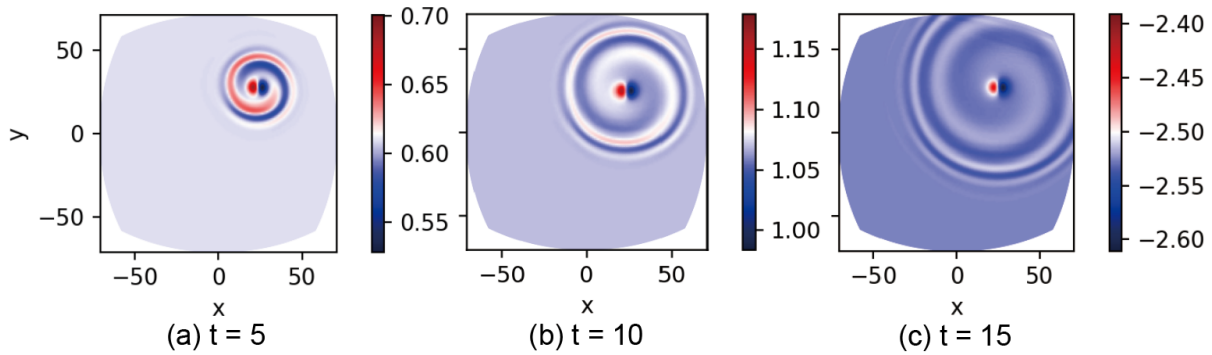

图8：立方球几何面板上非线性旋转浅水方程在 $t = 5$，10、15。时刻的粒子速度 y分量$\mathbf{v}$ 的快照。

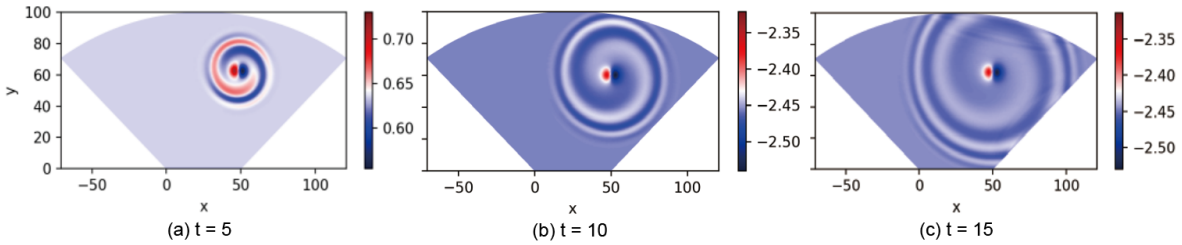

图9：海贝几何面板上非线性旋转浅水方程在 $t = 5$，10、15。时刻的粒子速度 y 分量$\mathbf{v}$ 的快照。

所建立的线性理论是全面的，与 [11, 12, 29] 中确立的理论框架类似。该理论为建立旋转浅水方程线性初边值问题的解的存在性、唯一性和能量稳定性提供了充分条件。非线性旋转浅水方程初边值问题允许更一般的解，而我们的目标是推导出能够保证熵稳定性的非线性边界条件。为此，我们为非线性初边值问题引入了线性相容性和线性稳定性的概念。我们证明，如果一个非线性初边值问题同时满足线性相容性和线性稳定性，那么在有限时间区间内，给定足够正则的初始和边界数据，就存在唯一光滑解。

本工作的一个关键贡献是针对向量不变形式的旋转浅水方程，制定了适用于高阶数值方法的适定的线性和非线性边界条件。我们针对相应的曲线网格上的线性和非线性初边值问题，构建了具有高阶精度、能量稳定性和熵稳定性的同时近似项数值格式。详细的数值实验验证了这些方法的精度，并展示了边界条件及其

数值格式的鲁棒性。本工作将 [10], 针对一维浅水方程所得的结果，扩展到了几何复杂区域和曲线网格上的二维线性与非线性旋转浅水方程。

未来的研究将着重于将这些线性和非线性边界条件以及数值方法扩展到纳入热效应的热旋转浅水方程 [39,40], 。此外，我们还计划将这些方法应用于欧拉方程 [40,41], ，该方程用于模拟可压缩大气流。这些进展将显著提升有限区域和区域大气模型 [2,17–20]以及非周期有界区域内海洋流动模型 [4] 的数值模拟的鲁棒性、效率和精度。

参考文献

[1] 阿德马尔·让·克洛德·巴雷·德·圣维南。非定常水流运动理论及其在河流洪水和潮汐入河问题中的应用。法国科学院周报，73:147–154，1871年。[2] David L Williamson、John B Drake、James J Hack、Rüdiger Jakob 和 Paul N Swarztrauber。球面几何中浅水方程数值近似的标准测试集。计算物理学杂志，102(1):211–224，1992年。[3] Jörn Behrens。使用自适应有限元求解器对浅水方程进行大气与海洋建模。应用数值数学，26(1-2):217–226，1998年。[4] Vladimir Zeitlin。地球物理流体动力学*C*：通过旋转浅水模型理解（几乎）一切。牛津大学出版社，2018年。[5] Kieran Ricardo、Dave Lee 和 Kenneth Duru。矢量不变形式球面浅水方程间断伽辽金方法中的守恒性与稳定性。计算物理学杂志，500:112763，2024年。[6] John Thuburn。数值天气预报和气候模型动力核心的一些守恒问题。计算物理学杂志，227(7):3715–3730，2008年。[7] C.J. Cotter 和 J. Shipton。用于数值天气预报的混合有限元。计算物理学杂志，231(21):7076–7091，2012年。[8] David Lee、Artur Palha 和 Marc Gerritsma。使用混合拟态谱元求解浅水流的离散守恒性质。计算物理学杂志，357:282–304，2018年。[9] A. Staniforth 和 J. Thuburn。全球天气和气候预报模型的水平网格：综述。英国皇家气象学会季刊，138(662):1–26，2012年。[10] Justin Kin Jun Hew、Kenneth Duru、Stephen Roberts、Christopher Zoppou 和 Kieran Ricardo。用于矢量不变形式非线性浅水方程的强稳定双配对分部求和有限差分格式——I：数值格式及其在平面上的验证。计算物理学杂志，523:113624，2025年。[11] Jan Nordström 和 Andrew R Winters。浅水方程的线性与非线性分析及其对边界条件的影响。计算物理学杂志，463:111254，2022年。[12] Bertil Gustafsson、Heinz-Otto Kreiss 和 Joseph Oliger。时变问题与差分方法，第24卷。约翰·威立父子出版公司，1995年。[13] H-O Kreiss 和 Godela Scherer。双曲型偏微分方程的有限元与有限差分方法。载于偏微分方程中有限元的数学方面，第195–212页。爱思唯尔，1974年。[14] John Thuburn 和 Colin J Cotter。任意多边形网格上旋转浅水方程拟态离散的框架。*SIAM*科学计算杂志，34(3):B203–B225，2012年。[15] Jemma Shipton、Thomas H Gibson 和 Colin J Cotter。球面上非线性旋转浅水方程的高阶相容有限元格式。计算物理学杂志，375:1121–1137，2018年。[16] David Lee 和 Artur Palha。立方球上旋转浅水方程的混合拟态谱元模型。计算物理学杂志，375:240–262，2018年。[17] Terry Davies。有限区域模型的侧边界条件。英国皇家气象学会季刊，140(678):185–196，2014年。[18] David P. Baumhefner 和 Donald J. Perkey。有限区域模型中侧边界误差的评估。*Tellus*，34(5):409–428，1982年。

[19] Jean-François Caron。有限区域集合预报中侧边界处扰动不匹配：案例研究。《月刊天气评论》，141(1):356 – 374，2013年。[20] Piet Termonia、Alex Deckmyn 和 Rafiq Hamdi。侧向边界条件时间分辨率问题研究及通过边界误差重启提出的解决方案。《月刊天气评论》，137(10):3551 – 3566，2009年。[21] William W Hsieh、Michael K Davey 和 Roxana C Wajsowicz。有限差分数值模型中的自由开尔文波。《物理海洋学杂志》，13(8):1383–1397，1983年。[22] Dmitry Beletsky、William P O'Connor、David J Schwab 和 David E Dietrich。内部开尔文波和沿岸上升流锋的数值模拟。《物理海洋学杂志》，27(7):1197–1215，1997年。[23] B. Strand。用于 d/dx 有限差分逼近的分部求和。《计算物理学杂志》，110:47–67，1994年。[24] Gregor J Gassner。斜对称间断Galerkin谱元离散及其与SBP-SAT有限差分方法的关系。SIAM科学计算杂志，35(3):A1233–A1253，2013年。[25] Ken Mattsson。对角范数迎风SBP算子。《计算物理学杂志》，335:283–310，2017年。[26] Christopher Williams 和 Kenneth Duru。保持全谱色散关系的分部求和算子。SIAM《数值分析杂志》，62(4):1565–1588，2024年。[27] Mark H Carpenter、David Gottlieb 和 Saul Abarbanel。求解双曲系统的有限差分格式的时间稳定边界条件：方法与高阶紧致格式的应用。《计算物理学杂志》，111(2):220–236，1994年。[28] K. Mattsson。分部求和算子的边界处理过程。《科学计算杂志》，18:133–153，2003年。[29] Sarmad Ghader 和 Jan Nordström。重新探讨浅水方程的适定边界条件。《大气与海洋动力学》，66:1–9，2014年。[30] Jan Nordström。非线性与线性化原始及对偶初边值问题：何时有界？它们之间有何联系？《计算物理学杂志》，455:111001，2022年。[31] Jan Nordström。用于初边值问题的非线性边界条件及其在计算流体动力学中的应用。《计算物理学杂志》，498:112685，2024年。[32] David C Del Rey Fernández、Jason E Hicken 和 David W Zingg。综述：用于偏微分方程数值求解、带有同时近似项的分部求和算子。《计算与流体》，95:171–196，2014年。[33] Magnus Svärd 和 Jan Nordström。初边值问题分部求和格式综述。《计算物理学杂志》，268:17–38，2014年。[34] Jan Nordström 和 Fredrik Laurén。不可压缩纳维–斯托克斯、奥森和斯托克斯方程中的空间算子。《计算方法在应用力学与工程》，363:112857，2020年。[35] Bertil Gustafsson。混合初边值问题差分逼近的收敛率。《计算数学》，29(130):396–406，1975年。[36] Bertil Gustafsson。一般混合初边值问题差分逼近的收敛率。SIAM《数值分析杂志》，18(2):179–190，1981年。[37] Mark H Carpenter 和 Christopher A Kennedy。四阶2N存储Runge–Kutta格式。技术报告 NASA TM-109112，NASA，兰利研究中心，汉普顿，1994年。[38] Patrick J. Roache。利用制造解方法进行代码验证。《流体工程杂志》，124(1):4–10，2001年11月。[39] Kieran Ricardo、David Lee 和 Kenneth Duru。使用混合相容有限元实现热大气动力学中的熵与能量守恒。《计算物理学杂志》，496:112605，2024年。[40] Kieran Ricardo、Kenneth Duru 和 David Lee。球面热浅水方程的熵稳定间断Galerkin方法。SIAM科学计算杂志，46(6):A3353–A3374，2024年。[41] Kieran Ricardo、David Lee 和 Kenneth Duru。湿可压缩欧拉方程分部求和方法中的热力学一致性与结构保持，2024年。