arXiv:2601.02525v1 [math.CO] 5 Jan 2026

# 边染色图计数中的李–杨现象

Maximilian Wiesmann

**摘要**

我们研究了由边着色图枚举问题产生的多项式的零点沿某些极限曲线聚集的现象。该多项式是边色多项式的一种变体，在特定情况下可化为随机正则图上铁磁伊辛模型的配分函数。我们参照李–杨定理，将这种零点聚集行为称为李–杨现象。这些极限轨迹是半代数的，源自某个指数积分的反斯托克斯曲线。

## 1 引言

本文研究一元多项式

$$A_n^V(\lambda) := \sum_{G\in\mathcal{G}_{-n}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(G)|} \prod_{v\in V_G} \Lambda_{\deg(v)}(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]. \tag{1}$$

这里，$\mathsf{G}_{-n}$ 表示欧拉示性数为 $\chi(G) = |V_G| - |E_G| = -n$ 的边着色图 $G$ 的同构类集合，而 $\Lambda_{(w_1,\dots,w_d)}(\lambda)$ 是顶点标记，它为每个与 $w_i$ 条 $i^{\text{th}}$ 颜色的半边关联的顶点指定一个关于 $\lambda$ 的一元多项式（其中 $d$ 是边颜色的数量）。我们假设，对于 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$，只有有限多个 $\Lambda_{\boldsymbol{w}}$ 非零，并将它们方便地存储在多项式中

$$V(\boldsymbol{x},\lambda) = \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0},\,|\boldsymbol{w}|\geq 1} \Lambda_{\boldsymbol{w}}(\lambda)\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!} \in \mathbb{C}[\lambda][x_1,\dots,x_d].$$

在本文中，我们考虑 $V$ 是关于 $k$ 的 $\boldsymbol{x}$齐次多项式的情形。这将（1）中的求和限制为对某些 $k$-正则图求和。

多项式 $A_n^V$ 可视为边色多项式的一种变体。此外，对于某种特定的 $V$， $A_n^V$ 是正则图上铁磁伊辛模型的平均配分函数。第 5 节将对此作出精确说明。

我们主要关注 $A_n^V(\lambda)$ 在复数 $\lambda$下的零点。随着 $n$ 增大，可以观察到零点沿着某些极限曲线聚集，情形相当令人困惑，如图1所示。

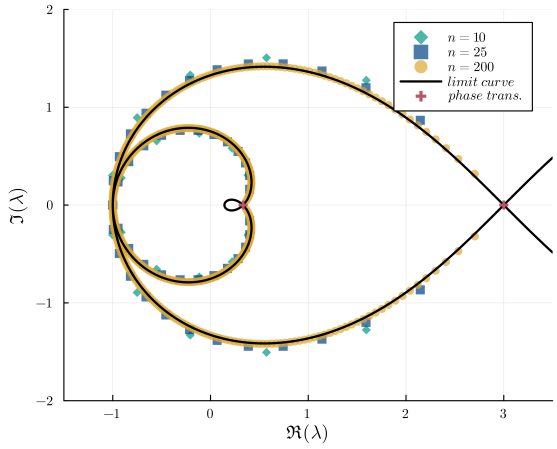



Figure 1: $A_n^V(\lambda)$ 在复 $\lambda$-平面上的根，其中 $V(x_1,\ x_2,\ \lambda) = \frac{x_1^4}{4!} + \lambda\frac{x_1^2x_2^2}{2\cdot 2!\cdot!} + \lambda^2\frac{x_2^4}{4!}$。

红色叉号表示 $A_n^V(\lambda)$ 关于 $n \to \infty$. 的渐近行为的相变（非解析点）。本文旨在描述这些极限曲线。下面给出主要结果（定理4.1）的非正式表述。

**主定理** （非正式表述）。 在关于 $V$ 的温和非退化假设下，$A_n^V$ 的零点会在 $n \to \infty$ 时沿反斯托克斯曲线的部分区域聚集，但可能存在有限多个孤立点除外。这些极限曲线如下给出。令 $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d : \ x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1\}$，并令 $\mathrm{crit}_{\mathbb{S}}(V)$ 表示 $\sigma$ 的临界点集合，其中 $V$ 限制在 $\mathbb{S}$ 上且满足 $V(\sigma) \neq 0$。那么，对于 $\sigma$、$\sigma' \in \mathrm{crit}_{\mathbb{S}}(V)$，反斯托克斯曲线由以下条件给出

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \log V(\boldsymbol{x}, \lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma} = \Re \log V(\boldsymbol{x}, \lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma'}\right\}.$$

零点聚集使人联想到著名的李–杨定理 [LY52]，该定理源于统计物理学。它指出，当把配分函数视为磁场参数的函数时，任意有限图上的铁磁伊辛模型配分函数的零点都位于虚轴上。随着系统规模增大，聚点集合恰好是虚轴。该定理的重要性源于这样一种理念：配分函数零点揭示了相变的位置[Bis+04]。自20世纪50年代以来，这一理论沿多个方向得到推广，例如考察不同物理参数中的零点，如复温度中的零点，从而得到费舍尔零点 [Fis65], ，或扩展格点模型的类别 [LS81]。文献 [Bis+04]对配分函数零点给出了非常一般且严谨的处理。

Lee–Yang 理论也引起了组合学家的大量关注。在 [BB09]中，作者利用稳定多项式证明了李–杨定理。色多项式（又称波茨模型配分函数）的零点及其聚集性已在 [Sok04]中得到研究：Sokal 构造了一个可数的图族，使得这些图的色多项式的根在复平面上稠密，只有一个小圆盘除外。

证明主定理的关键步骤是指数积分表示

$$A_n^V(\lambda) = \frac{2^{nM+(d-2)/2}\left(nM + \frac{d-2}{2}\right)!}{(2\pi)^{d/2}(nK)!} \int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}\, \omega_{S^{d-1}}, \tag{2}$$

其中 $nK$ 和 $nM$ 是取决于图的正则性的整数 $k$ （命题2.6）。对于实参数 $\lambda$，极限$\lim_{n\to\infty} A_n^V(\lambda)$ 只需围绕 $|V(\boldsymbol{x}, \lambda)|$ 在 $S^{d-1}$上的最大值进行拉普拉斯展开即可求得。然而，对于复数 $\lambda$，在大2极限下，有必要借助皮卡-勒夫谢茨理论对（$n$ ）进行解析延拓。这种解析延拓并非全局存在，而只存在于某些定义域 $D \subset \mathbb{C}$上。在每个这样的定义域上，（2）中的积分可以写成

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{crit}_{\mathbb{S}}(V)} c_\sigma(\lambda) \int_{\Gamma_\sigma} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}\, \omega_{S^{d-1}}, \tag{3}$$

其中， $\Gamma_\sigma$ 是与各个临界点相关联的最速下降轮廓，也称为莱夫谢茨 thimble，而 $c_\sigma(\lambda)$ 是复系数。这里，我们转向实球面的复紧化 $\mathbb{S}$ $S^{d-1}$。（3）中的每个积分都可作驻相近似，在$n \to \infty$ 极限下渐近地化为在临界点处的求值。系数 $c_\sigma(\lambda)$ 编码了拓扑信息，且仅在各个定义域 $D$ 内解析，但离开 $D$时可能发生跳变。这称为斯托克斯现象，参见例如 [Pha85]。每个定义域 $D$ 都是（2）中积分的斯托克斯曲线构形之补集的一个连通分支。

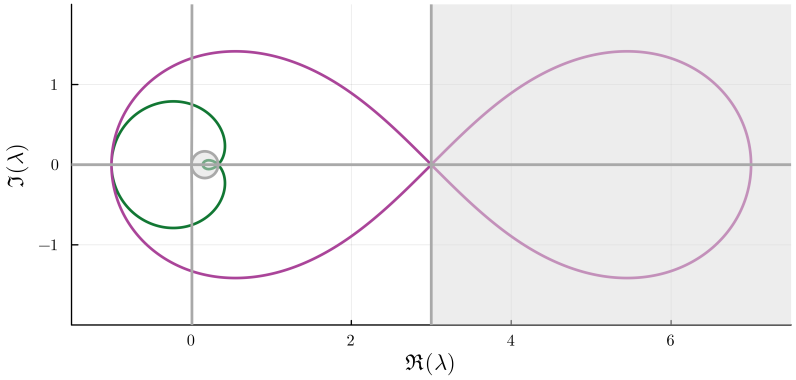



图 2：图 1所示示例中的反斯托克斯曲线（绿色和紫色）与斯托克斯曲线（灰色）。根沿着反斯托克斯曲线与斯托克斯曲线补集中的某些区域（未着色区域）的交集聚集。

要推导分解式（3），需要证明这些Lefschetz 坦克构成相应同调群的一组基。这里会遇到一个技术难题：对于许多 $V$ 我们感兴趣的（尤其是与第5节讨论的伊辛模型相关的那些），多个临界点给出的 $V$取值相同，从而违反了皮卡-勒夫谢茨理论中常见的一个假设，参见例如 [DH02，假设 H4]。为解决这一问题，我们采用 Matsubara [Mat23]提出的构造来找到Lefschetz 膜基，并推导出表达式（3）。这一工作在第3节完成，并 culminates 于定理3.3。随后，驻相位公式给出渐近表达式（推论3.4）

$$\int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x},\lambda)^n \,\omega_{S^{d-1}} \sim \sum_{\sigma\in \mathrm{crit}_{\mathbb{S}}(V)} \tilde{c}_\sigma(\lambda) e^{n \log V(\boldsymbol{x},\lambda)|_{\boldsymbol{x}=\sigma}} (1+o(n^{-1})) \quad (n\to\infty). \tag{4}$$

像（4）这样的求和分解是 [Sok04；Bis+04] 等研究的出发点。在物理学语境中，量 $\log V(\boldsymbol{x},\ \lambda)|_{\boldsymbol{x}=\sigma}$ 可以视为亚稳态自由能。于是，零点会沿着多相共存区域聚集，这意味着若干自由能具有相同的模。事实上，我们可以应用 Sokal 提出的 Beraha–Kahane–Weiss 定理的推广 [Sok04，定理 1。5] 从而得出 $A_n^V(\lambda)$ 的零点沿着以下曲线（的一部分）聚集：

$$\Re \log V(\boldsymbol{x},\lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma} = \Re \log V(\boldsymbol{x},\lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma'} \quad (\Leftrightarrow |V(\sigma,\lambda)| = |V(\sigma',\lambda)|)\,, \tag{5}$$

其中 $\sigma$ 和 $\sigma'$ 是 $V$ 在 $\mathbb{S}$上的临界点。这里，我们需要对 Sokal 的结果稍作修改，以适应这样的情况：系数 $\tilde{c}_\sigma(\lambda)$在（4）中的解析性只能在聚点的单侧邻域内得到保证（第 4 节）。

式（5）定义的曲线称为积分（2）的一条反斯托克斯曲线，即来自式（3）的不同下鞍积分贡献交换主导地位的曲线。如前所述，零点只沿着式（5）定义的曲线的部分区段聚集。这是因为式（3）并非在全局范围内有效。事实上，对于给定的 $\sigma\in\mathrm{crit}_{\mathbb{S}}(V)$，并非所有临界点 都会对式（3）作出贡献。给定 $\lambda$， $c_\sigma$ （以及 $\tilde{c}_\sigma$）可能变为零的轨迹由下述斯托克斯曲线给出

$$\Im V(\boldsymbol{x},\lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma} = \arg V(\sigma,\lambda) \overset{!}{=} \arg V(\sigma',\lambda) = \Im V(\boldsymbol{x},\lambda)\big|_{\boldsymbol{x}=\sigma}. \tag{6}$$

零点聚集仅发生在由 (5) 定义的曲线与由 (6) 定义的曲线补集中的某些区域的交集上，在这些区域中，两条同时

在反斯托克斯曲线上交换主导地位的陡降路径也对积分 (3) 有贡献。图 2 展示了图 1中的示例。绿色和紫色曲线为反斯托克斯曲线，灰色曲线为斯托克斯曲线。如图 1所示的零点聚集仅发生在反斯托克斯曲线与非阴影区域的交集上。

关于 Lee–Yang（或费舍尔）零点与反斯托克斯曲线之间关系的思想，过去已在不同的物理学背景下出现过： [KT15] 对量子场论中的一个配分函数数值地观察到了这种关系，而 [IPZ83; Dol+01; JJS01] 运用这一思想研究伊辛模型配分函数的零点。文献 [Dol+01] 在此处值得特别指出，因为它研究了随机 3 正则图和 4-正则图上的伊辛模型配分函数零点，因此与我们在第5节中的讨论密切相关。

**文章结构**。在第2 节中，我们介绍半边标号彩色图的框架，说明多项式 $A_n^V$ 如何自然地出现在此类图的计数中（推论 2.4），并证明 $A_n^V$ 可表示为指数积分（命题2.6）。第3节专门讨论莱夫谢茨 thimble 构造。我们回顾 [Mat23] 中的构造，并将其调整到我们的语境中。主要结果包括 Lefschetz 膜基的存在性（定理3.3）以及由此得到的渐近表达式（推论3.4）。主定理（定理4.1）的证明在第4节中完成。在最后的第5 节中，我们说明，如何将我们的框架视为一种统一的方法，用于研究随机正则图上伊辛模型的 Lee–Yang 零点和费舍尔零点。

**致谢**。 我非常感谢 Saiei Matsubara 指引我阅读 [Mat23]，并耐心且详尽地解释了莱夫谢茨 thimble。我也感谢 Michael Borin-sky、Mario Kummer、Christian Sevenheck 和 Bernd Sturmfels 所进行的宝贵讨论。

## 2 边着色图

本节将通过半边标签介绍边着色图的构造。这一构造也见于 [BMW26], ，在那里我们利用它获得正常边着色的渐近数量。对于双色图，这一构造已在 [BMW25] 中有所描述。对我们而言，图 $G$ 是一个有限的一维 CW 复形，即允许自环和多重边。尽管在组合学中，将图定义为单纯复形可能更为常见，但无论在数学还是物理学中，使用 CW 复形都非常自然。特别是在量子场论的语境下，费曼图通常被自然地视为 CW 复形 [BIZ80]。此外，我们为图的每条边指定一种 $d$ 颜色。为了仅使用离散数据来编码 $G$ ，我们使用半边标号图。由此得到以下定义。

**定义 2.1.** 令 $H_1$、...、$H_d$ 为互不相交的半边标签集合，每种颜色对应一个。一个 $[H_1, \dots, H_d]$-半边标记的彩色图 $\Gamma$ 是一个元组 $\Gamma = (V, E_{H_1}, \dots, E_{H_d})$，其中

1. $V$，顶点集合，是 $H_1 \sqcup \cdots \sqcup H_d$ 的一个集合划分；
2. 对所有 $i = 1$、...、$d$， $E_{H_i}$ 是 $H_i$ 的一个划分，且各块大小均为二。

一个边着色图 $G$ 被视为半边标记的彩色代表元 Γ所对应的同构类 $[\Gamma]$ 。这里， $\Gamma = (V, E_{H_1}, \dots, E_{H_d})$与 $\Gamma' = (V' E'_{H'_1}, \dots, E'_{H'_d})$之间的同构 $j$ 是一个双射 $j_i\colon H_i \to H'_i$的元组 $j = (j_1, \dots, j_d)$，使得在划分上规范诱导的映射$(j_i)_*$ 满足$(j_i)_*(E_{H_i}) = E'_{H'_i}$，对所有 $i = 1, \dots, d$均成立，且$(j_1 \sqcup \cdots \sqcup j_d)_*(V) = V'$。 Γ 的自同构是从 Γ到其自身的同构。对于某个代表元 $G = [\Gamma]$，我们用 $|\mathrm{Aut}(G)|$ 表示 Γ的自同构群的基数。所有半边标号彩色图的同构类组成的集合记为 G。从现在起，我们有时会省略形容词“边着色”。



图 3：一个具有两个连通分支的边双色图 $G$

$G$ 的顶点集合记为 $V_G$，而边集合为 $E_G$。下面给出一个示例，说明如何通过半边标记图来编码一个图。

例 2.2. 令 $H_1 = \{1,2,\ldots,6\}$ 和 $H_2 = \{a,b\}$。这些划分

$$\begin{aligned} V &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,a,b\}\}, \\ E_{H_1} &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}, \\ E_{H_2} &= \{\{a,b\}\}, \end{aligned}$$

构成一个 $[H_1,H_2]$-标记图，表示图 $G$，该图如图 3所示。其自同构群同构于 $(\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2 \rtimes \mathfrak{S}_2) \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$。 $\diamond$

图 $G$ 配备了一个度函数 $\deg : V_G \to \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$，其中 $\deg(v) = (w_1,\ldots,w_d)$，当顶点 $v$ 关联于 $w_i = |v \cap H_i|$ 条颜色为 $i$的半边时成立，其中 $i = 1,\ldots,d$。

下文将使用一些多重指标记法。粗体符号表示$d$元组，例如 $\boldsymbol{w} = (w_1,\ldots,w_d)$。多重指标阶乘为 $\boldsymbol{w}! = w_1!\ldots w_d!$，而 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}$ 是 $x_1^{w_1}\ldots x_d^{w_d}$的简写。此外，我们使用 $|\boldsymbol{w}| = w_1 + \cdots + w_d$。

**命题 2.3.** 标记顶点度的图的生成函数为

$$\sum_{G\in\mathcal{G}} \frac{\eta^{|E_G|}}{|\operatorname{Aut}(G)|} \prod_{v\in V_G} \Lambda_{\deg(v)} = \sum_{\boldsymbol{s}\geq 0} \eta^{|\boldsymbol{s}|} (2s_1-1)!!\cdots(2s_d-1)!! \cdot [\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}] \exp\left( \sum_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ |\boldsymbol{w}|\geq 1}} \Lambda_{\boldsymbol{w}} \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!} \right). \quad (7)$$

这里，$[\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}]$ 表示系数提取算子，而(7) 是形式幂级数环 $\mathbb{Q}[\Lambda_{\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}][[\eta]]$ 中的一个表达式，其系数属于形式变量 $\Lambda_{\boldsymbol{w}}$。

证明。 展开右侧的指数函数，可得

$$(2\boldsymbol{s})!\,[x_1^{2s_1}\ldots x_d^{2s_d}] \exp\left( \sum_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ |\boldsymbol{w}|\geq 1}} \Lambda_{\boldsymbol{w}} \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!} \right) = \sum_{\{n_{\boldsymbol{w}}\}} \frac{(2\boldsymbol{s})!}{\prod_{\boldsymbol{w}} n_{\boldsymbol{w}}!\,\boldsymbol{w}!^{n_{\boldsymbol{w}}}} \prod_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ |\boldsymbol{w}|\geq 1}} \Lambda_{\boldsymbol{w}}^{n_{\boldsymbol{w}}}, \quad (8)$$

其中，右侧的求和遍历所有满足条件 $\boldsymbol{w} \mapsto n_{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\sum_{\boldsymbol{w}} n_{\boldsymbol{w}} w_i = 2s_i$ 对所有 $i = 1,\ldots,d$均成立的赋值。项

$$\frac{(2\boldsymbol{s})!}{\prod_{\boldsymbol{w}} n_{\boldsymbol{w}}!\,\boldsymbol{w}!^{n_{\boldsymbol{w}}}} \quad (9)$$

统计不交并的划分数 $H_1 \sqcup \cdots \sqcup H_d$ 分成 $n_{\boldsymbol{w}}$ 个块，每个块含有 $w_i$ 个来自 $H_i$的元素，其中 $i = 1,\ldots,d$。这里假设 $H_i$ 含有 $2s_i$ 个元素。理由如下：对称群的 $d$重直积 $\mathfrak{S}_{2s_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{2s_d}$在具有指定块结构的划分集合上传递作用。一个含有$n_{\boldsymbol{w}}$ 个块、每个块含有 $w_i$ 个来自 $H_i$ 的元素的划分，其稳定子同构于$(\mathfrak{S}_{w_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{w_d})^{n_{\boldsymbol{w}}} \rtimes \mathfrak{S}_{n_{\boldsymbol{w}}}$，它置换每个块内的元素以及块本身。根据轨道-稳定子定理，(9)即为上述所称的数量。

将 $H_i$ 划分为大小为二的块，其划分数等于完全图上 $H_i$的匹配数，即为 $(2s_i-1)!!$。选择$H_1 \sqcup \cdots \sqcup H_d$的一个划分，并为每个 $H_i$选择一个匹配，即可确定一个半边标记图，该图表示一个有 $|\boldsymbol{s}|$ 条边的图 $G$ 。表示 $G$的这类半边标记图的数量为 $(2\boldsymbol{s})!/|\mathrm{Aut}(G)|$，这同样是由轨道-稳定子定理得出的。将（8）乘以 $\eta^{|\boldsymbol{s}|}(2s_1-1)!!\ldots(2s_d-1)!!$，并对所有 $\boldsymbol{s}$ 求和，即可证明该命题。 □

将生成函数平移，使求和指标为 $G$ 的欧拉示性数 $\chi(G)$，这样处理会更方便。回想一下，$\chi(G)=|V_G|-|E_G|$。

**推论 2.4.** 设$\mathcal{G}_{-n}$ 为欧拉示性数为 $-n$的半边标记图的同构类集合。则下列恒等式成立。

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ G\in\mathcal{G}_{-n}}} \frac{z^{\chi(G)}}{|\operatorname{Aut}(G)|}\prod_{v\in V_G}\Lambda_{\deg(v)} = \sum_{\boldsymbol{s}\geq 0} z^{|\boldsymbol{s}|}(2s_1-1)!!\cdots(2s_d-1)!![\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}]\exp\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}\\ |\boldsymbol{w}|\geq 1}} z\Lambda_{\boldsymbol{w}}\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!}\right) \tag{10}$$

表达式 (10是形式幂级数环$\mathcal{R}[[z]]$ 上的等式，该环以多项式环 $\mathcal{R}=\mathbb{Q}[\Lambda_{\boldsymbol{w}}]$ 为系数环，包含无穷多个变量。我们关注所有变量 $\Lambda_{\boldsymbol{w}}$ 都指定为仅依赖于一个单一 参数 $\lambda$且仅有有限多个变量非零的情形。换言之，我们以如下方式特化所有 $\Lambda_{\boldsymbol{w}}$ ，使得

$$V(\boldsymbol{x},\lambda)=\sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0},\,|\boldsymbol{w}|\geq 1}\Lambda_{\boldsymbol{w}}(\lambda)\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!}$$

是 $\mathbb{Q}[\lambda][\boldsymbol{x}]$的多项式。于是，(10) 的左边成为一个生成函数，用于计数一类特定的图；这些图的顶点度数标记和允许的顶点关联由 $V(\boldsymbol{x},\lambda)$的系数和非零项决定。(10) 中的每个系数，

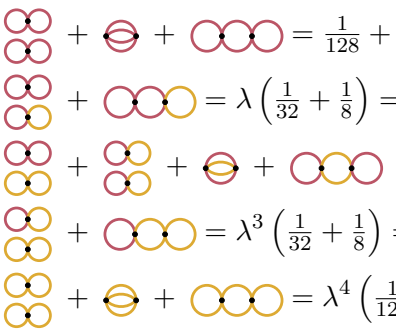
$$A_n^V(\lambda):=\sum_{G\in\mathcal{G}_{-n}}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(G)|}\prod_{v\in V_G}\Lambda_{\deg(v)}(\lambda),$$

现在是关于 $\lambda$ 的一元多项式。

例 2.5. 考虑两种颜色的情况， $d=2$，并固定多项式

$$V(x_1,x_2,\lambda)=\frac{x_1^4}{4!}+\lambda\frac{x_1^2x_2^2}{2!\cdot 2!}+\lambda^2\frac{x_2^4}{4!}. \tag{11}$$

这将生成函数 (10限制为 4-正则图，其中每个顶点关联四条同色半边，或者关联两条第一种颜色的半边和两条第二种颜色的半边。参数 $\lambda$ 统计第二种颜色的边数。例如，欧拉示性数 $-n=-2$ 对 (10) 的贡献为




因此我们得到 $A_2^V(\lambda)=\frac{35}{384}\lambda^4+\frac{5}{32}\lambda^3+\frac{19}{64}\lambda^2+\frac{5}{32}\lambda+\frac{35}{384}$。 ◇

从现在起，我们将讨论范围限定在 $V$ 关于 $\boldsymbol{x}$个变量的度为 $k$ 的齐次 情形。因此，我们只枚举 $k$-正则图。这个假设使我们能够用指数积分来改写 $A_n^V$，这将在下一节中发挥关键作用。注意，如果一个 $k$-正则图 $G$ 的欧拉示性数为 $-n$，那么由于 $k|V_G| = 2|E_G|$ 和 $|V_G| - |E_G| = -n$，$G$ 必须具有 $\binom{2n}{k-2}$ 个顶点和 $\binom{nk}{k-2}$ 条边。

**命题 2.6.** 设 $V \in \mathbb{Q}[\lambda][\boldsymbol{x}]$ 是 $\boldsymbol{x}$ 中次数为 $k$ 的齐次多项式，并记 $M = \binom{k}{k-2}$ 和 $K = \binom{2}{k-2}$。那么，对于任意满足 $nK$ 的整数 $n \geq 0$，我们有 $nM \in \mathbb{Z}$

$$A_n^V(\lambda) = \frac{2^{nM+(d-2)/2}\left(nM + \frac{d-2}{2}\right)!}{(2\pi)^{d/2}(nK)!} \int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}\, \omega_{S^{d-1}}, \tag{12}$$

其中，$\omega_{S^{d-1}}$ 表示 $S^{d-1}$（$(d-1)$ 维球面）的标准体积形式。

证明。由于 $|V_G|$ 和 $|E_G|$ 必须是整数，$A_n^V = 0$ 除非 $nK$，$nM \in \mathbb{Z}$。因此，设后者成立。由推论2.4可得

$$A_n^V(\lambda) = \sum_{\substack{\boldsymbol{s}\geq 0 \\ |\boldsymbol{s}|=nM}} (2s_1-1)!! \cdots (2s_d-1)!! \cdot [\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}] \exp\left( \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}, |\boldsymbol{w}|\geq 1} \Lambda_{\boldsymbol{w}}(\lambda) \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!} \right). \tag{13}$$

左侧指数函数中 $\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}$ 的系数是关于系数 $\lambda_{\boldsymbol{w}}$ 的 $\binom{2nM}{k} = nK$ 次多项式。利用 $V$ 的齐次性，可得

$$[\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}] \exp\left( \sum_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}, |\boldsymbol{w}|\geq 1} \Lambda_{\boldsymbol{w}}(\lambda) \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}!} \right) = [\boldsymbol{x}^{2\boldsymbol{s}}] \frac{V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}}{(nK)!}.$$

回顾高斯积分恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^t \mathrm{d}x = \begin{cases} (t-1)!! & \text{if } t \text{ is even}, \\ 0 & \text{if } t \text{ is odd}. \end{cases}$$

这使我们可以将（13）改写为

$$A_n^V(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(nK)!} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right) V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

最后，由于 $V$ 的齐次性，可通过 $V(r \cdot \boldsymbol{x}, \lambda) = r^k V(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 将 $\boldsymbol{x}$ 缩放至单位范数，因此我们可以将上面的积分改写为极坐标形式：

$$\begin{aligned} A_n^V(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(nK)!} \int_0^{\infty} r^{d-1} \left( \int_{\partial B_r(0)} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right) V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}\, \omega_{\partial B_r(0)} \right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(nK)!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{d-1+knK} \mathrm{d}r \int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^{nK}\, \omega_{S^{d-1}}. \end{aligned}$$

结合恒等式

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{nkK+d-1} \mathrm{d}r = \int_0^{\infty} e^{-q} (2q)^{(knK+d-2)/2} \mathrm{d}q = 2^{nM+(d-2)/2} \left( nM + \frac{d-2}{2} \right)!,$$

即可得到所需的表达式。 □

在大$n$ 渐近行为中，可以对（12）使用鞍点近似，从而推导出 $A_n^V$关于 $|V(\boldsymbol{x}, \lambda)|$ 上的最大值的渐近表达式，条件是 $S^{d-1}$为 $\lambda$ 实数。对此的详细分析见 [BMW26]。然而，由于我们也对 $\lambda$的复数值感兴趣，因此需要对（$n \to \infty$ 12）的极限进行解析延拓。这正是下一节的内容，其中将使用皮卡-勒夫谢茨理论。

## 3 Lefschetz 膏腴分解

命题 2.6 指出，我们需要研究积分到 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的解析延拓

$$I_n^V(\lambda) := \int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^n \omega_{S^{d-1}} \tag{14}$$

在极限 $n \to \infty$ 下。为此，我们将 $I_n^V(\lambda)$ 分解为对 *Lefschetz* 坦克 的积分之和。这些积分路径与 $V$ 的临界点相关联，沿路径 $\log V$ 的实部递减，因此适合采用驻相近似。在大-$n$ 极限下，沿 thimble 的积分会化为临界点取值。

这种方法在数学和理论物理中都很常见，参见 [DH02;Wit11]。要使其严谨，我们需要证明 Lefschetz thimbles 构成适当同调群的一组基。这里会出现一个技术上的微妙之处：人们通常假设临界值 $\Re\log V(\sigma_j)$ 对于不同的临界点 $\sigma_j$互不相同，参见例如 [DH02, 假设 H4] 或 [AK11，假设 8]。然而，对于我们所考虑的应用，这一假设并不成立，例如对于 $V$ 如例2.5中所构造的。

我们分两步修改莱夫谢茨 thimble 的构造，具体过程见 [Mat23, §4]：首先，我们将 thimble 定义为 $\Gamma_\sigma$ Morse–Smale 向量场的（非）稳定流形，其中该向量场是标准莱夫谢茨 thimble 构造中所用梯度向量场的小扰动。这确保了 thimble 之间的横截交。以这种方式构造的轮廓是一个局部有限的同调群中的元素。

第二步，我们需要对这些 thimble 进行正则化，以获得真正的（扭曲）~同调类 $\Gamma_\sigma$。这涉及实定向爆破构造。对于超平面配置的补集情形，这一过程也见 [AK11, §3.2.3– 3.2。5]在关于 $V$ 将临界点的数量表示为~带符号欧拉示性数的 $\Gamma_\sigma$ 一般性假设下，这些类构成扭同调群的一组基。由于积分（14）可以看作该扭同调群与代数 de Rham 上同调群之间的周期配对，这就证明了积分（14）的莱夫谢茨膏腴分解，这正是定理 3.3的内容。随后，通过应用驻相近似，我们可以得到 $I_n^V(\lambda)$ 的渐近表达式，该表达式对几乎所有 $\lambda \in \mathbb{C}$都成立，见推论 3.4。

我们引入一些记号，大多沿用 [Mat23]。令

$$\mathbb{S} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^d \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = 1\}$$

表示复维数为 $d-1$ 的复化球面。固定一个 $\lambda$，令 $U_\lambda := \mathbb{S} \backslash \mathrm{V}(V(\boldsymbol{x}, \lambda))$ 表示 $V$ 非零的轨迹集，并配备完备的黎曼度量 $g$。我们可以将 $D_\lambda := \mathrm{V}(V(\boldsymbol{x}, \lambda))$ 视为 $\mathbb{S}$ 上的一个除子。此外，记 $F_\lambda(\boldsymbol{x}) := \log V(\boldsymbol{x}, \lambda)$。下面汇总必要的非退化假设。至关重要的是，这些假设仅在至多为零维的判别式轨迹 $\Sigma$ 上失效，参见注 3.5。

(A1) 临界轨迹 $\mathrm{crit}(F_\lambda) := \{\boldsymbol{x} \in U_\lambda : \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} F_\lambda(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 是一个零维簇。只要 $V(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的因式分解无平方因子，这一条件就成立。

(A2) 除子 $D_\lambda$ 应为简单正规交叉。特别地，若$D_\lambda$ 光滑，即对所有 $\boldsymbol{x} \in D_\lambda$，$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}, \lambda) \neq 0$，则此条件成立。

(A3) 对于任意 $\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$，$F_\lambda$ 在 $\sigma$ 处非退化，即 $\det \mathrm{Hess}^{F_\lambda}(\sigma) \neq 0$。

(A4) 临界点的数量为 $|\mathrm{crit}(F_\lambda)| = (-1)^{d-1}\chi(U_\lambda)$，其中 $\chi$ 是拓扑欧拉示性数。我们将这个数量记为 $\chi^* := |\mathrm{crit}(F_\lambda)|$。

注意，$\mathrm{crit}(F_\lambda)$ 可以通过先利用拉格朗日乘数确定 $V$在 $\mathbb{S}$ 上的临界点，再求这些临界点与 $U_\lambda$的交集来轻松计算。

**注记 3.1。** $\mathbb{S}$的欧拉示性数为 $1+(-1)^{d-1}$。事实上，令 $f=x_1^2+\cdots+x_d^2$；则仿射米尔诺纤维化 $\mathbb{C}^d\setminus\{f=0\}\xrightarrow{f}\mathbb{C}^*$ 的纤维为$\{f=1\}$，它与一个由 $\mu$ 个（复）球面组成的花束同伦等价，其维数为 $d-1$。这里，$\mu$ 是 $f$ 在原点处奇点的米尔诺数；该奇点是一个 $A_1$-奇点，因此 $\mu=1$。这意味着 $\chi(\mathbb{S})=1+(-1)^{d-1}$。由欧拉示性数的切除性质，

$$(-1)^{d-1}\chi(U_\lambda)=(-1)^d\left(|D_\lambda|-1\right)+1. \tag{15}$$

例 3.2。考虑 $V(x_1,x_2,\lambda)=\frac{x_1^4}{4!}+\lambda\frac{x_1^2x_2^2}{2!\cdot 2!}+\lambda^2\frac{x_2^4}{4!}$；一般而言，该多项式在 $\mathbb{S}=\{x_1^2+x_2^2=1\}$上有八个根，而其欧拉示性数为零。根据（15），预期有$|\mathrm{crit}(F_\lambda)|=8$。对于一般的 $\lambda$，确实如此。对于 $\lambda\in\{1/3,3\}$，只有六个临界点。若 $\lambda=3\pm\sqrt{8}$，则 $V$在 $\mathbb{S}$上只有四个根，同时也有四个临界点。$\diamond$

令 $\nabla_\pm:=\mathrm{d}\pm\tau\,\mathrm{d}\log V\wedge$ 为 $\mathbb{S}$ 上沿 $D_\lambda$ 具有对数极点的扭微分。式 (14) 中的 $(d-1)$-形式 $\omega_{S^{d-1}}$ 是 $H^0(U_\lambda,\Omega^{d-1}_{U_\lambda})$ 的一个元素。我们也可以将它视为代数德拉姆上同调群 $H^{d-1}_\pm(\tau)$ 中的一个上同调类的代表：$=\mathbb{H}^{d-1}(U_\lambda;(\Omega^\bullet_{U_\lambda},\nabla_\pm))$。令 $\mathrm{L}^\pm(\tau)$ 为 $U_\lambda$ 上由联络 $\nabla_\mp$ 的平坦截面构成的层。那么存在周期配对，它是完美配对

$$\begin{aligned}\langle\bullet,\bullet\rangle_{\mathrm{per}}:H_{d-1}(U_\lambda;\mathcal{L}^\pm(\tau))\otimes_{\mathbb{C}}H^{d-1}_\pm(\tau)&\to\mathbb{C}\\ [\Gamma^\pm]\otimes[\omega_\pm]&\mapsto\int_{\Gamma^\pm}V(\boldsymbol{x},\lambda)^{\pm\tau}\omega_\pm.\end{aligned} \tag{16}$$

这里，$H_{d-1}(U_\lambda;\mathcal{L}^\pm(\tau))$ 是一个扭同调群，其取值于局部系统$\mathcal{L}^\pm(\tau)$。关于扭曲（上）同调的介绍，请参阅 [MMT23，§3] 。下文为简化记号，省略缩放因子 $\tau$，并假设 $\tau>0$ 是一般的。

## 3.1 第一步：将莱夫谢茨 thimble 构造为局部有限链

本小节将说明莱夫谢茨 thimble 的构造，从而得到局部有限同调类 $[\Gamma^\pm_\sigma]\in H^{\mathrm{lf}}_{d-1}(U_\lambda;\mathrm{L}^\pm)$。该构造基本上是经典的梯度流轨线构造，只是需要对梯度场作扰动，以确保稳定流形与不稳定流形横截相交。

取 $T_\lambda$ 为 $D_\lambda$ 的一个开邻域，并满足以下性质：

- $\mathbb{S}\setminus T_\lambda$ 和 $\overline{T_\lambda}$ 是带边界流形；
- 临界轨迹集包含于 $T$的补集中，$\mathrm{crit}(F_\lambda)\subset\mathbb{S}\setminus T_\lambda$；
- 梯度 $\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Re F_\lambda$ 与 $\partial(\mathbb{S}\setminus T_\lambda)$ 横截，且在 $\partial T$上不消失。

由于 Smale 的定理 [Sma61, Theorem A], ，在假设 (A1) 和 (A3) 成立的情况下，存在一个适配于 $\Re F_\lambda$ 的 $\xi_\lambda$ Morse–Smale 向量场 $\xi_\lambda$，定义在 $\mathbb{S}\setminus T_\lambda$ 上。下面解释相关术语；更多细节参见 [Nic11, §2.4] 。若向量场 $\xi_\lambda$ 满足$\Re F_\lambda$，且在 $(\mathbb{S}\setminus T_\lambda)\setminus\mathrm{crit}(F_\lambda)$ 上有 $\xi_\lambda\cdot\Re F_\lambda>0$，则称其为相对于$\Re F_\lambda$的类梯度向量场。对于任意临界点 $\sigma\in\mathrm{crit}(F_\lambda)$，存在局部坐标 $(s_i)$，使得 $\xi_\lambda=-2\sum_{i=1}^m s_i\partial_{s_i}+2\sum_{i>m}s_i\partial_{s_i}$，其中 $m$ 是 $F_\lambda$ 在 $\sigma$处的指标。令 $\Phi_t$ 为由 $\xi$生成的流，定义在 $\mathbb{S}\setminus T_\lambda$ 上。相对于 $\xi_\lambda$，$\sigma$的（不）稳定流形是集合 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}\setminus T_\lambda:\lim_{t\to\pm\infty}\Phi_t(\boldsymbol{x})=\sigma\}$。若类梯度向量场 $\xi_\lambda$满足任意一对临界点所对应的稳定流形与不稳定流形横截相交，则称其为 Morse–Smale 向量场。可以将 $\xi_\lambda$ 视为由 $\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Re F_\lambda$定义的梯度向量场的一个小扰动，而该扰动确保了横截交。

根据惠特尼延拓定理，可以将 $\xi_\lambda$ 延拓为定义在$U_\lambda = \mathbb{S} \setminus D_\lambda$ 上的一个 $C^1$-向量场，使得在 $U_\lambda \setminus \mathrm{crit}(F_\lambda)$ 上有 $\xi_\lambda \cdot \Re F_\lambda > 0$；这里沿用记号，仍将此延拓称为 $\xi_\lambda$，并用 $\Phi_t$ 表示其流。对于任意临界点 $\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$，我们可以据此定义莱夫谢茨 thimbles

$$\Gamma_\sigma^{\pm} := \left\{ \boldsymbol{x} \in U_\lambda \,:\, \lim_{t \to \pm\infty} \Phi_t(\boldsymbol{x}) = \sigma \right\}.$$

稳定流形与不稳定流形的横截性蕴含 $\Gamma_\sigma^+ \cap \Gamma_\tau^- = \varnothing$ if $\sigma \neq \tau$，参见 [Nic11, Remark 2.4.9]。在临界点 $\sigma$附近，根据莫尔斯引理，我们可以找到坐标 $(z_i) = (s_i + \mathrm{i}t_i)$，使得 $F_\lambda(\boldsymbol{z}) = F_\lambda(\sigma) + \sum_{i=1}^{d-1} z_i^2$。这涉及在 $\sigma$附近选择 $F_\lambda$的一个分支，即选择 $\Im F_\lambda(\sigma)$的一个值。然后，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，我们定义

$$\begin{aligned} c_\epsilon^+ &:= \left\{ \boldsymbol{z} \in U_\lambda \,:\, \sum_{i=1}^{d-1} s_i^2 = \epsilon,\ t_1 = \cdots = t_{d-1} = 0 \right\}, \\ c_\epsilon^- &:= \left\{ \boldsymbol{z} \in U_\lambda \,:\, \sum_{i=1}^{d-1} t_i^2 = \epsilon,\ s_1 = \cdots = s_{d-1} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

借助这些概念，我们可以将陡降路径改写为

$$\Gamma_\sigma^{\mp} = \bigcup_{\pm\{t \geq 0\}} \Phi_t(c_\epsilon^{\pm}) \cup \bigcup_{0 \leq \delta \leq \epsilon} c_\delta^{\pm},$$

例如参见 [DH02, §2.3。1]。由此表达式可知，$\Gamma_\sigma^{\pm}$ 在局部有限扭曲同调群 $[\Gamma_\sigma^{\pm}] \in H_{d-1}^{\mathrm{lf}}(U_\lambda; \mathcal{L}^{\pm})$中定义了同调类。其元素是局部有限的扭曲奇异链之和所对应的同调类，即形式上的无穷和 $\sum_\Delta c_\Delta \Delta \otimes U_\Delta$，其中 $\Delta$是一个奇异单形，$U_\Delta$ 是 $F_\lambda$ 在 $\Delta$上的一个分支；并且对于任意紧子集 $K \subset U_\lambda$，只有有限多个 $\Delta$ 的像与 $K$ 有非空交，且满足 $c_\Delta \neq 0$。

## 3.2 第 2 步：正则化 Lefschetz 蛇形

为了在通常的扭曲同调群中得到 Lefschetz 坦克，我们需要正则化类 $[\Gamma_\sigma^{\pm}] \in H_{d-1}^{\mathrm{lf}}(U_\lambda; \mathcal{L}^{\pm})$。具体做法是沿着 $\mathbb{S}$对 $D_\lambda$作实定向爆破；粗略地说，这会将 $D_\lambda$ 替换为“管状”对象。这样，正则化后的陡降路径便带有 $D_\lambda$处的一个方向数据。此构造取自 [Mat23引理 4 的证明2] 及其后的段落。另见 [AK11，§3.2。5]。

令 $\varpi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 为沿着 $D_\lambda$对 $\mathbb{S}$ 作的实定向爆破，见下文 (18) 及 [Sab13，§8.2]。在假设 (A2) 下，这使 $\mathbb{S}$ 具有带角流形的结构，即局部坐标图是 $[0,\infty)^k \times \mathbb{R}^{d-1-k}$ [Joy09，定义 2.1]中的开集。光滑性和切空间的通常定义可推广到这种情形。设 $X$ 为带角流形。对于点 $\boldsymbol{x} \in X$，我们如下定义内向扇区 $\mathrm{InSec}(T_{\boldsymbol{x}}X)$ [Joy09，定义 2.2]：设 $(U, \varphi)$ 是 $X$ 上的一个坐标图，其中 $U$ 是 $[0,\infty)^k \times \mathbb{R}^{d-1-k}$ 中的开子集，且包含零，使得 $\varphi(0) = \boldsymbol{x}$。映射 $\mathrm{d}\varphi|_0 : T_0 U = \mathbb{R}^{d-1} \to T_{\boldsymbol{x}}X$ 是一个同构。于是 $\mathrm{InSec}(T_{\boldsymbol{x}}X)$ 是 $\mathrm{InSec}(T_{\boldsymbol{x}}X) = \mathrm{d}\varphi|_0([0,\infty)^k \times \mathbb{R}^{d-1-k}) \subseteq T_{\boldsymbol{x}}X$的像。直观地说，它包含“指向 $X$内部”的切向量。

对于一个不可约分量 $D_i \subset D_\lambda$，我们将拉回 $\widetilde{D}_i := \varpi^{-1}(D_i)$ 记作 $D_0$，并将 $D_\infty$ 分别记为 $e^{F_\lambda}$的零点与极点除子的支集，和 $D = D_0 \cup D' \cup D_\infty$。设 $(z_i)$ 是 $D_\infty$中某一点附近的局部坐标。那么在 $\mathbb{S}$上有相应的局部坐标 $((r_i, e^{\mathrm{i}\theta_i})_{i=1}^k, z_{k+1}, \ldots, z_{d-1})$，爆破映射在局部由下式给出（这可视为实定向爆破的定义）

$$\varpi : ((r_i, e^{\mathrm{i}\theta_i})_{i=1}^k, z_{k+1}, \ldots, z_{d-1}) \mapsto ((r_i e^{\mathrm{i}\theta_i})_{i=1}^k, z_{k+1}, \ldots, z_{d-1}). \tag{18}$$

我们可以假设 $D_\infty$ 和 $D_0$ 在局部由 $D_\infty = \{r_1 \dots r_\ell = 0\}$ 和 $D_0 = \{r_{\ell+1} \dots r_k = 0\}$ 给出。于是可以通过 $\Theta = \sum_{i=1}^{\ell} \partial_{r_i}$ 在局部定义一个向量场。在点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}$ 处取值后，得到一个向内向量 $\Theta(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{InSec}(T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{S})$。利用单位分解，可以将其整体延拓为向量场 $\Theta : \mathbb{S} \to \mathrm{InSec}(T\mathbb{S})$，它与 $D'$ 的每个分量都相切。设 $\Psi_t$ 是 $\Theta$ 的流。那么，对于固定的 $T > 0$，我们定义

$$\widetilde{W}_\infty := \bigcup_{0 \le t \le T} \Psi_t(\widetilde{D}_\infty) \quad \text{and} \quad W_\infty := \varpi(\widetilde{W}_\infty).$$

我们声称，可以找到足够大的 $M > \epsilon$ 和 $T > 0$，使得

$$\Phi_T(c_\epsilon^+) \subseteq \{\Re F_\lambda > M\} \subseteq W_\infty. \tag{19}$$

由于 $\Theta$ 指向内侧，$\Re F_\lambda$ 沿着在 $\varpi$ 下的流 $\Psi$ 的像递减。这表明存在 $M$，使得右侧的包含关系成立。此外，我们有 $\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\sigma) \subseteq D_\infty = \{\Re F_\lambda = +\infty\}$。由于 $\lim_{n\to\infty} c_{1/n}^+ = \{\sigma\}$，应用 [Jos17，引理 8.4.5] 可知，对任意 $T > 0$，$\Phi_t(c_{1/n}^+)|_{[-T,T]}$ 收敛于 $\Phi_t(\sigma)|_{[-T,T]}$。因此，对任意 $M$，都存在一个 $T$，使得 (19) 左侧的包含关系成立，从而证明了该断言。

根据扭曲同调的消失定理，例如参见 [Ago+24，定理 A。1]，$H_{d-2}(W_\infty \setminus D; \mathcal{L}^-) = 0$。因此，存在一个链 $C \in C_{d-1}(W_\infty \setminus D; \mathcal{L}^-)$ 满足 $\partial C = -\Phi_T(c_\epsilon^+)$。接着，我们将正则化莱夫谢茨下降流形定义为奇异链

$$\widetilde{\Gamma}_\sigma^- := \bigcup_{0 \le t \le T} \Phi_t(c_\epsilon^+) + \bigcup_{0 \le \delta \le \epsilon} c_\delta^+ + C \in C_{d-1}(U_\lambda; \mathcal{L}^-).$$

类似地，我们可以定义 $\Gamma_\sigma^+$，用 $W_0$ 代替 $W_\infty$。根据 [Mat23，引理 4.2]，，对于任意 $p$，局部有限同调群 $H_p^{\mathrm{lf}}(W_\infty \setminus D; \mathrm{L}^-) = 0$ 都消失。特别地，这意味着 $[\Gamma_\sigma^- - \widetilde{\Gamma}_\sigma^-] = [\bigcup_{T<t} \Phi_t(c_\epsilon^+) - C] = 0 \in H_{d-1}^{\mathrm{lf}}(W_\infty \setminus D; \mathrm{L}^-)$。因此，存在一个定义在 $W_\infty \setminus D$ 上的局部有限链 $C'$，因而也存在定义在 $U_\lambda$ 上的局部有限链，并且满足 $\partial C' = \Gamma_\sigma^- - \Gamma_\sigma^-$。

此外，给出了 $\widetilde{H}_{d-1}(W_\lambda, L^+)$ 的一个元素 $0$ 直观上的构造可以如下。因此正则化映射下的像

$$\mathrm{reg} : H_{d-1}^{\mathrm{lf}}(U_\lambda; \mathcal{L}^\pm) \xrightarrow{\sim} H_{d-1}(U_\lambda; \mathcal{L}^\pm),$$

它是自然同构的逆 $H_{d-1}(U_\lambda;\ \mathcal{L}^\pm) \xrightarrow{\sim} H_{d-1}^{\mathrm{lf}}(U_\lambda;\ \mathcal{L}^\pm)$，假设 $\tau$ 为一般情形，参见 [AK11，§3.2。5]。我们来考察（完美的）同调交叉配对

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathrm{h}} : H_{d-1}(U_\lambda, \mathcal{L}^-) \otimes_{\mathbb{C}} H_{d-1}(U_\lambda, \mathcal{L}^+) \to \mathbb{C}.$$

由 Morse–Smale 向量场的横截性可知，

$$\langle [\widetilde{\Gamma}_\sigma^-], [\widetilde{\Gamma}_{\sigma'}^+] \rangle_{\mathrm{h}} = \delta_{\sigma\sigma'},$$

因此 $\{\Gamma_\sigma^\pm\}_{\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)}$ 是 $H_{d-1}(U_\lambda; \mathcal{L}^\pm)$ 中的线性无关元素。根据假设 (A4)，恰有 $\chi^*$ 个临界点。这与 $H_{d-1}(U_\lambda; \mathcal{L}^\pm)$ 的维数相同，见 [Ago+24，定理 A。1]。因此，我们得到如下结论。

**定理 3.3**。对于固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得假设 *(A1)–(A4)* 成立，并且对于一般的 $\tau > 0$，正则化莱夫谢茨下降流形 $\{\Gamma_\sigma^\pm(\tau)\}_{\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)}$ 构成扭曲同调 $H_{d-1}(U_\lambda; \mathcal{L}^\pm(\tau))$ 的一组基。通过周期配对 (16)，积分 $I_\tau^V(\lambda)$ 可分解为

$$I_\tau^V(\lambda) = \sum_{\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)} c_\sigma(\lambda) \int_{\widetilde{\Gamma}_\sigma^+(\tau)} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^\tau \omega_{S^{d-1}}, \tag{20}$$

对于某些系数 $c_\sigma(\lambda) \in \mathbb{C}$。

**推论 3.4**。 固定 $\lambda \in \mathbb{C}$，使假设 *(A1)–(A4)* 成立。然后，在大$n$ 极限下，积分 $I_n^V(\lambda)$ 渐近地由下式给出

$$I_n^V(\lambda) \sim \left(-\frac{2\pi}{n}\right)^{(d-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)} \frac{c_\sigma(\lambda)\omega_{S^{d-1}}(\sigma \partial_{\boldsymbol{x}})}{\sqrt{\det \mathrm{Hess}_{F_\lambda}(\sigma)}} e^{nF_\lambda(\sigma)}(1 + o(n^{-1})), \tag{21}$$

其中， $\sigma\partial_{\boldsymbol{x}}$ 表示在 $\mathbb{S}$上的常向量场，其值为 $\sigma$。

证明。 对于一般的 $n > 0$，根据 $I_n^V$（$\lambda$） 定理~ 3.3，我们得到 $I_n^V$（$\lambda$）的莱夫谢茨 thimble 分解。随后，在（20）中的每个积分里，我们将积分路径 $\Gamma_\sigma^+$（$n$）变换为未正则化膜 $\Gamma_\sigma^+$（$n$）。其贡献

$$\int_{\bigcup_{0\le t\le T} \Phi_t(c_\epsilon^+)+C} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^n \omega_{S^{d-1}}$$

在大 $n$ 极限下呈指数抑制，参见 [Mat23，(4.5)]。因此，我们可以将驻相位公式（参见 [Mat23，(4.7)]）应用于 $\Gamma_\sigma^+$（$n$），该公式对任意 $n > 0$均有定义，从而得到 $I_n^V$（$\lambda$）的渐近展开。这就给出了所需的表达式（21）。 □

我们以几点说明结束本节。

注 3.5。 如果 $V$（$\boldsymbol{x}$， $\lambda$） $\in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \lambda]$ 是不可约的，那么在 $\mathbb{C}_\lambda$上，假设 （A1）–（A4）在一个至多为零维簇的集合上不成立。我们将这个有限的 判别 点集记为 $\Sigma$。在 （A1）的情况下，该结论由萨德定理得出。除子 $D_\lambda$ 在一维参数空间 $\mathbb{C}_\lambda$中除判别超曲面外均为光滑。类似地，消失的海森矩阵在 $\mathbb{C}_\lambda$中构成一个超曲面，从而给出一个有限的例外点集。在 （A4） 失效的轨迹集是某种欧拉判别式，例如参见 [TW24]。

~注3.6。根据 $\Gamma_\sigma^+$ 的构造，式（20）中出现的每个积分都是 $\lambda$ 上 $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ 内的解析函数，函数 $I_n^V(\lambda)$ 也是如此。然而，系数 $c_\sigma(\lambda)$ 并非如此，这是斯托克斯现象的一种表现。这些系数甚至会沿着所谓的斯托克斯曲线发生不连续跳变，其形式为

$$S_{\sigma,\sigma'} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \Im F_\lambda(\sigma) = \Im F_\lambda(\sigma') \mod 2\pi\},$$

对于 $\sigma$， $\sigma' \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$ 满足 $S_{\sigma,\ \sigma'}$ 若将其视为 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 中的实代数簇，则是一维的。若 $\lambda$ 位于这样的斯托克斯曲线上，则莱夫谢茨 thimble 的基不再是唯一的，如式（17）所示。当 $\lambda$ 穿过斯托克斯线时，Lefschetz 坦克的基会通过一个幺幂矩阵变换，参见例如 [Pha85]。但请注意， $c_\sigma(\lambda)$ 在趋近斯托克斯曲线时具有定义良好的单侧极限。

对于满足 $\dim_{\mathbb{R}}(S_{\sigma,\sigma'}) = 1$ 的 $\sigma, \sigma' \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$，我们记为

$$S_{\sigma,\sigma'}^c := \pi_0\left(\mathbb{R}^2 \setminus S_{\sigma,\sigma'}\right)$$

斯托克斯曲线补集中的连通分支。特别地，我们有 $c_\sigma(\lambda) \neq 0$ 在 $S_{\sigma,\sigma'}^c$ 中若干区域的并集上成立，至多可能有一些孤立点例外。

## 4 零点的聚集

本节陈述并证明本文的主定理。关键思路是将推论 3.4 与 Sokal 关于零点聚集的一项结果结合起来，而该结果又是 Beraha–Kahane–Weiss 定理的推广 [BKW78]。

首先按照 [Sok04] 的做法引入一些记号。设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个定义域，且 $(f_n)_n$是函数序列 $f_n : D \to \mathbb{C}$。我们定义以下零点极限集。

$$\liminf \mathrm{V}(f_n) := \left\{ z \in D : \text{每个邻域 } U \ni z \text{ 都与除有限多个之外的所有 } \mathrm{V}(f_n) \text{ 有非空交集} \right\}$$

$$\limsup \mathrm{V}(f_n) := \left\{ z \in D : \text{每个邻域 } U \ni z \text{ 都与无限多个 } \mathrm{V}(f_n) \text{ 有非空交集} \right\}$$

若 $f_n$ 具有 $f_n(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(z)\beta_k(z)^n$ 的形式，我们称指标 $k$ 在 $z$ 处占优，当且仅当$|\beta_k(z)| \geq |\beta_l(z)|$ $\forall 1 \leq l \leq m$，并记作 $D_k := \{z \in D :$ $k$ 在 $z$ 处占优$\}$。我们将以下假设称为无退化支配条件：

**(B1)** 不存在指标 $k \neq k'$ 使得对于某个 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$，有 $\beta_k \equiv \zeta\beta_{k'}$，且$|\zeta| = 1$，并且 $D_k$ 有非空内部。

现在我们可以准确地表述主定理了。

**定理 4.1** (主要结果)。设 $V \in \mathbb{C}[\lambda][\boldsymbol{x}]$ 是一个满足假设*(A1)–(A4)* 且对一般的 $\lambda \in \mathbb{C}$ *(*即 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ 具有有限 $\Sigma$*)* 的多项式。此外，假设函数 *(B1)*满足条件 $V(\sigma)$， $\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$。那么，对于 $n \to \infty$， $A_n^V(\lambda)$的零点沿反斯托克斯曲线的线段聚集。更准确地说，

$$\liminf \mathcal{V}(A_n^V) = \limsup \mathcal{V}(A_n^V) = \mathcal{P} \cup \bigcup_{\substack{\sigma \neq \sigma' \in \mathrm{crit}(F_\lambda) \\ D \in \mathcal{S}^c_{\sigma,\sigma'}}} \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re F_\lambda(\sigma) = \Re F_\lambda(\sigma')\} \cap \overline{D}, \quad (22)$$

其中 $\mathcal{P}$ 是一个有限个孤立点组成的集合（也可以为空），而并集遍历的是某些（不一定是全部）临界点对 $\sigma, \sigma' \in \mathrm{crit}(F_\lambda)$，这些临界点对满足反斯托克斯曲线 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re F_\lambda(\sigma) = \Re F_\lambda(\sigma')\}$ 是一维实代数簇。

注释 4.2。注意， $F_\lambda = \log V$的临界点与将 $V$限制在 $\mathbb{S}$上所得函数的临界点一致。此外，我们有恒等式 $\Re F_\lambda = \log|V(\lambda)|$ 和 $\Im F_\lambda = \arg V(\lambda) = \mathrm{atan2}(b, a)$（双参数反正切函数）。由此可见，（反）斯托克斯曲线是 $\mathbb{R}^2_{ab}$ 中的代数曲线，其中 $\lambda = a + \mathrm{i}b$。因此，式 (22) 中零点的聚集集关于两个实变量 $a$和 $b$是半代数的。

在证明定理 4.1之前，我们用一个例子来说明该结果。

例 4.3. 考虑 $V(x_1, x_2, \lambda) = \frac{x_1^4}{4!} + \lambda \frac{x_1^2 x_2^2}{2!\,2!} + \lambda^2 \frac{x_2^4}{4!}$，如例 2.5所示。利用拉格朗日乘数，可以计算出 $V$ 受限于 $\mathbb{S}$时的临界点：

$$\sigma_{1,2} = (\pm 1, 0) \quad \sigma_{3,4} = (0, \pm 1) \quad \sigma_{5,\ldots,8} = \left( \pm\sqrt{\frac{\lambda^2 - 3\lambda}{\lambda^2 - 6\lambda + 1}}, \pm\sqrt{\frac{-3\lambda + 1}{\lambda^2 - 6\lambda + 1}} \right).$$

对于一般的 $\lambda$，这些是八个互不相同的临界点，这与 $|\chi(U_\lambda)|$一致，见例 3.2。若 $\lambda = 3 \pm \sqrt{8}$，$\sigma_{5,\ldots,8}$ 移至无穷远处，则情况如此。然而，在此情况下， $V$在 $\mathbb{S}$ 上只有四个根，因此仍满足假设 (A4)。若 $\lambda \in \{1/3, 3\}$、 $\sigma_5$ 和 $\sigma_5$分别$\sigma_7$ 和 $\sigma_8$相撞，则 (A4) 不成立。这两个点位于判别簇 $\{1/3, 3\} \subseteq \Sigma$ 上，见注 3.5。只要$\lambda \neq 0$，四个临界点 $\sigma_{1,\ldots,4}$ 就是非退化的。此外，只要 $\lambda \notin \{0, 1\}$，$\sigma_{5,\ldots,8}$ 就是非退化的。除非 $\lambda = 0$，否则没有临界点位于除子 $D_\lambda$ 上。因此，有限判别簇为 $\Sigma = \{0, 1/3, 1, 3\}$，在此处假设 (A1)–(A4) 不成立。

存在三条不同的反斯托克斯曲线：

$C_1 = \{\Re F_\lambda(\sigma_1) = \Re F_\lambda(\sigma_5)\}$，$C_2 = \{\Re F_\lambda(\sigma_3) = \Re F_\lambda(\sigma_5)\}$，$C_3 = \{\Re F_\lambda(\sigma_1) = \Re F_\lambda(\sigma_3)\}$。

曲线 $C_2$ 是图 2中描绘的紫色曲线。这是一条经典的代数曲线，称为 伯努利双纽线，其方程为（其中 $a = \Re\lambda$， $b = \Im\lambda$）

$$\ell(a,b) := ((a-3)^2 + b^2)^2 - 4^2((a-3)^2 - b^2) = 0.$$

这条曲线 $C_1$ 是图2中的绿色曲线。乍一看，它像一条帕斯卡蜗线（在 [Dol+01, §6] 中，帕斯卡蜗线被发现是随机图上 Potts 模型零点的聚点轨迹；在 [BR18] 中，它是吸附迪克路径生成函数零点的极限曲线）。然而，我们的曲线 $C_1$并非完全如此。相反，它满足稍作修改后的方程 $\ell(a,b) - 64((a^2+b^2)^2 - 1) = 0$。

第三条反斯托克斯曲线 $C_3$ 是一个单位圆。它不会出现在聚点轨迹集（22）中，另见图1。最后，需要确定斯托克斯曲线排列。

轨迹集$\{\Im F_\lambda(\sigma_1) = \Im F_\lambda(\sigma_5)\}$ 可识别为 $a$ 轴与由 $3(a^2+b^2) - a = 0$ 定义的椭圆的并集；改写为下式后，这一点便显而易见：

$$\arctan\left(\frac{2b(a-3a^2-3b^2)}{a^2(1+(a-6)a) + (2(a-3)a-1)b^2 + b^4}\right) = 0.$$

同理，可将斯托克斯曲线 $S_{\sigma_3,\sigma_5} = \{\Im F_\lambda(\sigma_3) = \Im F_\lambda(\sigma_5)\}$ 识别为以下三条直线的并集：$\{a=0\}, \{a=3\}, \{b=0\}$。图 2 中以灰线显示了斯托克斯排列。零点仅在该区域内聚集

$$\overline{D} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le 3 \text{ and } 3(a^2+b^2) - a \ge 0\right\}.$$

在该区域的补集（图2中的灰色阴影区域）内，相应的莱夫谢茨 thimble 对渐近行为没有贡献（21）。注意，两个点 $\lambda = 1/3$ 和$\lambda = 3$ 分别位于 $(C_1 \cap D)\setminus \Sigma$、$(C_2 \cap D) \setminus \Sigma$ 的（欧几里得）闭包中，因此属于聚点轨迹，因为该轨迹是闭集。我们的理论无法对两个孤立点 $\lambda \in \{0,1\}$ 作出判断；其中一部分构成了 $\mathscr{P}$。 $\diamond$

为了证明定理4.1，我们使用 Sokal 的结果 [Sok04，定理 1。5] 如下。

**定理 4.4** (广义 Beraha–Kahane–Weiss 定理)。 设 $D$ 是 $\mathbb{C}$中的一个定义域，且$\alpha_1$、…、$\alpha_m$ 以及 $\beta_1$、…、$\beta_m$ （其中 $m \ge 2$ ）是定义在 $D$ 上的解析函数，且均不恒等于零。对于每个整数 $n \ge 0$，令

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(z)\beta_k(z)^n.$$

假设*(B1)*成立。则 $\liminf \mathcal{V}(f_n) = \limsup \mathcal{V}(f_n)$，且点 $z$属于该集合，当且仅当满足以下任一条件：

*1.* 在 $z$ 处存在唯一的主导指标 $k$，且 $\alpha_k(z) = 0$；或

*2.* 在 $z$处存在两个或更多主导指标。

注意，满足 *1.* 的轨迹集由孤立点组成，而 *2.* 则在 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$中形成曲线。尝试将定理 4.4 应用于表达式（21）时，会遇到一个细微问题：系数 $c_\sigma$（$\lambda$）在斯托克斯曲线上可能并非解析函数，参见注 3.6。这是下面证明中需要处理的主要问题。

定理 4.1 的证明。由命题 2.6 可知，在 $n \to \infty$ 极限下，$A_n^V$（$\lambda$）的所有零点都来自积分 $I_n^V$（$\lambda$）$= \int_{S^{d-1}} V(\boldsymbol{x}, \lambda)^n \omega_{S^{d-1}}$。由推论 3.4可知，在大 $n$极限下，且满足假设 (A1)–(A4)时，该积分渐近地变为

$$I_n^V(\lambda) \sim \sum_{\sigma \in \mathrm{crit}(F_\lambda)} \tilde{c}_\sigma(\lambda) e^{nF_\lambda(\sigma)} =: \tilde{I}_n^V(\lambda), \tag{23}$$

其中我们将所有系数都吸收到 $\tilde{c}_\sigma(\lambda)$ 中。根据假设，该表达式对$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$有效。 $\Sigma$ 中的这些（孤立）点可能位于 P 中，因此我们现在假设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$。系数 $c_\sigma$ 在某些区域 $D \in S_{\sigma,\sigma'}^c$、$\sigma'$ 上不恒为零，见注 3.6。如果存在多个临界点 $\sigma$、$\sigma'$，其取值 $F_\lambda(\sigma) = F_\lambda(\sigma')$ 相同，我们便将这些系数合并为一个 $\alpha_k(\lambda)$ $k = 1, \ldots\ldots, m$。除去 $\alpha_k$ 沿斯托克斯曲线可能不解析这一点外，结论现在由定理 4.4 得出。

剩下唯一需要证明的是：如果 $\lambda_0 \in S_{\sigma,\sigma'} \setminus \bigcup\{\text{反斯托克斯曲线}\}$，那么 $\lambda_0 \notin \limsup \mathrm{V}(A_n^V)$ 或 $\lambda_0$ 是孤立的。由于 $\lambda_0$ 不在任何反斯托克斯曲线上，不妨令 $\sigma$ 为 $\lambda_0$ 处唯一的主导临界点。令 $\epsilon > 0$ 足够小，使得 $B_\epsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| \le \epsilon\}$ 包含于反 Stokes 曲线排列补集的单个连通分支中，且不与任何其他斯托克斯曲线相交。需要考虑几种情况。如果 $c_\sigma$ 和 $c_{\sigma'}$ 在 $B_\epsilon$ 上都恒等于零，我们可以从（23）中略去 $\sigma$ 和 $\sigma'$，并可假设其余所有系数在 $B_\epsilon$上解析，于是结论立即由定理 4.4 得出。如果 $\lambda_0$ 是 $c_\sigma$ 和 $c_{\sigma'}$ 的共同孤立零点，那么 $\lambda_0$ 可能位于 P 中，因此我们略去这种情况。

最后，假设 $c_\sigma$ 在 $B_\epsilon$ 与 $\lambda_0$的某个单侧邻域的交集中非零，即存在 $D \in S_{\sigma,\sigma'}^c$，使得 $c_\sigma$ 在 $B_\epsilon \cap D$上非零。注意，尽管 $c_\sigma$ 在 $\lambda_0$ 处可能不是解析的，但它有定义良好的单侧极限。现在我们调整 Sokal 在其定理 4.4 证明中的论证。存在常数 $\delta > 0$ 和 $M < \infty$，使得对所有 $\lambda \in \overline{B_\epsilon \cap D}$，我们有 $|\tilde{c}_\sigma(\lambda)| \ge \delta$, $|\tilde{c}_{\sigma'}(\lambda)/\tilde{c}_\sigma(\lambda)| \le M$对所有 $\sigma' \ne \sigma$, $|e^{F_\lambda(\sigma)}| \ge \delta$ 成立，并且 $|e^{F_\lambda(\sigma')}/e^{F_\lambda(\sigma)}| \le 1 - \delta$ 对所有 $\sigma' \ne \sigma$成立。于是我们有

$$|\tilde{I}_n^V(\lambda)| \ge \delta^{n+1}\left(1 - (m-1)M(1-\delta)^n\right)$$

对所有 $\lambda \in \overline{B_\epsilon \cap D}$成立。因此，当 $n$充分大时，$\tilde{I}_n^V(\lambda)$在 $\overline{B_\epsilon \cap D}$上处处非零，故 $I_n^V(\lambda)$也如此。因此，$\lambda \notin \limsup \mathrm{V}(A_n^V)$，证毕。 □

我们以一则关于定理 4.1 实用性的评注结束本节。评注 4.5。 尽管定理 4.1 并未明确指出哪些反斯托克斯曲线及其哪些部分会成为极限对象，但在实践中，至少可以通过两种不同的方法进行计算判定。

第一种方法是详细确定斯托克斯结构，即确定哪些陡降路径实际上对求和式（23）有贡献。积分 $I_n^V$ 是一个全纯函数。已知某一点处的莱夫谢茨 thimble 分解（例如，根据实数 $\lambda$ [BMW26]的渐近行为），就可以数值地（以高精度）将其解析延拓至复数 $\lambda$；例如，可以使用 Mezzarobba 开发的软件 [Mez16]。

第二种方法是针对某个较大的 $A_n^V$，明确计算 $n$ 的零点，并观察哪些反斯托克斯曲线靠近观测到的零点。若仔细分析定理 4.1的证明以及推论3.4 中出现的常数，并选择 $n$ 足够大，就可以将这一启发式方法转化为严格证明。

## 5 与伊辛模型的联络

在最后这一节中，我们将建立与伊辛模型的联系，并展示边着色图计数框架如何统一 Lee–Yang 零点与费舍尔零点的理论。

本节主要关注多项式

$$W(x_1, x_2, \mathcal{J}, \hbar) := \sum_{i=0}^{k} \mathcal{J}^i \hbar^{i \bmod 2} \frac{x_1^i x_2^{k-i}}{i! \cdot k!}. \tag{24}$$

该多项式可特化为两个重要的情形：

$$V_{\mathrm{Ising}}^{(1)}(x_1, x_2, \lambda) := W(x_1, x_2, \mathcal{J}, \hbar)\big|_{\mathcal{J}=\sqrt{\lambda}, \hbar=0}, \quad V_{\mathrm{Ising}}^{(2)}(x_1, x_2, \lambda) := W(x_1, x_2, \mathcal{J}, \hbar)\big|_{\mathcal{J}=1, \hbar=\lambda}.$$

对于 $k = 4$，$V^{(1)}$ 伊辛$(x_1, x_2, \lambda)$ 是例 2.5 中的多项式。我们认为，当 $V_{\mathrm{Ising}}$ 时，多项式 $A_n^{V_{\mathrm{Ising}}}(\lambda)$ 可解释为 $k$-正则图上的平均伊辛模型配分函数。参数 J 是一个类温度参数，而 h 对应于一个外部磁场参数。将主定理应用于 $V^{(2)}$ 伊辛，可得到原始李–杨定理的一个版本，我们将在下文回顾。将主要结果应用于 $V^{(1)}$ 伊辛，可解释为关于随机正则图的费舍尔零点聚集的结果。我们将在下文解释这些联络。

设 $G$ 是一个顶点为 $V_G = \{1, \ldots, |V_G|\}$ 的（单色）图。我们用多重集 $i$ 和 $j$ 来表示顶点之间的一条边 $i, j\} \in E_G$。伊辛模型 [Len20] 在 $G$ 上刻画磁体的性质，这些性质取决于温度、局部相互作用和外部磁场。对于每个顶点 $i$，都赋予一个磁自旋 $\sigma_i \in \{\pm 1\}$。模型的哈密顿量 $H$ 计入最近邻相互作用，以及每个顶点处的外部磁场参数，

$$H(\sigma) = -\sum_{\{i,j\} \in E_G} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in V_G} h_i \sigma_i.$$

这里，$J_{ij} \geq 0$ 是铁磁耦合参数，$h_i$ 是决定外部磁场的逸度。于是，伊辛模型的规范配分函数 为

$$Z_G(h_1, \ldots, h_{|V_G|}, \beta; J_{ij}) = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{|V_G|}} e^{-\beta H(\sigma)},$$

其中，$\beta = (k_B T)^{-1}$ 是热力学温度倒数（$k_B$ 是玻尔兹曼常数）。在探讨与 $A_n^{V_{\mathrm{Ising}}}$ 的联络之前，我们先回顾经典的 Lee–Yang 定理 [LY52]。我们采用 [BB09], 中给出的表述方式 $\beta = 1$。

**定理 5.1** (Lee–Yang)。设 $J_{ij} \geq 0$。配分函数 $Z_G(h_1, \ldots, h_{|V_G|}, 1; J_{ij})$ 在所有 $i = 1, \ldots, |V_G|$ 满足 $\Re(h_i) > 0$ 时均不为零。特别地，一元多项式 $Z_G(h, \ldots, h, 1; J_{ij})$ 的所有零点都位于虚轴上。

现在我们作一个常见的简化，假设所有逸度 $h_i$ 都等于 $h$。处理逸度的一种便捷方法是引入格里菲思幽灵顶点 $\mathfrak{g} \notin V_G$，其自旋固定为 $\sigma_{\mathfrak{g}} = +1$，并定义相互作用 $J_{i\mathfrak{g}} := h$ [Gri67]。这样，原始伊辛模型就可以解释为增广图 $G'$ 上的无外部磁场伊辛模型，该图的顶点为 $V_{G'} = V_G \cup \{\mathfrak{g}\}$，边为 $E_{G'} = E_G \cup \{\{i, \mathfrak{g}\} : \quad i \in V_G\}$。

与边着色图枚举的联系在范德瓦耳登高能展开中变得显而易见，参见例如 [Dum16, §2.2。1]。它将 $Z_G(\beta, J)$ 表示为

$$Z_G(h, \beta; J_{ij}) = 2^{|V_G|} \left( \prod_{\{i,j\} \in E'} \cosh(\beta J_{ij}) \right) \sum_{\substack{\gamma' \subseteq G' \\ \gamma' \setminus \mathfrak{g} \text{ Eulerian}}} \prod_{\{i,j\} \in E_{\gamma'}} \tanh(\beta J_{ij}). \tag{25}$$

右端关于（25）的求和遍历 $G'$的所有“近欧拉”子图，即除 $\mathfrak{g}$ 之外，其所有顶点的度均为偶数的图。设 $\gamma' \subseteq G'$ 为这样的一个子图，并令 $v \in V_{\gamma'} \setminus \{\mathfrak{g}\}$ 为一个顶点。那么， $v$ 在 $\gamma'$ 中要么与属于原图的偶数条半边关联 $G$，要么 $v$ 在 $\gamma'$ 中与 $G$ 的奇数条半边关联，并且与 $\mathfrak{g}$相联。因此， （25）中的求和可以遍历所有子图 $\gamma \subseteq G$，其中若一个顶点在中与$\beta h$)的奇数条半边关联，则额外贡献为 $\gamma$。

给定一个 $k$-正则图 $G$ 和其子图 $\gamma$ ，我们可以根据一条边是否属于 $\gamma$，在 $G$ 上定义一种采用两种颜色的边染色。此外，$\tanh(\beta J_{ij})$ 的贡献可以解释为顶点度数标记。假设所有相互作用参数 $J_{ij}$ 对所有 $i,j \in V_G$ 都等于同一个参数 $J$。令 $\mathrm{J} = \sqrt{\tanh(\beta J)}$，$\mathrm{h} = \tanh(\beta h)$，那么与 $i$ 条表示 $\gamma$ 的颜色的半边相接的顶点，对式 (25) 中的和贡献 $\mathrm{J}^i\mathrm{h}^i$（模 2）。因此， $Z_G$ 可简化为

$$Z_G(h,\beta;J) = (2h)^{|V_G|}\cosh(\beta J)^{|E_G|}\sum_{\gamma\subseteq G}\prod_{v\in V_G}\mathcal{J}^{\deg_\gamma(v)}\hbar^{\deg_\gamma(v) \bmod 2},$$

其中，$\deg\gamma(v)$ 表示 $\gamma$ 中与 $v$相接的半边数量。注意，前置因子 $(2h)^{|V_G|}\cosh(\beta J)^{|E_G|}$ 也可以并入顶点度数标记，但我们忽略这一点，因为它不会改变 $A_n^W$的零点。由此，我们得到以下将 $A_n^W$解释为伊辛模型配分函数平均值的方式。

**定理 5.2**。 令 $W = W(x_1, x_2, \mathcal{J}, \hbar)$ 如 (24)所示。那么， 多项式 $A_n^W$满足

$$A_n^W(\hbar,\mathcal{J}) = \sum_{\substack{G\ k\text{-regular}\\ \chi(G)=-n}}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(G)|}\sum_{\gamma\subseteq G}\prod_{v\in V_G}\mathcal{J}^{\deg_\gamma(v)}\hbar^{\deg_\gamma(v) \bmod 2}.$$

对于自同构群， $G$ 被视为单色的。

证明。 剩下唯一需要证明的是：如果恰有 $m$ 个子图 $\gamma_1$，……， $\gamma_m \subseteq G$导出相同的双色边图同构类 $[\Gamma_1] = \ldots\ldots = [\Gamma_m]$，那么$|\mathrm{Aut}(\Gamma_i)| = |\mathrm{Aut}(G)|/m$。设 $G$ 有 $2w$ 条半边，而 $\Gamma_i$ （对任意 $i$）有 $2w_j$条 $j^{\text{th}}$ 颜色的半边。注意， $w = w_1 + w_2$。群 $\mathfrak{S}_{2w}$ 自然作用于 $\Gamma$ 的半边标签，也作用于半边标签的不交并 $H_1 \sqcup H_2$ （其来自 $\Gamma_i$）。特别地，我们得到 $\mathrm{Aut}(G)$ 在边着色的半边标记图集合上的作用，而 $\Gamma_1$，……， $\Gamma_m$ 构成该作用的一个轨道。由于稳定子为 $\mathrm{Aut}(\Gamma_i)$，结论由轨道-稳定子定理得出。

□

为了应用我们的主要结果，我们需要将双参数多项式 $A_n^W(\mathrm{h},\mathrm{J})$ 特化为单参数。有两种自然的做法。第一种如下：令逸度 $\mathrm{h} = 0$ 为零，并考察参数 $\mathrm{J}$ 的零点。为方便起见，我们还作代换 $\mathrm{J}^2 = \lambda$ ，得到多项式

$$V_{\mathrm{Ising}}^{(1)}(x_1,x_2,\lambda) = W(x_1,x_2,\mathcal{J},\hbar)\big|_{\mathcal{J}=\sqrt{\lambda},\hbar=0}.$$

由此我们得到以下表达式

$$A_n^{V_{\mathrm{Ising}}^{(1)}}(\lambda) = \sum_{\substack{G\ k\text{-regular}\\ \chi(G)=-n}}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(G)|}\sum_{\substack{\gamma\subseteq G\\ \gamma\ \text{Eulerian}}}\lambda^{|E_\gamma|}.$$

……的零点 $A^{V^{(1)}}{}_{\text{伊辛}n}(\lambda)$ 可以解释为伊辛模型的费舍尔零点 [Fis65] 在 $k$随机正则图上的伊辛模型。这里，随机是指按照某一概率分布抽取的图，该概率分布

正比于 $|\mathrm{Aut}(G)|^{-1}$。对于 $k=4$，这一情形一直是本文贯穿全文的例子。另一种自然的特化方式是令 $W\mathsf{J}=1$，并考察逸度参数 $\lambda=\mathsf{h}$ 的零点，因此我们设定

$$V_{\mathrm{Ising}}^{(2)}(x_1,x_2,\lambda)=W(x_1,x_2,\mathcal{J},\hbar)\big|_{\mathcal{J}=1,\hbar=\lambda}.$$

这就引出了经典李–杨定理的设定，只不过现在我们讨论的是上述意义下随机正则图的伊辛模型配分函数。事实上，对于任意 $k\geq 3$，$V^{(2)}{}_{\mathrm{Ising}}$ on $\mathbb{S}$ 的临界点中都有两个点 $\sigma_1=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ $\sigma_2=(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$。经过直接计算可知，相应的反斯托克斯曲线就是虚轴，

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|V_{\mathrm{Ising}}^{(2)}(\sigma_1,\lambda)|=|V_{\mathrm{Ising}}^{(2)}(\sigma_2,\lambda)|\right\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\Re\lambda=0\},$$

这与经典李–杨定理一致。

## 参考文献


[Ago+24] Daniele Agostini、Claudia Fevola、Anna-Laura Sattelberger 和 Simon Telen。《广义欧拉积分的向量空间》。《数论与物理通讯》18.2（2024）。附录由 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo 撰写，第 327–370 页。[AK11] Kazuhiko Aomoto 和 Michitake Kita。《超几何函数理论》。附录由 Toshitake Kohno 撰写。Springer数学专著，2011。[BB09] Julius Borcea 和 Petter Brändén。《李–杨与波利亚–舒尔计划 II：稳定多项式理论及其应用》。《纯粹与应用数学通讯》62.12（2009），第 1595–1631 页。[Bis+04] Marek Biskup、Christian Borgs、Jennifer T Chayes、Logan J Kleinwaks 和 Roman Kotecký。《一阶相变处的配分函数零点：一般分析》。《数学物理通讯》251.1（2004），第 79–131 页。[BIZ80] Daniel Bessis、Claude Itzykson 和 Jean-Bernard Zuber。《图枚举中的量子场论技术》。《应用数学进展》1.2（1980），第 109–157 页。[BKW78] Sami Beraha、Joseph Kahane 和 Norman J Weiss。《递归定义的多项式族的零点极限》。Gian-Carlo Rota 编。第 1 卷。《数学进展补编研究》。学术出版社，纽约，1978，第 213–232 页。[BMW25] Michael Borinsky、Chiara Meroni 和 Maximilian Wiesmann。《双变量指数积分与边双色图》。《数学》（正几何特刊）80.1（2025），第 167–187 页。[BMW26] Michael Borinsky、Chiara Meroni 和 Maximilian Wiesmann。《边染色正则图的计数》。《准备中》（2026）。[BR18] Nicholas R Beaton 和 Esaias J Janse van Rensburg。《吸附迪克路径的配分函数零点》。《物理学杂志A：数学与理论》51.11（2018），第 114002 页。[DH02] Eric Delabaere 和 Christopher J Howls。《带边界多重积分的全局渐近》。《杜克数学杂志》112.2（2002）。[Dol+01] Brian P Dolan、Wolfhard Janke、Desmond A Johnston 和 Michael Stathakopoulos。《细费舍尔零点》。《物理学杂志A：数学与通论》34.32（2001），第 6211 页。[Dum16] Hugo Duminil-Copin。《伊辛模型的随机流展开》。《欧洲数学大会》，2016，第 869–889 页。

[Fis65] Michael E Fisher。《理论物理讲义》第 7 C 卷。科罗拉多大学出版社，1965。[Gri67] Robert B Griffiths。《伊辛铁磁体中的关联 II：外部磁场》。《数学物理学杂志》8.3（1967），第 484–489 页。[IPZ83] Claude Itzykson、Robert B Pearson 和 Jean B Zuber。《伊辛模型和规范模型中的零点分布》。《核物理 B》220.4（1983），第 415–433 页。[JJS01] Wolfhard Janke、Desmond A Johnston 和 Michael Stathakopoulos。《肥费舍尔零点》。《核物理 B》614.3（2001），第 494–512 页。[Jos17] Jürgen Jost。《黎曼几何与几何分析》。第 7 版。Universitext。施普林格，Cham，2017。[Joy09] Dominic Joyce。《关于带角流形》。arXiv:0910.3518（2009）。[KT15] Takuya Kanazawa 和 Yuya Tanizaki。《简单费米子系统中莱夫谢茨 thimble 的结构》。《高能物理学杂志》2015.3（2015），第 1–36 页。[Len20] Wilhelm Lenz。《对理解固体中的磁现象的贡献》。《物理学杂志》21（1920），第 613–615 页。[LS81] Elliott H Lieb 和 Alan D Sokal。《适用于单组分和多组分铁磁体的一般李–杨定理》。《数学物理通讯》80.2（1981），第 153–179 页。[LY52] 李政道和杨振宁。《状态方程和相变的统计理论 II：格气与伊辛模型》。《物理评论》87.3（1952），第 410 页。[Mat23] Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo。《上同调交数的局部化公式》。《日本数学会杂志》75.3（2023），第 909–940 页。[Mez16] Marc Mezzarobba。《在 SageMath 中对 D-有限函数进行严格的多精度求值》。arXiv:1607.01967（2016）。[MMT23] Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo、Sebastian Mizera 和 Simon Telen。《欧拉积分四讲》。《SciPost 物理讲义》（2023），第 075 页。[Nic11] Liviu Nicolaescu。《莫尔斯理论导论》。施普林格，纽约，2011。[Pha85] Frédéric Pham。《通过 Lefschetz 坦克下降鞍点，并展望高斯–马宁》。《Astérisque》130（1985），第 11–47 页。[Sab13] Claude Sabbah。《斯托克斯结构导论》。施普林格，柏林、海德堡，2013。[Sma61] Stephen Smale。《关于梯度动力系统》。《数学年刊》74.1（1961），第 199–206 页。[Sok04] Alan D Sokal。《色多项式根在整个复平面中稠密》。《组合学、概率与计算》13.2（2004），第 221–261 页。[TW24] Simon Telen 和 Maximilian Wiesmann。《超曲面族的欧拉分层》。arXiv:2407.18176（2024）。[Wit11] Edward Witten。《陈–西蒙斯理论的解析延拓》。《AMS/IP 高等数学研究》50（2011），第 347 页。

Maximilian Wiesmann 德累斯顿系统生物学中心 马克斯·普朗克分子细胞生物学与遗传学研究所 马克斯·普朗克复杂系统物理研究所
wiesmann@pks.mpg.de