arXiv:2601.02542v1 [math.NT] 5 Jan 2026

T兰金–塞尔伯格周期的精细谱展开

Paul Boisseau

2026年1月7日

摘要

我们陈述并证明了附属于兰金–塞尔伯格球面簇 $(\mathrm{GL}_{n+1}\times\mathrm{GL}_n)/\mathrm{GL}_n$ 的 theta 级数的谱展开。这是通向 Jacquet–Rallis 迹公式精细谱展开的一项关键结果。我们的展开以非温自守表示的正则化兰金–塞尔伯格周期来表示，并证明这些周期计算 L-函数的特殊值。证明依赖于 Langlands 式的积分路径平移。我们还在正 Weyl 室内确立了关于 GL_n 的离散艾森斯坦级数的界与奇点的两项技术性但至关重要的结果。

目录

1 引言 1 2 一般线性群$_1$ ×一般线性群$_2$-情形 10 3 自守形式预备知识 14 4 一般线性群$_n$ 25上的离散艾森斯坦级数 5 Ichino–Yamana–Zydor 正则化周期 44 6 兰金–塞尔伯格周期的延拓 55 7 兰金–塞尔伯格周期的展开 70

1 引言

1.1 研究动机

1.1.1 兰金–塞尔伯格球面簇的谱分解

设 $n\geq 1$ 是一个整数， F 是一个数域，其阿代尔环为 $\mathbb{A}$。对于定义在 F 上的任意代数群 $\mathbb{G}$，令 $[\mathbb{G}]:=\mathbb{G}(F)\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$。令 $G=\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_{n+1}$ 和 $H=\mathrm{GL}_n$，二者均视为定义在 F 上的代数群。利用映射 $h\mapsto\left(h,\begin{pmatrix}h&\\&1\end{pmatrix}\right)$ 将 H 嵌入为 G 的一个子群，并

考虑仿射 G-球面兰金–塞尔伯格簇 $X = G/H$。对于定义在 $X(\mathbb{A})$ 上的任意施瓦茨函数 Φ，我们可以构造 theta 级数

$$\Theta_\Phi^X(g) = \sum_{x \in X(F)} \Phi(g^{-1}.x), \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

Θ_Φ^X 构成了 $[G]$上光滑函数空间的一个 $G(\mathbb{A})$-不变子空间。我们的目标是用 G的自守谱来描述这个表示。

我们可以如下重新表述这个问题。由于 $X(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})$， $X(\mathbb{A})$上的任意施瓦茨函数都可以通过积分由 $G(\mathbb{A})$上的一个施瓦茨函数 f 得到

$$\Phi(x) = \int_{H(\mathbb{A})} f(gh)dh,$$

其中， dh 是 $H(\mathbb{A})$上的Haar 测度，而 g 是 $G(\mathbb{A})$中 x 的任意代表元。我们可以考虑自守核

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(x^{-1}\gamma y), \quad x, y \in G(\mathbb{A}), \tag{1.1}$$

并构造兰金–塞尔伯格自守核

$$J^H(g, f) = \int_{[H]} K_f(g, h)dh, \quad g \in G(\mathbb{A}),$$

其中， $[H]$ 赋予商测度。由于 $X(F) = G(F)\backslash H(F)$，我们有 $\Theta_\Phi^X(g) = J^H(g, f)$，现在需要写出分布 $f \mapsto J^H(g, f)$的谱分解。

1.1.2 Jacquet–Rallis 相对迹公式

研究分布 $J^H(g, f)$ 的动机源自 [JR11] 中提出的 Jacquet–Rallis 相对迹公式。更确切地说，设 E 是 F 的一个二次扩张，并分别用 G_E 和 H_E 表示限制标量 $\mathrm{Res}^{E/F}(\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n+1})$ 和 $\mathrm{Res}_{E/F}GL_n$。我们有分布 $J^{H_E}(g, f)$。 G_E 内含有子群 $G' = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n+1}$。沿 $[G']$ 的积分就是 *Flicker–Rallis* 在 [Fli88] 中研究的对象。任意一个 $g' \in G'(\mathbb{A})$ 都可以写成 $g' = (g'_n, g'_{n+1})$。令 η 为类域论中与 E/F 对应的二次特征。对于 f 上的一个施瓦茨函数 $G_E(\mathbb{A})$， [Zyd20] 中提出的一般线性群的 Jacquet–Rallis 相对迹公式，是该积分的正则化版本

$$\int_{[G']} J^{H_E}(g', f)\eta(\det(g'_n))^{n+1}\eta(\det(g'_{n+1}))^n dg'. \tag{1.2}$$

它在近期关于酉群的全局 Gan–Gross–Prasad 猜想和 Ichino–Ikeda 猜想的研究中发挥着重要作用，尤其是在 [Zha14], [BPLZZ21], [BPCZ22] 和 [BPC25]中。对于 G_E的任意尖点数据 χ，我们都可以构造一个分布 $J_\chi^{H_E}(g, f)$，它由对核的 K_χ部分积分得到。 [BPCZ22] 中的一项关键成果，是对某些正则 尖点数据 χ，给出了 $J_\chi^{H_E}(g, f)$ 的谱分解。结合 Flicker–Rallis 周期的一项类似结果， [BPCZ22] 的作者得以推导出 Jacquet–Rallis 迹公式谱展开的正则部分。事实证明，这足以证明 [GGP12] 关于

酉群尖点泛型表示的猜想。然而，要处理 [GGP20] 中提出的 Gan–Gross–Prasad 猜想的非 tempered 版本，就必须理解迹公式中所有剩余项和艾森斯坦贡献。

在这方面，本文给出了分布 $J_\chi^{H_E}(g,\ f)$ 的精细谱展开，且不对尖点数据施加任何限制。这是迈向迹公式本身的精细谱展开的重要一步。在 [Cha25], Chaudouard 证明了 Flicker–Rallis 分布 $J^{G'}(g,\ f)$ 的相应结果，该分布是通过考察对称空间 $G_E(\mathbb{A})/G'(\mathbb{A})$ 得到的。现在还需将这两个展开结合起来，以推导出 (1.2) 的展开；我们将在未来的工作中完成这一点。

1.2 兰金–塞尔伯格周期的精细谱展开

1.2.1 预备记号

在陈述本文的主要结果之前，我们先固定一些记号。对于 F 的每个赋值 v，F_v 是 F 在 v 处的局部化。若抛物子群 P 包含对角矩阵环面，则称其为半标准的；若它包含上三角矩阵的 Borel 子群，则称其为标准的。在后一种情况下，它具有标准 Levi 分解 $P = M_P N_P$，其中 N_P 是 P 的幺幂根基。令 $\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 表示 M_P 的离散不可约自守表示集合，这些表示在中心子群 A_P^∞ 上具有平凡中心特征（见 §3.2.1）。若 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，我们可以将其分解写成局部分量 $\pi = \otimes_v' \pi_v$。此外，我们还有空间 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$，它由 $A_P^\infty M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上从 π 诱导而来的自守形式构成（见 §3.4.2）。令 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 表示 $M_P(\mathbb{A})$ 的非分歧特征所成的复向量空间，并令 $i\mathfrak{a}_P^*$ 表示其酉特征所成的实子空间。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，我们有映射 $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$，它将 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$ 与 $\pi \otimes \lambda$ 的诱导表示 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 识别起来。施瓦茨函数 $f \in \mathrm{S}(G(\mathbb{A}))$ 作用于 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$，并由此通过传递结构作用于 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$；我们将此作用记为 $I_P(f,\lambda)$。最后，我们用 $E(\varphi,\lambda)$ 表示由 φ_λ 诱导的艾森斯坦级数（见 §3.4.6）。

1.2.2 相关诱导数据

设 $k \geq 1$。根据 [MW89], ，任意离散自守表示 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}$(一般线性群$_k$) 都可以通过对诱导$\mathcal{A}_{P,\sigma^{\boxtimes d}}$(一般线性群$_k$)中的自守形式所对应的艾森斯坦级数取留数得到，其中 P 是一个标准抛物子群，其含有 $M_P =$ 一般线性群$_r^d$，σ 是一般线性群$_r$ 的尖点自守表示，而 r 和 d 是满足 $rd = k$ 的整数。于是我们记 $\pi = \mathrm{Speh}(\sigma,\ d)$。根据 [Lan76], ，离散自守表示的诱导表示穷尽了 L^2([一般线性群$_k$]) 的谱分解。我们将这些表示称为***Arthur* 型表示**。

类比于 [BZ76], 中引入的局部导数概念，我们将 $\pi = \mathrm{Speh}(\sigma,\ d)$ 的自守导数定义为

$$\pi^- = \mathrm{Speh}(\sigma, d-1) \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{r(d-1)}).$$

注意，如果 π 是尖点的，即如果 $d = 1$，那么 π^- 是平凡群的平凡表示。我们还将 $\pi^\vee$ 记作 π 的对偶，并且容易验证 $\pi^{-,\ \vee} = \pi^{\vee,\ -}$。

我们的 J^H 谱展开将由一组 Π_H **相关诱导数据**作为索引。这是满足以下要求的三元组集合（$I,\ P,\ \pi$）。

- I 是一个由非负整数构成的元组（$n_+,\ n_1,\ n_2,\ n_-$），满足 $n_2^-:= n - n_+ - n_1 - n_-$ 和 $n_1^-:= n + 1 - n_+ - n_2 - n_-$ 均为非负数。接着令 P_I 为标准抛物子群

G 的标准抛物子群，其标准 Levi 子群为

$$M_I := \left(\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_1} \times \mathrm{GL}_{n_2^-} \times \mathrm{GL}_{n_-}\right) \times \left(\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_1^-} \times \mathrm{GL}_{n_2} \times \mathrm{GL}_{n_-}\right). \tag{1.3}$$

- P 是包含于 P_I 中的 G 的标准抛物子群。
- π 是 M_P 的一个离散自守表示，它相对于 (1.3) 分解为

$$\left(\boxtimes_{i=1}^{m_+}\pi_{+,i} \boxtimes_{i=1}^{m_1} \pi_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}\right) \boxtimes \left(\boxtimes_{i=1}^{m_+}\pi_{+,i}^{\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_1} \pi_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}^{\vee}\right), \tag{1.4}$$

其中 m_+，m_1，m_2 和 m_- 是非负整数，且所有 $\pi_{...}$ 都是某些一般线性群的离散自守表示。

令 $(I,\ P,\ \pi) \in \Pi_H$。我们将三个额外的数据与这个三元组关联起来。

- 令 $\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 为 $M_P(\mathbb{A})$ 的非分歧特征 λ 所成的子空间，其中 $(I,\ P,\ \pi\otimes\lambda)$ 属于 Π_H；这里我们放宽了要求，即 $\pi\otimes\lambda$ 的中心特征在 A_P^∞ 上的限制为平凡特征。坐标中的显式描述见 (6.7) 对 $\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*$ 的说明。我们将其酉特征子集记为 $i\mathfrak{a}_\pi^*$。
- 相对于来自 $\mathfrak{a}_{P_I,\mathbb{C}}^*$ 中代数特征格的基（见 §3.1.1），令 ρ_π 为 $\mathfrak{a}_{P_I,\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 中坐标为

$$\underline{\rho}_\pi = ((1/4,0,0,-1/4),(1/4,0,0,-1/4)).$$

  注意，$\underline{\rho}_\pi$ 不属于 $\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*$ 除非 $n_+ = n_- = 0$，在这种情况下它为零点。
- 令 $W(\pi)$ 为 G 在第 6.1.4 节中定义的魏尔群的子集。它具有如下性质：对于任意 $w \in W(\pi)$，若记 $w.P$ 为 G 中具有标准 Levi 子群 wM_Pw^{-1} 的唯一标准抛物子群，并记 $w.\pi$ 为通过共轭得到的 wM_Pw^{-1} 的离散自守表示，则有 $(I,\ w.P,\ w.\pi) \in \Pi_H$。

注意，$i\mathfrak{a}_\pi^*$、$\underline{\rho}_\pi$ 和 $W(\pi)$ 实际上取决于 $(I,\ P,\ \pi)$，但为简化记号，我们只强调其与 π 的关系。

例 1.1。取 $I = (0, n, n+1, 0)$。则 P_I 为 G。由此可知，三元组 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$ 与有序对 (P, π) 构成双射，其中 P 为 G 的标准抛物子群，而 π 为 M_P 的尖点自守表示。事实上，使用 (1.4) 的记号，π^-、$_{2\,i}^{\vee}$ 以及 π^-、$_{1}^{\vee}$、$_j$ 分别为 $1 \le i \le m_2$ 和 $1 \le j \le m_1$ 的平凡群表示。此外，$\mathfrak{a}_\pi^*$、$\mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{a}_P^*$、$\mathbb{C}$、$\underline{\rho}_\pi = 0$，而 $W(\pi)$ 为 $W(P)$，即置换 M_P 的各块的魏尔元集合。

例 1.2。取 $I = (0, 0, n+1, 0)$。那么 P_I 仍然是 G。然而，若 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$，则 π 具有 $\left(\boxtimes_{i=1}^{m_2}\pi_{2,i}^{-,\vee}\right) \boxtimes (\boxtimes_{i=1}^{m_2}\pi_{2,i})$ 的形式。这只有在 $m_2 = 1$ 且 $\pi_{2,1} = \mathrm{Speh}(\chi, n+1)$ 时才可能，其中 χ 是一般线性群 $_1$ 上的一个自守特征，使得 π 是 $\chi^\vee \circ \det \boxtimes \chi \circ \det$ 的特征。根据 [GGP20 第 9] 节中的一条注记，G 的所有允许 $H(\mathbb{A})$-不变线性形式的残余表示都具有这种形式。在这种情况下，$P = G$，$\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*$ 是 $\mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$，$\underline{\rho}_\pi = 0$ 中的对角子空间 $(\lambda, -\lambda)$，并且 $W(\pi)$ 是平凡的。

例 1.3。现在我们给出一个来自 Π_H 的非 Arthur 例子。取 $I=(n,0,1,0)$，使得P_I具有标准 Levi 子群 $M_I=$一般线性群$_n\times$(一般线性群$_n\times$一般线性群$_1$)。那么，要使 (I,P,π) 属于 Π_H，P必须是 G 的标准抛物子群，且 M_P 具有 $M_+\times(M_+\times$一般线性群$_1)$ 的形式，而 π 必须是 M_P 的离散自守表示，并相应地分解为 $\pi_+\boxtimes(\pi_+^\vee\boxtimes\chi)$，其中$\pi_+\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_+)$，且 χ 是一般线性群$_1$上的一个自守特征。相对于 $P\subset P_I$，$\mathfrak{a}_\pi^*$是子空间 $(\lambda,(-\lambda,\mu))$，其中$\lambda\in\mathfrak{a}_{M_+,\mathbb{C}}^*$且$\mu\in\mathfrak{a}_{\mathrm{GL}_1,\mathbb{C}}^*$，$\rho_\pi=(1/4,(1/4,0))$。最后，若我们令$P_+=P\cap H$，则 $\bar{W}(\pi)=W(P_+)\subset H\subset G$。

1.2.3 正则化周期

现在我们来说明 Π_H 的定义动机。对于 G 上的自守形式 φ，考虑以下（先验上不收敛的）兰金–塞尔伯格 周期

$$\mathcal{P}_H(\varphi)=\int_{[H]}\varphi(h)dh.$$

若 φ 属于 G 上的尖点自守表示 π（因此积分收敛），[JPS83] 的著名定理指出，当且仅当兰金–塞尔伯格 L-函数 $L(1/2,\pi)$ 的中心值为零时，P_H 才为零。在 [GGP20], 中，Gan、Gross 和 Prasad 猜想，将 P_H （经过适当正则化后）限制到 G 上任意一个 π 的自守表示时，除非 π 的 Arthur 参数是相关的，且某个特定商的 L-函数在某个特殊值处非零，否则结果应为零。若将 Π_H 的定义限定在 $n_+=n_-=0$ 的情形，那么 [GGP20] 所指出的这些相关表示恰好是满足 $\lambda\in i\mathfrak{a}_\pi^*$ 的诱导表示 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$。它们正是预期会出现在 J^H 的谱展开中的表示。然而，事实证明，仅凭这些表示不足以完整描述该谱展开，还需要额外表示。它们具有如下形式：当 $(I,P,\pi)\in\Pi_H$ 且 $\lambda\in i\mathfrak{a}_\pi^*-\rho_\pi$ 时，表示为 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$。只要 $\rho_\pi\neq 0$，这些表示就不是 Arthur 型。

我们的第一个结果是定义在这些诱导表示 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 上的 P_H 的正则化。根据[MW89], , 存在 P_π 的标准抛物子群、G的尖点自守表示 σ_π 以及 M_{P_π}和$\nu_\pi\in\mathfrak{a}_{P_\pi}^*$，使得 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$ 由在 $-\nu_\pi$处从 $\mathrm{A}_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$ 诱导的艾森斯坦级数的留数张成。我们将此映射记为 $E^{P,*}(\cdot,0)$。对于 $\phi\in\mathrm{A}_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$，我们可以构造艾森斯坦级数 $E(\phi,\lambda)$，并进一步取其兰金–塞尔伯格 ζ 积分 $Z(E(\phi,\lambda))$。根据 [IY15], 它是$\lambda\in\mathfrak{a}_{P_\pi,\mathbb{C}}^*$ 中的亚纯函数。若将$\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*-\rho_\pi-\nu_\pi$ 识别为$\mathfrak{a}_{P_\pi,\mathbb{C}}^*$的一个仿射子空间，我们看到它包含于 $Z(E(\phi,\lambda))$ 的奇点的有限并中，而这些奇点全都是仿射超平面。通过取迭代留数，我们在$\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*-\rho_\pi-\nu_\pi$上得到一个亚纯函数 Res $Z(E(\phi,\lambda))$。起初，这一构造取决于留数的取值顺序。在下面的定理中,–我们所说的“对于$\lambda\in\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*-\rho_\pi$处于一般位置”，是指它位于一个可数个仿射超平面的并集之外。

定理 1.4。设 $(I,P,\pi)\in\Pi_H$。以下断言成立。

- 对于处于一般位置的$\lambda\in\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*-\rho_\pi$，留数 $\mathrm{Res}\ Z(E(\phi,\lambda-\nu_\pi))$ 与顺序无关，并可通过 $E^{P,*}(\cdot\ \lambda-\nu_\pi):\mathrm{A}_{P_\pi,\sigma_\pi,\lambda-\nu_\pi}(G)\twoheadrightarrow\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 分解。我们将由此得到的 $\mathrm{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 上的 $H(\mathbb{A})$-不变线性形式记为 $P_\pi(\cdot\ \lambda)$。
- 对于 $\varphi\in\mathrm{A}_{P,\ \pi}(G)$，映射$\lambda\in\mathfrak{a}_{\pi,\ \mathbb{C}}^*-\rho_\pi\mapsto P_\pi(\varphi,\lambda)$ 是亚纯的；而对于处于一般位置的 λ，映射 $\varphi\in\mathrm{A}_{P,\ \pi,\ \lambda}(G)\mapsto P_\pi(\varphi,\lambda)$ 是连续的。

- 对于 $\varphi = E^{P,*}(\phi, \lambda - \nu_\pi) \in A_{P,\pi,\lambda}(G)$，当 $\phi = \otimes \phi_v$ 和 λ 处于一般位置时，存在一个有限赋值集 S，使得

$$\mathcal{P}_\pi(\varphi, \lambda) = \mathcal{L}(\pi, \lambda) \prod_{v \in S} Z^\natural_{\sigma_\pi, v}(\phi_v, \lambda - \nu_\pi),$$

其中 $L(\pi, \lambda)$ 是 *§6.1.6* 中描述的兰金–塞尔伯格 L函数的商，而线性形式 $Z^\natural_{\sigma_\pi, v}(\phi_v, \lambda - \nu_\pi)$ 是由诱导表示 $I_{P_\pi}^G(\sigma_{\pi,v} \otimes (\lambda - \nu_\pi))$ 构造的局部泽塔积分的留数（见 *§5.3.1*）。

例 1.5. 若 $I = (0, n, n+1, 0)$ 且 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$ 如例 1.1 中所述（因此 π 是尖点的），则 $P_\pi(\varphi, \lambda) = Z(E(\varphi, \lambda))$. 若现在 $I = (0, 0, n+1, 0)$ 如例 1.2 中所述，使得 $P = G$ 且 π 是 G的一个特征，则 $P_\pi(\varphi, \lambda)$ 就是取值于 1 处（相差一个常数）。注意，对于任意 $(\lambda, -\lambda) \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}$，特征 $\pi_{(\lambda,-\lambda)}$ 仍保持 $H(\mathbb{A})$-不变。最后，取 $I = (n, 0, 1, 0)$，如例 1.3 中所述。我们沿用其中的记号。表示 $A_{P_+,\pi_+}(\mathrm{GL}_n)$ 配备了 Petersson 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$。若 $\varphi = \varphi_n \otimes \varphi_{n+1} \in A_{P,\pi}(G)$，则 $\varphi_n \in A_{P_+,\pi_+}(\mathrm{GL}_n)$ 且 $g_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \mapsto \varphi_{n+1}(g_n)$ 属于 $A_{P_+,\pi_+^\vee}(\mathrm{GL}_n) \otimes |\det|^{1/2}$。因此，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}$，线性形式

$$\varphi = \varphi_n \otimes \varphi_{n+1} \in \mathcal{A}_{P,\pi,\lambda - \underline{\rho}_\pi}(G) \mapsto \langle \varphi_n \otimes \overline{\varphi}_{n+1} \rangle_n$$

非零且 $H(\mathbb{A})$-不变。这就是我们的映射 $\mathcal{P}_{\pi,\lambda}$（相差一个常数）。

在 [Boi25b]，中，我们在 Arthur 情形下构造了这些周期，即当 $n_+ = n_- = 0$ 时，并证明了定理 1.4 的相应版本。本文中处理一般 (I, P, π) 情形的方法相同，核心思路是利用 [IY15] 和 [Zyd22]，将 $Z(E(\phi, \lambda))$ 实现为截断周期的正则化。[Boi25b] 的方法很容易推广，从而证明定理 1.4 的第一点和第三点。在 [Boi25b 中，定理 1.2]，还研究了周期 $\mathcal{P}_\pi$ 的消失问题。我们证明，局部线性形式 $Z^\natural_{\sigma_\pi, v}$ 对于 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_\pi$ 总是非零的，因此 $\mathcal{P}_\pi$ 消失当且仅当 $\mathcal{L}(\pi, \lambda)$ 消失。这证明了 [GGP20] 中的非温和 Gan–Gross–Prasad 猜想。本文不会直接处理局部因子 $Z^\natural_{\sigma_\pi, v}$，尤其不会解决它们是否非零的问题。我们将这一问题留待今后研究。最后强调，命题 5.10 给出了利用抛物下降对 $\mathcal{P}_\pi$ 的另一种描述。

我们给出两个概念性的解释，说明为何 Π_H 会出现在J^H的谱分解中。首先，在 [BZSV24] 中，Ben-Zvi、Sakellaridis 和 Venkatesh 为球面簇$X = G/H$ 关联了一个超球面哈密顿簇 M（本例中为余切丛 T^*X），以及一个$\hat{G}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C})$-对偶簇 $M^\vee$；这里它是 $T^*\mathrm{St}_n \otimes \mathrm{St}_{n+1}$ 标准表示张量积的余切丛。根据 [BZSV24，猜想 14.3，5]，若 Π 是 G的自守表示，且其 Arthur 参数为 Ψ，则只要假设的 Langlands 对偶群通过 Ψ 在 $M^\vee$的 Slodowy 切片 $M^\vee_{\mathrm{slice}}$上作用（该切片取决于 Ψ）所得的不动点集为空，（正则化）周期 P_H 在 Π上就应为零。利用 [GGP20 第 4]，节中的重新表述可以验证，若 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$ 且 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$，那么诱导表示 $A_{P,\pi,\lambda}(G)$ 的 Arthur 参数在 $M^\vee_{\mathrm{slice}}$ 上的作用确实存在不动点。第二个理由来自局部理论。最近，[Pat25] 已验证，在 p进域上，G 的酉 H-区分表示恰好是 $A_{P,\pi,\lambda}(G)$ 的局部对应表示，也就是说，它们是满足与 §1.2.2 相同组合条件的 Speh 表示的诱导。这与 [BZSV24]，相一致，也进一步表明线性形式$Z^\natural_{\sigma_\pi, v}$ 应当非零。

1.2.4 精细谱展开

最后，我们可以描述 J^H的谱展开。令 $(I,\ P,\ \pi) \in \Pi_H$。我们用 $\mathcal{B}_{P,\ \pi}$表示$\mathcal{A}_{P,\ \pi}$的希尔伯特基；(G) 表示 §3.4.8 中定义的彼得森内积。对于施瓦茨函数$f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$、 $g \in G(\mathbb{A})$ 和一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}}$，我们可以考虑相对特征

$$J^H_{(I,P,\pi)}(g,f,\lambda) = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}} E(g, I_P(f,\lambda+\underline{\rho}_\pi)\varphi, \lambda+\underline{\rho}_\pi)\overline{\mathcal{P}_\pi(\varphi, -\overline{\lambda}-\underline{\rho}_\pi)}. \tag{1.5}$$

正则化周期 $\mathcal{P}_\pi(\varphi,\ -\lambda-\rho_\pi)$ 在区域 $i\mathfrak{a}^*_\pi$ 中可能有极点，但这些极点被艾森斯坦级数的零点所抵消（艾森斯坦级数在该区域内是正则的）。因此，它们的乘积在 $i\mathfrak{a}^*_\pi$ 上定义了一个全纯函数，并且具有快速衰减性质。(1.5) 中的和绝对收敛，且映射 $f \mapsto J^H_{(I,P,\pi)}(g,\ f,\ \lambda)$ 是连续的。引理 7.2 证明了所有这些性质。最后，我们有函数方程（推论 6.5）

$$J^H_{(I,w.P,w.\pi)}(g,f,w\lambda) = J^H_{(I,P,\pi)}(g,f,\lambda), \quad w \in W(\pi).$$

现在，我们给 $i\mathfrak{a}^*_\pi$ 配备 §7.1.1 中所描述的哈尔测度，该测度取决于 $H(\mathbb{A})$ 上的哈尔测度。我们陈述本文的主要结果。

Theo注 1.6。 设 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 为一个施瓦茨函数，设 $g \in G(\mathbb{A})$。则我们有 e

$$J^H(g,f) = \sum_{(I,P,\pi)\in\Pi_H} \frac{1}{|W(\pi)|}\int_{i\mathfrak{a}^*_\pi} J^H_{(I,P,\pi)}(g,f,\lambda)d\lambda, \tag{1.6}$$

其中这个二重积分绝对收敛。

映射 $\lambda \mapsto J^H_{(I,P,\pi)}(g,\ f,\ \lambda)$ 是亚纯的，因此可以移动积分 (1.6) 中的积分路径。特别地，可以用 $\mathfrak{a}^*_{P_I}$ 中任意一个形如 $((t,\ 0,\ 0,\ -s),\ (1/2-t,\ _0,\ 0,\ -1/2+s))$、 $0 < t,\ s < 1/2$ 的元素替换 ρ_π 。将积分路径进一步移远可能会遇到艾森斯坦级数的极点。

1.3 关于定理 1.6

乍看之下，定理 1.6 的陈述似乎与其他相对迹公式的精细谱展开类似，尤其是 [Lap06] 和 [Cha25]，中的展开；但我们强调，我们的情形存在额外的困难。具体而言， [Lap06] 和 [Cha25] 中的策略是从核函数 K_f（来自 [Art78], ）的谱展开出发，该展开由 [Lan76]，的 $L^2([G])$ 的谱展开推得，然后使其与所考虑的自守周期可交换。这涉及严重的解析障碍，而依照 [JLR99] 的思路使用截断可以克服这些障碍。这些证明的一个关键特点是，积分路径始终不会离开酉轴 $i\mathfrak{a}^*_P$ 的某个邻域。在我们的情形中，这种方法并不可行：为了使不同的截断积分收敛，必须将 K_f 谱展开的部分移出酉轴。这基本上相当于反转 [Lan76] 的证明，并且正如预期的那样，会产生极其复杂的残余贡献。兰金–塞尔伯格周期的这一特殊性体现在定理 1.6 的展开式 (1.6) 中，即出现了 ρ_π 位移。相比之下， [Lap06] 和 [Cha25] 中的公式只涉及酉项。

我们证明定理 1.6 的策略并非从 $L^2([G])$ 的分解入手。相反，我们针对自己的兰金–塞尔伯格周期，重现了 [Lan76] 的论证，也就是说，

我们通过将沿实部非常大的非分歧特征积分的积分路径移回酉轴来进行。不过，我们强调，在证明后续部分，我们确实将 [Lan76] 当作黑箱使用，以简化残余贡献的一些计算。我们证明中的奇妙之处在于，运用这一技巧并仔细选择积分路径后，沿途得到的所有留数实际上都对定理 1.6 的展开有所贡献。这与 [Lan76] 形成鲜明对比，在那里会出现复杂的抵消（例如参见 [Lab21，第 4] 节）。

现在我们介绍定理 1.6 的证明的主要步骤以及所需的技术准备。我们还将在第 2 节明确写出针对简单的 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ 例子的论证。

1.3.1 步骤 1：Rankin–Selberg 积分的粗展开

第一步不涉及积分路径平移，相关内容见 §7.2。固定 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $g \in G(\mathbb{A})$，对 $g' \in [G]$，令 $F(g') = K_f(g, g')$。那么 F 是 $[G]$ 上的施瓦茨函数（见 §3.3.5）。对每个整数 $0 \le r \le n$，令 P_r 为 G 的标准抛物子群，其标准 Levi 因子为 $M_r := (\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_{n-r}) \times (\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_{n+1-r})$。令 F_{P_r} 为 F 沿 P_r 的常数项。令 K_H 为 $H(\mathbb{A})$ 的标准极大紧子群，并用 R 表示它通过右平移在 F 上的作用。通过应用经典的 Rankin–Selberg 展开论证，我们得到如下形式的表达式

$$\int_{[H]} F(h)\,dh = \sum_{r=0}^{n} \int_{K_H} \left(\langle \cdot,\cdot \rangle_r \otimes Z_{n-r}(\cdot, 0)\right)\left(R(k) F_{P_r}\right) dk. \tag{1.7}$$

这里的意思是，我们将 F_{P_r} 视为定义在 $[M_r]$上的函数，并对其应用如下内积：在对角线 $[\mathrm{GL}_r]$ 上积分所得的内积，以及相对于 $\mathrm{GL}_{n-r} \subset \mathrm{GL}_{n-r} \times \mathrm{GL}_{n-r+1}$的兰金–塞尔伯格 ζ 积分，并在零点处取值。精确表述请参见命题 7.8。

设 $0 \le r \le n$。现在我们计算线性形式 $\langle \cdot,\cdot \rangle_r \otimes Z_{n-r}(\cdot,0)$ 的谱展开，并将其视为定义在 Levi $[M_r]$ 上某个函数空间中的线性形式。对于 $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$，我们可以直接使用 [Lan76]的谱展开。对于 ζ 积分，当 $R(s)$ 足够大时，写出 $Z_{n-r}(\cdot\ s)$ 的谱展开并不困难。这归结于该映射对于固定中等增长的函数是连续的这一事实（见引理 7.7）。此外， Z_{n-r} 将消去所有非泛型（因而在此处即非尖点）贡献。借助常数项与艾森斯坦级数之间的伴随性，以及通过抛物下降得到的周期 $\mathcal{P}_\pi$ 的描述（命题 5.10 ），我们可以将展开诱导回 G。用定理 1.6 的语言表述，最终结果是：对于任意足够大的 $R(s)$

$$\int_{[H]} F(h)\,dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(I_r,P,\pi)\in\Pi_H} \frac{1}{|W(\pi)|} \int_{i\mathfrak{a}_\pi^* + \underline{\rho}_\pi - s\underline{z}_r} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}} E(g, I_P(f,\lambda)\varphi, \lambda)\overline{\mathcal{P}_\pi(\varphi, -\overline{\lambda})}\,d\lambda, \tag{1.8}$$

其中 $I_r = (r,\ n-r,\ n+1-r,\ 0)$，且 $z_r \in \mathfrak{a}_{P_r}^*$ 是坐标为 $((0,\ 1),\ (0,\ 1))$ 的元素。请注意，这要求 (1.4) 中的表示 $\pi_{1,\ i}$ 和 $\pi_{2,\ j}$ 是尖点表示。ρ_π 的出现归结为对模特征的计算。

1.3.2 步骤 2：艾森斯坦级数的留数

为结束定理 1.6 的证明，我们希望将 (1.8) 中的积分路径移至区域$i\mathfrak{a}_\pi^* + \rho_\pi$。这需要分两个主要步骤完成，第一步是移至 $i\mathfrak{a}_\pi^* + \rho_\pi - 1/2 z_r$。这将在第 7.3 节中完成。

首先，我们需要确保被积函数在积分区域内是亚纯的，并且在垂直条带中快速衰减。这需要在正 Weyl 室的一个邻域内，对 $R(\lambda)$ 的艾森斯坦级数$E(g, I_P(f, \lambda)\varphi, \lambda)$ 给出一个上界。这个中间结果即定理 4.25 的内容。它扩展了 [Cha25, 定理 3.9.2.1] ，后者沿用 [Lap13] 的策略，在虚轴 $i\mathfrak{a}_P^*$ 的一个邻域内为 λ 推导出了这样的界。证明依赖于若干深刻结果，包括 [LRS99] 关于 Ramanujan 猜想的界，以及 [Bru06] 和 [Lap13] 关于自守 L函数的无零区域；这些结果使我们能够控制虚轴稍左侧的艾森斯坦级数。

现在我们需要理解亚纯函数的奇点

$$\lambda \mapsto E(g, I_P(f, \lambda)\varphi, \lambda)\overline{\mathcal{P}_\pi(\varphi, -\overline{\lambda})},$$

将积分路径移至 $i\mathfrak{a}_\pi^* + \rho_\pi - 1/2z_r$ 时，我们可以证明，遇到的所有极点都来自艾森斯坦级数 $E(g, I_P(f, \lambda)\varphi, \lambda)$。定理 4.17 给出了 $R(\lambda)$ 在正 Weyl 室邻域内可能出现的奇点。我们强调，离散艾森斯坦级数的情况远比由尖点自守形式诱导的情形复杂得多，因为其常数项中可能出现极其复杂的极点抵消。关于分裂约化群上非分歧形式的这一现象的详细研究，参见 [Heg24]。对于一般线性群 $_n$，定理 4.17 的内容实际上已包含在 [MW89] 中（只需稍作改述）。用 [BZ76], 的语言来说，答案是：当 $\mathrm{Speh}(\sigma, d)$ 和 $\mathrm{Speh}(\sigma', d')$ 的线段相连时，就会出现奇点（见 §4.4.1）。后来的相关文献似乎忽略了这一有用事实（例如 [HM15] 或 [GS24]）。

无论如何，我们现在已经知道在平移积分路径时会穿过哪些奇点。下一步是描述由 $E(g, I_P(f, \lambda)\varphi, \lambda)$ 的相应留数所张成的表示。一般而言，这是一个困难的问题（例如参见 [HM15] 和 [GS24]），但对于我们所考虑的奇点而言，问题很直接。更准确地说，这些奇点源于与某个尖点表示 σ 相关的 $\mathrm{Speh}(\sigma, d-1)$ 和 σ 之间的线段连接。所得留数是由 [MW89] 扭曲的 $\mathrm{Speh}(\sigma, d)$（见引理 7.16）。

第二步的结果是如下形式的展开

$$\int_{[H]} F(h)dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(I,P,\pi)\in\Pi_{H,r}} \frac{1}{|W(\pi)|} \int_{i\mathfrak{a}_\pi^* + \underline{\rho}_\pi - 1/2\underline{z}_r} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}} E(g, I_P(f, \lambda)\varphi, \lambda)\overline{\mathcal{P}_\pi(\varphi, -\overline{\lambda})}d\lambda, \quad (1.9)$$

其中 $\Pi_{H,r}$ 是 Π_H 的某个子集。关于精确表述，请参见命题 7.11 t.

1.3.3 第三步：正则化周期的留数

最后，我们将 (1.9) 中的积分路径移动到 $i\mathfrak{a}_\pi^* + \rho_\pi$。这就是 §7.4 的内容。现在穿过的奇点是 $\mathcal{P}_\pi(\varphi, -\lambda)$ 的奇点。根据定理 1.4，这些正则化周期是通过对由尖点自守表示诱导的艾森斯坦级数的 Rankin–Selberg ζ 积分 $Z(E(\phi, \lambda))$ 取留数构造而成的。利用这一描述，我们看到 $\mathcal{P}_\pi(\varphi, \lambda)$ 的留数也是 $Z(E(\phi, \lambda))$ 的迭代留数，因此可以写成另一个三元组 (I', P', π') 对应的某个 $\mathcal{P}_{\pi'}$。因此，与第二步相比，第三步中追踪残余贡献所需的记录工作较为简单。这些额外项总是被一个非零的 ρ_π 扭曲。完成最后一轮积分路径移动后，定理 1.6 得证。

1.4 论文概要

本文结构如下。第 2 节通过简单例子 $G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ 展示我们的论证。第 3 节中，我们固定一些记号，并证明若干关于自守商上的自守形式和函数空间的预备结果。第 4 节中，我们回顾来自 [MW89]、关于一般线性群 GL_n 上离散自守形式分类的主要结果。特别地，我们研究正魏尔室邻域内全局交织算子 $M(w, \lambda)$ 和离散艾森斯坦级数 $E(\varphi, \lambda)$ 的极点，其中针对 $R(\lambda)$（命题 4.11 和定理 4.17）。最后，我们推广 [Cha25] 的结果，以便在该区域内给艾森斯坦级数建立界（定理 4.25）。接着在第 5 节中，我们依循 [IY15] 和 [Zyd22]，回顾 [Boi25b] 关于正则化 Rankin–Selberg 周期的框架。特别地，我们在命题 5.10 中用抛物下降描述这些周期，并据此在命题 5.11 中找出其奇点，在命题 5.12 中为其建立界。最后，我们在命题 5.13 中计算其留数。第 6 节中，我们将 [Boi25b] 中正则化线性形式 $\mathcal{P}_\pi$ 的构造推广到一般的三元组 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$ 的情形。我们在 §6.1.6 中证明定理 1.4。我们还在 §6.2 中介绍另一组递增的诱导数据 $\Pi_H^{\uparrow}$，它们在计算谱展开时自然出现。最后，在第 7 节中，我们证明定理 1.6。论证分为前文所述的 §7.2、§7.3 和 §7.4 三个步骤。在 §7.5 中，我们汇总所有贡献，完成定理 1.6 的证明。

1.5 致谢

作者感谢 Raphaël Beuzart-Plessis 提供有益的讨论和评论。他也感谢 Wee Teck Gan、Erez Lapid 和 Tasho Kaletha 对本文早期版本提出的建议。

本研究部分由欧盟 ERC 巩固者资助项目 RELANTRA（项目编号 101044930）资助。但文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的观点。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。作者还获得了马克斯·普朗克数学研究所（波恩）的支持，并感谢该所提供的款待和经费支持。

2 一般线性群$_1$ ×× 一般线性群$_2$ 情形

现在我们通过一个简单的例子来说明积分路径平移：$G =$ 一般线性群$_1$ ×× 一般线性群$_2$ 和 $H =$ 一般线性群$_1$。在这种情况下，结果当然并非新结果（参见例如 [Jac86]，其中有一项密切相关的计算）。我们请读者参阅正文中所用的一些技术性解析估计。对于测度归一化问题，我们也暂不讨论，请参见第 7.1.1 节。

我们将使用第1节中的记号。取 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，$g \in G(\mathbb{A})$，并令 $F(g') = K_f(g, g')$，其中 $g' \in [G]$。公式 (1.7) 中 Rankin–Selberg 积分的展开为

$$\int_{[H]} F(h)dh = Z_2(F, 0) + \int_{[\mathrm{GL}_1]} F_B(h)dh, \tag{2.1}$$

其中，B 是 G 中上三角矩阵构成的 Borel 子群。这里，$Z_2(F,0)$ 是 [JPS83] 中的 ζ 积分。它是沿着 $H(\mathbb{A})$ 对 F 的 Whittaker 系数取的积分（见 (7.10)）。令 B_2 为 GL_2, 的 Borel 子群，使得 $B = \mathrm{GL}_1 \times B_2$。现在我们分别写出每一项的展开。

2.1 主要贡献

我们从 $Z_2(F,\ 0)$开始。对于 $s \in \mathbb{C}$，注意到 $F_{-s} := F(h)\ |h|^{-s}$ 仍然快速衰减，并且$Z_2(F,\ 0) = Z_2(F_{-s},\ s)$。现在我们将 [Lan76] 的谱展开应用于 F_{-s}。它写作

$$F_{-s} = \sum_{\chi_1}\sum_{\pi}\sum_{\varphi\in\chi_1\boxtimes\pi}\int_{i\mathfrak{a}_G^*}\langle F,\varphi_{\lambda-\overline{s}}\rangle_G\varphi_\lambda d\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\chi_1}\sum_{\chi_2}\sum_{\varphi\in\chi_1\boxtimes\mathcal{A}_{B_2,\chi_2}(\mathrm{GL}_2)}\int_{i\mathfrak{a}_B^*}\langle F,E(\varphi,\lambda-\overline{s})\rangle_G E(\varphi,\lambda)d\lambda$$
$$+\sum_{\chi_1,\chi_1'}\int_{i\mathfrak{a}_G^*}\langle F,(\chi_1\boxtimes\chi_1')_{\lambda-\overline{s}}\rangle_G(\chi_1\boxtimes\chi_1')_\lambda d\lambda.$$

我们使用的记号如下。 χ_1 和 χ_1' 遍历 GL_1 的自守特征（我们仍将 χ_1' 记作 χ_1' ◦ 行列式），而 χ_2 遍历 $(\mathrm{GL}_1)^2$的自守特征。这些特征分别在 $A^\infty_{\mathrm{GL}_1}$ 和 $A^\infty_{(\mathrm{GL}_1)^2}$ 上平凡。π 遍历 GL_2的尖点表示（在 $A^\infty_{\mathrm{GL}_2}$上具有平凡中心特征）。φ遍历 Petersson 内积下的标准正交基。 s 是 $\mathfrak{a}_G^*$中的元素，$\mathbb{C}$ 对应于特征 $(g_1,g_2) \mapsto |g_1|^{s/2}$ |行列式 $g_2|^{s/2}$。最后，$\cdot,\cdot_G$ 是通过沿 $[G]$积分给出的内积。根据推论 4.31，对于某个具有较大固定增长率 $\mathrm{T}_N([G])$ 的函数空间，该表达式绝对收敛，且此增长率与s无关；根据 [BPCZ22, 引理 7.1.1，1] $Z_2(\cdot\ s)$在 $\mathrm{R}(s)$ 足够大时定义了该空间上的连续线性泛函。由于 GL_2 的特征不是泛型的，我们得到

$$Z_2(F,0) = \sum_{\chi_1,\pi,\varphi}\int_{i\mathfrak{a}_G^*+s}\langle F,\varphi_{-\overline{\lambda}}\rangle_G Z_2(\varphi_\lambda)d\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\chi_1,\chi_2,\varphi}\int_{i\mathfrak{a}_B^*+s}\langle F,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G Z_2(E(\varphi,\lambda))d\lambda, \quad (2.2)$$

其中我们将 $Z_2(\varphi_\lambda)$ 和 $Z_2(E(\varphi,\lambda))$ 分别记作 $Z_2(\varphi_\lambda,0)$ 和 $Z_2(E(\varphi,\lambda),0)$，两个 ζ 积分对我们的 λ 都绝对收敛。至此，这一项在 §1.3.1 中的步骤 1 的推导结束。现在我们移动每个积分中的积分路径。

2.1.1 尖点贡献

我们从 (2.2) 中的第一项开始。固定 χ_1,π 和 φ。这里没有艾森斯坦级数，因此可以跳过步骤 2，直接进入 §1.3.3 中的步骤 3。极点仅来自 $Z_2(\varphi_\lambda)$。若我们将 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$ 记作，那么我们知道，对于可分解的 φ （我们可以安排标准正交基中的所有元素都具有这种形式），存在 F 的一个有限赋值集合 S，使得

$$Z_2(\varphi_\lambda) = L(1/2+\lambda_1+\lambda_2,\chi_1\times\pi)\times\prod_{v\in\mathsf{S}}Z_v^\natural(\varphi_{v,\lambda}).$$

全局 L-函数和归一化局部泽塔积分由 [JPS83] 正则，因为我们只考察中心方向。在这种情况下，我们可以毫无问题地将积分路径移至 $i\mathfrak{a}_G^*$。用 §1.2.2 的语言来说，这对应于情形 $(I,\ G,\ \chi\boxtimes\pi) \in \Pi_H$，其中 $I = (0,\ 1,\ 2,\ 0)$ 来自例 1.1。

2.1.2 连续贡献

现在处理（2.2）中的第二项贡献，并固定 χ_1、 χ_2 和 φ。进一步记 $\chi_2 = \chi_2^1\boxtimes\chi_2^2$ 和 $\lambda =$ （λ_1，（λ_2^1，λ_2^2））。其分解为

$$Z_2(E(\varphi,\lambda)) = \frac{L(1/2+\lambda_1+\lambda_2^1,\chi_1\times\chi_2^1)L(1/2+\lambda_1+\lambda_2^2,\chi_1\times\chi_2^2)}{L(1+\lambda_2^1-\lambda_2^2,\chi_2^1\times\chi_2^{2,\vee})}\prod_{v\in\mathsf{S}}\times Z_v^\natural(\varphi_{v,\lambda}). \quad (2.3)$$

如果 $\chi_1 \neq \chi^{1,\vee_2}$ 和 $\chi_1 \neq \chi^{2,\vee_2}$，我们沿 s 的中心方向移动积分路径。艾森斯坦级数和 ζ 积分保持正则，因此不需要步骤 2 和 3。我们得到一个在 $i\mathfrak{a}_B^*$ 上的积分。这对应于例 1.1 中来自 $I=(0,1,2,0)$ 的贡献（I，B，$\chi\boxtimes$（$\chi_1^1\boxtimes\chi_2^2$））$\in\Pi_H$。

现在我们假设 $\chi_1=\chi^{1,\vee_2}$ 但 $\chi_1\neq\chi^{2,\vee_2}$。和之前一样，艾森斯坦级数仍然正则。不过，现在我们在 $\lambda_1+\lambda_2^1=1/2$ 处有一个来自 (2.3) 的简单极点。令 $I=(0,0,1,1)$，并令 χ 为一般线性群 $\mathrm{GL}_1\times(\mathrm{GL}_1)^2$ 的特征 $\chi_1\boxtimes(\chi_2^2\boxtimes\chi_2^1)$。于是 $(I,P,\chi)\in\Pi_H$。令 w 为一般线性群 GL_2 的魏尔群中的非平凡元素。若我们作用 w，超平面 $\lambda_1+\lambda_2^1=1/2$ 将变为 $\mathfrak{a}_{\chi,\mathbb{C}}^*-\rho_\chi$。对于 $\phi\in\mathcal{A}_{B,\chi}(G)$，由命题 5.10（另见例 1.5），我们有如下简单的描述

$$\mathcal{P}_\chi(\phi,\mu)=\int_{K_H}\phi_\mu(wk)dk=\phi(w),\quad \mu\in\mathfrak{a}_{\chi,\mathbb{C}}^*-\underline{\rho}_\chi. \tag{2.4}$$

注意，对于该子空间中的 μ，这确实定义了一个在$\mathcal{A}_{B,\chi,\mu}(G)$ 上不变的 a $H(\mathbb{A})$-线性形式。我们声称有如下等式

$$\operatorname*{Res}_{\lambda_1+\lambda_2^1=1/2} Z_2(E(\varphi,\lambda))=\mathcal{P}_\chi(M(w,\lambda)\varphi,w\lambda). \tag{2.5}$$

该结果在命题 5.13 中得到证明。

注 2.1。 如果将 (2.5) 限定为所有特征及 φ均为非分歧的特殊情形，并且若 $F=\mathbb{Q}$（因此，根据 [CS80] 和 [Sta01]，(2.3) 中没有局部因子），那么我们所说的仅仅是：(2.3) 中 L- 函数之商的留数，除一个体积项外，等于 $M(w,\lambda)$ 的全局因子。

By t利用艾森斯坦级数的函数方程并作变量代换，我们得到 t

$$\sum_\varphi\int_{i\mathfrak{a}_B^*+s}\langle F,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G Z_2(E(\varphi,\lambda))d\lambda=\sum_{\varphi\in\mathcal{A}_{B,\chi}(G)}\int_{i\mathfrak{a}_\chi^*-\underline{\rho}_\chi+e}\langle F,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G\mathcal{P}_\chi(\varphi,\lambda)d\lambda, \tag{2.6}$$

其中 $\mathfrak{a}_\chi^*$ 是子空间 $\{(\lambda_1,(\lambda_2^1,-\lambda_1))\}$、$\rho_\chi=(-1/4,(0,-1/4))$ 和 $e=(0,(1/4,0))$。现在我们要沿 λ_2^1 变量将积分路径平移至 $i\mathfrak{a}_\chi^*-\rho_\chi$（即平移到 $\mathrm{R}(\lambda_2^1)=0$）。根据 (2.4) 的描述，$\mathrm{P}\chi$ 显然是正则的，而且积分路径将使 $-\lambda$ 始终处于正 Weyl 室内，不会穿过艾森斯坦级数的极点（该极点会出现在 $\mathrm{R}(\lambda_2^1)=3/4$ 处）。因此，我们确实可以进行这次积分路径平移。于是，我们得到与 (I,B,χ) 相关的两项贡献，其分别对应 $I=(0,1,2,0)$ 和 $(0,0,1,1)$。$\chi_1=\chi^{2,\vee_2}$ 但 $\chi_1\neq\chi^{1,\vee_2}$ 的情形可用函数方程以同样方式处理。

现在我们转向最困难的情形，即 $\chi_1=\chi^{1,\vee_2}=\chi^{2,\vee_2}$。先验地，当超平面 $\lambda_1+\lambda_2^1=1/2$ 和 $\lambda_1+\lambda_2^2=1/2$相交时，(2.4) 的分子有一个二阶极点。若假设广义黎曼猜想的一个弱版本，则可得 $E(\varphi,-\lambda)$ 正则，且当 $\mathrm{R}(\lambda_2^1)-\mathrm{R}(\lambda_2^2)\geq-\varepsilon$ 满足某个较小的ε时，$L(1+\lambda_2^1-\lambda_2^2,\chi_2^1\times\chi^{2,\vee_2})$ 没有零点。我们可以如下利用这一点。首先，将 (2.6) 中的积分路径移至区域 $i\mathfrak{a}_B^*+(1/4,(1/4+\varepsilon,1/4+\varepsilon))$。接着，将 λ_2^1变量的积分路径移至区域 $i\mathfrak{a}_B^*+(1/4,(1/4-\varepsilon,1/4+\varepsilon))$，从而得到沿 $\lambda_1+\lambda_2^1=1/2$的留数。但现在我们恰好处于 (2.6) 的情形，因此可以由此继续处理；关键在于，超平面 $\lambda_1+\lambda_2^2=1/2$对我们的留数不再是奇异的。最后，将主要贡献在 λ_2^2 变量上的积分路径移至 $i\mathfrak{a}_B^*+(1/4,(1/4-\varepsilon,1/4-\varepsilon))$，并取到沿 $\lambda_1+\lambda_2^1=1/2$的额外留数。现在我们可以像在 $\chi_1\neq\chi^{2,\vee_2}$ 中那样得出结论。

如果不假设广义黎曼猜想的某种变体，我们仍可使用 [Bru06] 给出的零点自由区域。由于根据定理 4.17 和命题 6.7，我们知道 (2.6) 的被积函数快速衰减，因此可以截去其尾项，将注意力集中在区域 $|I(\lambda_2^1)|$，$|I(\lambda_2^2)| \le T$，其中 T 较大。现在可以假设，以 $(1/4,\ (1/4,\ 1/4))$ 为中心、在变量 λ_2^1 和 λ_2^2 上构成的矩形乘积，其实长度为 2ε、虚高度为 T，包含在某个零点自由区域内，于是可以进行与之前相同的运算。这就是我们在正文核心部分采用的方法（见引理 7.18 和引理 7.19）。其灵感来自 [Lap06]。

2.1.3 最终结果

综合以上各项，我们得到

$$Z_2(F,0) = \sum_{\substack{(I,P,\pi)\in\Pi_H \\ I=(0,1,2,0) \\ \text{or } I=(0,1,0,1)}} \int_{i\mathfrak{a}_\pi^*} \frac{1}{|W(\pi)|} J^H_{(I,P,\pi)}(g,f,\lambda)d\lambda, \tag{2.7}$$

其中 $|W(\pi)|$ 在 $I=(0,1,2,0)$ 时为 2，否则为 1。

2.2 常数项贡献

现在我们处理 (2.1) 中的第二项，它是沿 $[\mathrm{GL}_1]$ 的积分。令 $T=\mathrm{GL}_1\times(\mathrm{GL}_1)^2$ 为对角矩阵的极大环面。函数 F_B 在 $[T]$ 上并非快速衰减，但若固定任意一个 $N>0$，则存在 $s\in\mathbb{C}$，使得 $R(s)$ 足够大，从而

$$(t_1,(t_2^1,t_2^2)) \in [T] \mapsto F_B(t_1,(t_2^1,t_2^2)) \left|\det g_2^2\right|^s$$

属于 $\mathcal{T}_{-N}([T])$，即其衰减速度至少与 $\|\cdot\|_T^{-N}$ 一样快（见引理 7.6）。沿用之前的技巧，我们可以利用 [Lan76]，将 F_B 的谱展开写成 $[T]$ 上的函数，并通过常数项与艾森斯坦级数之间的伴随性，进一步将其提升为依赖于 F 的谱展开。按照 (2.2) 的方式重新整理各项，并将模特征考虑在内，我们得到

$$\int_{[\mathrm{GL}_1]} F_B(h)dh = \sum_{\substack{(I,P,\chi)\in\Pi_H \\ I=(1,0,1,0)}} \int_{i\mathfrak{a}_\chi^* - \underline{\rho}_\chi + se_2^1} \sum_{\varphi\in\mathcal{A}_{P,\chi}(G)} \langle F, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G \mathcal{P}_\chi(\varphi,\lambda)d\lambda, \tag{2.8}$$

其中 $\underline{\rho}_\chi = (1/4,\ (1/4,\ 0))$，$e_2^1=(0,\ (0,\ 1))$，条件 $I=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$ 表明 χ 是 $[T]$ 的一个特征，其形式为 $\chi_1\boxtimes(\chi_1^\vee\boxtimes\chi_2)$、$\mathfrak{a}_\pi^*=(\lambda_1,\ (-\lambda_1,\ \lambda_2))$，最后

$$\mathcal{P}_\chi(\varphi,\lambda) = \int_{K_H} \varphi_\lambda(k)dk = \varphi(1), \quad \lambda\in\mathfrak{a}_{\chi,\mathbb{C}}^* - \underline{\rho}_\chi. \tag{2.9}$$

现在，我们对变量 λ_2^1 进行平移，将积分区域从 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi + se_2^1$ 移至 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi$。根据 (2.9)，唯一可能的奇异性来自 $E(\varphi,-\lambda)$，并在 $\chi_2=\chi_1^\vee$ 时出现在 $\lambda_1+\lambda_2=1$。若记 $\eta=\chi_1\boxtimes(\overline{\chi_1^\vee}\circ\text{行列式})$，则留数张成特征 $\eta_{-\lambda}$（其中我们将 $-\lambda$ 投影到 $\mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$）。由引理 7.16，我们有 λ 在奇异超平面中的伴随性

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{A}_{P,\chi}(G)} \langle F, E^*(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G \mathcal{P}_\chi(\varphi,\lambda) = \langle F, \eta_{-\overline{\lambda}}\rangle_G \mathcal{P}_\eta(1,\lambda), \tag{2.10}$$

其中 E^* 是艾森斯坦级数的留数，而 $\mathcal{P}_\eta(1,\lambda)$ 是恒等于 1 的常数。特别地，这个表达式现在是全纯的。此情形对应于例 1.2 中的 $((0,0,2,0)\ G,\eta)\ \in \Pi_H$，因此 $\mathfrak{a}_\eta = (\lambda_1,(-\lambda_1,-\lambda_1))$ 且 $\rho_\eta = 0$。我们可以将留数的积分路径平移至 $i\mathfrak{a}_\eta^* - \rho_\eta$。

将 (2.8) 的主要贡献与 (2.10) 相加，我们得到公式

$$\int_{[\mathrm{GL}_1]} F_B(h)dh = \sum_{\substack{(I,B,\pi)\in\Pi_H \\ I=(1,0,1,0) \\ \text{or } I=(0,0,0,2)}} \int_{i\mathfrak{a}_\pi^*} \frac{1}{|W(\pi)|} J^H_{(I,B,\pi)}(g,f,\lambda)d\lambda, \tag{2.11}$$

其中 $|W(\pi)|$ 恒为 1。定理 1.6 现在可由合并 (2.7) 和 (2.11) 得出

3 自守形式的预备知识

3.1 一般记号

设 F 是一个特征零域。所有代数群都定义在 F 上。

3.1.1 约化群、抛物子群与特征

设 G 是一个连通约化群。设 Z_G 是 G 的中心。设 N_G 是 G 的幺幂根基，$X^*(G)$ 是 G 的 F-代数特征群。令 $\mathfrak{a}_G^* = X^*(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 且 $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G),\mathbb{R})$。令

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{a}_G^*\times\mathfrak{a}_G\to\mathbb{R} \tag{3.1}$$

为典范配对。

设 P_0 是 G 的极小抛物子群。设 M_0 是 P_0 的 Levi 因子。若 G 的抛物子群包含 P_0，则称其为标准的；若它包含M_0，则称其为半标准的。若 P 是 G 的半标准抛物子群，我们用 N_P 表示其幺幂根基，用 M_P 表示其包含 M_0 的唯一 Levi 因子，并称该 Levi 因子为半标准的。我们有分解 $P = M_PN_P$。我们用 $\mathcal{P}(M_P)$ 表示G 中 Levi 子群为半标准 Levi M_P 的半标准抛物子群集合。

设 A_G 为 G的极大中心 F-分裂环面。若 P 是 G的半标准抛物子群，令 $A_P = A_{M_P}$。我们记 $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{P_0}^*$、$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{P_0}$ 和 $A_0 = A_{P_0}$。

设 $P\subset Q$ 为 G的半标准抛物子群。限制映射 $X^*(Q)\to X^*(P)$ 和 $X^*(A_P)\to X^*(A_Q)$ 诱导出对偶分解 $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q\oplus\mathfrak{a}_Q$ 和 $\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}^{Q,\ P^*}\oplus\mathfrak{a}_Q^*$。特别地，我们有投影 $\mathfrak{a}_0\to\mathfrak{a}_P^Q$ 和 $\mathfrak{a}_0^*\to\mathfrak{a}^{Q,\ P^*}$，记为 $X\mapsto X_P^Q$，它们仅取决于 Levi 因子 M_P 和 M_Q。若 $Q=G$，则在前面的记号中省略指数 G。

设定 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^Q = \mathfrak{a}_P^Q\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 以及 $\mathfrak{a}^{Q,\ P^*,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{Q,\ P^*}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$。我们仍将通过标量扩张得到的配对记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。我们有分解 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^Q = \mathfrak{a}_P^Q\oplus i\mathfrak{a}_P^Q$，$\mathfrak{a}^{Q,\ P^*,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{Q,\ P^*}\oplus i\mathfrak{a}^{Q,\ P^*}$，其中 $i^2=-1$。我们将这些分解所对应的实部和虚部分别记作 R 和 I，并将任意 $\lambda\in\mathfrak{a}^{Q,\ P^*,\mathbb{C}}$ 的复共轭记作 $\overline{\lambda}$。

3.1.2 根、余根、权

设 P 是 G 的标准抛物子群。设 $\Delta_0^P \subset \mathfrak{a}^{P,0^*}$（分别为 $\Sigma_0^P \subset \mathfrak{a}^{P,0^*}$）是 A_0 在 $M_P \cap P_0$ 中的单根集合（分别为根集合）。若 $P = G$，我们记 Δ_0 和 Σ_0。设 Δ_P（分别为 Σ_P）是 $\Delta_0 \setminus \Delta_0^P$（分别为 $\Sigma_0 \setminus \Sigma_0^P$）在投影 $\mathfrak{a}_0^* \to \mathfrak{a}_P^*$ 下的像。更一般地，对于 $P \subset Q$，令 Δ_P^Q（分别为 Σ_P^Q）为 $\Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P$ 在 $\mathfrak{a}^{Q,P^*}$（分别为 $\Sigma_0^Q \setminus \Sigma_0^P$）中的投影。令 $\Delta^{Q,P^\vee} \subset \mathfrak{a}_P^Q$ 为单余根集合。若 $\alpha \in \Delta_P^Q$，我们将相应的余根记作 $\alpha^\vee$。由对偶性，令 $\hat{}\Delta_P^Q$ 为单权集合。设

$$\mathfrak{a}_P^{Q,*,+} = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Delta_P^Q\right\}.$$

若 $Q = G$，则省略上标。我们分别用 $\mathfrak{a}^{Q,*+,P}$ 表示这些开子集在 $\mathfrak{a}_P^Q$ 和 $\mathfrak{a}^{Q,P^*}$ 中的闭包。若 $\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \setminus \{0\}$，则当 λ 是单根 Δ_P的非负线性组合时，记作 $\lambda > 0$。

若泛函 Λ 定义在 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 上，且具有形式 $\Lambda(\lambda) = \langle \lambda, \gamma^\vee \rangle - a$，其中 $\gamma^\vee \in \mathfrak{a}_P$ 且 $a \in \mathbb{C}$，则称其为仿射线性形式。我们称其零点集合为仿射超平面。若 $\gamma^\vee$ 是余根，则它是仿射根超平面。所谓“$\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 处于一般位置”，是指 λ 不属于可数个仿射超平面的并集。

3.1.3 魏尔群

令 W 为 (G, A_0) 的魏尔群，按定义，它是正规化子 $N_{G(F)}(A_0(F))$ 对中心化子 $Z_{G(F)}(A_0(F))$ 取商所得的群。它作用于 $\mathfrak{a}_0$，并通过对偶性作用于 $\mathfrak{a}_0^*$。若 $w \in W$，我们仍用 w 表示 $G(F)$ 中的一个代表元。

设 $P = M_P N_P$ 和 $Q = M_Q N_Q$ 是 G 的两个标准抛物子群。令 ${}_QW_P$ 为满足 $M_P \cap w^{-1}P_0 w = M_P \cap P_0$ 和 $M_Q \cap wP_0w^{-1} = M_Q \cap P_0$ 的 $w \in W$ 的集合。

设 $w \in {}_QW_P$。令 $P_w = (M_P \cap w^{-1}Qw)N_P$。根据 [Ren10, Lemme V.4.6.]，P_w 是 G 的一个标准抛物子群，且包含于 P 中，其标准 Levi 因子为 $M_P \cap w^{-1}M_Q w$。同理，$Q_w = (M_Q \cap wPw^{-1})N_Q$ 是 G 的一个标准抛物子群，且包含于 Q 中，其标准 Levi 因子为 $M_Q \cap wM_Pw^{-1}$。注意，$w\Sigma_{P_w}^P \subset \Sigma_{Q_w}$ 且 $w^{-1}\Sigma_{Q_w}^Q \subset \Sigma_{P_w}$。令

$$W(P;Q) = \{w \in {}_QW_P \mid P_w = P\} = \{w \in {}_QW_P \mid M_P \subset w^{-1}M_Q w\},$$
$$W(P,Q) = \{w \in {}_QW_P \mid M_P = w^{-1}M_Q w\}.$$

注意，$w \in {}_QW_P$ 意味着 $w \in W(P_w, Q_w)$。令

$$W(P) = \bigcup_Q W(P,Q).$$

用 w_P 表示 $W(P)$ 中的最长元素。

若 R 是 G 的另一个标准抛物子群，则相对于约化群 M_R，我们用 ${}_QW_P^R$（分别用 $W^R(P;\ Q)$ 和 $W^R(P,\ Q)$）表示 ${}_{Q\cap M_R}W_{P\cap M_R}$（分别表示 $W(P \cap M_R;\ Q \cap M_R)$ 和 $W(P \cap M_R,\ Q \cap M_R)$）。

3.2 自守商与 Haar测度

现在我们假设 F 是一个数域。设 G 是定义在 F 上的连通约化群。

3.2.1 自守商

设 $\mathbb{A}$ 是 F的阿代尔环，设 $\mathbb{A}_f$ 是其有限阿代尔环。令 $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。设 V_F 是 F 的赋值集合，令 $V_{F,\infty} \subset V_F$ 为阿基米德赋值子集。对于 $v \in V_F$，设 F_v 是 F 在 v处的完备化。若 v 是非阿基米德的，设 q_v 为 F_v 的剩余域的基数，$\mathcal{O}_v$ 为其整数环。令 $|\cdot|$ 为绝对值 $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$，它由对每个 F_v 取归一化绝对值 $|\cdot|_v$ 的乘积给出。

设 $P = M_P N_P$是 G的半标准抛物子群。记

$$[G]_P = M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

设$A_{P,\mathbb{Q}}$ 是韦伊限制 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}A_P$的极大 $\mathbb{Q}$-分裂子环面，并设 A_P^∞是$A_{P,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$的单位连通分支。记

$$[G]_{P,0} = A_P^\infty M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

若 $P = G$，则分别将 $[G]_G$ 和$[G]_{G,0}$ 简记为 $[G]$ 和 $[G]_0$ 。

设 P 是 G的半标准抛物子群。存在典范态射 $H_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$，使得对任意 $g \in P(\mathbb{A})$和 $\chi \in X^*(P)$，有$\langle \chi, H_P(g)\rangle = \log |\chi(g)|$。$H_P$的核记为 $P(\mathbb{A})^1$。我们将其扩展为 $H_P\colon G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$，满足：对任意 $g \in G(\mathbb{A})$，当 $g \in pK$ 且 $p \in P(\mathbb{A})$时，有$H_P(g) = H_P(p)$。若 $P = P_0$，则记为$H_0 = H_{P_0}$。

我们定义

$$[G]_P^1 = M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash P(\mathbb{A})^1 K.$$

若 $P = G$，我们简记为 $[G]^1$。

设 $K = \prod_{v\in V_F} K_v \subset G(\mathbb{A})$ 是一个相对于 M_0 处于良好位置的“良好”极大紧子群。我们记作 $K = K_\infty K^\infty \text{where } K_\infty = \prod_{v\in V_{F,\infty}} K_v \text{and } K^\infty = \prod_{v\in V_F\backslash V_{F,\infty}} K_v$。我们称 G 的一个层 J为 J，其中 J 是 $G(\mathbb{A}_f)$ 的一个开紧子群。

3.2.2 模特征

若 $P \subset Q$ 是 G 的半标准抛物子群，令 ρ_P^Q 为 $\mathfrak{a}^{Q,P^*}$ 中的唯一元素，使得对每个 $m \in M_P(\mathbb{A})$，有

$$\left|\det(\mathrm{Ad}_P^Q(m))\right| = \exp(\langle 2\rho_P^Q, H_P(m)\rangle),$$

其中 Ad_P^Q 是 M_P 在 $M_Q \cap N_P$ 的李代数上的伴随作用。对每个 $g \in G(\mathbb{A})$，我们定义

$$\delta_P^Q(g) := \exp(\langle 2\rho_P^Q, H_P(g)\rangle).$$

特别地，将其限制到 $P(\mathbb{A}) \cap M_Q(\mathbb{A})$ 上时，它与后者的模特征的限制一致。若 $Q = G$，则省略上标。

3.2.3 Haar测度

我们取 dg on $G(\mathbb{A})$ 上的一个哈尔测度，并作分解 $dg = \prod_v dg_v$，其中对所有赋值 v，dg_v 是 $G(F_v)$ 上的一个哈尔测度。这隐含地意味着，对几乎所有赋值 v，K_v 的体积为 1。

令 P 为 G的一个半标准抛物子群。我们在 $\mathfrak{a}_P$ 上赋予哈尔测度，使格 $\mathrm{Hom}(X^*(P), \mathbb{Z})$ 的余体积为 1。我们在 A_P^∞上赋予与之相容的哈尔测度

的同构 $A_P^\infty \simeq \mathfrak{a}_P$ 由 H_P诱导。若 $P \subset Q$，则我们在 $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_P/\mathfrak{a}_Q$ 上赋予商测度。

对于每个 $v \in V_F$，我们在 K_v 上赋予不变概率测度。这在 K上诱导出乘积测度。若 N 是幺幂群，我们在 $N(\mathbb{A})$上赋予哈尔测度，使其对 $N(F)$上的计数测度取商后得到体积为 1 的测度。我们在 $M_P(\mathbb{A})$上赋予唯一的哈尔测度，使得

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)dg = \int_{N_P(\mathbb{A})} \int_{M_P(\mathbb{A})} \int_K f(nmk) \exp(-\langle 2\rho_P, H_P(m)\rangle) dk dm dn \tag{3.2}$$

对 $G(\mathbb{A})$上的每个连续紧支撑函数 f，我们在 $M_P(\mathbb{A})^1$ 上赋予与同构 $M_P(\mathbb{A})^1 \times A_P^\infty \to M_P(\mathbb{A})$ 相容的哈尔测度。

我们在 $[G]_P$ 上赋予测度，它是将我们在 $G(\mathbb{A})$上的测度除以 $M_P(F)$上的计数测度与我们在 $N_P(\mathbb{A})$ 上的测度的乘积后所得的商。此外，注意到 $a \in A_P^\infty$通过左平移作用于 $[G]_P$ 时，会使测度乘以 $\delta_P^{-1}(a)$。将 $[G]_P$ 上的测度除以 A_P^∞上的测度取商后，我们在$[G]_{P,\ 0}$上得到一个“半不变”测度。

3.3 自守商上的函数

我们继续假设 F 是一个数域，且 G 在 F上是连通约化的。

设 X 是一个集合，f 和 g 是 X上的两个正函数。我们记

$$f(x) \ll g(x), \quad x \in X,$$

如果存在 $C > 0$，使得对所有 $x \in X$，都有 $f(x) \leq Cg(x)$。

3.3.1 光滑函数

设 $\mathfrak{g}_\infty$ 是 $G(F_\infty)$ 的李代数，$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 是其复化的包络代数，$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 是$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 的中心。若我们只关心单个阿基米德位v上的 $G(F_v)$，则记作 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{v,\infty})$。

我们将正规开紧子群 J 称为 K^∞ 的一个层。若 V 是$G(\mathbb{A})$的一个表示，我们用 V^J 表示其中由 J 固定的向量所构成的子空间。

设 V是一个弗雷歇空间。若函数 $\varphi\colon G(\mathbb{A}) \to V$在某个层 J下右不变，并且对每个 $g_f \in G(\mathbb{A}_f)$，函数 $g_\infty \in G(F_\infty) \mapsto \varphi(g_f g_\infty)$ 都按通常意义是光滑的（即属于 $C^\infty(G(F_\infty))$），则称其为光滑函数。我们用 R（分别用 L）表示 $G(\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 在此类光滑函数上的右平移（分别为左平移）作用。

3.3.2 高度

我们取一个嵌入 $\iota\colon G \hookrightarrow$ 一般线性群$_n$，其中 $n > 0$ 为某个整数。我们在 $G(\mathbb{A})$ 上定义高度 $\|\cdot\|$，如下：

$$\|g\| = \prod_v \max_{1 \leq i,j \leq n} (|\iota(g)_{i,j}|_v, \left|\iota(g^{-1})_{i,j}\right|_v), \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

如果我们选择另一个嵌入 ι'，使得 $\|\cdot\|'$，那么存在 $r > 0$，使得 $\|g\|^{1/r} \ll \|g\|' \ll \|g\|^r$ 对于 $g \in G$（$\mathbb{A}$）成立。根据 [BPCZ22，公式（2.4.1.1）]，，我们有如下公式

$$\|gh\| \ll \|g\| \, \|h\|, \quad g, h \in G(\mathbb{A}). \tag{3.3}$$

如果 P 是 G 的半标准抛物子群，对于任意 $g \in G(\mathbb{A})$，我们定义 e

$$\|g\|_P = \inf_{\delta \in M_P(F)N_P(\mathbb{A})} \|\delta g\|.$$

这些高度满足以下性质。

引理 3.1. 以下断言成立。

- 存在 $N > 0$，使得 $g \mapsto \|g\|_G^{-N}$ 在 $[G]$ 上绝对可积。
- 对于每个 $M > 0$，都存在一个紧集 $U \subset [G]$，使得 $g \notin U$ 蕴含 $\|g\|_G \geq M$。

证明。第一个断言由 [BP21, 命题 A.1.1.(vi)] 得出。对于第二个断言，根据 [BPCZ22, 第 2.4 节3]，我们只需证明该事实在 G 的一个 Siegel 域上成立（参见 [BPCZ22, 第 2.2 节13]），因此只需考虑 $g \in A_0^\infty$。但在那里，我们可以根据 [BPCZ22, 第 2.4 节3],, 用特征表示 $\|g\|_G$，从而很容易得出结论。□

3.3.3 Schwartz 函数

对于 $G(\mathbb{A}_f)$ 的每个紧子集 C 以及每个层 J，令 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}) \ C, \ J)$ 表示由光滑函数 $f\colon G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 构成的空间，满足

- f 在 J 下双不变，且支撑于 $G(F_\infty) \times C$；
- 对每个整数 $r \geq 1$ 以及 $X, \ Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，我们有

$$\|f\|_{r,X,Y} := \sup_{g \in G(\mathbb{A})} \|g\|^r \, |(R(X)L(Y)f)(g)| < \infty.$$

我们在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}) \ C, \ J)$ 上赋予半范数族 $\|\cdot\|_{r, \ X, \ Y}$，并令 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 为各空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}) \ C, \ J)$ 关于配对 $(C, \ J)$ 的局部凸拓扑直极限。它是 $G(\mathbb{A})$ 上的 Schwartz 函数空间，并且关于卷积乘积 $*$ 构成一个代数。对于任意层 J，我们将其 J-双不变函数子代数记为 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$。

3.3.4 Petersson 内积

在本节余下部分，我们固定 G 的一个半标准抛物子群 P。我们有平方可积函数构成的希尔伯特空间 $L^2([G]_P)$，其定义在 $[G]_P$ 上。我们还将考虑 $L^2([G]_{P, \ 0})$，即 $[G]_P$ 上满足在 A_P^∞ 的左平移作用下按 $\delta_P^{1/2}$ 变换，且其 Petersson 范数

$$\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{P,\mathrm{Pet}} := \int_{[G]_{P,0}} |\varphi(g)|^2 \, dg,$$

是有限的。若 J 是一个层 G，我们将 $L^2([G]_{P, \ 0})^{\infty, \ J}$ 记为由 J 不变函数组成的空间，这些函数 φ 属于 $L^2([G]_{P, \ 0})$，且轨道映射 $g \mapsto g.\varphi$ 光滑。空间 $L^2([G]_{P, \ 0})^{\infty, \ J}$ 赋予由半范数族 $\|X.\varphi\|_{P, \ \mathrm{Pet}}$（其中 $X \in$ 属于 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$）诱导的拓扑。于是，$L^2([G]_{P, \ 0})^\infty = \bigcup_J L^2([G]_{P, \ 0})^{\infty, \ J}$ 赋予局部凸归纳极限拓扑。

3.3.5 函数空间

对于所有 $N \in \mathbb{R}$、 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 以及任意光滑函数 $\varphi\colon\ [G]_P \to \mathbb{C}$，我们定义

$$\|\varphi\|_{N,X} = \sup_{x\in[G]_P} \|x\|_P^N \left|(R(X)\varphi)(x)\right|.$$

若 $X = 1$，我们简记为 $\|\varphi\|_N$。

对于每个 $N \in \mathbb{R}$，令 $\mathcal{T}_N([G]_P)$ 表示由光滑函数 $\varphi\colon [G]_P \to \mathbb{C}$ 组成的空间，其中对每个 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，都有 $\|\varphi\|_{-N,X} < \infty$。对于每个层 J，我们赋予 $\mathcal{T}_N([G]_P)^J$ 由半范数族 $(\|\cdot\|_{-N,X})_X$ 诱导的弗雷歇空间拓扑。令

$$\mathcal{T}([G]_P) = \bigcup_{N>0} \mathcal{T}_N([G]_P).$$

这是 $[G]_P$ 上的一致中等增长函数空间。该空间带有自然的局部弗雷歇空间拓扑。

令 $\mathcal{S}([G]_P)$ 表示由光滑函数 $\varphi\colon [G]_P \to \mathbb{C}$ 组成的空间，其中对每个 $N \geq 0$ 和 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，都有 $\|\varphi\|_{N,X} < \infty$。对于每个层 J，我们赋予 $\mathcal{S}([G]_P)^J$ 由半范数族 $(\|\cdot\|_{N,X})_{N,X}$ 诱导的弗雷歇拓扑。空间 $\mathcal{S}([G]_P)$ 是 $[G]_P$ 的施瓦茨空间。

根据 [BPCZ22，第 2.5 节，10], $\mathcal{S}([G]_P)$ 在 $\mathcal{T}([G]_P)$ 中稠密。一般而言，它在 $\mathcal{T}_N([G]_P)$ 中并不稠密，但我们有以下较弱的结果。

引理 3.2。 设 $N \in \mathbb{R}$。那么，$\mathcal{S}([G])$ 在 $\mathcal{T}_{N+1}([G])$ 中的闭包包含 $\mathcal{T}_N([G])$。

证明。 由 [DM78], 的 Dixmier–Malliavin 定理，只需证明该结论对由唯一范数 $\|\cdot\|_{-N-1}$ 所诱导的拓扑成立。若 $[G]$ 是紧的，这显然成立。一般而言，我们有以下事实：对于每个 $M > 0$，都存在一个紧集 $\mathcal{U} \subset [G]$，使得 $g \notin \mathcal{U}$ 蕴含 $\|g\|_G \geq M$。由引理 3.1，只需在紧集上用函数逼近 $\mathcal{T}_N([G])$ 中的元素。根据 [MŽ20 定理 8.4] 的简单推广，这可以通过 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 中施瓦茨函数的庞加莱级数来实现。 □

我们还将使用上述空间的一些非光滑变体。对于每个 $N \in \mathbb{R}$，令 $\mathcal{T}_N^0([G]_P)$ 为复拉东测度 φ 在 $[G]_P$ 上的空间，使得

$$\|\varphi\|_{1,N} := \int_{[G]_P} \|g\|^{-N} |\varphi(g)| < \infty.$$

我们在 $\mathcal{T}_N^0([G]_P)$ 上赋予由范数 $\|\cdot\|_{1,N}$ 所确定的拓扑，使其成为巴拿赫空间，并令 $\mathcal{T}^0([G]_P)$ 为各空间 $\mathcal{T}_N^0([G]_P)$ 的局部凸归纳极限。

令 $\mathcal{S}^{00}([G]_P)$ 为 $[G]_P$ 上连续的可测复值函数空间，使得对每个 $N > 0$，均有 $\|\varphi\|_N < \infty$。我们有一个配对

$$\langle \varphi, \psi \rangle_P = \int_{[G]_P} \varphi(g)\overline{\psi}(g), \quad \varphi \in \mathcal{S}^{00}([G]_P), \quad \psi \in \mathcal{T}^0([G]_P). \tag{3.4}$$

它将 $\mathcal{S}^{00}([G]_P)$ 的拓扑对偶与 $\mathcal{T}^0([G]_P)$ 等同起来（参见 [BPCZ22，第 2.5 节9]）。

3.4 自守表示

我们沿用假设： F 是一个数域，且 G 在 F 上是约化的。

3.4.1 自守形式

设 P 是 G的一个半标准抛物子群。我们将$\mathcal{A}_P(G)$中的自守形式空间定义为$\mathcal{T}([G]_P)$中$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$-有限函数构成的子空间。

对于任意有限余维理想 J $\subset$ Z($\mathfrak{g}_\infty$)，我们将 A$_{P,\mathcal{J}}$(G) 记为 $\varphi \in$A$_P$(G) 的子空间，其中满足 $R(z)\varphi = 0$ 对每个 $z \in$ J 均成立。根据 [BPCZ22，第 2.7.1], 节，存在 $N \geq 1$ 使得 A$_{P,\mathcal{J}}$(G) $\subset$ T$_N$([G]$_P$)。我们赋予 A$_{P,\mathcal{J}}$(G) 诱导拓扑。根据 NBPCZ22 的引理 2.5.4，[并由开映射定理可知，该拓扑与1] 无关。随后，A$_P$(G) = $\bigcup$J A$_{P,\mathcal{J}}$(G) 赋予局部凸归纳极限拓扑。

令 $\mathcal{A}_P^0(G)$ 为 $\varphi \in \mathcal{A}_P(G)$ 的子空间，使得

$$\varphi(ag) = \exp(\langle \rho_P, H_P(a)\rangle)\varphi(g)$$

对每个 $a \in A_P^\infty$ 和 $g \in [G]_P$ 均成立。若 $P = G$，我们简记为 $\mathcal{A}(G)$ 和 $\mathcal{A}^0(G)$。

令 $\mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G) \subset \mathcal{A}_P^0(G)$ 为 φ 的子空间，使得 Petersson 范数 $\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}$ 有限。空间 $\mathcal{A}_P^0(G)$ 和 $\mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G)$ 均赋予子空间拓扑。

注 3.3. 与大多数参考文献不同，我们遵循 [BPCZ22]，不要求自守形式是 K_∞-有限的。根据 [Lap08],，Eisenstein 级数和 intertwining 算子的解析延拓方面的主要结果，在 K_∞-有限情形下可推广到光滑情形。

3.4.2 离散自守表示

我们将 $G(\mathbb{A})$ 的离散自守表示定义为 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ 的拓扑不可约子表示。令 $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ 为此类表示的集合。对于 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$，令 $\mathcal{A}_\pi(G)$ 为 $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ 的 π-同型分量。注意，π 在 A_G^∞ 上总具有平凡中心特征。

对于 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，令 A$_{P,\pi}$(G) 为 $\varphi \in$ A$_{P,\mathrm{disc}}$(G) 的子空间，使得对于所有 $g \in G(\mathbb{A})$，映射 $m \in [M_P] \mapsto \delta_P(m)^{-1/2}\varphi(mg)$ 都属于 A$_\pi$(M_P)。对于某个有限余维理想 J，它是 A$_{P,\mathcal{J}}$(G) 的闭子空间，并赋予其诱导拓扑。对于任意 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，令$\pi_\lambda = \pi \otimes \exp(\lambda, H_{M_P}(\cdot))$，并对 $\varphi \in$ A$_{P,\pi}$(G) 定义

$$\varphi_\lambda(g) = \exp(\langle \lambda, H_P(g)\rangle)\varphi(g).$$

映射 $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$ 将 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 识别为 $\mathcal{A}_P(G)$ 的一个子空间，记作 $\mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$。我们将 $I_P(\lambda)$ 记为通过将 $\mathcal{A}_P(G)$ 上的作用搬运至 $\mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 上而得到的 $G(\mathbb{A})$ 和 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 的作用。

令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。根据 [Fla79],，它分解为 $\pi = \otimes_v' \pi_v$。对于每个赋值 v，我们将 $I_P^G\pi_v$记作 $G(F_v)$ 的 π_v 的光滑抛物诱导。

3.4.3 自守形式空间上的拓扑

设 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，其中 M_P 是 G 的一个标准 Levi 子群。由于 π 是离散的，我们还可以通过将 $\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$ 实现为 $L^2([G]_{P,\ 0})^\infty$ 的子空间，为其赋予另一种拓扑。下面的引理说明如何比较这两种拓扑。我们只对 $G = \mathrm{GL}_n$ 陈述此引理，尽管它应当适用于任意约化群。更确切地说，潜在的问题在于第一条断言，其中用到了离散自守形式的指数信息。

引理 3.4。 设 $G=\mathrm{GL}_n$，并令 P 为 G 的一个标准抛物子群。令 J 为一个层。那么对于任意充分大的 $N>0$，存在 $X_1,\dots,X_r\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对所有 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 以及所有 $\varphi\in A_{P,\,\pi}(G)^J$，都有

$$\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}\le\sum_{i=1}^{r}\|\varphi\|_{-N,X_i}.$$

特别地，$A_{P,\,\pi}(G)^J$ 包含于光滑向量空间 $L^2([G]_{P,\,0})^{J,\,\infty}$ 中；若赋予其诱导拓扑，则有一个闭嵌入 $A_{P,\,\pi}(G)^J\subset T_N([G]_P)^J$（其中 N 可以独立于 π 选取）。

反之，在不假设 $G=$ 一般线性群$_n$的情况下，对于任意足够大的 $N>0$ 以及任意 $X\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，存在 Y_1，…，$Y_r\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于任意 $\varphi\in L^2([G]_{P,\,0})^{J,\,\infty}$，我们有

$$\|\varphi\|_{-N,X}\le\sum_{i=1}^{r}\|R(Y_i)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}.$$

事实上，除一个常数因子外，我们可以取 $Y_i=\Delta^i$，其中 Δ 是下文(3.12) 中定义的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。

证明。 第一个断言见 [Cha25，引理 3.1.2。1], 第二个断言是Sobole夫不等式（[Ber88，第 3.4 节，关键引理], 另见 [Cha25，引理 3.8.1。1]）。最后一部分是 [BK14，命题 35]的结果。 □

3.4.4 常数项与尖点表示

对于 Q 一个标准抛物子群以及 $\varphi\in\mathcal{A}_P(G)$，我们有一个常数项$\varphi_Q$，定义如下：

$$\varphi_Q(g)=\int_{[N_Q]}\varphi(ng)dn,\quad g\in[G]_Q.$$

令$\mathcal{A}_{P,\mathrm{cusp}}(G)\subset\mathcal{A}_P^0(G)$为 φ 中满足以下条件的子空间：对所有 $Q\subsetneq P$，均有 $\varphi_Q=0$。令 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(G)$为$\mathcal{A}^{\mathrm{cusp}}(G)$的拓扑不可约子表示集合，其中赋予该空间从$\mathcal{A}(G)$继承的子空间拓扑。它是 $\Pi_{\mathrm{disc}}(G)$的子集。

3.4.5 交织算子

令 P和 Q为 G的标准抛物子群。令 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。令 $w\in W(P,Q)$和$\lambda\in\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，使得对于任意满足 $w\alpha<0$的 $\alpha\in\Delta_P$，$\langle R(\lambda)\ \alpha^\vee\rangle$ 都足够大。对于 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，考虑以下绝对收敛积分：

$$(M(w,\lambda)\varphi)_{w\lambda}(g)=\int_{(N_Q\cap wN_Pw^{-1})(\mathbb{A})\backslash N_Q(\mathbb{A})}\varphi_\lambda(w^{-1}ng)dn,\quad g\in[G]_Q.$$

根据 [Lan76] 和 [BL24], ，它可以亚纯延拓至 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ if φ 是 K_∞-有限的。根据 [Lap08]，这对任意 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 都成立，并为任意正则 λ 定义一个连续交织算子

$$M(w,\lambda):\mathcal{A}_{P,\pi}(G)\to\mathcal{A}_{Q,w\pi}(G).\tag{3.5}$$

根据 [BL24, 定理 2.3], $M(w,\lambda)$ 的奇点位于仿射根超平面上。

设 $Q' \subset Q$ 和 $P_I \subset P$ 满足 $w \in W(P', Q')$。那么对于 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$,

$$(M(w,\lambda)\varphi)_{Q'} = M(w,\lambda)\varphi_{P'}. \tag{3.6}$$

此外，若 R 是另一个标准抛物子群，且 $w_1 \in W(P,Q)$ 和 $w_2 \in W(Q,R)$，则根据 [BL24，定理 2.3, 5] 我们有函数方程

$$M(w_2, w_1\lambda)M(w_1,\lambda)\varphi = M(w_2 w_1, \lambda)\varphi. \tag{3.7}$$

3.4.6 艾森斯坦级数

设 $P \subset Q$ 是 G的标准抛物子群。对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G)$ 和 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$，我们定义

$$E^Q(g,\varphi,\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash Q(F)} \varphi_\lambda(\gamma g) = \sum_{\gamma \in M_Q \cap P(F)\backslash M_Q(F)} \varphi_\lambda(\gamma g), \quad g \in G(\mathbb{A}). \tag{3.8}$$

当 $R(\lambda)$ 位于某个适当的锥内时，此和绝对收敛。若 φ是 K_∞-有限的，则根据 [Lan76] 和 [BL24], , 它再次具有到 $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 的亚纯延拓；根据 [Lap08]，对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\mathrm{disc}}(G)$，这一结论也成立。若 $Q = G$，则我们简记为 $E(g,\varphi,\lambda)$。根据 [BL24，定理 2.3], , $E^Q(\varphi,\lambda)$ 的奇点位于仿射根超平面上。

对于正则的 λ， $E^G_Q(\varphi,\ \lambda)$ 是 $E(\varphi,\ \lambda)$ 沿 Q 的常数项。根据 [BL24，引理 6.10]„ 我们有

$$E^G_Q(\varphi,\lambda) = \sum_{w \in {}_Q W_P} E^Q(M(w,\lambda)\varphi_{P_w}, w\lambda). \tag{3.9}$$

我们有以 下关于交织算子与艾森斯坦级数之间的简单关系 .

引理 3.5。设 $\varphi \in A_{P,\ \mathrm{disc}}(G)$。设 Q、Q' 是 G 的两个标准抛物子群，使得$P \subset Q$。设 $w \in W(Q, Q')$。那么对于正则的 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\ \mathbb{C}}$，我们有

$$M(w,\lambda)E^Q(\varphi,\lambda) = E^{Q'}(M(w,\lambda)\varphi, w\lambda). \tag{3.10}$$

证明。这在绝对收敛区域内成立；对于处于一般位置的 λ，则由解析延拓可得。

□

3.4.7 尖点分量与剩余自守形式

设 $\varphi \in \mathrm{A}^0_P(G)$。由于尖点自守形式快速衰减（[MW95，第 I.2.18 节]），对于每个 $\varphi_0 \in \mathrm{A}_{P,\mathrm{cusp}}(G)$, 配对 $\varphi, \varphi_{0P,\mathrm{Pet}}$ 都有意义。根据 [MW95，第 I.2.18], 节，存在唯一的 $\varphi^{\mathrm{cusp}} \in \mathrm{A}_{P,\mathrm{cusp}}(G)$，使得对于所有 $\varphi_0 \in \mathrm{A}_{P,\mathrm{cusp}}(G)$，都有 $\langle \varphi, \varphi_{0P,\mathrm{Pet}} \rangle = \langle \varphi^{\mathrm{cusp}}, \varphi_{0P,\mathrm{Pet}} \rangle$。随后，这一定义推广到任意在 A^∞_P 的左平移作用下有限的 $\varphi \in \mathrm{A}_P(G)$（参见 [MW95，第 I.3.4] 节）。元组 $(\varphi^{\mathrm{cusp}}_Q)_{Q \subset P}$（其中 $\varphi^{\mathrm{cusp}}_Q$ 是常数项 φ_Q 的尖点分量）称为 φ 的尖点分量族。

若 $\varphi^{\mathrm{cusp}} = 0$，则称 φ 为剩余的。对于任意正则 λ，我们有 $E(\varphi,\ \lambda) \in \mathcal{A}(G)$。若此艾森斯坦级数是适当的（即 $P \neq G$），则 $E(\varphi,\ \lambda)$ 是剩余的

3.4.8 配对、三元组与基

设 P是 G的一个标准抛物子群。对于任意层 J，令 $\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)^J$（分别为 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)^J$）表示 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$（分别为 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)$）的子集，使得 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J \neq \{0\}$。令 e_J为支撑在 J 上、体积为 1 的测度。于是，投影 $R(e_J)$ 将 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 映射为 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J$。

Let $\widehat{K_\infty}$表示 K_∞ 的不可约酉表示的同构类集合。对于任意$\tau \in \widehat{K_\infty}$，令 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^\tau$为 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 的 τ-同型分量。对于任意层 J，定义

$$\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J} = \mathcal{A}_{P,\pi}(G)^\tau \cap \mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J.$$

沿用 [Cha25 第 3.2 节的术语3]，，我们称任意满足以下条件的 (P,π) 为 J-对： P是 G 的标准抛物子群，且 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)^J$。若 $\tau \in \widehat{K_\infty}$，则称任意满足 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)^\tau \neq \{0\}$ 的 (P,π) 为 τ-对。我们称任意 (P,π,τ) 为 J-三元组，其中 (P,π) 是一个 J-对，并且 $\tau \in K_\infty$，同时还要求 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J} \neq \{0\}$。注意，该子空间总是有限维的。令 $\mathrm{B}_{P,\pi}(\tau,J)$ 为 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$ 关于 $\cdot,\cdot_{P,\mathrm{Pet}}$ 的一组标准正交基。进而定义 $\mathrm{B}_{P,\pi}(J)$ 为对 $\tau \in K_\infty$ 取 $\mathrm{B}_{P,\pi}(\tau,J)$ 的并集。若 $\tau \in K_\infty$，令 e_τ 为支撑在 K_∞ 上的测度，定义为 $e_\tau(k) = \deg(\tau)\mathrm{trace}(\tau(k))dk$，其中 dk 是 K_∞ 上的概率 Haar 测度。则 $\widehat{\ }$ 投影 e_τ 将 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$ 映到 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)^\tau$。对于 $f \in \mathrm{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $\tau \in K_\infty$，定义

$$f_\tau := f * e_\tau. \tag{3.11}$$

3.4.9 数值不变量

我们借用 [Cha25，第 3.22]节中的一些记号。令

$$\Delta = \mathrm{Id} - \Omega_G + 2\Omega_K, \tag{3.12}$$

其中，Ω_G 和 Ω_{K_∞} 分别是与 G 和 K_∞ 相关联的卡西米尔算子，这些算子对应于 $\mathfrak{g}_\infty$ 上与迹相对应的标准基灵形式。

对于任意$\tau \in \widehat{K_\infty}$，令 λ_τ为 τ的卡西米尔特征值。令 P为 G的一个标准抛物子群。令 π_∞ 为 $M_P(F_\infty)$ 的一个不可约酉表示，并令 λ_{π_∞} 为 π_∞的卡西米尔特征值。令

$$\Lambda_{\pi_\infty}^{M_P} = \sqrt{\lambda_{\pi_\infty}^2 + \lambda_\tau^2},$$

其中， τ是 π_∞的一个最小 $K_\infty \cap M_P(F_\infty)$-型，即其无穷小特征具有最小范数，并且

$$\Lambda_{\pi_\infty}^{G} = \min_\tau \sqrt{\lambda_{\pi_\infty}^2 + \lambda_\tau^2},$$

其中，最小值取遍 $\mathrm{Ind}^{G(F_\infty)}_{P(F_\infty)}\ \pi_\infty$ 的极小 K_∞-类型。

若 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 的阿基米德分量为 π_∞，令

$$\lambda_\pi = \lambda_{\pi_\infty}, \quad \Lambda_\pi^{M_P} = \Lambda_{\pi_\infty}^{M_P}, \quad \Lambda_\pi = \Lambda_{\pi_\infty}^{G}.$$

关于卡西米尔特征值的一个关键性质是，若 $(P,\ \pi,\ \tau)$ 是一个 J-三元组，则由 [Mül02，引理 6.1]，可得 $\lambda_\tau \geq \lambda_\pi$。

3.4.10 $\mathcal{R}$-区域

设 P 是 G 的一个标准抛物子群。设 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。我们对 $k>0$、$c>0$ 和 $C>0$ 定义

$$\mathcal{R}_{\pi,k,c} = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \;\middle|\; \forall \alpha \in \Sigma_P,\ \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -c(1+\Lambda_\pi^{M_P} + |\langle \Im(\lambda), \alpha^\vee \rangle|)^{-k} \right\}, \tag{3.13}$$

and

$$\mathcal{R}_{\pi,k,c}^C = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \;\middle|\; \forall \alpha \in \Sigma_P,\ \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -c(1+\Lambda_\pi^{M_P} + |\langle \Im(\lambda), \alpha^\vee \rangle|)^{-k}, \quad \|\Re(\lambda)\| < C \right\}. \tag{3.14}$$

我们还定义

$$\mathcal{S}_{\pi,k,c} = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \;\middle|\; \|\Re(\lambda)\| < c(1+\Lambda_\pi^{M_P} + \|\Im(\lambda)\|)^{-k} \right\}, \tag{3.15}$$

这些定义受 [Lap13 第 3] 节的启发。两处差异在于，我们的集合是 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 的子集，而不是 $\mathfrak{a}^{G,*}_{P,\mathbb{C}}$；此外，在两个 $\mathcal{R}$ 集合中，我们允许 $R(\lambda)$ 在正方向上变得很大。

设 Q 是 G 的另一个标准抛物子群。令 $w \in {}_QW_P$。定义

$$\mathcal{R}_{\pi,k,c}(w) = \bigcap_{\substack{\alpha \in \Sigma_{P_w} \\ w\alpha < 0}} \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P_w}^* \;\middle|\; \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -c(1+\Lambda_\pi^{M_P} + |\langle \Im(\lambda), \alpha^\vee \rangle|)^{-k} \right\}, \tag{3.16}$$

and

$$\mathcal{R}_{\pi,k,c}^C(w) = \bigcap_{\substack{\alpha \in \Sigma_{P_w} \\ w\alpha < 0}} \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P_w}^* \;\middle|\; \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -c(1+\Lambda_\pi^{M_P} + |\langle \Im(\lambda), \alpha^\vee \rangle|)^{-k}, \quad \|\Re(\lambda)\| < C \right\}. \tag{3.17}$$

这些区域分别包含 $\mathcal{R}_{\pi,k,c}$ 和 $\mathcal{R}_{\pi,k,c}^C$。

3.5 伪艾森斯坦级数与谱分解

我们沿用上一节的记号。现在介绍一些关于伪-Eisenstein级数的一般性质，并陈述关于标量积的朗兹谱分解定理。

3.5.1 伪-Eisenstein级数

令$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*)$为定义在$\mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$ 上的 Paley–Wiener空间，其元素是定义在 $\mathfrak{a}_P$上的紧支撑光滑函数的傅里叶变换。若$\mathcal{V}$ 是$\mathcal{A}_{P,\ \mathrm{cusp}}(G)$中 K_∞-有限函数构成的有限维子空间，我们将$\mathcal{PW}_{P,\ \mathcal{V}}$ 定义为$\mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$ 上取值于$\mathcal{V}$的 Paley–Wiener型整函数空间。记$\mathcal{PW}_P$ 为所有$\mathcal{PW}_{P,\ \mathcal{V}}$的直和。对于 $\Phi \in \mathcal{PW}_P$ 及任意$\kappa \in \mathfrak{a}_P^*$，考虑

$$F_\Phi(g) = \int_{\substack{\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \\ \Re(\lambda) = \kappa}} \Phi(\lambda)(g) \exp(\langle \lambda, H_P(g) \rangle) d\lambda, \quad g \in G(\mathbb{A}). \tag{3.18}$$

它与 κ 的选择无关。我们定义与 Φ 相关联的伪-Eisenstein级数如下：

$$E(g, F_\Phi) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} F_\Phi(\gamma g), \quad g \in [G].$$

这里的求和实际上遍历一个有限集，该有限集依赖于 g，见 [Art78，引理 5.1]。这个伪-Eisenstein 级数迅速衰减。此外，根据 [MW95，第 II.1.11] 节，我们有

$$E(g,F_\Phi)=\int_{\Re(\lambda)=\kappa}E(g,\Phi(\lambda),\lambda)d\lambda,\quad g\in[G], \tag{3.19}$$

对绝对收敛区域中的任意 κ，艾森斯坦级数都成立。

引理 3.6。向量空间

$$\bigoplus_{P_0\subset P}\bigoplus_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)}E\left(\mathcal{PW}_{P,\pi}\right) \tag{3.20}$$

在 $\mathcal{S}([G])$ 中稠密。

证明。(3.20) 中的空间在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 中左 K_∞-有限函数的作用下保持不变。后者构成一个稠密子空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$（参见 [Art78，第 931] 页）。根据 [DM78] 的 Dixmier–Malliavin 定理（另见 [BPCZ22，第 2.5.3] 节），因此只需证明 (3.20) 在 $\mathcal{S}^{00}([G])$ 中稠密。设 $l\in\mathcal{S}^{00}([G])^*$ 为该空间的拓扑对偶，并假设其在 (3.20) 上的限制为零。利用配对 (3.4)，可将其与某个 $\mathcal{T}^0_N([G])$ 中的元素 φ 等同。设 δ_n 是 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 中的一个狄拉克序列，使得 $R(\delta_n)l$ 弱收敛到 l。那么所有 $R(\delta_n)l$ 都对应于光滑元素 $\varphi_n\in\mathcal{T}^0_N([G])\cap\mathcal{T}([G])$。此外，按照 [GH24，引理 4.4.3]，中的相同步骤，可以选择 δ_n 为 K_∞-有限。由此可知，所有 $R(\delta_n)l$ 在 (3.20) 上均为零。根据 [BPCZ22，等式 (2.5.13.12)]，中常数项与艾森斯坦级数之间的伴随性，这意味着 φ_n 与所有空间 $\mathrm{PW}_{P,\pi}$ 正交。由 [MW95，定理 II.1.12] 可知，它们必为零，因此 l 也为零。证明完毕。注意，[MW95，定理 II.1.12] 是针对空间 $L^2([G])$ 撰写的，但对 $\mathcal{T}([G])$ 也成立（参见 [MW95，命题 I.3.4]）。

□

3.5.2 朗兰兹谱分解定理

现在我们陈述　　来自 [Lan76] 的朗兰兹谱定理的伪艾森斯坦级数版本　　.

定理 3.7. 设 J 为一个层。对于每个 $\Phi\in PW^J$ 和 $\Phi'\in PW^J$，我们有

$$\langle E(F_\Phi),E(F_{\Phi'})\rangle_G=\sum_{P_0\subset P}\frac{1}{|\mathcal{P}(M_P)|}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)}\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle E(F_{\Phi'}),E(\varphi,\lambda)\rangle_G\langle E(\varphi,\lambda),E(F_{\Phi'})\rangle_G d\lambda. \tag{3.21}$$

注意，(3.21) 中的求和是有限的。在定理 4.25 中，我们将证明，(3.21) 中涉及的艾森斯坦级数在某个空间 $\mathcal{T}_N([G])$ 中构成一个可积族。这将使我们能够在命题 4.30 中把定理 3.7 推广到衰减足够快的函数。

4 一般线性群n上的离散艾森斯坦级数

在本章中，群 G 是某个 $n\geq 1$上的 GL_n。我们采用以下约定。取 P_0 为上三角矩阵构成的标准 Borel 子群，取 $M_0=T_0$ 为对角线极大环面。群 K 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 的标准极大紧子群。

如果 P 是 GL$_n$的标准抛物子群，则其标准 Levi 因子具有如下形式： M_P =GL$_{n_1} \times \ldots \times$ GL$_{n_m}$，其中 n_1为整数，……， n_m。采用这一记号，我们将元组$n(P) := (n_1, \ldots\ldots, n_m)$与 P相关联。这完全刻画了 P在 GL$_n$的标准抛物子群中的形式。我们常写作 $M_P = \prod$GL$_{n_i}$，其中默认乘积按 $i = 1, \ldots\ldots, m$的顺序取。我们通过将 $X^*(P)$ 的典范基 (e_i^*) 映射到 $\mathbb{R}^m$的典范基，将 $\mathfrak{a}_P^*$与 $\mathbb{R}^m$ 对应起来。相对于此基，我们将写作 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$。

若 $w \in W$，我们取 [KS88 第 2] 节所规定的 w在一般线性群$_n(F)$ 中的代表元。若 $P = M_P N_P$ 是一般线性群$_n$的标准抛物子群，则我们有一个从 $W(M_P)$（即 M_P的魏尔群）到 W中的嵌入。记 M_P =一般线性群$_{n_1} \times \ldots \times$一般线性群$_{n_m}$。我们有一个集合的同一（$W$），使得若 P，则有 $\simeq \mathfrak{S}_m$，

$$\sigma M_P \sigma^{-1} = M_{n_{\sigma^{-1}(1)}} \times \ldots \times \ldots M_{n_{\sigma^{-1}(m)}}.$$

我们常将 $w \in W(P)$ 与 $\mathfrak{S}_m$中的一个元素等同。我们用 $w.P$ 表示具有标准 Levi 因子 wM_Pw^{-1}的一般线性群$_n$ 的标准抛物子群。如果 $w \in W$ 属于 $W(P)$，我们就说它通过置换 M_P的块（或简称为按块作用于 P）。

4.1 一般线性群GL_n的离散自守形式

4.1.1 [MW89]的分类

设 $\pi \in \Pi_{\text{disc}}$(一般线性群$_n$)。存在整数 $r, d \geq 1$，满足 $n = rd$，并且存在 $\sigma \in \Pi_{\text{cusp}}$(一般线性群$_r$)，使得任意一个$\varphi \in \mathcal{A}_\pi$(一般线性群$_n$)都可表示为一个艾森斯坦级数的留数；该艾森斯坦级数由一个 $\phi \in \mathcal{A}_{P_\pi, \sigma^{\boxtimes d}}$(一般线性群$_n$)构造而成，其中 $P_\pi \subset$一般线性群$_n$ 是 Levi 因子为一般线性群$_r^d$的标准抛物子群。更确切地说，定义

$$\nu_\pi = -\rho_{P_\pi}/r, \quad \sigma_\pi = \sigma^{\boxtimes d} \in \Pi_{\text{cusp}}(M_{P_\pi}), \tag{4.1}$$

并为$\lambda \in \mathfrak{a}_{P_\pi}^*$, $\mathbb{C}$设定

$$L_{\pi,\text{res}}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{P_\pi}} \left(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle - 1\right). \tag{4.2}$$

注意，$L_{\pi,\ \text{res}}(-\nu_\pi) = 0$。我们在（4.1）中引入一个负号，以遵循 [Cha25] 的约定。对于每个 $g \in$一般线性群$_n(\mathbb{A})$，记 $E^*(g,\ \phi,\ \cdot)$ 为映射 $\lambda \mapsto L_{\pi,\ \text{res}}(\lambda)E(g,\ \phi,\ \lambda)$。它在 $-\nu_\pi$ 的一个邻域内是全纯的。由 [MW89]，我们有

$$\varphi(g) = E^*(g, \phi, -\nu_\pi). \tag{4.3}$$

由于 π 是 $\mathcal{A}_{P_\pi,\ \sigma_\pi,\ -\nu_\pi}$(GL$_n$) 的唯一不可约商，因此称其为 Speh 表示是恰当的，并记为 $\pi = \text{Speh}(\sigma,\ d)$。

令 $\pi, \pi' \in \Pi_{\text{disc}}$(一般线性群$_n$)。按照第 4.1.1 节中对 π' 的定义，定义 r', d', σ', $P_{\pi'}$。根据 [MW95], ，完备的兰金–塞尔伯格 L 函数 $L(s, \pi \times \pi')$ 存在且满足

$$L(s, \pi \times \pi') = \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{d'} L\left(s + \frac{d - 2i + 1}{2} + \frac{d' - 2j + 1}{2}, \sigma \times \sigma'\right). \tag{4.4}$$

4.1.2 诱导情形

现在我们讨论由 Levi 子群的离散谱诱导而来的表示，也就是一般线性群$_n$的 Arthur 型表示。令 $P = M_P N_P$ 为一个标准抛物子群。令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。相应地记 $M_P =$一般线性群$_{n_1} \times \ldots \times$ 一般线性群$_{n_m}$ 和 $\pi = \pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_m$。根据第 4.1.1 节，存在整数 $r_i, d_i \geq 1$，满足 $n_i = r_i d_i$，以及一些表示 $\sigma_i \in \Pi_{\mathrm{cusp}}$(一般线性群$_{r_i}$)，使得任意 $\varphi_i \in \mathcal{A}_{\pi_i}$(一般线性群$_{n_i}$) 都可表示为一个艾森斯坦级数的留数，该级数由一个$\phi_i \in \mathcal{A}_{P_{\pi_i}, \sigma_i^{\boxtimes d_i}}$(一般线性群$_{n_i}$) 构造而成，其中 $P_{\pi_i} \subset$ 一般线性群$_{n_i}$ 是 Levi 因子为一般线性群$_{r_i}^{d_i}$ 的标准抛物子群。设 $P_\pi = (P_{\pi_1} \times \ldots \times P_{\pi_m}) N_P$，以及 $\sigma_\pi = \sigma_1^{\boxtimes d_1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_m^{\boxtimes d_m}$，后者是 M_{P_π} 的尖点自守表示。

注意，任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}$(一般线性群$_n$) 都是剩余的，除非 π 是尖点的（即 $P = P_\pi$）。事实上，这由以下事实得到：艾森斯坦级数与尖点形式正交（§3.4.6 意义下），并且我们可以利用 [Lap08, 定理 2.2]（另见 [Boi25a, 引理 9.4.2.1]，其中给出了一个密切相关的论证）在彼得森内积下计算留数。

设 Q 和 R 为一般线性群 GL_n 的一个抛物子群，使得 $P_\pi \subset Q \subset P$。记 $Q \cap M_P = Q_1 \times \ldots \times Q_m$。我们有一个分解 $\mathfrak{a}^{P,\ \ }_{\ Q}{}^* = \oplus_{i=1}^m \mathfrak{a}^{\mathrm{GL}_{n_i},\ Q_i\ \ *}$。令

$$\nu_{Q,\pi} = \left(-\rho_{Q_i}^{\mathrm{GL}_{n_i}} / r_i\right)_{1 \leq i \leq r} \tag{4.5}$$

相应地记作。如果上下文清楚，我们省略下标 π。如果 $Q = P_\pi$，我们将记作 ν_π。

根据构造，若 $P_\pi \subset Q \subset P$，则对任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}$(一般线性群$_n$)，我们有 $\varphi_{Q,\ -\nu_Q} \in \mathcal{A}_Q^0$(一般线性群$_n$)（见引理 4.3）。此外，注意到 $\varphi_Q = 0$ 除非 $P_\pi \subset Q$。若 $w \in {}_Q W_P$ 使得 $P_\pi \subset P_w$，则我们令 $\varphi_w := \varphi_{P_w}$ 并令 $\nu_w := \nu_{P_w}$。

Set

$$L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{P_\pi}^P} \left(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle - 1\right). \tag{4.6}$$

对于每个 $g \in$一般线性群$_n(\mathbb{A})$ 和 $\phi \in \mathrm{A}_{P_\pi, \sigma_\pi}$(一般线性群$_n$)，记 $E^{P,*}(g, \phi, \cdot)$ 为艾森斯坦级数 $\lambda \mapsto L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda) E^P(g, \phi, \lambda)$ 的部分留数。它在 $-\nu_\pi$ 的某个邻域内全纯。由诱导的正合性可知，对于每个 $\varphi \in \mathrm{A}_{P,\pi}$(一般线性群$_n$)，存在 $\phi \in \mathrm{A}_{P_\pi, \sigma_\pi}$(一般线性群$_n$)，使得 $\varphi = E^{P,*}(\phi, -\nu_\pi)$。我们记 $\pi = \boxtimes_{i=1}^m \mathrm{Speh}(\sigma_i, d_i)$。

最后，令 w_π^* 为 $W^P(P_\pi,\ P_\pi)$ 中的最长元素，即该集合中满足 $w(P_\pi \cap M_P) w^{-1}$ 与 $P_\pi \cap M_P$ 相对的唯一元素 w。注意，它在 $\mathfrak{a}_P^*$ 上按单位元作用，并且$w_\pi^* \sigma_\pi = \sigma_\pi$ 和 $w_\pi^* \nu_\pi = -\nu_\pi$。

4.2 交织算子的归一化

在本节中，令 P 为 G 的标准抛物子群，并令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。令 Q 为 G 的标准抛物子群。令 $w \in W(P,\ Q)$，并取一个处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_P^*$。记 $M_\pi(w,\ \lambda)$ 为 $M(w,\ \lambda)$（定义见 (3.5)）在子空间 $\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G) \subset \mathcal{A}_P(G)$ 上的限制。遵循 [Art82], ，我们将 $M_\pi(w,\ \lambda)$ 归一化为

$$M_\pi(w, \lambda) = n_\pi(w, \lambda) N_\pi(w, \lambda). \tag{4.7}$$

这里，$n_\pi(w,\ \lambda)$ 是 λ 中的一个亚纯函数，称为“标量因子”，而 $N_\pi(w,\ \lambda)$ 则是所谓的“归一化算子”。如果上下文清楚，我们将省略下标 π。下面将介绍这些对象。本节的目标是回顾 $M_\pi(w,\ \lambda)$ 的主要性质。随后，我们将解释该算子如何出现在离散自守形式的常数项中。

4.2.1 标量因子

记 $M_P =$一般线性群$_{n_1} \times \ldots \times$一般线性群$_{n_m}$和 $\pi = \pi_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_m$。令 $\beta \in \Sigma_P$ 为与两个块一般线性群 $_{n_i}$ 和一般线性群 $_{n_j}$ 相关联的 P 的正根，其中 $1 \le i < j \le m$。置

$$n_\pi(\beta, s) = \frac{L(1-s, \pi_i^\vee \times \pi_j)}{L(1+s, \pi_i \times \pi_j^\vee)}, \quad \text{and} \quad n_\pi(w, \lambda) = \prod_{\substack{\beta \in \Sigma_P \\ w\beta < 0}} n_\pi(\beta, \langle \lambda, \beta^\vee \rangle). \tag{4.8}$$

由 (4.4)，标量因子可用尖点兰金–塞尔伯格 L 函数表示。对于 L 函数的阿基米德部分（分别是有限部分），我们记作 L_∞（分别记作 L^∞）。

定理 4.1. 设 σ_1 和 σ_2 分别是一般线性群$_{r_1}$ 和一般线性群$_{r_2}$ 上的尖点自守表示。若 $\sigma_1 \simeq \sigma_2$，令 $\delta_{\sigma_1,\ \sigma_2} = 1$；否则令0。

1. 极点：函数

$$(s(1-s))^{\delta_{\sigma_1,\sigma_2}} L(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee)$$

是整函数，阶为一。

2. 函数方程：我们有

$$L(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee) = \epsilon(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee) L(1-s, \sigma_1^\vee \times \sigma_2),$$

其中 $\epsilon(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee) = \epsilon_0 q_{\sigma_1 \times \sigma_2^\vee}^{\frac{1}{2}-s}$，$\epsilon_0$ 是模为 1 的复数，而 $q_{\sigma_1 \times \sigma_2^\vee} \in \mathbb{N}$ 是 $\sigma_1 \times \sigma_2^\vee$ 的算术导子。

3. 阿基米德因子：我们有

$$L_\infty(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee) = \prod_{j=1}^{m} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \alpha_j),$$

其中 $m = r_1 r_2 [F\colon \mathbb{Q}]$，$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s)$（通常的 Γ 函数），并且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 是复数，使得对每个 j

$$1 - \Re(\alpha_j) > \frac{1}{r_1^2 + 1} + \frac{1}{r_2^2 + 1}. \tag{4.9}$$

4. 零点自由区域：存在 k，使得对于每个层 J，都存在 $c_J > 0$，使得对于每个 J-对 (P, π) 以及每个 i, j，亚纯函数 $s \mapsto L^\infty(s, \sigma_i \times \sigma_j^\vee)$ 在区域 $R(s) \ge 1 - c_J \left(1 + \Lambda_\pi^{M_P} + |s|\right)^{-k}$ 中没有零点，其中 $\sigma_\pi = \sigma_1^{\boxtimes d_1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_m^{\boxtimes d_m}$ 是 *§4.1.2* 中定义的 M_{P_π} 的尖点表示。

证明。 1. 和 2. 在 [JPS83] 中得到证明。3. 中的界 (4.9) 见 [MS04, 命题 3.3]，其依据是 [LRS99]。4. 见 [Lap13, 命题 3.5]，其中引用了 [Bru06]。更准确地说， [Lap13, 命题 3.5] 用 σ_π 的解析导子来表示零点自由区域。但正如 [Cha25, 第 3.4 节.7], 中所指出的，由于层 J 固定，后者可由 $\Lambda_\pi^{M_P}$ 控制。因此，我们得出结论，该零点自由区域成立。 □

4.2.2 局部归一化交织算子

设 $\phi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。假设 $\phi = \otimes_v' \phi_v$ 是可分解的，因此对所有赋值 v，都有 $\phi_v \in I_P^G \pi_v$。设 $S \subset V_F$ 为一个有限赋值集，使得当 $v \notin S$ 时，ϕ_v 是非分歧的。根据 [Art89, 定理 2.1]，我们有如下分解

$$N_\pi(w,\lambda)\phi = \prod_{v \in S} N_{\pi_v}(w,\lambda)\phi_v \tag{4.10}$$

其中，$N_{\pi_v}(w,\lambda)$ 是亚纯局部交织算子 $I_P^G \pi_{v,\lambda} \to I_Q^G w\pi_{v,\lambda}$。(4.10) 中的乘积记号表示 $N_\pi(w,\lambda)\phi$ 是可分解的，并且对于 $v \notin S$，局部分量 $N_{\pi_v}(w,\lambda)\phi_v$ 是 $I_Q^G w\pi_\lambda$ 中唯一满足 $\phi_v(1) = N_{\pi_v}(w,\lambda)\phi_v(1)$ 的非分歧向量。

设 $v \in V_F$。归一化算子 N_{π_v} 是根据一个局部 L-函数定义的，因此对任意光滑不可约酉表示 π_v of $M_P(F_v)$ 都有意义（该表示不一定是某个 $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(M_P)$ 的局部分量）。我们回顾一下 $N \geq 1$ 时 $\mathrm{GL}_N(F_v)$ 的这类表示的分类。对于某个 $\mathrm{GL}_r(F_v)$ 的任意离散级数 δ 和任意 $d \geq 1$，令 $\mathrm{Speh}(\delta, d)$ 为抛物诱导 $\delta_{d-1} \times \ldots \times \delta_{1-d}$ 的唯一不可约商。根据 [Tad86，非阿基米德情形下的定理 A(ii)]，以及 [Vog86]，在阿基米德情形下，对于 $\overline{\mathrm{GL}_N(F_v)}$ 的任意光滑不可约酉表示 τ，存在某个 $\mathrm{GL}_{N_i}(F_v)$ 的离散级数 $\delta_1 \ldots \delta_k$、整数 $d_1, \ldots, d_k$ 和实数 $-1/2 < \nu_1, \ldots, \nu_k < 1/2$，使得

$$\tau \simeq \mathrm{Speh}(\delta_1, d_1)_{\nu_1} \times \ldots \times \mathrm{Speh}(\delta_k, d_k)_{\nu_k}.$$

Set

$$e(\tau) = 2 \inf \left\{ \frac{1}{2} - |\nu_i| \mid 1 \leq i \leq k \right\}.$$

若此时 $\pi_v = \pi_{v,1} \boxtimes \ldots \boxtimes \pi_{v,m}$ 是 $M_P(F_v)$ 的光滑不可约酉表示，令 $e(\pi_v) = \min e(\pi_{v,i})$。

定理 4.2。设 π_v 是 $M_P(F_v)$的光滑不可约酉表示。

1. 对每个 $\phi_v \in I_P^G \pi_v$，向量 $N_{\pi_v}(w,\lambda)\phi_v$ 在 v 为阿基米德情形时是 λ 中的有理函数，在 v 为非阿基米德情形时是 $q_v^{-\lambda}$中的有理函数。更确切地说，对于满足阿基米德情形下 $w\alpha < 0$（非阿基米德情形下 $w\alpha < 0$）的 $\alpha \in \Delta_P$，它是变量 $\langle \lambda, \alpha \rangle$（分别为 $q^{-\langle \lambda, \alpha \rangle_v}$）的有理函数。

2. 若 $w_1 \in W(P,Q)$ 且 $w_2 \in W(Q,R)$，则有

$$N_{w_1\pi_v}(w_2, w_1\lambda) N_{\pi_v}(w_1, \lambda) = N_{\pi_v}(w_2 w_1, \lambda).$$

3. 算子 $N_{\pi_v}(w,\lambda)$ 在区域内是全纯的

$$\bigcap_{\substack{\alpha \in \Sigma_P \\ w\alpha < 0}} \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \mid \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -e(\pi_v) \right\}.$$

4. 如果 π_v 是某个 $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(M_P)$ 的局部分量，那么

$$e(\pi_v) > \frac{2}{1+n^2}.$$

证明。1.、2. 包含于 [Art89, 定理 2.1]。将 $N_{\pi_v}(w,\lambda)$ 分解为秩一交织算子的乘积，可得 3. 见 [MW89, 命题 I.10]。4. 对尖点表示的局部分量，证明见 [MS04, 命题 3.3]，；对残余表示，证明见 [MS04, 命题 3.5]。

□

4.2.3 离散自守形式的常数项

现在固定 G 的一个标准抛物子群 P，以及 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。我们有 §4.1.2 中的 P_π 和 $\sigma_\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_{P_\pi})$。对于任意 $\phi \in \mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$，考虑正则化算子

$$M^*(w_\pi^*,\lambda)\phi := L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda)M(w_\pi^*,\lambda)\phi. \tag{4.11}$$

由全局交织算子（4.7）的分解、定理 4.1 中全局 L因子极点的局部化，以及定理 4.2 中局部交织算子的正则性可知，存在一个常数 c_π，使得对于任意 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 都有

$$M^*(w_\pi^*,-\nu_\pi+\lambda)\phi = c_\pi N_{\sigma_\pi}(w_\pi^*,-\nu_\pi+\lambda)\phi. \tag{4.12}$$

由定理 4.2 可知，$M^*(w_\pi^*,\ -\nu_\pi+\lambda)\phi$ 在 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$上是正则的。此外，根据 [Boi25b，推论 3.3] $M^*(w_\pi,\ -\nu_\pi)$ 也实现了商映射 $\mathcal{A}_{P_\pi,\ \sigma_\pi,\ -\nu_\pi}(G) \to \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$。

现在采用 §4.1.2 的记号。设 $P_\pi \subset Q \subset P$。对于每个 $1 \le i \le m$，存在整数d_i、1、...、d_i、$_{m_i}$，使得 $\sum_{j=1}^{m_i} d_i$、$_j = d_i$ 以及 $M_Q = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{m_i}$一般线性群$_{r_i d_i}$、$_{j_0}$ 对于每一对 (i,j)，设n_i、$_j = r_i d_i$、$_j$ 以及 P_i、$_j = P_{\pi_i} \cap$一般线性群$_{n_i}$、$_{j_0}$ 设 π_i、$_j$ 为由从 $\phi_{i,j} \in \mathrm{A}_{P_i,j,\sigma^{\boxtimes d_i}}$，$_j$ (一般线性群$_{n_i,j}$) 构造的艾森斯坦级数的留数张成的$_{n_i,j}$ 一般线性群的离散表示。置 $\pi_Q = \boxtimes_i \boxtimes_j \pi_i$、$_j$，其为 M_Q的离散表示。以下是 [Boi25b，引理 3.2]。

引理 4.3。对于每个 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}$(一般线性群$_n$)，我们有 $\varphi_{Q,\ -\nu_Q} \in \mathcal{A}_{Q,\ \pi_Q}$(一般线性群$_n$)。特别地，$\varphi_{Q,\ -\nu_Q}$是剩余的，除非 $Q = P_\pi$。此外，在这种情况下，假设对于每个 $\phi \in \mathcal{A}_{P_\pi,\ \sigma_\pi}$(一般线性群$_n$)，有 $\varphi = E^{P,\ *}(\phi,-\nu_\pi)$。那么我们有

$$\varphi_{P_\pi} = M^*(w_\pi^*,-\nu_\pi)\phi. \tag{4.13}$$

注意，我们对测度的选择在艾森斯坦级数的留数与常数项之间给出了伴随性。

命题 4.4。对于每个 $\phi \in \mathcal{A}_{P_\pi,\ \sigma_\pi,\ -\nu_\pi}(G)$ 以及 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$，我们有

$$\langle E^{P,*}(\phi,-\nu_\pi),\varphi\rangle_{P,\mathrm{Pet}} = \langle \phi, \varphi_{P_\pi}\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}}.$$

证明。由 Iwasawa分解，只需证明当 $P = G$ 时命题成立。记 $M_{P_\pi} = \mathrm{GL}_r^d$，并记 $\sigma_\pi = \sigma^{\boxtimes d}$，其中 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_r)$。选取 $\phi' \in \mathrm{A}_{P_\pi,\sigma_\pi,-\nu_\pi}$，使得$E^*(\phi') = \varphi$。令 $\Lambda^{T,\mathrm{Art}}$ 为来自 [Art80] 的 Arthur 截断算子。这里 $T \in \mathfrak{a}_0^G$ 是一个截断参数；若对所有 $\alpha \in \Delta_0$ 均有 $\alpha, T > M$，则称其充分正。这也自然定义了 $\lim_{T\to\infty}$ 的概念。根据 [Cha25 的 Maaß–Selberg 关系定理 3.1.3.1]，对于处于一般位置的 $\lambda,\lambda' \in \mathfrak{a}^{G,}{}_{P_\pi}^{\ *},\mathbb{C}$，且 $T \in \mathfrak{a}_0^G$ 充分正时，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \Lambda^{T,\mathrm{Art}} E(\phi,\lambda), E(\phi',\overline{\lambda'})\rangle_{G,\mathrm{Pet}} \\
&= \sum_{w,w' \in W(P_\pi,P_\pi)} \langle M(w,\lambda)\phi, M(w',\overline{\lambda'})\phi'\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}} \frac{\exp(\langle w\lambda + w'\lambda', T_{P_\pi}\rangle)}{\theta_{P_\pi}^{\mathrm{Art}}(w\lambda+w'\lambda')},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中，对于任意标准抛物子群 Q of GL_n，我们记 $\mathrm{vol}(\mathfrak{a}_Q^G/\mathbb{Z}(\Delta_Q^\vee))$ 为由 $\Delta_Q^\vee$ 在 $\mathfrak{a}_Q^G$ 中生成的格的余体积，并令

$$\theta_Q^{\mathrm{Art}}(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_Q^G/\mathbb{Z}(\Delta_Q^\vee))^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_Q} \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle.$$

我们用两种方法计算此表达式的留数。令

$$f^T_{\phi,\phi'}(\lambda,\lambda') := L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda)L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda')\langle\Lambda^{T,\mathrm{Art}}E(\phi,\lambda),E(\phi',\overline{\lambda'})\rangle_{G,\mathrm{Pet}}.$$

首先，由 [Zyd22 定理 3.9] 中截断算子的连续性以及 [Lap08 定理 2.2], 中艾森斯坦级数的连续性，我们有

$$f^T_{\phi,\phi'}(-\nu_\pi,-\nu_\pi) = \langle\Lambda^{T,\mathrm{Art}}E^*(\phi,-\nu_\pi),E^*(\phi',-\nu_\pi)\rangle_{G,\mathrm{Pet}} = \langle\Lambda^{T,\mathrm{Art}}E^*(\phi,-\nu_\pi),\varphi\rangle_{G,\mathrm{Pet}}.$$

再次应用 Maaß–Selberg 关系，可得

$$f^T_{\phi,\phi'}(-\nu_\pi,-\nu_\pi) = \sum_{Q\supset P_\pi}\langle E^*(\phi,-\nu_\pi)_Q,\varphi_Q\rangle_{Q,\mathrm{Art}}\frac{\exp(\langle 2\nu_Q,T_Q\rangle)}{\theta^{\mathrm{Art}}_Q(2\nu_Q)},$$

这是良定义的，因为对于所有 $P_\pi\subset Q$ 和 $\alpha\in\Delta_Q$，我们都有 $\langle 2\nu_Q,\alpha^\vee\rangle<0$。特别地，令 $T\to\infty$ 趋于极限，可得

$$\lim_{T\to\infty} f^T_{\phi,\phi'}(-\nu_\pi,-\nu_\pi) = \langle E^*(\phi,-\nu_\pi),\varphi\rangle_{G,\mathrm{Pet}}. \tag{4.15}$$

现在我们从（4.14）的右端出发。对于正则的 λ，我们有

$$f^T_{\phi,\phi'}(\lambda,-\nu_\pi) = L_{\pi,\mathrm{res}}(\lambda)\sum_{w\in W(P_\pi,P_\pi)}\langle M(w,\lambda)\phi,M^*(w^*_\pi,-\nu_\pi)\phi'\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}}\frac{\exp(\langle w\lambda+\nu_\pi,T_{P_\pi}\rangle)}{\theta^{\mathrm{Art}}_{P_\pi}(w\lambda+\nu_\pi)}.$$

设 $w\in W(P_\pi,P_\pi)$。在 $-\nu_\pi$ 的一个邻域内，$\theta^{\mathrm{Art}}_{P_\pi}(w\lambda+\nu_\pi)^{-1}$ 的极点均为简单极点，且位于仿射超平面 $\langle\lambda,w^{-1}\alpha^\vee\rangle=\langle-\nu_\pi,\alpha^\vee\rangle=1$ 上，其中 $\alpha\in\Delta_{P_\pi}$。特别地，它们与 $M(w,\lambda)$ 在 $-\nu_\pi$ 处的极点不同；后者的形式为 $\langle\lambda,\beta^\vee\rangle=1$，其中 $\beta^\vee\in\Delta_{P_\pi}$ 且 $w\beta<0$。因此，我们可以在求和号下计算留数，得到

$$f^T_{\phi,\phi'}(-\nu_\pi,-\nu_\pi) = \sum_{w\in W(P_\pi,P_\pi)}\langle M^*(w,-\nu_\pi)\phi,M^*(w^*_\pi,-\nu_\pi)\phi'\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}}\frac{\exp(\langle -w\nu_\pi+\nu_\pi,T_{P_\pi}\rangle)}{\theta^{\mathrm{Art},*}_{P_\pi}(-w\nu_\pi+\nu_\pi)},$$

其中 $M^*(w,-\nu_\pi)$ 和 $\theta^{\mathrm{Art},*}_{P_\pi}(-w\nu_\pi+\nu_\pi)$ 是相应的正则化。但我们看到，$\lim_{T\to\infty}\langle -w\nu_\pi+\nu_\pi,T_{P_\pi}\rangle=-\infty$ 除非 $w=1$，因此由引理 4.3

$$\lim_{T\to\infty} f^T_{\phi,\phi'}(-\nu_\pi,-\nu_\pi) = \frac{\langle\phi,\varphi_{P_\pi}\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}}}{\theta^{\mathrm{Art},*}_{P_\pi}(0)} = \langle\phi,\varphi_{P_\pi}\rangle_{P_\pi,\mathrm{Pet}}\times\mathrm{vol}(\mathfrak{a}^G_{P_\pi}/\mathbb{Z}(\Delta^\vee_{P_\pi})). \tag{4.16}$$

回顾我们在 §3.2.3 中对测度和坐标的选择，可知 $\mathrm{vol}(\mathfrak{a}^G_{P_\pi}/\mathbb{Z}(\Delta^\vee_{P_\pi}))$ 等于 1。由 (4.15) 和 (4.16) 即得该命题。 □

4.3 交织算子的正则性

设 P 是 G 的一个标准抛物子群，令 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。设 Q 是 G 的另一个标准抛物子群，并取满足 $P_\pi\subset P_w$ 的 $w\in{}_QW_P$。将引理 4.3 中定义的表示 $\pi_{P_w}\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_{P_w})$ 记为 π_w。令 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。与之前一样，设 $\nu_w=\nu_{P_w}$ 和 $\varphi_w=\varphi_{P_w}$。由引理 4.3，我们有归一化

$$M(w,\lambda)\varphi_w = n_{\pi_w}(w,\lambda+\nu_w)N_{\pi_w}(w,\lambda+\nu_w)\varphi_{w,-\nu_w} \tag{4.17}$$

本节的目标是确定 $M(w,\lambda)$ 在 $\mathfrak{a}^{*,+}_P$ 的某个形如 $\mathcal{R}_{\pi,k,c_J}$ 的邻域中的极点（见 (3.13)）。

4.3.1 标量因子的正则性

引理 4.5。 存在 $k>0$，使得对于每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个J-对 (P,π)，都存在仿射根线性形式的乘积 $L_{\pi,w}\in\mathbb{C}[\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}]$，使得该乘积

$$\lambda\mapsto L_{\pi,w}(\lambda)n_{\pi_w}(w,\lambda+\nu_{P_w}).$$

在区域 R_{π,k,c_J} 中正则。

注 4.6。 如证明所示，集合 $\{L_{\pi,w}\}$ 是有限的，其中 w 和 π 的取值如 §4.3 所述。此外，若 π 是尖点，我们可以取

$$L_{\pi,w}(\lambda)=\prod_{\substack{i<j\\ w(i)>w(j)\\ \pi_i\simeq\pi_j}}(\lambda_i-\lambda_j-1).$$

对于一般的 π，我们不对$L_{\pi,w}$ 作精确描述，因为在我们所关注的情形中，它很容易计算。

证明。 利用 (4.4) 中给出的离散自守表示的 L-因子描述，我们可知等式成立

$$n_{\pi_w}(w,\lambda+\nu_w)=n_{\sigma_\pi}(w,\lambda+\nu_\pi). \tag{4.18}$$

因此，我们可以假设 $P_w=P_\pi$。我们采用 §4.1.2 中的记号。对每个 i，令 $D_i=\sum_{j=1}^{i}d_j$。于是 w 通过置换 M_{P_π} 的块而作用，因此我们可以将其视为 $\mathfrak{S}_{D_m}$ 的一个元素。令 $1\le i<j\le m$。对每个 $1\le a\le d_i$，令 b_a 为满足$1\le b_a\le d_j$ 且 $w(b_a+D_{j-1})<w(a+D_{i-1})$ 的最大整数（若不存在这样的整数，则令 $b_a=0$）。令

$$\begin{aligned}n_{i,j}(\lambda)&=\prod_{a=1}^{d_i}\prod_{b=1}^{b_a}\frac{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a-b+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a-(b-1)+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}\\&=\prod_{a=1}^{d_i}\frac{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a-b_a+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

关于$n_{i,j}$还有另一种描述：若 $1\le b\le d_j$，令 a_b 为满足 $1\le a_b\le d_i$且 $w(b+D_{j-1})<w(a_b+D_{i-1})$ 的最小整数（若不存在这样的整数，则令 $a_b=d_i+1$）。那么我们有

$$\begin{aligned}n_{i,j}(\lambda)&=\prod_{b=1}^{d_j}\prod_{a=a_b}^{d_i}\frac{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a-b+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}{L\left(\lambda_i-\lambda_j+(a+1)-b+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}\\&=\prod_{b=1}^{d_j}\frac{L\left(\lambda_i-\lambda_j+a_b-b+\frac{d_j-d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}{L\left(\lambda_i-\lambda_j+1-b+\frac{d_j+d_i}{2},\sigma_i\times\sigma_j^\vee\right)}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

然后根据（4.8）以及 L-函数的函数方程（定理 4.1），我们有

$$n_\sigma(w,\lambda+\nu_\pi)=\epsilon(\lambda)\prod_{i<j}n_{i,j}(\lambda), \tag{4.21}$$

其中，ϵ 是若干整的 ϵ-因子的乘积。

取由定理 4.1 给出的 k 和 c_J。若 $d_j \geq d_i$，则对每个 $a \geq 1$，由定理 4.1 可知，函数 $L\left(\lambda_i - \lambda_j + a + \frac{d_j - d_i}{2}, \sigma_i \times \sigma_j^\vee\right)$ 在区域 R_{π,k,c_J} 中没有零点。若 $d_j \leq d_i$，则可知对每个 $b \leq d_j$，$L\left(\lambda_i - \lambda_j + 1 - b + \frac{d_j + d_i}{2}, \sigma_i \times \sigma_j^\vee\right)$ 在 R_{π,k,c_J} 中没有零点。根据 (4.21)，$n_{\sigma_\pi}(w, \lambda + \nu_\pi)$ 的唯一极点来自 $L(\cdot\, \sigma_i \times \sigma_j^\vee)$ 的极点。由定理 4.1，这些极点全都是单极点，并且位于有限个仿射根超平面上（即使 π 变化时也是如此），因此存在 $L_{\pi,w} \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*]$，使得 $\lambda \mapsto L_{\pi,w}(\lambda) n_{\sigma_\pi}(w, \lambda + \nu_\pi)$ 在 R_{π,k,c_J} 上正则，正如所断言的。 □

我们还注意到，在 $i\mathfrak{a}_P^*$ 的邻域内，如果 $w \in W(P)$，则可以忽略多项式 $L_{\pi,w}$。

引理 4.7。假设 $w \in W(P, Q)$。存在 $k > 0$，使得对于每个层 J，存在 $c_J > 0$，从而对于每个 J-对 (P, π)，映射

$$\lambda \mapsto n_\pi(w, \lambda).$$

在区域 S_{π,k,c_J} 中是正则的（见 (3.15)）。

证明。根据引理 4.5，我们只需证明 $n_{\sigma_\pi}(w, \lambda + \nu_\pi)$ 在区域 $i\mathfrak{a}_P^*$ 中没有任何极点。我们沿用前一个证明中的记号。假设 w 交换了 M_P 的块 i 和 j 与 $i < j$，并且 $d_j \geq d_i$。根据 (4.20)，相应的因子为

$$n_{i,j}(\lambda) = \prod_{a=1}^{d_i} \frac{L\left(\lambda_i - \lambda_j + \frac{d_i - d_j}{2} - a + 1, \sigma_i \times \sigma_j^\vee\right)}{L\left(\lambda_i - \lambda_j + \frac{d_i + d_j}{2} - a + 1, \sigma_i \times \sigma_j^\vee\right)}.$$

根据定理 4.1，$n_{i,j}$ 在 $i\mathfrak{a}_P^*$ 上唯一可能的极点位于超平面 $\lambda_i = \lambda_j$ 上，并且仅当与 $\frac{d_i - d_j}{2} - a + 1 \in \{0, 1\}$ 相关的项出现在乘积中时才会出现。对于 0 的情形，我们得到 $a = 1 + \frac{d_i - d_j}{2}$，这仅当 $d_i = d_j$ 时才可能。分母中的对应项 $\frac{d_i + d_j}{2} - a + 1 = 1$（即 $a = d_i$）抵消了这一项。对于 1 的情形，我们得到 $a = \frac{d_i - d_j}{2}$，这被排除了。如果 $d_i \geq d_j$，则改用 (4.19) 进行相同的处理，从而证明完毕。 □

4.3.2 局部归一化算子的正则性

我们沿用 §4.3 开头定义的数据。

引理 4.8。对于每个赋值 v，复合

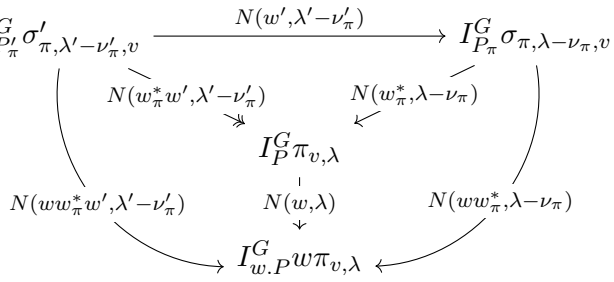
$$N_{\sigma_{\pi,v}}(w, \lambda + \nu_\pi) N_{\sigma_{\pi,v}}(w_\pi^*, \lambda - \nu_\pi) \tag{4.22}$$

在区域内全纯

$$\left\{\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \mid \forall \alpha \in \Sigma_P,\ \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -e(\sigma_{\pi,v})\right\}. \tag{4.23}$$

更准确地说，设 λ 是区域 (4.23) 中的一个元素。设 $w' \in W(P_\pi)$ 是满足以下条件的一个元素：若令 $P_{l\pi} = (w')^{-1}.P_\pi$，则对所有 $\alpha \in \Delta_{P'_\pi}$，都有 $\langle (w')^{-1}(\lambda - \nu_\pi)\ \alpha^\vee \rangle > -e(\sigma_{\pi,v})$。置

$\sigma'_\pi = (w')^{-1}\sigma'_\pi$、 $\lambda' = (w')^{-1}\lambda$ 和 $\nu'_\pi = (w')^{-1}\nu_\pi$。于是有交换图



其中所有箭头在 λ, $N_{\sigma'_\pi,v}(w_\pi^* w', \lambda' - \nu'_\pi)$ 的邻域内都是全纯的，且满射；我们分别将 $I_P^G \pi_v$和 $I_{wP}^G (w.\pi_v)$ 视为 $I_{P_\pi}^G \sigma_{\pi,\nu_\pi,v}$和 $I_{w.P_\pi}^G w\sigma_{\pi,\nu_\pi,v}$ 的子表示。

证明。 这是 [MW89，命题 I.11]。由于其中的术语与我们的不同，需作几点说明。我们的元素 w_π^* 记作 w，而我们的 w 是 σ。条件 $w \in {}_Q W_P$ 蕴含 [MW89，命题 I.11]中的条件 (b)。参数 λ 是 s。 λ 属于区域 (4.23) 即为条件 (c)。表示 σ_v 记作 π，并假定其为泛型（此处确实如此，因为 σ_v 是一个尖点表示的局部分量）。最后， [MW89，命题 I.11]中的元素 w'正是我们所用的元素。 □

推论 4.9。 沿用引理 *4.8* 中的记号。对于每个赋值 v，复合$N_{\sigma_{\pi,\ v}}(w, \lambda + \nu_\pi) N_{\sigma_{\pi,\ v}}(w_\pi^*, \lambda - \nu_\pi)$ 在区域内全纯

$$\lambda + \nu_w \in \bigcap_{\substack{\alpha \in \Sigma_{P_w} \\ w\alpha < 0}} \left\{ \mu \in \mathfrak{a}_{P_w}^* \;\middle|\; \langle \Re(\mu), \alpha^\vee \rangle > -e(\sigma_{\pi,v}) \right\}.$$

证明。 若 $w \in W(P)$（因此 $\nu_w = 0$ 和 $P_w = P$），则将 w 分解为相邻换位的乘积后，由引理 4.8 可得此结论。一般情形下，分解 $w_\pi^* = w_{\pi_w}^* w^{\pi_w}$。于是我们有 and$w^{\pi_w}\nu_\pi = -\nu_w + \nu_{\pi_w}$。注意到 $\sigma_{\pi_w} = \sigma_\pi$。对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$，一般而言

$$N(w, \lambda + \nu_\pi) N(w_\pi^*, \lambda - \nu_\pi) = N(w, (\lambda + \nu_w) + \nu_{\pi_w}) N(w_{\pi_w}^*, (\lambda + \nu_w) - \nu_{\pi_w}) N(w^{\pi_w}, \lambda - \nu_\pi). \quad (4.24)$$

由定理 4.2， $N(w^{\pi_w},\ \lambda - \nu_\pi)$ 对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$ 是正则的。由于 $w \in W(P_w)$，由第一种情形即可得出结论。 □

由引理 4 .8，我们容易得到一般情况下 $N_{\pi_w,v}$ 的正则性，其中 $w \in {}_Q W_P$ 满足 $P_\pi \subset P_w$.

引理 4.10。 设 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，并假设 φ_w 是可分解的。那么对于每个赋值 v，局部交织算子

$$N_{\pi_w,v}(w, \lambda + \nu_w) \varphi_{w,-\nu_w,v} \quad (4.25)$$

在区域内是全纯的

$$\left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \mid \forall \alpha \in \Sigma_P,\ \langle \Re(\lambda), \alpha^\vee \rangle > -2/(n^2+1) \right\}. \quad (4.26)$$

证明。 根据 [Boi25b，推论 3.3]，我们知道可以通过应用常数项 $\varphi \mapsto \varphi_{P_\pi}$，在全局上将 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 识别为 $\mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi,\nu_\pi}(G)$ 的一个子表示；局部而言，这相当于将其识别为

$I_P^G\pi_v$交织算子 $N_{\sigma_\pi,v}(\cdot\ -\nu_\pi) : I_{P_\pi}^G\sigma_{\nu_\pi,-\nu_\pi,v} \to I_{P_\pi}^G\sigma_{\nu_\pi,\nu_\pi,v}$ 的像。采用与推论 4.9 相同的记号，我们有

$$I_{P_\pi}^G\sigma_{\pi,-\nu_\pi,v} \xrightarrow{N_{\sigma_\pi,v}(w^{\pi_w},-\nu_\pi)} I_{P_\pi}^G\sigma_{\pi,-\nu_{\pi_w}+\nu_w,v} \xrightarrow{N_{\sigma_\pi,v}(w^*_{\pi_w},-\nu_{\pi_w}+\nu_w)} I_{P_\pi}^G\sigma_{\pi,\nu_\pi,v},$$

因此， $I_P^G\pi_v$被识别为该复合在 $I_{P_\pi}^G\sigma_{\nu_\pi,\nu_\pi,v}$ 中的像。这是最后一个箭头的像 $I_{P_w}^G\pi_{w,\nu_w,v}$ 的一个子表示。因此，(4.25) 的正则性等价于 $N_{\sigma_\pi,v}(w,\lambda+\nu_\pi)N_{\sigma_\pi,v}(w_\pi^*,\lambda-\nu_\pi)$ 的正则性，而由引理 4.8 可知后者具有正则性。

□

4.3.3 全局交织算子的正则性

现在我们可以描述 $M(w,\lambda)$ 的奇点。

命题 4.11。 存在 $k>0$，使得对于每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个 J-对 (P,π)，若 $P_\pi \subset P_w$，则映射

$$\lambda \mapsto L_{\pi,w}(\lambda)M(w,\lambda)\varphi_w \tag{4.27}$$

对任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，在 R_{π,k,c_J} 中是正则的，其中 $L_{\pi,w} \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*]$ 是引理 4.5 中定义的仿射根线性形式的乘积。

注 4.12。 根据引理 4.10， $M(w,\ \lambda)$ 在 $\mathcal{R}_{\pi,\ k,\ c_J}$ 中的所有奇点都来自标量因子 $n_{\pi_w}(\lambda+\nu_w)$。但是，$L_{\pi,\ w}$ 在 $i\mathfrak{a}_P^*$ 中可能有零点，而算子 $M(w,\ \lambda)$ 在此区域内确实可能有极点。这一点在非分歧情形下的 $G=$ 一般线性群$_4$ 中已经可以看出（见 [Heg24]）。

证明。 这由分解式 (4.17) 以及引理 4.5 和引理 4.10 得出。 □

推论 4.13。 映射 $\lambda \in \mathfrak{a}_P^* \mapsto L_{\pi,\ w}(\lambda)M(w,\lambda)\varphi_w$ 在区域 $\lambda+\nu_w \in R_{\pi,\ k,\ c_J}(w)$ 内是正则的，其中我们回顾一下，$R_{\pi,\ k,\ c_J}(w)$ 已在 (3.16) 中定义。

证明。我们有

$$M(w,\lambda)\varphi_w = M(w,\lambda+\nu_w)\varphi_{P_w,-\nu_w},$$

并且根据引理 4.3，我们知道 $\varphi_{P_w,\ -\nu_w} \in \mathcal{A}_{P_w,\ \pi_w}(G)$。现在，对交织算子进行分解，并依次应用命题 4.11，即可得到结论。注意，这里我们使用了与 [Cha25，第 3.4 节7] 中相同的论证，使 $\Lambda_\pi^{M_P}$ 出现，而不是 $\Lambda_{\pi_w}^{M_{P_w}}$（这是因为 π 和 π_w 是由基于同一尖点表示构造的艾森斯坦级数的留数得到的）。

□

如果 $w \in W(P,\ Q)$，我们还可以得到一个更强的版本。在这种情况下，我们早已知道，根据 [Art05 定理 7.2]，算子 $M(w,\ \lambda)\varphi$ 在 $i\mathfrak{a}_P^*$ 上是正则的。新颖之处在于将这一正则性性质扩展到酉轴的一个邻域。

命题 4.14。 假设 $w \in W(P,Q)$。存在 $k>0$，使得对于每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个 J-对 (P,π)，映射

$$\lambda \mapsto M(w,\lambda)\varphi$$

在 $\mathcal{S}_\pi$ 中正则，$k,\ c_J$ 对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$

证明。 这由分解 (4.17) 以及引理 4.7 和 4.10 得出。 □

现在我们记录一个著名引理的推广，该引理描述了交织算子沿根超平面的行为。我们采用 §4.1.2 中的记号。

引理 4.15。 假设 $n=2m$，并令 P 为 G 的标准抛物子群，其标准 *Levi* 因子为 一般线性群$_m$ ×一般线性群$_m$。令 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 具有 $\pi=\pi_1\boxtimes\pi_1$ 的形式。令 w 为 $W(P,P)$ 中唯一的非平凡元素。那么对于 F 的每个赋值 v，都有 $N_{\pi,\,v}(w,\ 0)=\mathrm{Id}$。

证明。 假设 $\pi_1=\mathrm{Speh}(\sigma,\ d)$，其中 σ 为尖点的。存在 $w'\in W(P_\pi)$ 使得 $-w'\nu_\pi$ 为正。置 $P'_\pi=(w')^{-1}.P_\pi$，并置 $\sigma'_\pi=(w')^{-1}\sigma_\pi$ 以及 $\nu'_\pi=(w')^{-1}\nu_\pi$。置 $w_0=(w')^{-1}w^*_\pi ww^*_\pi w'$。根据定理 4.2 和引理 4.8，对于 $\lambda\in\mathfrak{a}^{G,\,*}_{P,\,\mathbb{C}}$，在 0 的某个邻域内，我们有如下带满射竖直映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} I^G_{P'_\pi}\sigma'_{\pi,\lambda'-\nu'_\pi,v} & \xrightarrow{N(w_0,\lambda'-\nu'_\pi)} & I^G_{P'_\pi}\sigma'_{\pi,-\lambda'-\nu'_\pi,v} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle N(w^*_\pi w',\lambda'-\nu'_\pi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle N(w^*_\pi w',\lambda'-\nu'_\pi)} \\ I^G_P\pi_{\lambda,v} & \xrightarrow{N(w,\lambda)} & I^G_P\pi_{-\lambda,v} \end{array}$$

因此，只需证明 $N_{\sigma'_\pi}(w_0,\ \nu'_\pi)=\mathrm{Id}$。但我们可以分解 $\sigma'_\pi=(\sigma\boxtimes\sigma)^{\boxtimes d}$，由定理 4.2 可知，$N_{\sigma'_\pi}(w_0,\ \nu'_\pi)$ 是算子 $N_{\sigma\boxtimes\sigma,\,v}(\iota,\ 0)$ 的乘积，其中 ι 是将 $\sigma\boxtimes\sigma$ 的两个块互换的对合。根据 [KS88，命题 6.3]，，它们等于 Id。证明完毕。

□

引理 4.16。 设 P 是 G的标准抛物子群，设 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。设 w 是 P 上按块作用、对应于对换 $(i\ j)$ 且 $i<j$ 的元素。如果 $\pi_i\simeq\pi_j$，那么对于 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\,\mathbb{C}}$ 处于超平面 $\lambda_i=\lambda_j$ 的一般位置，我们对每个 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\,\pi}(G)$

$$M(w,\lambda)\varphi=-\varphi_\lambda. \tag{4.28}$$

证明。 沿用引理 4.5 证明中的记号。若 $l\neq i$，我们容易看出，$n_{i,\,l}(\lambda)$（或 $n_{l,\,i}(\lambda)$）沿超平面 $\lambda_i=\lambda_j$是正则的，$n_{l,\,j}(\lambda)$（或 $n_{j,\,l}(\lambda)$）也一样。由于对每个 $1\leq a\leq d_i$，$d_i=d_j$ 且 $b_a=d_j$，利用 (4.19) 计算得

$$n_{i,j}(\lambda)=\frac{L(\lambda_i-\lambda_j,\sigma_i\times\sigma_j^\vee)}{L(\lambda_i-\lambda_j+1,\sigma_i\times\sigma_j^\vee)}\prod_{a=1}^{d_i-1}L(\lambda_i-\lambda_j+a-d_i,\sigma_i\times\sigma_j^\vee)\prod_{a=2}^{d_i}\frac{1}{L(\lambda_i-\lambda_j+a,\sigma_i\times\sigma_j^\vee)}.$$

由定理 4.1，若 $\lambda_i-\lambda_j=0$，则 $n_{i,\,j}(\lambda)$ 是正则的。根据引理 4.10，当 λ 在该超平面内处于一般位置时，$N_\pi(w,\ \lambda)$ 是正则的，因此 $M(w,\ \lambda)\varphi$ 也正则。

令 $\tau\in W(P,\ P)$ 为置换 $(i+1\ \dots\ j-1\ j)$。那么，若 $\lambda_i=\lambda_j$，我们有 $w\lambda=\lambda$，因此由 (3.7) 得

$$M(w,\lambda)=M(\tau^{-1},\tau\lambda)M(\tau w\tau^{-1},\tau\lambda)M(\tau,\lambda).$$

根据前述讨论，当 λ 一般位置地位于超平面 $\lambda_i=\lambda_j$ 上时，$M(\tau^{-1},\tau\lambda)$、$M(\tau w\tau^{-1},\tau\lambda)$ 和 $M(\tau,\lambda)$ 都是正则的。

由此可知，只需证明在 $m=2$ 的情形下 (4.28) 成立，即 $P=\mathrm{GL}_{n_1}\times\mathrm{GL}_{n_1},\pi=\pi_1\boxtimes\pi_1$, $P_\pi=\mathrm{GL}_r^d\times\mathrm{GL}_r^d$, $\sigma_\pi=\sigma^{\boxtimes d}\boxtimes\sigma^{\boxtimes d}$ 以及 $w=(1\ 2)$。由 (4.17) 和引理 4.15，我们需要证明 $n_\pi(w,\ \lambda)$ 沿着我们的超平面成立。令 $s=\lambda_1-\lambda_2$。由 (4.18) 和定理 4.1，容易看出 $n_\pi(w,\ s)$ 在 $s=0$ 处正则，并且 $n_\pi(w,\ 0)=(-1)^d(-1)^{d-1}=-1$。证毕。

□

4.4 离散 Eisenstein 级数的解析性质

本节的主要结果是下文的定理 4.17，它描述了离散艾森斯坦级数在正 Weyl 室的一个邻域 $\mathcal{R}_{\pi,\,k,\,c_J}$ 中的解析行为。

4.4.1 Bernstein–Zelevinsky 线段

为表述我们的结果，我们采用 [BZ76] 中线段的概念。我们定义线段 S 为一个由复数组成的 r 元组 $(s_1,\,\ldots,\,s_r)$，满足

$$s_1 - s_2 = -1,\; s_2 - s_3 = -1, \ldots, s_{r-1} - s_r = -1.$$

集合 $\{s_1,\,\ldots,\,s_r\}$ 完全确定了元组 $(s_1,\,\ldots,\,s_r)$，因此我们可以将 S 视为复数的集合。若 S 和 T 是两个线段，我们称它们相连，当且仅当 S 和 T 互不包含，且 $S \cup T$ 仍是一个线段。

我们使用 §4.1.2 中的记号。对于任意一个 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，我们关联以下 m 个 Bernstein–Zelevinsky 线段：$S_\pi^1,\,\ldots,\,S_\pi^m$，使得每个 i, $S_\pi^i = \nu_{P_{\pi_i}}$。在坐标中，$S_\pi^i$ 是一个 d_i 元组

$$\left(S_\pi^i\right)_j = \frac{2j - 1 - d_i}{2}, \quad 1 \le j \le d_i.$$

若 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 的坐标为 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，令 $S_\pi^i(\lambda)$ 为线段 $S_\pi^i + \lambda_i$。对每个 $i < j$，使 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 满足 $S_\pi^i(\lambda)$ 与 $S_\pi^j(\lambda)$ 相连的集合，是$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$的仿射根超平面的有限并。令 $L_{\pi,i,j} \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*]$ 为相应的仿射根线性形式的乘积。定义

$$L_{\pi,E}(\lambda) = \prod_{\substack{i<j \\ \sigma_i \simeq \sigma_j}} L_{\pi,i,j}(\lambda), \tag{4.29}$$

其中 $\sigma_\pi = \sigma_1^{\boxtimes d_1} \boxtimes \ldots \boxtimes \sigma_m^{\boxtimes d_m}$。注意，当 π 变化时，集合 $\{L_{\pi,E}\}$ 是有限的 .

4.4.2 离散艾森斯坦级数的解析性质

现在可以陈述该定理了。

定理 4.17. 以下性质成立。

1. 正则性：存在 $k > 0$，使得对每个层 J，都存在 $c_J > 0$，使得对每个 J-对 (P, π)，亚纯函数

$$L_{\pi,E}(\lambda) E(\varphi, \lambda)$$

在区域 $\lambda \in R_{\pi,\,k,\,c_J}$ 中，对于每个 $\varphi \in A_{P,\,\pi}(G)$，都是全纯的。

2. 零点：令 P 为 G的一个标准抛物子群，$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 以及 $\varphi \in A_{P,\,\pi}(G)$。对于每个 $\alpha_{i,\,j} \in \Sigma_P$，其与 M_P 的两个块 GL^{n_i} 和 GL^{n_j} 相关，且满足 $\pi_i \simeq \pi_j$，艾森斯坦级数 $E(\varphi, \lambda)$ 沿根超平面 $\langle \lambda, \alpha_{i,\,j}^\vee \rangle = 0$有一个零点。

注 4.18。回顾一下，我们在引理 4.5 中定义了一个多项式 $L_{\pi,\,w}$。那么$L_{\pi,\,E}$ 整除乘积 $\prod_Q \prod_{w \in Q W_P} L_{\pi,\,w}$，但一般而言并不等于该乘积，除非 π 是尖点的。因此，定理 4.17 表明，常数项 $E_{P_\pi}(\varphi,\,\lambda)$ 中的留数存在一些微妙的补偿。此外，从以下意义上说，定理 4.17 是尖锐的：$L_{\pi,\,E}$ 的所有零点都会补偿 $E(\varphi,\,\lambda)$ 的极点，这一点在非分歧情形 [Heg24] 中已可看出。

证明。我们来证明 1。首先假设 φ 是 K_∞-有限的。根据 [MW95，引理 I.4.10]，$L_{\pi,E}(\lambda)E(\varphi,\lambda)$ 的奇点与其尖点指数的奇点相同。设 $\phi\in\mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$ 满足 $\varphi=E^{P,*}(\phi)$。根据艾森斯坦级数常数项的计算式 (3.9) 以及引理 4.3，对于每个标准抛物子群 Q，我们有

$$L_{\pi,E}(\lambda)E_Q(\varphi,\lambda)^{\mathrm{cusp}}=c_\pi\sum_{\substack{w\in {}_QW_P\\ P_\pi=P_w,\,Q_w=Q}}L_{\pi,E}(\lambda)M(w,\lambda+\nu_\pi)N_\sigma(w_\pi^*,\lambda-\nu_\pi)\phi,\tag{4.30}$$

其中 c_π 是 (4.12) 中的常数。根据 [MW89，Lemme III.2]，(4.30) 在 $\lambda\in\mathfrak{a}_P^*$ 的一个邻域内正则，$\mathbb{C}$ 只要对所有 $\alpha\in\Sigma_P$ 以及所有 i 和 j，都有 $L(1+\lambda,\alpha^\vee\sigma_i\times\sigma_j^\vee)\neq 0$，并且对任意赋值 $v\in V_F$，还有 $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>-e(\sigma_\pi,v)$。更确切地说，注意 (4.30) 是 [MW89 第 652] 页上的第一个等式（关于 [MW89] 的记号，可参见引理 4.8 的证明）。由定理 4.1 和定理 4.2，我们可以选取 k 和 c_J，使这些条件在区域 R_{π,k,c_J} 中成立。一般 $\varphi\in\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$ 的情形，可由 K_∞-有限情形按 [BK14，注 11.8] 中相同的论证得到。

对于 2，注意到根据 1，超平面 $\langle\lambda,\alpha_i^\vee,_j\rangle=0$ 对 $E(\varphi,\lambda)$ 并非奇异。令 $w\in W(P)\simeq\mathfrak{S}_m$ 为对换 $(i\,j)$。根据 BL24 中的艾森斯坦级数函数方程、定理 2.3.4] 和引理 4.16，对于任意满足 $\langle\lambda,\alpha_i^\vee,_j\rangle=0$ 的 λ，我们有

$$E(\varphi,\lambda)=E(M(w,\lambda)\varphi,w\lambda)=-E(\varphi,\lambda).$$

这证明了 3。 □

对于 G 的每个标准抛物子群 P 以及每个 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，定义

$$L_{\pi,0}(\lambda)=\prod_{\pi_i\simeq\pi_j}\langle\lambda,\alpha_{i,j}^\vee\rangle.\tag{4.31}$$

这个多项式控制 $E(\varphi,\lambda)$ 的零点。利用定理 4.17，我们得到如下推论。

推论 4.19。存在 $k>0$，使得对于每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个 J-对 (P,π)，亚纯函数

$$\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(\varphi,\lambda)$$

在区域 R_{π,k,c_J} 中，对每个 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)$，均为全纯。

4.4.3 广义 Eisenstein 级数的情形

设 P,Q 是 G 的标准抛物子群。令 $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。设 $w\in {}_QW_P$ 满足 $P_\pi\subset P_w$。令 $\pi_w\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_{P_w})$ 为 §4.2.3 中定义的表示。记 $M_Q=\prod_{i=1}^{m'}\mathrm{GL}^{n_i'}$，并令 $Q_{w,i}=\mathrm{GL}_{n_i'}\cap Q_w$。相应地，记 $w\pi_w=(w\pi_w)_1\boxtimes\ldots\boxtimes(w\pi_w)_{m'}$。我们有 $\mathfrak{a}_{Q_w,\mathbb{C}}^*=\oplus_i\mathfrak{a}_{Q_{w,i},\mathbb{C}}^*$；对于 $\lambda\in\mathfrak{a}_{Q_w,\mathbb{C}}^*$，记 $p_i(\lambda)$ 为其在 $\mathfrak{a}_{Q_{w,i},\mathbb{C}}^*$ 上的投影。令

$$L^Q_{w\pi_w,E}(\lambda)=\prod_{i=1}^{m'}L_{(w\pi_w)_i,E}\left(p_i(\lambda)\right),\tag{4.32}$$

其中 $L_{(w\pi_w)_i,E}$ 在 (4.29) 中定义。此外，对于任意 c 和 k，令 $\mathcal{R}_{(w\pi_w)_i,k,c}\subset\mathfrak{a}_{Q_{w,i},\mathbb{C}}^*$ 为针对 $(w\pi_w)_i$ 在 (3.13) 中定义的子集。

命题 4.20。 存在 $k>0$，使得对于每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于任意 J-对 (P,π) 以及 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)$，艾森斯坦级数

$$L_{\pi,w}(\lambda)L^Q_{w\pi_w,E}(w(\lambda+\nu_w))E^Q(M(w,\lambda)\varphi_w,w\lambda)$$

i当且仅当对每个 i，$\lambda+\nu_w\in R_{\pi,k,c_J}(w)$ 且 $p_i(w(\lambda+\nu_w))\in R_{(w\pi_w)_i,k,c_J}$ 正则。

注 4.21. 若 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)$（此时 $P_w=P_\pi=P$和 $\nu_w=0$），只需要求$\lambda\in\mathrm{R}_{\pi,k,c_J}$。事实上，这已经蕴含 $\lambda+\nu_w\in\mathrm{R}_{\pi,k,c_J}(w)$，且对每个 i，$p_i(w\lambda)\in\mathrm{R}_{(w\pi_w)_i,k,c_J}$。此外，对任意 w，乘积$L_{\pi,w}(\lambda)L^Q_{w\pi_w,E}(w\lambda)$ 整除 $L_{\pi,E}$。

证明。 根据推论 4.13，我们可以选取常数 k和 $c_J>0$，使映射 $L_{\pi,w}(\lambda)M(w,\lambda)\varphi_w$ 在 $\mathcal{R}_{\pi,k,c_J}$ 中正则。根据 Iwasawa分解，广义艾森斯坦级数 $E^Q(\psi,\lambda)$ 在某个 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 处正则，当且仅当其在 $M_Q(\mathbb{A})$ 上的限制正则。由引理 4.3，我们有

$$\Big((M(w,\lambda)\varphi_w)_{|M_Q}\Big)_{-w\nu_w-\rho_Q}\in\mathcal{A}_{Q_w,w\pi_w,w\lambda}(M_Q).$$

因此，该结果由定理 4.17 得出。 □

4.5 残余艾森斯坦级数的界

我们陈述一些关于艾森斯坦级数沿正交和增长的结果。就我们而言，需要的是酉轴右侧的界，或者更准确地说，是该区域某个邻域上的界。在[Cha25 的第 3], 节中，这类估计已在酉轴的一个邻域内得到证明，而事实证明，其中使用的方法也适用于我们的区域。事实上，所需的关键输入是交织算子 $M(w,\lambda)$ 的正则性，而根据命题 4.11，我们可以得到这一正则性。因此，接下来我们只概述为使 [Cha25 的第 3] 节适用于我们的情形所需的主要修改。读者也可参阅 [Boi25a 的第 10] 节；当时 [Cha25] 尚未发布，我们在那里独立证明了这些界，但需要强调的是，我们所用的论证实质上相同。

4.5.1 全局算子的界

我们首先估计全局交织算子。

命题 4.22。 设 D 是定义在 $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 上的全纯微分算子。存在 $k>0$，使得对于每个层级 J 和每个 $C>0$，均存在 c_J 和 $C_J>0$，使得对于每个 J-三元组(P,π,τ)，满足 $P_\pi\subset P_w$ 时，我们有

$$\|D(L_{\pi,w}(\lambda)M(w,\lambda)\varphi_w)\|_{Q_w,\mathrm{Pet}}\le C_J\left(1+\|\lambda\|^2+\lambda_\tau^2+(\Lambda_\pi^{M_P})^2\right)^k\|\varphi_w\|_{P_w,\mathrm{Pet}}\,, \tag{4.33}$$

对于每个 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$ 以及 $\lambda\in R^C_{\pi,k,c_J}$，其中 $L_{\pi,w}$ 是引理 *4.5* 中的多项式。

证明。 由命题 4.11 可知，$\lambda\mapsto L_{\pi,w}(\lambda)M(w,\lambda)\varphi_w$是正则的。若 λ属于某个区域 $\mathcal{S}_{\pi,k,c_J}$，则由 (4.17) 中 $M(w,\lambda)$ 的分解，以及 [Cha25, 命题 3.4.1.1] 和 [Cha25, 命题 3.6.1.1], 可得估计 (4.33)。一般而言，很容易验证证明在更大的区域 $\mathcal{R}^C_{\pi,k,c_J}$ 中仍然成立。 □

4.5.2 Eisenstein 级数的界

我们需要的关键估计如下。

命题 *4.23.* 存在 $k>0$，使得对所有 $C>0$，存在 $N>0$，使得对所有层级 J、所有 $q>0$ 以及所有 $X\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，存在 $c_J>0$ 和一个定义在 $S(G(\mathbb{A}))^J$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{J,q,X}$，使得对所有 J-三元组 (P,π,τ)、所有 $f\in S(G(\mathbb{A}))^J$ 以及 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$，我们有

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\leq\frac{\|f_\tau\|_{J,q,X}\,\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^q},\tag{4.34}$$

在区域 $\lambda\in R_{\pi,\,k,\,c_J}^{C}$ 中。

注 4.24. 正如证明所示，命题 4.23 可以通过要求对所有 $q>0$，存在 $m>0$，使得对所有 $f\in C_c^m(G(\mathbb{A}))^J$，界 (4.34) 仍然成立来加强，而其他量词保持不变。

证明。这是对 [Cha25, 引理 3.9.1.1] 的一个修改版本。将 f 替换为 $L(X)f$ 后，我们可以假设 $X=0$。令 $m>0$ 和 $g\in C_c^m(G(\mathbb{A}))$。我们首先证明，若将左端的 f 替换为 $g*f$，则 (4.34) 成立。[Cha25, 引理 3.9.1.1] 的证明依赖于对截断艾森斯坦级数标量积的估计（[Cha25, 命题 3.7.1.1]），而该估计本身用到了交织算子 $M(w,\lambda)$ 的界。根据命题 4.22，在某个区域 $\mathcal{R}_{\pi,k,c_J}^{C}$ 中，这些界对我们是可用的。更确切地说，通过重现 [Cha25, 命题 3.7.1.1]，我们可以得到截断标量积的一个界

$$\frac{L_{\pi,E}(\lambda)L_{\pi,E}(\lambda')}{L_{\pi,0}(\lambda)L_{\pi,0}(\lambda')}\langle\Lambda^{T,\mathrm{Art}}E(\varphi,\lambda),\overline{E(\varphi',\lambda')}\rangle_{G,\mathrm{Pet}},$$

根据 [Zyd22, 定理 3.9], 中截断算子的性质，我们知道它是正则的；再结合 [Lap08, 定理 2.2], 中艾森斯坦级数的连续性以及定理 4.17。

命题 4.23 的证明现在与 [Cha25, 引理 3.9.1.1] 相同，只有两处细微差别。第一处是，[Cha25, 引理 3.9.1.1] 是针对 $x\in G(\mathbb{A})^1$写的。然而，对于任意$a\in A_G^\infty$，都有

$$\begin{aligned}|E(ax,I_P(\lambda,g*f)\varphi,\lambda)|&=|\exp(\langle\lambda,H_G(a)\rangle)E(x,I_P(\lambda,g*f)\varphi,\lambda)|\\&\leq\|a\|^N\,|E(x,I_P(\lambda,g*f)\varphi,\lambda)|\end{aligned}$$

对于某个 N，只要 $\|R(\lambda)\|<C$。此外，对于 $x\in G(\mathbb{A})^1$ 和 $a\in A_G^\infty$，由 (3.3) 可得 $\|x\|_G^N\ll\|a\|^N\,\|ax\|_G^N$，而由 [BPCZ22, (2.4.1.6)] 可得 $\|a\|\ll\|ax\|_G$。因此，就我们的目的而言，可以将 $\|\cdot\|_N$ 替换为我们的正则化艾森斯坦级数的上确界范数乘以$\|x\|_G^{-N}$。

第二个区别在于，[Cha25，引理 3.9.1.1] 假设 $\lambda\in\mathfrak{a}_{P}^{G,\,*}$，而我们使用$\lambda\in\mathfrak{a}_P^*$。这会影响核函数 k_g 的计算，该核函数必须替换为

$$k_g(x,y)=\sum_{\gamma\in G(F)}\int_{A_G^\infty}g(x^{-1}a\gamma y)\exp(\langle H_G(a),\lambda\rangle)da.$$

根据 [MW95，引理 I.2.4], ，在 A_G^∞ 上的积分 A_G^∞ 落在一个紧子集内，该紧子集仅取决于 g的支撑。由于 $\|R(\lambda)\|<C$，我们看到 [Cha25, (3.9.1.2)] 成立，即

存在 c_2 和 $N>0$ 使得

$$\sup_{y\in G(\mathbb{A})^1}|k_g(x,y)|\le c_2\,\|x\|_G^N,\quad x\in G(\mathbb{A})^1.$$

考虑到这些修改， [Cha25, 引理 3.9.1.1] 对每个 $q>0$ 都给出了一个界

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,g*f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N}\le\frac{\|f_\tau\|_{J,q}\,\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^q}.\tag{4.35}$$

但根据 [Art78, 推论 4.2], 对于任意层级 J 以及任意充分大的 $m\ge1$，存在$Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$、$g_1\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 和 $g_2\in C_c^m(G(\mathbb{A}))$，使得 Z 在 K_∞-共轭作用下不变，g_1 和 g_2 在 K-共轭作用下不变且是 J-双不变的，并且对于任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，有:

$$f=g_1*f+g_2*(Z*f).\tag{4.36}$$

命题 4.23 现在是 (4.35) 的直接推论。 □

由此可以得到艾森斯坦级数在正交和中的界。

定理 4.25. 存在 $k>0$，使得对于所有 $C>0$，存在 $N>0$，使得对于所有$q>0$ 层级 J 以及所有 $X\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，存在 $c_J>0$ 和一个连续半范数 $\|\cdot\|_{J,q,X}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$上，使得对于所有 J-对 (P,π) 以及所有 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$，有

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\le\frac{\|f\|_{J,q,X}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\Lambda_\pi^2)^q},\tag{4.37}$$

在区域 $\lambda\in R_{\pi,\,k,\,c_J}^C$ 中。此外，对于 $R(\lambda)\in\mathfrak{a}^*_{P}{}^+$ 和 $\|R(\overline{\lambda})\|\le C$，在改变半范数后，我们也有

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\le\frac{\|f\|_{J,q,X}}{(1+\|\lambda\|^2)^q},\tag{4.38}$$

*Pr*证明。 这是命题 4.23 和下文引理 4.26 的直接推论 . □

引理 4.26。 设 J 为一个层。对于充分大的 $q>0$，对 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 上的任意连续半范数 $\|\cdot\|$，级数

$$\sum_{P_0\subset P}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)^J}\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}\frac{\|f_\tau\|\dim(\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J})}{(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^q}$$

绝对收敛，并定义了 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 上的一个连续半范数。

证明。 我们先估计

$$\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}\frac{\|f_\tau\|_{J,q}\dim(\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J})}{(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^q}.$$

根据 [Mül02，公式（6.4）], ，存在 $A>0$ 和 $k'\in\mathbb{N}$ 使得

$$\dim(\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J})\le A(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{k'},\quad\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P).$$

由 [Art78，第 931], 页，我们知道 $(\sum_\tau \|f_\tau\|_{J,q}^2)^{1/2}$ 是 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 上的连续半范数。由柯西-施瓦茨不等式，只需在 q 足够大的情况下，对 $\sum_\tau (1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{-q}$ 进行估计。但由与 [Cha25，命题 3.8.3 的证明1] 中相同的论证可知，存在 $B>0$，使得对所有 P 以及所有 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$，都有

$$\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty} (1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^{-q} \le B(1+\Lambda_\pi^2)^{-q/2} \sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty} (1+\lambda_\tau^2)^{-q/2},$$

且当 q 足够大时，$\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}(1+\lambda_\tau^2)^{-q/2}<\infty$

现在需要证明，当 $q>0$ 足够大时，我们有

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)^J} \frac{1}{(1+\Lambda_\pi^2)^q} < \infty. \tag{4.39}$$

见 Mül02，第 711 页及以下的式 (6.17)]。 □

4.5.3 相对特征的应用

我们利用定理 4.25 证明沿基底 $\mathcal{B}_{P,\pi}(J)$ 求和所定义的相对特征的收敛性质。

命题 4.27。 存在 $k>0$，使得对于所有 $C>0$ 及所有层级 J，都存在 $c_J>0$，使得对于所有 J-对 (P,π) 以及所有 $F\in\mathcal{S}([G])^J$，级数

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \left\langle F, \frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)} E(\varphi,\lambda)\right\rangle_G \varphi$$

在某个赋予了 $T_{-N}([G]_P)^J$ 拓扑的空间中，$A_{P,\pi}(G)^J$ 上绝对收敛，且对任意 $\lambda\in R_{\pi,k,c_J}^C$，$L^2([G]_{P,0})^{J,\infty}$。

更精确地，对于任意足够大的 $N>0$、任意 $X\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ 以及任意 $q>0$，存在 N' 和 $T_{-N'}([G])^J$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{J,q,X}$，使得对于任意 J-对 (P,π)，都有

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \left|\left\langle F, \frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)} E(\varphi,\lambda)\right\rangle_G\right| \|\varphi\|_{-N,X} \le \frac{\|F\|_{J,q,X}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\Lambda_\pi^2)^q}, \tag{4.40}$$

对于区域中的 $\lambda\in R_{\pi,k,c_J}^C$ 以及 $T_{-N'}([G])^J$。

证明。由引理 3.4，对于任意足够大的 N，存在 $c>0$ 和 $r>0$，使得

$$\|\varphi\|_{-N,X} \le c\sum_{j=1}^r \left\|R(\Delta^j)\varphi\right\|_{P,\mathrm{Pet}}.$$

如同 Cha25 命题 3.8.2 的证明，我们得到一些常数 $c'>0$ 和 d，使得对于任意 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^{\tau,J}$，对所有 $1\le j\le r$ 都有

$$\left\|R(\Delta^j)\varphi\right\|_{P,\mathrm{Pet}} \le c'(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^d \|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}.$$

与 (4.36) 中一样，对于任意足够大的 $m\ge 1$，存在某些元素 $g_1,\ g_2\in C_c^m(G(\mathbb{A}))$ 和 $Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于任意 $F\in\mathcal{T}_{-N'}([G])^J$，我们都有 $F=g_1*F+g_2*(Z*F)$。现在由引理 3.1、命题 4.23（更确切地说，注 4.24），并重复定理 4.25 的证明，即可得出结论。$L^2([G]_{P,0})^{J,\infty}$ 版本则由引理 3.4 得出。

□

4.5.4 单个艾森斯坦级数的界

We 现在将命题 4.23 推广到不一定有限的 Eisenstein 级数 s.

命题 *4.28.* 存在 $k>0$，使得对所有 $C>0$，都存在 $N>0$，使得对所有层级 J、所有 $q>0$以及所有 $X\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，都存在 $c_J>0$和一个定义在 $S(G(\mathbb{A}))^J$上的连续半范数 $\|\cdot\|_{J,q,X}$，使得对所有 J-对 (P,π)、所有 $f\in S(G(\mathbb{A}))^J$以及 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^J$，均有

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\leq\frac{\|f\|_{J,q,X}\,\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}}{(1+\|\lambda\|^2)^q},\tag{4.41}$$

在区域 $\lambda\in R^C_{\pi,k}$ 中 c_J.

此外，对所有足够大的 $N\prime$，都存在 $d>0$和 $Y_1,\dots,Y_r\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对所有$J$-对 (P,π) 以及所有 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^J$，均有

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\leq(1+\|\lambda\|^2)^d\sum_{i=1}^r\|\varphi\|_{-N',Y_i}\,.\tag{4.42}$$

在区域 $\lambda\in R^C_{\pi,k,c_J}$ 中，其中 k、 C、 N、 X和 c_J与前文相同。

证明。令 k、 N 和 c_J 由命题 4.23 给出。根据 [Art78, 第 931], 页，存在 $m_0\geq 1$，使得对所有 $m\geq m_0$以及所有 $f\in C_c^m(G(\mathbb{A}))^J$，我们有 $f=\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}f_\tau$属于 $C_c^m(G(\mathbb{A}))^J$。根据命题 4.23，或者更确切地说，根据注 4.24，对于任意 $q>0$以及任意充分大的 m，在 $C_c^m(G(\mathbb{A}))$ 上存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{J,q,X}$，使得对于任意 $f\in C_c^m(G(\mathbb{A}))^J$，我们有

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(I_P(\lambda,f)\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\leq\sum_{\tau\in\widehat{K}_\infty}\frac{\|f_\tau\|_{J,q,X}\,\|e_\tau*\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\lambda_\pi^2+\lambda_\tau^2)^q},$$

对于任意 $\lambda\in\mathcal{R}^C_{\pi,k,c_J}$。由柯西–施瓦茨不等式，并且由于 $(\sum_\tau\|e_\tau*\varphi\|^2_{P,\mathrm{Pet}})^{1/2}=\|\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}$，我们得到 (4.41)。

现在取 $g_1,g_2\in C_c^m(G(\mathbb{A}))^J$和 $Z\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，使得 g_1+g_2*Z如 (4.36) 中所述，是单位元处的狄拉克分布。由于 $\|I_P(Z,\lambda)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}\leq(1+\|\lambda\|^2)^{d'}\sum_i\|R(Z_i)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}$对某个 $d'>0$以及 $Z_1,\dots,Z_{r'}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$成立，将 g_1和 g_2代入 (4.41)，可得常数 c和 d，使得

$$\left\|\frac{L_{\pi,E}(\lambda)}{L_{\pi,0}(\lambda)}E(\varphi,\lambda)\right\|_{-N,X}\leq c(1+\|\lambda\|^2)^d\sum_{i=1}^{r'}\|R(Z_i)\varphi\|_{P,\mathrm{Pet}}\,.$$

由引理 3.4 得出结论。

□

正如 [Cha25, 第 3.9 节.3], 中所述，我们可以采用 §4.5.2 中的方法来界定广义艾森斯坦级数。此处我们只陈述命题 4.28 在这一情形下的类似结果，不过显然其他结果也可以相应推广。我们沿用 §4.4.3 的记号。

命题 4.29。设 P和 Q 是 G的标准抛物子群。设 $w\in{}_QW_P$。存在$k>0$，使得对所有 $C>0$，都存在 $N>0$，使得对于所有层级 $J>0$、所有 $X\in U(\mathfrak{g}_\infty)$ 以及

所有足够大的 $N\prime>0$，都存在 $c_J>0$、 $d>0$和 Y_1、……、$Y_r\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于所有 J-对(P,π) 以及所有 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^J$，我们有

$$\left\|L_{\pi,w}(\lambda)L^Q_{w\pi_w,E}(w(\lambda+\nu_w))E^Q(M(w,\lambda)\varphi_{P_w},w\lambda)\right\|_{-N,X}\le(1+\|\lambda\|^2)^d\sum_{i=1}^r\|\varphi\|_{-N',Y_i}.$$

在区域 $\lambda+\nu_w\in R^{C,\ k,\ c_J(w)}_{\pi}$ 以及 $p_i(w(\lambda+\nu_w))\in R^{k,\ c_J}_{(w\pi_w)_i}$ 对所有 i 均成立。这里，$L^Q_{w\pi_w,E}$ 定义见(4.32)，而 $\|\cdot\|_{-N,\ X}$ 是 $T_{-N}([G]_Q)$上的一个半范数。

证明。 这是对命题 4.28 证明的改编（另见 [Cha25, 定理 3.9.3.1]）。结论由交织算子的估计（推论 4.13）和广义艾森斯坦级数的正则性（命题 4.29）推出。

□

4.6 朗兹谱分解定理的推广

现在我们利用定理 4.25，将朗兹谱分解定理 3.7 推广到定义在 $[G]$ 上且衰减足够快的函数。

命题 4.30。 存在 $N>0$，使得对于 G 的所有层 J 以及所有 F_1，$F_2\in T_{-N}([G])^J$，均有

$$\langle F_1,F_2\rangle_G=\sum_{P_0\subset P}|\mathcal{P}(M_P)|^{-1}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)}\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle F_1,E(\varphi,\lambda)\rangle_G\langle E(\varphi,\lambda),F_2\rangle_G d\lambda,\tag{4.43}$$

该表达式在此处绝对收敛。

证明。 对于所有成对的 (P,π)，定理 4.25 中的多项式 $L_{\pi,E}$ 非零，且在 $i\mathfrak{a}_P^*$ 上有上界。由定理 4.25 可知，存在 $N'>0$，使得 (4.43) 两边分别定义了 $\mathcal{T}_{-N'}([G])^J$ 上的连续线性泛函。此外，由定理 3.7 可知，当 F_1 和 F_2 是伪艾森斯坦级数时，该结论成立。由引理 3.2 和引理 3.6 可知，这些函数所张成的向量空间在 $\mathcal{T}_{-N'}([G])$ 中的闭包包含 $\mathcal{T}_{-N'-1}([G])$。因此，$N=N'+1$ 满足要求。□

推论 4.31。 存在 $N>0$，使得对于 G 的任意层 J 以及所有 $F\in T_{-N}([G])^J$，我们有

$$F=\sum_{P_0\subset P}|\mathcal{P}(M_P)|^{-1}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)}\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle F,E(\varphi,\lambda)\rangle_G E(\varphi,\lambda)d\lambda.$$

5 Ichino–Yamana–Zydor 正则化周期

在本文余下部分，G 是 $\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_{n+1}$。我们将 GL_n 嵌入 GL_{n+1}，定义如下：

$$g\mapsto\begin{pmatrix}g&\\&1\end{pmatrix}.\tag{5.1}$$

令 $H\simeq\mathrm{GL}_n$ 为 G 中的对角子群。本节的目标是介绍来自 [Zyd22] 的正则化周期$\mathcal{P}$，它由沿 $[H]$ 的周期积分定义，并研究其解析性质。

在本文余下部分，我们将采用以下约定。令 $P_0\subset G$ 为 GL_n 和 GL_{n+1} 中上三角矩阵子群的乘积，并令 $T_0\subset G$ 为以下乘积

标准对角环面。如果 J 是 G 的子群，我们记作 $J = J_n \times J_{n+1}$。类似地，我们有$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{0,\ n} \oplus \mathfrak{a}_{0,\ n+1}$。

所有相对于 H 所做的构造都将以下标 $_H$标记。特别地， H 的一个子群通常记作 J_H；若 J 是 G 的子群，则令 $J_H = J \cap H$。有序对 $(T_{0,\ H},\ P_{0,\ H})$ 在 H中是标准的。令 $\mathfrak{a}_{0,\ H} = \mathfrak{a}_{T_{0,\ H}}$。它嵌入到 $\mathfrak{a}_0$中。我们常将群 GL_n 视为 H，或视为 G中左、右坐标里的两个副本；后一种情形使用嵌入 (5.1)。

5.1 兰金–塞尔伯格抛物子群

我们首先定义子集 $\mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$ ，它属于 G 的半标准抛物子群集合；该集合出现在正则化周期$\mathcal{P}$的定义中。

5.1.1 兰金–塞尔伯格抛物子群集合的定义

我们将 $\mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$ 定义为 G的***Rankin–Selberg*** 抛物子群 集合。该集合由 G 的半标准抛物子群 $P = P_n \times P_{n+1}$ 构成，满足 P_n 是标准的，并且相对于嵌入 (5.1)， $P_n = P_{n+1} \cap \mathrm{GL}_n$。特别地，若 $P \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$ ，则 P_H 是 H 的一个标准抛物子群，且与 P_n同构。反过来，若 P_H 是 H的一个标准抛物子群，则令

$$\mathcal{P}_{\mathrm{RS}}(P_H) = \{Q \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}} \mid Q_H = P_H\}.$$

于是我们有

$$\mathcal{F}_{\mathrm{RS}} = \bigsqcup_{P_H \subset H \text{ standard}} \mathcal{P}_{\mathrm{RS}}(P_H). \tag{5.2}$$

回顾第4节，我们已为 GL_n 或 GL_{n+1} 的任意标准抛物子群 P 关联了一个元组 $n(P)$。设 P_H 是 H 的一个标准抛物子群。记 $n(P_H) = (n_1,\ \ldots\ldots,\ n_m)$，其中 $\sum n_i = n$。令 $\mathcal{P}_n^{n+1}(P_H)$ 为由有序对 $(P_{\text{标准}n+1},\ i_0)$ 组成的集合，其中 $P_{\text{标准}n+1}$ 是 GL_{n+1} 的一个标准抛物子群，且 i_0 是一个整数，并且满足以下两种情况之一：

1. $n(P_{n+1}^{\mathrm{std}}) = (n_1,\ \ldots\ldots,\ n_{i_0-1},\ n_{i_0}+1,\ n_{i_0+1},\ \ldots\ldots,\ n_m)$ 且 $1 \le i_0 \le m$；
2. $n(P_{n+1}^{\mathrm{std}}) = (n_1,\ \ldots\ldots,\ n_{i_0-1},\ 1,\ n_{i_0},\ \ldots\ldots,\ n_m)$ 且 $1 \le i_0 \le m+1$。

在第一种情况下，设为 $N = \sum_{i=1}^{i_0} n_i$；在第二种情况下，设为 $N = \sum_{i=1}^{i_0-1} n_i$。令 $w(P_{n+1}^{\mathrm{std}},\ i_0) \in \mathfrak{S}_{n+1}$ 为该轮换

$$w(P_{n+1}^{\mathrm{std}}, i_0) = (N+2 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad N+1). \tag{5.3}$$

我们将其视为 W_{n+1} 一般线性群 $_{n+1}$的魏尔群中的一个元素。以下是 [Boi25b，推论 4.2]。

命题 5.1。我们有一个双射

$$\mathcal{F}_{\mathrm{RS}} \simeq \left\{ (P_{n+1}^{\mathrm{std}}, i_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} P_{n+1}^{\mathrm{std}} \subset \mathrm{GL}_{n+1} \text{ standard}, \\ M_{P_{n+1}^{\mathrm{std}}} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{GL}_{n_i}, \\ 1 \le i_0 \le m. \end{array} \right\} = \bigsqcup_{P_H \subset H \text{ standard}} \mathcal{P}_n^{n+1}(P_H).$$

我们设 $\mathfrak{z}_P = \mathfrak{a}_P \cap \mathfrak{a}_{0,\ H}$。如果 $P \subset Q \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$，令 $\mathfrak{z}_P^Q$ 为 $\mathfrak{z}_Q$ 在 $\mathfrak{z}_P$ 中的正交补。注意，这与 $\mathfrak{z}_G = \{0\}$ 的情形一致。如果 $T \in \mathfrak{z}_P$，令 T_Q 为其在 $\mathfrak{z}_Q$ 上的投影，T_P^Q 为其在 $\mathfrak{z}_P^Q$ 上的投影，二者均相对于 $\mathfrak{z}_P = \mathfrak{z}_P^Q \oplus \mathfrak{z}_Q$ 而言。特别地，这适用于 $T \in \mathfrak{a}_{0,\ H} = \mathfrak{z}_{P_0}$，我们将 $T_{P_0}^Q$ 简记为 T^Q。对于 $\mathfrak{a}_{0,\ H}$ 中的元素，我们有「充分正」这一概念（参见 [Boi25b，第 4.3] 节）。

5.1.2 标准化

设 $P \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$。令 $(P_{n+1}^{\mathrm{std}}, i_P)$ 为命题 5.1 中同构下 P 的逆像。令 $w_P^{\mathrm{std}} = w(P_{n+1}^{\mathrm{std}}, i_P)$ 为式 (5.3) 中定义的元素。我们有

$$P_{n+1} = w_P^{\mathrm{std}}.P_{n+1}^{\mathrm{std}}. \tag{5.4}$$

设 $P^{\mathrm{std}} = P_n \times P_{\mathrm{std}n+1}$，它是 G 的一个标准抛物子群。这就是 P 的标准化。记 $(n_i) = n(P_{\mathrm{std}n+1})$。我们可以将 P_{std} 的标准 Levi 因子 M_P^{std} 分解为

$$M_P^{\mathrm{std}} = M_{P,n}^{\mathrm{std}} \times M_{P,n+1}^{\mathrm{std}} = (\mathbf{M}_{P,+} \times \mathcal{M}_{P,n} \times \mathbf{M}_{P,-}) \times \left(\mathbf{M}_{P,+} \times \mathcal{M}_{P,n+1}^{\mathrm{std}} \times \mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std}}\right), \tag{5.5}$$

其中

$$\mathbf{M}_{P,+} = \prod_{i<i_P} \mathrm{GL}_{n_i}, \quad \mathbf{M}_{P,-} \simeq \mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std}} = \prod_{i>i_P} \mathrm{GL}_{n_i}, \quad \mathcal{M}_{P,n} = \mathrm{GL}_{n_{i_P}-1}, \quad \mathcal{M}_{P,n+1}^{\mathrm{std}} = \mathrm{GL}_{n_{i_P}}. \tag{5.6}$$

我们在 $\mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std}}$ 上加上 std，以强调尽管群 $\mathbf{M}_{P,-}$ 与 $\mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std}}$ 同构，但它们并未通过嵌入 (5.1) 相互认同。我们还设

$$\mathbf{M}_{P,+}^{\mathrm{std},2} = \mathbf{M}_{P,+}^2, \quad \mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std},2} = \mathbf{M}_{P,-} \times \mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std}}, \quad \mathbf{M}_P^{\mathrm{std},2} = \mathbf{M}_{P,+}^{\mathrm{std},2} \times \mathbf{M}_{P,-}^{\mathrm{std},2}, \quad \mathcal{M}_P^{\mathrm{std}} = \mathcal{M}_{P,n} \times \mathcal{M}_{P,n+1}^{\mathrm{std}},$$

它们都自然地嵌入到 G 中。与 w_P^{std} 复合后，我们得到一个分解

$$M_P \simeq (\mathbf{M}_{P,+} \times \mathcal{M}_{P,n} \times \mathbf{M}_{P,-}) \times (\mathbf{M}_{P,+} \times \mathcal{M}_{P,n+1} \times \mathbf{M}_{P,-}). \tag{5.7}$$

现在，(5.7) 中的两份 $\mathbf{M}_{P,-}$ 通过嵌入 (5.1) 识别。群 $\mathcal{M}_P^{\mathrm{std}}{}_{,n+1}$ 和 $\mathcal{M}_{P,n+1}$ 同构，但通常以两种不同的方式嵌入一般线性群 $_{n+1}$ 中。令

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_{P,+} \times \mathbf{M}_{P,-}, \quad \mathbf{M}_P^2 = \mathbf{M}_P \times \mathbf{M}_P, \quad \mathcal{M}_P = \mathcal{M}_{P,n} \times \mathcal{M}_{P,n+1}.$$

对角嵌入 $H \subset G$ 的限制给出 $\mathcal{M}_{P,H} \subset \mathcal{M}_P$，并且有 $\mathcal{M}_{P,H} \simeq \mathcal{M}_{P,n}$。注意，$M_{P_H} = M_{P,H} = \mathbf{M}_P \times \mathcal{M}_{P,H}$。群 $\mathcal{M}_P$ 同构于一般线性群 $_{n_{i_P}-1} \times$ 一般线性群 $_{n_{i_P}}$，我们可以像 (5.1) 中那样定义一般线性群 $_{n_{i_P}-1}$ 到 $\mathcal{M}_P$ 的嵌入。就包含关系 $H \subset G$ 而言，这与之相容，即 $\mathcal{M}_{P,H} = \mathcal{M}_P \cap$ 一般线性群 $_{n_{i_P}-1}$。

Set

$$\underline{\rho}_P = (\rho_P - 2\rho_{P_H})_{|\mathfrak{z}_P} \in \mathfrak{z}_P^*.$$

用坐标表示，有 $(\underline{\rho}_P)_i = \frac{1}{2}$（若 $i < i_P$），以及 $(\underline{\rho}_P)_i = -\frac{1}{2}$（若 $i > i_P$）。

5.2 Zydor 风格的正则化兰金–塞尔伯格周期

在本节中，我们固定 $Q \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}}$。我们记 $M_Q^{\mathrm{std}}{}_{,\ n+1} = \prod_{i=1}^m$ 一般线性群 $_{n_i}$。我们回顾 [Zyd22] 中正则化周期 $\mathcal{P}^Q$ 的定义。

5.2.1 Iwasawa分解与测度

Set

$$M_{Q_H}(\mathbb{A})^{Q,1}=\left\{m\in M_{Q_H}(\mathbb{A})\;\middle|\;(H_{Q_H}(m))_Q=0\right\},\quad Z_Q^\infty=A_Q^\infty\cap A_{Q_H}^\infty.$$

H_{Q_H} 到 Z_Q^∞ 的限制是一个同构，其像为 $\mathfrak{z}_Q$。这为 Z_Q^∞ 给出了一个哈尔测度。我们有交换群的直积生成分解

$$M_{Q_H}(\mathbb{A})=Z_Q^\infty M_{Q_H}(\mathbb{A})^{Q,1}. \tag{5.8}$$

由 Iwasawa分解，在 $M_{Q_H}(\mathbb{A})^{Q,1}$ 上存在唯一的哈尔测度，使得对于所有$f\in C_c(H(\mathbb{A}))$，有

$$\int_{H(\mathbb{A})}f(h)dh=\int_{K_H}\int_{N_{Q_H}(\mathbb{A})}\int_{M_{Q_H}(\mathbb{A})^{Q,1}}\int_{Z_Q^\infty}\exp(\langle-2\rho_{Q_H},H_{Q_H}(am)\rangle)f(nmak)dadmdndk. \tag{5.9}$$

令

$$[M_{Q_H}]^{Q,1}=M_{Q_H}(F)\backslash M_{Q_H}(\mathbb{A})^{Q,1}$$

其商赋予计数测度。注意到我们有

$$[M_{Q,H}]^{Q,1}\simeq\left(\prod_{i\neq i_Q}[\mathrm{GL}_{n_i}]^1\right)\times[\mathrm{GL}_{n_{i_Q}-1}]=[\mathbf{M}_Q]^1\times[\mathcal{M}_{Q,H}].$$

于是，测度 dh 与每个 $[\mathrm{GL}_{n_i}]^1$ 上以及 $[\mathrm{GL}_{n_{i_Q}-1}]$ 上的测度的乘积重合，后者见 §3.2.3 的描述。此外，如果 $Q=G$，则有 $M_{G,H}(\mathbb{A})^{G,1}=H(\mathbb{A})$ 以及 $Z_G^\infty=\{1\}$。

5.2.2 截断周期

令$T\in\mathfrak{a}_{0,H}$。在 [Zyd22], Zydor 引入了一个截断算子 $\Lambda^{T,Q}$ 它定义在 $Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的局部可积函数空间中。若 $Q=G$ 我们简单记作 Λ^T。它的主要性质如下。

定理 5.2。设 $T\in\mathfrak{a}_{0,H}$ 充分正。设 J 是 G 的一个层。对于任意 N，$N'>0$ 存在有限个元素组成的族 $(X_i)_{i\in I}$，其中的元素属于 $U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于任意定义在 $[G]_Q$ 上的光滑且右 J- 不变函数 ϕ，函数 $\Lambda^{T,Q}\phi$ 是 $[H]_{Q_H}$ 上的函数，并且有

$$\sup_{m\in M_{Q,H}(\mathbb{A})^{Q,1}}\|m\|_{M_{Q,H}}^N\left|\Lambda^{T,Q}\phi(mk)\right|\leq\sum_{i\in I}\|\phi\|_{-N',X_i}.$$

证明。这是 [Zyd22，定理 3.9]。注意，ibid. 中的陈述较弱，但我们的版本可以很容易地从证明中推导出来。 □

令 $\phi\in\mathcal{T}([G])$。我们有 $\phi_Q\in\mathcal{T}([G]_Q)$。对于 T 充分正的情形，我们将 ϕ 相对于 Q 的截断周期定义为

$$\mathcal{P}^{T,Q}(\phi)=\int_{K_H}\int_{[M_{Q,H}]^{Q,1}}\exp(-\langle2\rho_{P_H},H_{P_H}(m)\rangle)\Lambda^{T,Q}\phi(mk)dmdk.$$

根据引理 3.1 和定理 5.2，该式绝对收敛。注意，如果 $Q=G$ it，则它化简为

$$\mathcal{P}^T(\phi)=\int_{[H]}\Lambda^T\phi(h)dh.$$

5.2.3 正则化周期

在 [Zyd22 的第4节中，定义了一个由正则自守形式$\mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{A}^Q(G)$构成的子空间。更确切地说，若对每个兰金–塞尔伯格抛物子群$P \subset Q$ 以及 $h \in H(\mathbb{A})$，有限函数 $Z_P^\infty(z \mapsto \varphi)$的指数都属于$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$的一个稠密开子集，则 $\varphi \in \mathcal{A}^Q(G)$ 属于$\mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}}$。空间$\mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}}$ 在 $G(\mathbb{A})$ 的右平移作用下保持不变。于是得到以下定理。

定理5.3。对于 $\varphi \in \mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}}$，存在一个定义在 $\mathfrak{a}_{0,H}$ 上的唯一指数多项式，它与 $T \mapsto P^{T,Q}(\varphi)$ 在 T 充分正时一致，且其纯多项式部分为常数。我们将其记为 $P^Q(\varphi)$。

该数 $P^Q(\varphi)$ 是沿着 $Z_Q^\infty M_{Q_H}(F) N_{Q_H}(\mathbb{A}) \backslash H(\mathbb{A}$ 的 *Zydor*型正则化周期).

5.2.4 抛物下降

周期 P^Q 可通过抛物下降来描述。注意，$M_{Q,H}$可识别为 $\mathrm{M}_Q \times \mathrm{M}_{Q,H} \subset \mathrm{M}_Q^2 \times \mathrm{M}_Q$，其中映射 $\mathrm{M}_Q \subset \mathrm{M}_Q^2$ 是对角线，而 $\mathrm{M}_{Q,H} \subset \mathrm{M}_Q$ 是兰金–塞尔伯格嵌入。利用 [Zyd22], ，可以将两个正则化周期 $\mathrm{P}^{\mathbf{M}_Q^2}$ 和 $\mathrm{P}^{\mathcal{M}_Q}$ 分别关联到某些自守形式空间 $\mathrm{A}(\mathrm{M}_Q^2)^{\mathrm{reg}}$ 和 $\mathrm{A}(\mathrm{M}_Q)^{\mathrm{reg}}$。随后在 [Boi25b，引理4.12]中证明了以下引理。

引理 5.4。设 $\varphi \in \mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}}$。记

$$\varphi_{M_Q} = (R(e_{K_H})\varphi)_{|M_Q(\mathbb{A}),-\rho_Q}.$$

则有

$$\mathcal{P}^Q(\varphi) = \mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2}\left(m \in [\mathbf{M}_Q^2] \mapsto \mathcal{P}^{\mathcal{M}_Q}(R(m)\varphi_{M_Q})\right) = \mathcal{P}^{\mathcal{M}_Q}\left(m \in [\mathcal{M}_Q] \mapsto \mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2}(R(m)\varphi_{M_Q})\right), \tag{5.10}$$

其中所有自守形式都属于相关的 A^{reg} 空间。

沿用引理 5.4 的记号，记作

$$\mathcal{P}^Q(\varphi) = (\mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2} \otimes \mathcal{P}^{\mathcal{M}_Q})(\varphi_{M_Q}), \tag{5.11}$$

其中，张量积记号表示正则化周期可以按照（5.10）中的方式以任意顺序取值。如果 $\mathbf{M}_Q^2 = \prod_{i=1}^m$ 一般线性群$_{n_i}^2$ 且 $\phi \in \mathcal{A}(\mathbf{M}_Q^2)^{\mathrm{reg}}$，我们还可以进一步分解

$$\mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2}(\phi) = \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{P}^{\mathrm{GL}_{n_i}^2}(\phi). \tag{5.12}$$

我们称$P^{\mathrm{GL}_{n_i}^2}$ 为一般线性群GL_{n_i}上的正则化对角 *Arthur* 周期。

5.2.5 艾森斯坦级数的正则化周期

令 P为 G的一个标准抛物子群，令 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。令 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$。令 $w \in {}_Q{}^{\mathrm{std}}W_P$。对于处于一般位置的$\lambda \in \mathfrak{a}_{P_w,\ \mathbb{C}}^*$，设

$$\mathcal{P}^{T,Q}(\varphi, \lambda, w) = \mathcal{P}^{T,Q}(E^{Q^{\mathrm{std}}}(w_Q^{\mathrm{std},-1}\cdot, M(w,\lambda)\varphi_{P_w}, w\lambda)), \tag{5.13}$$

注 5.5。 元素 w_Q^{std}定义于 (5.4) 中。我们将其放在 (5.13) 中，以便处理标准抛物子群 Q^{std} 而非 Q。

根据 [Lap08 的定理 2.2] （该定理保证广义艾森斯坦级数具有一致中等增长），对于处于一般位置的 λ，截断周期定义良好；若 $P_\pi \not\subset P_w$ 为零亦然。在 [Boi25b 的引理 4.15], 中，我们证明广义艾森斯坦级数 $E^{Q^{\mathrm{std}}}(w^{\mathrm{std}}{}_{,Q}^{-1}\cdot M(w,\lambda)\varphi_{P_w}, w\lambda)$ 属于 $\mathcal{A}^Q(G)^{\mathrm{reg}}$，其中 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 处于一般位置。因此我们可以定义

$$\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w) = \mathcal{P}^Q(E^{Q^{\mathrm{std}}}(w_Q^{\mathrm{std},-1}\cdot, M(w,\lambda)\varphi_{P_w}, w\lambda)). \tag{5.14}$$

以下性质可直接由 [Zyd22] 中正则化周期的定义得出。

命题 5.6。对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，且 T 充分正时，我们有

$$\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w) = \sum_{\substack{R\in\mathcal{F}_{\mathrm{RS}}\\ R\subset Q}} \varepsilon_R^Q \sum_{w'\in {}_{R^{\mathrm{std}}}W_{Q_w^{\mathrm{std}}}^{Q^{\mathrm{std}}} w} \mathcal{P}^{T,R}(\varphi,\lambda,w')\cdot \frac{\exp(\langle w_R^{\mathrm{std}}w'(\lambda+\nu_{w'})+\underline{\rho}_R, T_R^Q\rangle)}{\hat{\theta}_R^Q(w_R^{\mathrm{std}}w'(\lambda+\nu_{w'})+\underline{\rho}_R)}, \tag{5.15}$$

其中 ε_R^Q 是一个符号，$\hat{}\theta_R^Q$ 是 *[Boi25b* 第*4*节中定义的仿射线性形式的乘积；我们约定，当 $P_\pi \subset P_{w'}$ 时，各项均为零（无论分母是否恒等于零）。对于 $P^{\mathbf{M}_Q^2}$ 和 $P^{\mathcal{M}_Q}$，也有类似的表达式。

5.3 将正则化周期表示为 ζ 积分和内积

本节回顾 [Boi25b] 的结果，该结果用全局泽塔积分和 Petersson 内积计算正则化周期 $\mathcal{P}^Q$。这些结果深度依赖于 [IY15], ，并将在 §5.4 中带来重要的解析后果。

5.3.1 兰金–塞尔伯格周期与 ζ 函数

设 ψ 是 $[N_0]$ 的一般特征标，且在 $N_{0,H}(\mathbb{A})$ 上平凡。对于任意自守形式$\Phi \in \mathcal{A}(G)$，我们可以考虑全局惠特克函数

$$W^\psi(g,\Phi) = \int_{[N_0]} \Phi(ng)\overline{\psi}(n)dn, \quad g\in[G]. \tag{5.16}$$

设 P 是 G 的标准抛物子群，且 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，我们可以考虑全局泽塔积分

$$Z_\pi(\varphi,\lambda) := \int_{N_{0,H}(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W^\psi(h, E(\varphi,\lambda))dh, \quad \varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G). \tag{5.17}$$

根据 [BPCZ22，引理 7.1.1，1], 当 $R(\lambda)$ 位于 $\mathfrak{a}_P^*$ 的某个开子集中时，此积分绝对收敛；根据 [IY15，推论 5.4] 以及 [IY15，公式 (4.2)], 它可延拓为 λ 上的亚纯函数。注意，由于残余表示不是泛型的，只要 π 不是尖点的，此积分就为零。

现在假设 π 是尖点的。相应地，记作 $M_P = \prod_{i=1}^{m_n}$ 一般线性群 $_{n_n,\,i} \times \prod_{i=1}^{m_{n+1}}$ 一般线性群 $_{n_{n+1},\,i}$ 以及 $\pi = \boxtimes_{i=1}^{m_n}\pi_{n,\,i}\boxtimes_{i=1}^{m_{n+1}}\pi_{n+1,\,i}$。考虑已完备兰金–塞尔伯格 L 函数的乘积

$$b(\lambda,\pi) = \prod_{i<j} L(1+\lambda_{n,i}-\lambda_{n,j}, \pi_{n,i}\times\pi_{n,j}^\vee)\prod_{i<j} L(1+\lambda_{n+1,i}-\lambda_{n+1,j}, \pi_{n+1,i}\times\pi_{n+1,j}^\vee). \tag{5.18}$$

and

$$L\left(\lambda+\frac{1}{2},\pi_n\times\pi_{n+1}\right):=\prod_{i=1}^{m_n}\prod_{j=1}^{m_{n+1}}L(1/2+\lambda_{n,i}+\lambda_{n+1,j},\pi_{n,i}\times\pi_{n+1,j}). \tag{5.19}$$

随后， [IY15，第 5.7] 推论表明，如果 $\varphi=\otimes_v\varphi_v\in\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$ 是可分解的，则存在一个有限集 S，由 F 的赋值组成，使得

$$Z_\pi(\varphi,\lambda)=\frac{L(\lambda+\frac{1}{2},\pi_n\times\pi_{n+1})}{b(\lambda,\pi)}\times\prod_{v\in\mathsf{S}}Z^\natural_{\pi_v}(\varphi_v,\lambda), \tag{5.20}$$

其中， $Z^\natural_{\pi_v}$ 是由 L函数商的局部版本归一化的局部ζ积分。此外，根据 [IY15, 定理 1.1] 和 [Boi25b, 命题 4.20] ，我们知道$\mathcal{P}$ 计算全局泽塔积分。

命题 5.7. 对于一般位置的 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$ 和$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\ \mathbb{C}}$，我们有 $P(\varphi,\lambda)=Z_\pi(\varphi,\lambda)$。令

$$L_{\pi,Z}(\lambda)=\prod_{\substack{i,j\\ \pi_{n,i}\simeq\pi^\vee_{n+1,j}}}\left(\lambda_{n,i}+\lambda_{n+1,j}\pm\frac{1}{2}\right)\prod_{\substack{i<j\\ \pi_{n,i}\simeq\pi_{n,j}}}(\lambda_{n,i}-\lambda_{n,j})^{-1}\prod_{\substack{i<j\\ \pi_{n+1,i}\simeq\pi_{n+1,j}}}(\lambda_{n+1,i}-\lambda_{n+1,j})^{-1}. \tag{5.21}$$

推论 5.8. 存在 $k>0$，使得对于 G 的每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个 J-对(P,π)，若 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)$，且对于每个 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$，映射

$$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}\mapsto L_{\pi,Z}(\lambda)\mathcal{P}(\varphi,\lambda)$$

在 $R_{\pi,\ k,\ c_J}$上正则。

证明。根据 [Boi25b, 引理 4.18],，对于每个赋值 v，局部因子$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}\mapsto Z^\natural_{\pi_v}(\varphi_v,\lambda)$是一个亚纯函数，并且在 $R(\lambda)\in\mathfrak{a}^*{}_P^+$ 上正则。由定理 4.1及(5.20)中的ζ函数分解可知，$\lambda\mapsto P(\varphi,\lambda)$沿着$\lambda_{n,i}-\lambda_{n,j}=0$ 以及$\lambda_{n+1,i}-\lambda_{n+1,j}=0$ 分别有简单零点，条件分别为$\pi_{n,i}\simeq\pi_{n,j}$ 和$\pi_{n+1,i}\simeq\pi_{n+1,j}$。事实上，注意这些零点既不能被 $L(\lambda+\frac{1}{2},\pi_n\times\pi_{n+1})$的极点抵消，也不能被 $\prod_{v\in\mathsf{S}}Z^\natural_{\pi_v}$的极点抵消。令

$$L^{\mathrm{num}}_{\pi,Z}(\lambda)=\prod_{\substack{i,j\\ \pi_{n,i}\simeq\pi^\vee_{n+1,j}}}\left(\lambda_{n,i}+\lambda_{n+1,j}\pm\frac{1}{2}\right).$$

那么，只需证明 $\lambda\mapsto L^{\mathrm{num}}_{\pi,Z}(\lambda)\mathcal{P}(\varphi,\lambda)$ 在 $\mathcal{R}_{\pi,k,c_J}$ 上正则。我们知道，它至少在 $R(\lambda)\in\mathfrak{a}^*{}_P^+$ 上正则。

为了在更大的区域 $\mathcal{R}_{\pi,k,c_J}$ 上得到正则性，我们利用定理 4.17 中尖点艾森斯坦级数的极点局部化，以及命题 4.20 中广义尖点 Eisenstein 级数的极点局部化（另见注 4.21）。由命题 5.6 可知，存在满足推论 5.8 陈述的 k andc_J，使得

$$\lambda\mapsto\left(\prod_{Q\in\mathcal{F}_{\mathrm{RS}}}\prod_{w\in W(P;Q^{\mathrm{std}})}\hat{\theta}_Q(w^{\mathrm{std}}_Q w\lambda+\underline{\rho}_Q)\right)L_{\pi,E}(\lambda)\mathcal{P}(\varphi,\lambda)$$

在 $\mathcal{R}_{\pi,\ k,\ c_J}$上是正则的，其中 $L_{\pi,\ E}$ 在（4.29）中定义。由于由（$\prod\hat{}\theta_Q(w^{\mathrm{std}}_Q w\lambda+\rho_Q)$)$L_{\pi,\ E}(\lambda)/L^{\mathrm{num}}_{\pi\ Z}$,(λ)所刻画的任一超平面与区域 $R(\lambda)\in\mathfrak{a}^*,{}_P^+$ 的交集均为余维 1，我们得出 $L^{\mathrm{num}}_{\pi\ Z}$,(λ)$\mathcal{P}$(φ,λ) 必须在 $\mathcal{R}_{\pi,\ k,\ c_J}$上正则。 □

5.3.2 Arthur 对角线周期

现在我们研究（5.12）中 $k \geq 1$ 的对角 Arthur 周期 $\mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}$。这是与对角子群 $\mathrm{GL}_k \subset \mathrm{GL}_k^2$相关联的 [Zyd22] 的正则化周期。对于某个子空间$\mathcal{A}(\mathrm{GL}_k^2)^{\mathrm{reg}}$中的所有自守形式，它都有良好定义。

命题 5.9. 设 P 是一般线性群$_k^2$ 的一个标准抛物子群。设 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P^2)$。设$\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{A}_{P,\pi}$(一般线性群$_k^2$)。我们有如下两种情况。

1. 若 $P =$ 一般线性群$_k^2$，则 $\varphi \in \mathcal{A}$(一般线性群$_k^2)^{\mathrm{reg}}$ 且

$$\mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}(\varphi) = \langle \varphi_1, \overline{\varphi_2} \rangle_{\mathrm{GL}_k, \mathrm{Pet}}.$$

2. 若 $P \neq$ 一般线性群$_k^2$，则对于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，我们有 $E(\varphi, \lambda) \in \mathcal{A}$(一般线性群$_k^2)^{\mathrm{reg}}$ 且

$$\mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}(E(\varphi, \lambda)) = 0.$$

证明。第一点由 [Zyd22，定理 4.6] 得出。对于第二点，设 $P \neq \mathrm{GL}_k^2$。[Cha25，引理 3.1.5.1] 证明了，对于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，我们有 $E(\varphi, \lambda) \in \mathcal{A}(\mathrm{GL}_k^2)^{\mathrm{reg}}$，且映射 $\lambda \mapsto \mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}(E(\varphi, \lambda))$ 是亚纯的。记 $P = P_1 \times P_2$、$\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2$ 和 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$。根据[Zyd22，定理 4.1]，，正则化周期对于一般位置的 λ 给出一个 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{A})^1$-不变配对

$$(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{A}_{P_1,\pi_1,\lambda_1}(\mathrm{GL}_k) \times \mathcal{A}_{P_2,\pi_2,\lambda_2}(\mathrm{GL}_k) \mapsto \mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}(E(\varphi, \lambda)) \in \mathbb{C}.$$

根据 Bernstein 原理（[JLR99，第 208] 页），对于处于一般位置（整体和局部）的 λ，这样的配对必为零。因此，$\mathcal{P}^{\mathrm{GL}_k^2}(E(\varphi, \lambda))$ 恒等于零。 □

5.4 正则化周期的解析性质

本节中，我们固定 $Q \in \mathcal{F}_{RS}$。取 P 为 G 的一个标准抛物子群，并取 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。结合引理 5.4、命题 5.7 和命题 5.9，我们得到周期 $\mathcal{P}^Q(\varphi, \lambda, w)$ 的完整描述，以及它们在 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 的某个开集上的解析性质。

5.4.1 正则化周期的极点

我们首先假设 $P \subset Q^{\mathrm{std}}$。我们有分解 $\pi_{\mathbf{P}} \boxtimes \pi_{\mathcal{P}}$，它对应于 Levi 因子 M_P 的分解。我们进一步分解 $\pi_{\mathbf{P}} = \pi_{\mathbf{P},n} \boxtimes \pi_{\mathbf{P},n+1}$。对于每个 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$，记 $\lambda_{\mathcal{P}}$ 为 λ 在 $\mathfrak{a}_{\mathcal{P},\mathbb{C}}$ 上的限制。此外，回忆 $\mathbf{M}_{Q+}^{\mathrm{std}}$,, 是某个 $\mathrm{GL}_{n_+}^2$ 的标准 Levi 子群（嵌入 G 的“左上角”），而 $\mathbf{M}_{Q-}^{\mathrm{std}}$,, 是某个 $\mathrm{GL}_{n_-}^2$ 的标准 Levi 子群（嵌入 G 的“右下角”）。令 $\mathbf{P} = (\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_-})^2 \cap P$。这是 $(\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_-})^2$ 的一个标准抛物子群，其 Levi 因子为 $\mathbf{M}_P$。此外，$\mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}}$, 是 $(\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_-})^2$ 的一个 Levi 子群，且包含 $\mathbf{M}_P$。令 R 为 G 的标准抛物子群，其 Levi 因子为 $(\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}}, n \times \mathrm{GL}_{n_-}) \times (\mathrm{GL}_{n_+} \times \mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}}, n+1 \times \mathrm{GL}_{n_-})$。

令 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。设

$$\varphi_{M_Q^{\mathrm{std}}} = \left(R(w_Q^{\mathrm{std},-1})R(e_{K_H})\varphi\right)_{|M_Q^{\mathrm{std}}(\mathbb{A}),-\rho_Q^{\mathrm{std}}}, \quad \varphi_{M_R} = \left(R(w_Q^{\mathrm{std},-1})R(e_{K_H})\varphi\right)_{|M_R(\mathbb{A}),-\rho_R}.$$

于是 $\varphi_{M_Q^{\mathrm{std}}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{P},\pi_{\mathbf{P}}}(\mathrm{M}_Q^{\mathrm{std}\,2},) \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(\mathrm{M}_Q^{\mathrm{std}})$，且 $\varphi_{M_R} \in \mathcal{A}_{\mathbf{P},\pi_{\mathbf{P}}}((\mathrm{GL}^{n_+} \times \mathrm{GL}_{n_-})^2) \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(\mathrm{M}_Q^{\mathrm{std}})$。由于 $\mathrm{M}_Q^{\mathrm{std}}$同构于某个 r 的 $\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}^{r+1}$，我们可以考虑定义在 $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(\mathrm{M}_Q^{\mathrm{std}})$ 上的 ζ函数 $Z_{\pi_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{M}_Q^{\mathrm{std}}}(\cdot\ \lambda_{\mathcal{P}})$。

命题 5.10。 设 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。我们有以下两种情况：

- 若 $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_{\mathrm{std}_Q}{}^2$，$\pi_{\mathbf{P}\,n} \simeq \pi^\vee{}_{\mathbf{P}\,n+1}$ 且 $\pi_{\mathcal{P}}$ 是尖点的，那么对于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ 以及每个 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，我们有

$$\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda) = \left(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{M}_{P,H},\mathrm{Pet}} \otimes Z_{\pi_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{M}_Q^{\mathrm{std}}}(\cdot,\lambda_{\mathcal{P}})\right)(\varphi_{M_Q^{\mathrm{std}}}) = \left(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P}_H,\mathrm{Pet}} \otimes Z_{\pi_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{M}_Q^{\mathrm{std}}}(\cdot,\lambda_{\mathcal{P}})\right)(\varphi_{M_R}), \tag{5.22}$$

  其中 $\mathbf{P} \simeq \mathbf{P}_H^2$，张量积记号的用法与 (5.11) 中相同。

- 否则，对于每个 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，映射 $\lambda \mapsto P^Q(\varphi,\lambda)$ 为零。

证明。 这直接由抛物下降（引理 5.4）、命题 5.7 中对 $\mathcal{P}^{\mathcal{M}_Q}$ 的描述、命题 5.9 中对 $\mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2}$ 的描述以及 (5.12) 得出。我们只需证明 (5.22) 中的最后一个等式。注意，$\mathbf{K} = w^{\mathrm{std}}{}_Q{}^{-1} K_H w_Q^{\mathrm{std}} \cap (\mathrm{GL}^{n_+}(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_{n_-}(\mathbb{A}))$ 是该群的一个良好极大紧子群。我们在其上取概率 Haar 测度。记为 $\varphi = \varphi_n \otimes \varphi_{n+1}$。于是由 Iwasawa分解可得

$$\langle \varphi_{M_R,n}, \overline{\varphi}_{M_R,n+1}\rangle_{\mathbf{P}_H,\mathrm{Pet}} = \int_{\mathbf{K}} \langle R(k)\varphi_{M_Q^{\mathrm{std}},n}, \overline{R(k)\varphi_{M_Q^{\mathrm{std}},n+1}}\rangle_{\mathbf{M}_{P,H},\mathrm{Pet}} dk.$$

第二个等式由此得出。 □

现在我们去掉关于 $P \subset Q^{\mathrm{std}}$ 的假设，并取 $w \in {}_{Q^{\mathrm{std}}}W_P$。我们研究 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 的周期 $\mathrm{P}^Q(\varphi,\lambda,w)$ 的正则性。根据引理 4.3，存在一个离散自守表示 $\pi_w \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_{P_w})$ 和一个非分歧特征 $\nu_w \in \mathfrak{a}_{P_w}^*$，使得对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，都有 $\varphi_{P_w} \in \mathcal{A}_{P_w,\pi_w,\nu_w}(G)$。我们可以将上述记号用于这个表示，例如将任意 $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q_w^{\mathrm{std}},\mathbb{C}}^*$ 在 $\mathfrak{a}_{\mathcal{Q}_w,\mathbb{C}}$ 上的限制记作 $\lambda_{\mathcal{P}}$，其中 $\mathrm{Q}_w = Q_w \cap \mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}}$。

回顾一下，我们在 §4.3.1 中定义了一个多项式 $L_{\pi,\ w}$，它控制区域 $\mathcal{R}_{\pi,\ k,\ c_J}(w)$ 内 $M(w,\ \lambda)$ 的极点（见 (3.16)）。关于 $\mathcal{P}^Q(\varphi,\ \lambda,\ w)$ 的极点，我们有如下描述。

命题 5.11。 存在 k，使得对于每个层 J，都存在 $c_J > 0$，使得对于每个 J-对 (P,π) 以及每个 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$，映射

$$\lambda \mapsto L_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},Z}\left((w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}}\right) L_{\pi,w}(\lambda)\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w) \tag{5.23}$$

在区域内正则

$$\left\{\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \;\middle|\; \lambda+\nu_w \in \mathcal{R}_{\pi,k,c_J}(w),\ (w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}} \in \mathcal{R}_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},k,c_J}\right\}. \tag{5.24}$$

证明。 由推论 4.13 可知，$\lambda \mapsto L_{\pi,\ w}(\lambda)M(w,\ \lambda)\varphi_{P_w}$ 在区域 (5.24) 内正则。由定理 5.2 和 [Lap08, 定理 2.2], ，我们只需考虑 $w = 1$ 和 $P = P_w$ 的情形。

我们现在要证明 $\lambda \mapsto L_{\pi_{\mathcal{P}},Z}(\lambda_{\mathcal{P}})\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda)$ 在区域 $\lambda_{\mathcal{P}} \in \mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J}$ 中是正则的。我们可以假设处于命题 5.10 的第一种情形。根据抛物下降（引理 5.4），我们需要研究以下对象的正则性

$$(\lambda_{\mathbf{P}},\lambda_{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{a}_{\mathbf{P},\mathbb{C}}^* \times \mathfrak{a}_{\mathcal{P},\mathbb{C}}^* \mapsto \mathcal{P}^{\mathbf{M}_Q^2}\left(m \in \mathbf{M}_Q^2(\mathbb{A}) \mapsto L_{\pi,Z}(\lambda_{\mathcal{P}})\mathcal{P}^{\mathcal{M}_Q}(R(m)\varphi_{M_Q},\lambda_{\mathbf{P}}+\lambda_{\mathcal{P}})\right). \tag{5.25}$$

根据命题 5.9，由于 $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2}$，周期 $\mathrm{P}^{\mathbf{M}_Q^2}$ 只是一个彼得森内积，因此 (5.25) 关于 $\lambda_{\mathbf{P}}$ 是常数。因此，根据 Hartogs 定理，只需证明它关于变量 $\lambda_{\mathcal{P}} \in \mathrm{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J}$ 是全纯的，其中 $\lambda_{\mathbf{P}}$ 固定。根据推论 5.8，对于每个 m，映射 $\lambda_{\mathcal{P}} \mapsto L_{\pi,Z}(\lambda_{\mathcal{P}})\mathrm{P}^{\mathcal{M}_Q}(R(m)^{\varphi_{M_Q}}, \lambda_{\mathbf{P}} + \lambda_{\mathcal{P}})$ 在所需区域内是正则的。此外，根据下文的推论 5.8（就此目的而言，该结论独立于此处的论证），可以轻易将其提升为一个正则映射 $\lambda_{\mathcal{P}} \mapsto L_{\pi,Z}(\lambda_{\mathcal{P}})\mathrm{P}^{\mathcal{M}_Q}(R(\cdot)^{\varphi_{M_Q}}, \lambda_{\mathbf{P}} + \lambda_{\mathcal{P}})$，其值取自 $\mathrm{T}([\mathbf{M}_Q^2])$（关于这一概念，见 [BPCZ22，第 A.0.3] 节）。由于根据命题 5.6，$\mathrm{P}^{\mathbf{M}_Q^2}$ 是截断周期之和，由定理 5.2 可知，(5.25) 在区域 $\lambda_{\mathcal{P}} \in \mathrm{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J}$ 内也正则。至此证明完毕。 □

5.4.2 正则化周期的界

现在我们对$\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w)$给出界。

命题 5.12. 存在 $k > 0$，使得对任意层 J 和 $C > 0$，存在 $c_J > 0$、$d > 0$、$N > 0$和 $X_1, \dots, X_r \in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对所有 J-对(P,π)以及 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J$，我们有

$$\left| L_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},Z}\left((w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}}\right) L_{\pi,w}(\lambda)\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w) \right| \le (1+\|\lambda\|^2)^d \sum_{i=1}^r \|\varphi\|_{-N,X_i}, \tag{5.26}$$

在区域

$$\left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \;\middle|\; \lambda+\nu_w \in \mathcal{R}_{\pi,k,c_J}^C(w),\ (w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}} \in \mathcal{R}_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},k,c_J} \right\}. \tag{5.27}$$

证明。设(P,π)是一个 J-对。我们可以假设离散自守表示 $w\pi_w$ of$M_{Q_w^{\mathrm{std}}}$满足命题 5.10 的第一个条件，否则周期为零。这意味着 $Q_w^{\mathrm{std}} \cap \mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2} = {}_{,}\mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2}{}_{,\circ}$

取 $R \in \mathrm{F}_{\mathrm{RS}}$ 使得 $R \subset Q$，并取 $w' \in {}_{R^{\mathrm{std}}}W_{Q_w^{\mathrm{std}}}^{Q^{\mathrm{std}}} w$ 满足 $P_\pi \subset P_{w'\circ}$ 集合 ${}_{R^{\mathrm{std}}}W_{Q_w^{\mathrm{std}}}^{Q^{\mathrm{std}}}$ 分解为 ${}_{R^{\mathrm{std}}}W\mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2}$、std $\times\, {}_{R^{\mathrm{std}}}W_{Q_w^{\mathrm{std}}}^{\mathcal{M}_Q^{\mathrm{std}}}$，因此我们可以在此分解下写作 $w' = (w'_{\mathbf{M}}, w'_{\mathcal{M}})w_\circ$。我们有 $w'_{\mathbf{M}} = 1$，此外还有 $\mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2} \cap R^{\mathrm{std}} = 、\mathbf{M}_Q^{\mathrm{std}\,2} \cap R_{w'}^{\mathrm{std}}、, P_w = P_{w'}, \pi_w = \pi_{w'}$和$\nu_w = \nu_{w'\circ}$ 现在我们要利用命题 4.29 对广义 Eisenstein 级数 $E^{R^{\mathrm{std}}}(M(w',\lambda)\varphi_{P_w}, w'\lambda)$给出界。回顾一下，在 §4.4.3 中我们定义了一些投影算子 p_i，它们出现在命题 4.29 的陈述中。由前面的讨论，并且由于$(w'\pi_w)_{\mathcal{P}}$是尖点的，容易验证条件$(w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}} \in \mathrm{R}_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},k,c_J}$蕴含：对所有 i，均有$p_i(w'(\lambda+\nu_{w'})) \in \mathrm{R}_{(w'\pi_w)_i,k,c_J}$（见注 4.21）。根据命题 4.29，存在线性形式的有限乘积 $L_{w'}(\lambda)$（可选取为与 π无关），以及 $N' > 0$，使得对所有 $Y \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，且对所有充分大的 $N > 0$，我们有 $X_1, \dots, X_r \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，并且存在 $d > 0$使得

$$\left\| L_{w'}(\lambda) E^{R^{\mathrm{std}}}(M(w',\lambda)\varphi_{P_w}, w'\lambda) \right\|_{-N',Y} \le (1+\|\lambda\|^2)^d \sum_{i=1}^r \|\varphi\|_{-N,X_i}, \tag{5.28}$$

f或在区域 (5.27) 中的 λ。此估计对于 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)^J$ 和 $(P,\ \pi)$ 是一致的 .

我们用 $L(\lambda)$ 表示所有 $L_{w'}$ 与所有 $\hat{}\theta_R^Q(w_R^{\mathrm{std}} w'(\lambda+\nu_{w'})^+ \rho_R)$ 的乘积。由定理 5.2 和命题 5.6 可知，对于足够大的任意 $N' > 0$，存在 $Y_1, \dots, Y_{r'} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于所有 J-对 $(P,\ \pi)$、所有$\bar{}\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)^J$以及 (5.27) 中的所有 λ，都有

$$\left| L(\lambda)\mathcal{P}^Q(\varphi,\lambda,w) \right| \le \sum_{\substack{R \in \mathcal{F}_{\mathrm{RS}} \\ R \subset Q}} \sum_{w' \in {}_{R^{\mathrm{std}}}W_{Q_w^{\mathrm{std}}}^{Q^{\mathrm{std}}} w} \sum_{i=1}^{r'} \left\| L(\lambda) E^{R^{\mathrm{std}}}(M(w',\lambda)\varphi_{P_w}, w'\lambda) \right\|_{-N',Y_i}.$$

由 (5.28)，我们得出 (5.26) 对 $L(\lambda)\mathcal{P}^Q(\varphi,\ \lambda,\ w)$ 成立。但根据命题 5.11，我们知道 $\lambda\mapsto L_{(w\pi_w)_{\mathcal{P}},\ Z((w(\lambda+\nu_w))_{\mathcal{P}})}L_{\pi,\ w}(\lambda)\mathcal{P}^Q(\varphi,\ \lambda,\ w)$ 在我们的区域内是全纯的。剩下只需利用 [Cha25, 引理 2.4.2.1] 消去多余的线性形式。 □

5.5 兰金–塞尔伯格周期的留数

本节回顾 [Boi25b] 关于正则化周期 $\lambda\mapsto\mathcal{P}(\varphi,\ \lambda)$ 的留数的结果。

5.5.1 留数的朴素概念

设 $m\geq 1$，令 f 是 $\mathbb{C}^m$ 上的亚纯函数。设 Λ 是 $\mathbb{C}^m$ 上一个非零仿射线性形式。记 $\mathcal{H}_\Lambda$ 为仿射超平面 $\{v\in\mathbb{C}^m\mid\Lambda(v)=0\}$。映射 $v\mapsto\Lambda(v)f(v)$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上的亚纯函数。假设 $\mathcal{H}_\Lambda$ 不包含于其极除子中（即 $\mathcal{H}_\Lambda$ 至多是 f 的一个简单极除子）。那么它在 $\mathcal{H}_\Lambda$ 上的限制是 $\mathcal{H}$ 上的亚纯函数，并且我们定义

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda}f:=(\Lambda f)_{|\mathcal{H}_\Lambda}.$$

设 Λ_1，……，Λ_r 是一族仿射线性形式，且其底层线性形式族线性无关。我们考虑迭代留数

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda_r\leftarrow\Lambda_1}f:=\operatorname*{Res}_{\Lambda_r}\dots\operatorname*{Res}_{\Lambda_1}f,$$

假设每个留数均按上述意义定义。这是定义在 $\mathcal{H}:=\bigcap\mathcal{H}_{\Lambda_i}$ 上的亚纯函数。注意，迭代留数事先取决于仿射线性形式的顺序。

5.5.2 作为正则化周期的留数

设 P 是 G 的标准抛物子群，且 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(M_P)$。相应地，将 Levi 因子写为 $M_P=\left(\prod_{i=1}^{m_n}\mathrm{GL}_{n_{n,\ i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m_{n+1}}\mathrm{GL}_{n_{n+1,\ j}}\right)$，以及 $\pi=\boxtimes\pi_{n,\ i}\boxtimes\pi_{n+1,\ j}$。下一个命题总结了 [Boi25b，命题 4.23] 以及 [Boi25b，引理 5.1] 的结果。

命题 5.13。设 $1\leq i_{+,\ 1}$，……，$i_{+,\ m_+}\leq m_n$、$1\leq i_{-,\ 1}$，……，$i_{-,\ m_-}\leq m_n$、$1\leq j_{+,\ 1}$，……，$j_{+,\ m_+}\leq m_{n+1}$ 以及 $1\leq j_{-,\ 1}$，……，$j_{-,\ m_-}\leq m_{n+1}$。假设

- 指标 $i_{+,1},\dots,i_{+,m_+},i_{-,1},\dots,i_{-,m_-}$ 彼此不同；
- 指标 $j_{+,1},\dots,j_{+,m_+},j_{-,1},\dots,j_{-,m_-}$ 彼此不同；
- 对于每个 l，都有 $\pi_{n,i_{+,l}}=\pi^\vee_{n+1,j_{+,l}}$ 以及 $\pi_{n,i_{-,l}}=\pi^\vee_{n+1,j_{-,l}}$。

对于处于适当范围内的 l，考虑 $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 上由 $\Lambda_{+,l}(\lambda)=\lambda_{n,i_{+,l}}+\lambda_{n+1,j_{+,l}}+\frac{1}{2}$ 以及 $\Lambda_{-,l}(\lambda)=\lambda_{n,i_{-,l}}+\lambda_{n+1,j_{-,l}}-\frac{1}{2}$ 定义的仿射线性形式。令 Q^{std}_{n+1} 为一般线性群 GL_{n+1} 的标准抛物子群，其标准 *Levi* 因子为

$$\prod_{l=1}^{m_+}\mathrm{GL}_{n_{i_{+,l}}}\times\mathrm{GL}_{k+1}\times\prod_{l=m_-}^{1}\mathrm{GL}_{n_{i_{-,l}}},\tag{5.29}$$

并令 $Q \in F_{\mathrm{RS}}$ 为命题 5.1 的双射下与 $(Q_{n+1}^{\mathrm{std}}, m_+ + 1)$ 对应的元素。令 $w \in W(P; Q^{\mathrm{std}})$ 为满足 $w_n(i_+, l) = l$、$w_n(i_\to, l) = m_n - l + 1$、$w_{n+1}(j_+, l) = l$ 且 $w_{n+1}(j_\to, l) = m_{n+1} - l + 1$ 的唯一元素。那么，对于每个 $\varphi \in A_P$，$\pi(G)$ 我们有

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda_{m_-,-} \leftarrow \Lambda_{-,1}} \operatorname*{Res}_{\Lambda_{+,m_+} \leftarrow \Lambda_{+,1}} \mathcal{P}(\varphi, \lambda) = (-1)^{m_+} \mathcal{P}^Q(\varphi, \lambda, w). \tag{5.30}$$

此外，集合 $\{\Lambda_{1,\pm}, \ldots, \Lambda_{m_\pm,\pm}\}$ 中的迭代留数可以按任意顺序取。

6 兰金–塞尔伯格周期的扩展

6.1 对 [Boi25b 第 5]节的扩展

本节中，我们定义一个相关诱导数据 Π_H的集合。它们对诱导表示$\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$进行参数化，我们可以在其上构造来自 [Boi25b]的正则化周期$\mathcal{P}_\pi$ 。事实上，为了得到兰金–塞尔伯格周期的精细谱展开，我们需要使用比 [Boi25b]中稍一般的诱导表示。

6.1.1 相关诱导数据

在本文余下部分中，我们采用以下约定。若 $n(1), \ldots, n(k)$分别是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_k}$中的整数元组，我们将它们满足 $1 \leq i \leq k$和 $1 \leq j \leq m_i$的元素记为 $n(i, j)$。我们还将通过连接这些元组得到的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_1+\ldots+m_k}$中的元组记为$(n(1), \ldots, n(k))$。回顾一下，$\mathrm{GL}_n$ 的任意标准抛物子群 P，都由第4节中定义的整数元组$n(P)$确定。我们将此概念自然地推广到 G的标准抛物子群。我们也允许 $n(P)$的各项为零。

令 $k \geq 1$ 和 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}$（一般线性群 $_k$）。将 $\sigma_\pi = \sigma^{\boxtimes d}$ 写作 $\sigma \in \Pi_{\mathrm{cusp}}$（一般线性群 $_r$），使得 $\pi = \mathrm{Speh}(\sigma, d)$。类比 [Zel80]，中引入的局部导数概念，我们将 π 的自守导数定义为

$$\pi^- = \mathrm{Speh}(\sigma, d-1) \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{r(d-1)}).$$

注意，如果 π 是尖点的，即如果 $d = 1$，则表示 π^- 是平凡群的平凡表示。

现在我们定义相关诱导数据的集合 Π_H。它是由满足以下条件的三元组（I， P， π）组成的集合。

- $I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ 满足 $I =$（n_+， n_1， n_2， n_-）。
- 我们有整数元组 n（+）$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{m_+}$、$n(1) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{m_1}$、$n(1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_1}$、$n(2) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{m_2}$、$n(2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m_2}$以及 n（−）$\in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{m_-}$，使得 $\sum n$（+， i）$= n_+$、$\sum n(1, i) = n_1$、$\sum n(2, i) = n_2$，并且 $\sum n$（−， i）$= n_-$，且 P 是 G 的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P) = \left((\underline{n}(+), \underline{n}(1), \underline{n}'(2), \underline{n}(-)), (\underline{n}(+), \underline{n}'(1), \underline{n}(2), \underline{n}(-))\right). \tag{6.1}$$

- $\pi \in \Pi_{\text{离散}}(M_P)$ 是一个离散自守表示（在 A_P^∞ 上具有平凡中心特征），使得相对于 (6.1)，$\pi = \pi_n \boxtimes \pi_{n+1}$ 分解为

$$\pi_n = \boxtimes_{i=1}^{m_+} \pi_{+,i} \boxtimes_{i=1}^{m_1} \pi_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}, \tag{6.2}$$

$$\pi_{n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+} \pi_{+,i}^\vee \boxtimes_{i=1}^{m_1} \pi_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}^\vee. \tag{6.3}$$

在这种情况下，对于 $1 \le i \le m_1$，我们可以写成：对于 π_1，$_i = \mathrm{Speh}(\sigma_{1,i}, d(1,i))$，其中某个表示 $\sigma_{1,i} \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_{r(1,i)})$，以及 $d(1,i)$ 和 $r(1,i)$ 是一些正整数。同样，对于 $1 \le i \le m_2$，我们有 $\pi_{2,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{2,i}, d(2,i))$。特别地，对于 $i \in \{1,2\}$ 和 $1 \le j \le m_i$，我们有公式 $n(i,j) = d(i,j)r(i,j)$ 以及 $n'(i,j) = (d(i,j)-1)r(i,j)$。

令 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$。根据第4节中所作的坐标选择，$\mathfrak{a}_P^*$实现为一个子空间

$$\mathfrak{a}_P^* \subset (\mathbb{R}^{m_+} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^{m_-}) \times (\mathbb{R}^{m_+} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^{m_-}). \tag{6.4}$$

$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$也有类似的分解。若 $\lambda \in \mathfrak{a}_P^*$，我们记为

$$\lambda = ((\lambda(+)_n, \lambda(1)_n, \lambda(2)_n, \lambda(-)_n), (\lambda(+)_{n+1}, \lambda(1)_{n+1}, \lambda(2)_{n+1}, \lambda(-)_{n+1})) \tag{6.5}$$

根据这一分解。注意，当 $d(2,\ i) = 1$ 时，有 $\lambda(2)_{n,\ i} = 0$；当 $d(1,\ i) = 1$ 时，有 $\lambda(1)_{n+1,\ i} = 0$。令 ρ_π 为 $\mathfrak{a}_P^*$ 中定义为下式的元素

$$\rho_\pi := \left(\left(\underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{m_+}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1+m_2}, \underbrace{-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}}_{m_-} \right), \left(\underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{m_+}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1+m_2}, \underbrace{-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}}_{m_-} \right) \right) \in \mathfrak{a}_P^*. \tag{6.6}$$

我们将反对角子空间 $\mathfrak{a}_\pi^* \subset \mathfrak{a}_P^*$ 定义为

$$\mathfrak{a}_\pi^* = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_P^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda(+)_n = -\lambda(+)_{n+1}, \\ \lambda(1)_{n,i} = -\lambda(1)_{n+1,i}, \quad 1 \le i \le m_1, \text{ if } \underline{d}(1,i) \ne 1, \\ \lambda(2)_{n,i} = -\lambda(2)_{n+1,i}, \quad 1 \le i \le m_2, \text{ if } \underline{d}(2,i) \ne 1, \\ \lambda(-)_n = -\lambda(-)_{n+1}, \end{array} \right\}. \tag{6.7}$$

我们有一个同构

$$\lambda \in \mathfrak{a}_\pi^* \mapsto (\lambda(+),\ \lambda(1), \lambda(2), \lambda(-)) := (\lambda(+)_n, \lambda(1)_n, \lambda(2)_{n+1}, \lambda(-)_n) \in \mathbb{R}^{m_+} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^{m_-} \tag{6.8}$$

我们还有一个由相同方程定义的反对角子空间$\mathfrak{a}_{\pi,\ \mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$。注意，若将中心特征在 A_P^∞上平凡这一要求放宽为酉性要求，则 $i\mathfrak{a}_\pi^*$ 恰好是$\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\ \mathbb{C}}^*$ 中满足（$P,\ \pi_\lambda$）$\in \Pi_H$ 的子空间。

注6.1。 Π_H 中相关诱导对的集合由 [Boi25b，第5节1] 引入，对应于 $n_+ = n_- = 0$的特殊情形。我们在 [Boi25b] 中仅考虑这一情形，因为我们的目标是由 [GGP20]证明非温和 Gan–Gross–Prasad 猜想。

6.1.2 正则化 Rankin–Selberg 周期

设 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$。设 σ_π 和 ν_π 分别为 M_{P_π} 的尖点自守表示和 $\mathfrak{a}_{P_\pi}^*$ 的元素，使得 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 是通过对诱导 $\mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi,-\nu_\pi}(G)$ 上的艾森斯坦级数取留数得到的（见 §4.1.2）。对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{P_\pi,\mathbb{C}}^*$，我们有 §5.3.1 中的全局 Zeta 函数 $Z_{\sigma_\pi}(\cdot\ \lambda)$。根据命题 5.7，我们知道它等于正则化周期 $\mathcal{P}(\cdot\ \lambda)$。此外，它具有 (5.20) 中的欧拉乘积展开，其中包含一个全局L-因子 $L\left(\lambda + \frac{1}{2}, \sigma_{\pi,n} \times \sigma_{\pi,n+1}\right)$。我们可以将 $\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^* - \nu_\pi - \rho_\pi$ 识别为 $\mathfrak{a}_{P_\pi,\mathbb{C}}^*$ 的仿射子空间。根据定理 4.1，我们知道，包含该子空间的 Z_{σ_π} 的所有奇点都是仿射

超平面，来源于 $L\left(\lambda+\frac{1}{2},\sigma_{\pi,n}\times\sigma_{\pi,n+1}\right)$ 的奇点。我们可以考虑留数 Res $Z_{\sigma_\pi}(\cdot\ \lambda)$，其定义为：乘以所有相应的仿射线性形式（按命题 5.13 中的方式归一化），然后在 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}-\nu_\pi-\rho_\pi$ 处取值。这个留数事先依赖于所选顺序。现在我们陈述对 [Boi25b, 定理 5.2] 的一个小幅推广。

定理 *6.2.* 对于每个 $\phi\in A_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$，留数 *Res* $Z_{\sigma_\pi}(\phi,\lambda)$ 都是良定义的，且与顺序无关。对于处于一般位置的 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}-\rho_\pi$，线性形式 $\phi\mapsto$ *Res* $Z_{\sigma_\pi}(\phi,\mu)$ 可经由商 $A_{P_\pi,\sigma_\pi,\mu}(G)\twoheadrightarrow A_{P,\pi,\lambda}(G)$ 分解，其中 $\mu=\lambda-\nu_\pi$。

由此得到的线性形式将记为 $\mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$ 上的 $\mathcal{P}_\pi(\cdot\ \lambda)$。它是 $H(\mathbb{A})$-不变的。

证明。 留数与仿射线性形式的顺序无关，这一点可由与 [Boi25b，引理 5.1] 相同的论证得出。若 $n_+=n_-=0$，则定理 6.2 的其余部分即为 [Boi25b，定理 5.2]。对于一般情形，我们按如下方式进行。我们有一个自然同一 $\mathfrak{a}^*_{P_\pi,\mathbb{C}}$ 与

$$\left(\prod_{i=1}^{m_+}\mathbb{C}^{\underline{d}(+,i)}\prod_{i=1}^{m_1}\mathbb{C}^{\underline{d}(1,i)}\prod_{i=1}^{m_2}\mathbb{C}^{\underline{d}(2,i)-1}\prod_{i=1}^{m_-}\mathbb{C}^{\underline{d}(-,i)}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{m_+}\mathbb{C}^{\underline{d}(+,i)}\prod_{i=1}^{m_1}\mathbb{C}^{\underline{d}(1,i)-1}\prod_{i=1}^{m_2}\mathbb{C}^{\underline{d}(2,i)}\prod_{i=1}^{m_-}\mathbb{C}^{\underline{d}(-,i)}\right).$$

我们按照这些识别来写出任意 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P_\pi,\mathbb{C}}$ 的坐标。更准确地说，若 $\lambda=(\lambda_n,\lambda_{n+1})\in\mathfrak{a}^*_{P_\pi,\mathbb{C}}$，则将 λ_n 写作

$$(\lambda(+,1)_n,\dots,\lambda(+,m_+)_n,\lambda(1,1)_n,\dots,\lambda(1,m_1)_n,\lambda(2,1)_n,\dots,\lambda(2,m_2)_n,\lambda(-,1)_n,\dots,\lambda(-,m_-)_n)$$

例如，$\lambda(+,1)_n\in\mathbb{C}^{d(+,1)}$ 的坐标为 $\lambda(+,1)_{n,1},\dots,\lambda(+,1)_{n,d(+,1)}$。现在我们考虑定义在 $\mathfrak{a}^*_{P_\pi,\mathbb{C}}$ 上的仿射线性形式集合 $\mathcal{L}$，其定义如下

$$\begin{cases}\Lambda(+,i,j)(\lambda)=-(\lambda(+,i)_{n,j}+\lambda(+,i)_{n+1,\underline{d}(+,i)-j+1}+1/2),\\ \Lambda(-,i,j)(\lambda)=\lambda(-,i)_{n,j}+\lambda(-,i)_{n+1,\underline{d}(-,i)-j+1}-1/2,\end{cases}\quad\begin{cases}1\le i\le m_+,\\ 1\le j\le\underline{d}(+,i),\\ 1\le i\le m_-,\\ 1\le j\le\underline{d}(-,i).\end{cases}$$

我们还有由以下方程定义的线性形式集合 $\mathcal{L}'$。

$$\begin{cases}\Lambda'(+,i,j)(\lambda)=\lambda(+,i)_{n,j}+\lambda(+,i)_{n+1,\underline{d}(+,i)-j}-1/2,\\ \Lambda'(-,i,j)(\lambda)=-(\lambda(-,i)_{n,j}+\lambda(-,i)_{n+1,\underline{d}(-,i)-j+2}+1/2),\end{cases}\quad\begin{cases}1\le i\le m_+,\\ 1\le j\le\underline{d}(+,i)-1,\\ 1\le i\le m_-,\\ 2\le j\le\underline{d}(-,i).\end{cases}$$

所有这些线性形式都指向 Z_{σ_π} 的奇异仿射超平面。若将 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 分别记为它们的交集，则 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}-\nu_\pi-\rho_\pi\subset\mathcal{H}\cap\mathcal{H}'$。现在我们按照以下方式对集合 $\mathcal{L}$ 排序

$$\left(\overleftarrow{\prod_{i=m_-}^{1}}\overleftarrow{\prod_{j=1}^{\underline{d}(-,i)}}\Lambda(-,i,j)\right)\leftarrow\left(\overleftarrow{\prod_{i=1}^{m_+}}\overleftarrow{\prod_{j=\underline{d}(+,i)}^{1}}\Lambda(+,i,j)\right),\tag{6.9}$$

例如，记号 $\overleftarrow{\prod_{i=1}^{m_+}}\overleftarrow{\prod_{j=d(+,i)}^{1}}\Lambda(+,\ i,\ j)$ 表示

$$\Lambda(+,m_+,1)\leftarrow\dots\leftarrow\Lambda(+,2,\underline{d}(+,2))\leftarrow\Lambda(+,1,1)\leftarrow\dots\leftarrow\Lambda(+,1,\underline{d}(+,1)).$$

设 Q^{std} 是 GL_{n+1} 的标准抛物子群，其标准 Levi 子群的形式为

$$\prod_{i=1}^{m_+}\mathrm{GL}_{\underline{r}(+,i)}^{\underline{d}(+,i)}\times\mathrm{GL}_{r+1}\times\prod_{i=1}^{m_-}\mathrm{GL}_{\underline{r}(-,i)}^{\underline{d}(-,i)}.$$

令 Q 为在命题 5.1 的双射下与对 $(Q^{\mathrm{std}},\ \sum_{i=1}^{m_+}d(+,\ i))$ 相关联的 G 的兰金–塞尔伯格抛物子群。此外，令 $\pi_+=\boxtimes\pi_{+,\ i}$ 以及 $\pi_-=\boxtimes\pi_{-,\ i}$。它们分别是一般线性群 GL_{n_+} 和 GL_{n_-} 的标准 Levi 子群的表示。对于 $m\in\{n,\ n+1\}$，我们有元素 $w^*_{\pi_+,\ m}$ 和 $w^*_{\pi_-,\ m}$，并将它们视为嵌入 $M_{P,\ m}$ 中的 GL_{n_+} 和 GL_{n_-} 的元素。于是，应用命题 5.13 可知，若按上述规定的顺序取留数，则对于处于一般位置的 $\lambda\in\mathcal{H}$

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{L}}\ Z_{\sigma_\pi}(\phi,\lambda)=\mathcal{P}^Q(\phi,\lambda,w^*_{\pi_+,n}w^*_{\pi_-,n}).$$

注意，将其限制到 $\mathcal{H}$ 上时，$\mathcal{L}'$ 中的线性形式可以写成：对于处于适当范围内的 i 和 j，

$$\begin{cases}\Lambda'(+,i,j)(\lambda)=\lambda(+,i)_{n,j}-\lambda(+,i)_{n,j+1}-1=\lambda(+,i)_{n+1,\underline{d}(+,i)-j}-\lambda(+,i)_{n+1,\underline{d}(+,i)-j+1}-1\\ \Lambda'(-,i,j)(\lambda)=\lambda(-,i)_{n,j-1}-\lambda(-,i)_{n,j}+1=\lambda(-,i)_{n+1,\underline{d}(-,i)-j+1}-\lambda(-,i)_{n+1,\underline{d}(-,i)-j+2}+1.\end{cases}\tag{6.10}$$

按照 [Boi25b，引理 5.5]，可得，对于处于一般位置的 $\lambda\in\mathcal{H}\cap\mathcal{H}'$

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{L}'}\mathrm{Res}_{\mathcal{L}}\ Z_{\sigma_\pi}(\phi,\lambda)=\mathcal{P}^Q(M^*(w^*_{\pi_+,n}w^*_{\pi_-,n},\lambda)\phi,w^*_{\pi_+,n}w^*_{\pi_-,n}\lambda).$$

通过颠倒 (6.9) 中的顺序，我们看到，对 $M^*(w^*_{\pi_+,\ n+1}w^*_{\pi_-,\ n+1},\ \lambda)$ 也成立同一关系。根据抛物下降（命题 5.10），现在可以应用 [Boi25b 的定理 5.2]。这表明，留数可经由 $M^*(w^*_{\pi,\ n},\ \lambda)$ 和 $M^*(w^*_{\pi,\ n+1},\ \lambda)$ 分解，其中 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}}-\nu_\pi-\rho_\pi$。但根据 [Boi25b 的引理 3.2]，我们知道这些算子实现了整体商映射，由此证明完毕。 □

6.1.3 无留数构造

现在我们说明一种不含留数的$\mathcal{P}_\pi$ 的替代构造。其思路是将 $\mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$ 实现为来自尖点谱的某个抛物诱导的子表示，而非商表示。这种构造更适合研究$\mathcal{P}_\pi$ 的解析性质，我们将在下文 §6.1.5 中证明这些性质。

对于 $i\in\{1,\ 2\}$，令 $n^-(i)\in\mathbb{Z}_{\geq0}^{2m_i}$为满足以下条件的元组：$n^-(i,\ 2j-1)=(d(i,\ j)-1)r(i,\ j)$ 且$n^-(i,\ 2j)=r(i,\ j)$，其中 $1\leq j\leq m_i$。令 $P_{\pi,\ +}$为 G的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P_{\pi,+})=\left((\underline{n}(+),\underline{n}^-(1),\underline{n}'(2),\underline{n}(-)),(\underline{n}(+),\underline{n}'(1),\underline{n}^-(2),\underline{n}(-))\right).$$

于是 $P_\pi\subset P_{\pi,\ +}\subset P$。令 $w_+\in W(P_{\pi,\ +})$ 为满足以下条件的最短元素：若令 $Q_{\pi,\ +}=w_+P_{\pi,\ +}$，则

$$\underline{n}(Q_{\pi,+})=\left((\underline{n}(+),\underline{n}'(1),\underline{n}'(2),\underline{r}(1),\underline{n}(-)),(\underline{n}(+),\underline{n}'(1),\underline{n}'(2),\underline{r}(2),\underline{n}(-))\right).$$

换言之，在 GL_n 分量上，w_+ 将每个乘积 $\mathrm{GL}^{(d(1,i)-1)r(1,i)}\times\mathrm{GL}^{r(1,i)}$ 中位于乘积 $\prod_{i=1}^{m_2}\mathrm{GL}^{(d(2,i)-1)r(2,i)}$之后的最后一个 $\mathrm{GL}^{r(1,i)}$ 块发送到相应位置，同时保持顺序不变。GL_{n+1} 分量上的描述相同。

设 $P^{\mathrm{std}}_{+,n+1}$ 为 GL_{n+1} 的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P^{\mathrm{std}}_{+,n+1}) = (\underline{n}(+), \underline{n}'(1), \underline{n}'(2), k+1, \underline{n}(-)) . \tag{6.11}$$

其中我们令 $k+1 = \sum_i r(2,i)$。令 P_+ 为与命题 5.1 的双射下的配对 $(P^{\mathrm{std}}_{+,n+1}, m_+ + m_1 + m_2 + 1)$ 对应的 G 的兰金 – 塞尔伯格抛物子群。这里允许块的大小为零，因此 $(m_+ + m_1 + m_2 + 1)^{\mathrm{th}}$ 块为 GL_{k+1}。注意，$w_+ \in {}^{P^{\mathrm{std}}_+}W_P$，且 $P_\pi \subset P_{w_+} = P_{\pi,+}$。

现在考虑正则化周期 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}} \mapsto \mathcal{P}^{P_+}(\varphi, \lambda, w_+)$，当 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 处于一般位置时，该周期良定义。事实上，如下述命题所示，对于较小子空间 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$ 中的 λ，它也是亚纯的。

命题 6.3。令 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。映射

$$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi \mapsto \mathcal{P}^{P_+}(\varphi, \lambda, w_+) \tag{6.12}$$

是一个良定义的 m 亚纯函数 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$。此外，对于处于一般位置的 λ，我们有

$$\mathcal{P}^{P_+}(\varphi, \lambda, w_+) = \mathcal{P}_\pi(\varphi, \lambda). \tag{6.13}$$

证明。这与 [Boi25b，命题 5.9]，中的证明相同，同时考虑到定理 6.2 的证明中出现的额外仿射线性形式。 □

6.1.4 πP的函数方程

注意，任意 $w \in W(P)$ 都可以识别为一对 $(w_n, w_{n+1}) \in \mathfrak{S}(m_+ + m_1 + m_2 + m_-)^2$，其中我们回顾一下，在情形 $d(1,i) = 1$ 或 $d(2,j) = 1$ 中，我们允许大小为零的块。我们将 $W(\pi)$ 定义为属于子群 $(\mathfrak{S}(m_+) \times \mathfrak{S}\, m_1 + m_2 \times \mathfrak{S}(m_-))^2$ 且满足以下条件的 $w \in W(P)$ 的集合

$$w_n = w_{n+1} = (\sigma_+, \sigma, \sigma_-),\ \sigma_+ \in \mathfrak{S}(m_+),\ \sigma \in \mathfrak{S}(m_1) \times \mathfrak{S}(m_2) \subset \mathfrak{S}(m_1 + m_2),\ \sigma_- \in \mathfrak{S}(m_-). \tag{6.14}$$

因此，按照 §6.1.1 中的定义，$W(\pi)$ 恰好是 $w \in W(P)$ 中满足 $(I, w.P, w\pi) \in \Pi_H$ 的子集。此外，我们有 $w(\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi) = \mathfrak{a}^*_{w\pi,\mathbb{C}} - \rho_{w\pi}$。

对于任意元素 $((\sigma_+, \sigma, \sigma_-), (\sigma_+, \sigma, \sigma_-)) \in (\mathfrak{S}(\overline{m_+}) \times \mathfrak{S}(m_1 + \overline{m_2}) \times \mathfrak{S}(m_-))^2$，我们可以与之关联一个 $w_{\mathbf{M}} \in W(M_{P^{\mathrm{std}}_+})$，它以自然的方式按块作用于 $M\mathrm{std}^{P_+}$ 上的 (6.11)：分别稳定 GL_k 和 GL_{k+1} 块，以及 GL_n 和 GL_{n+1} 分量。我们将由此得到的 w 的子集记为 $W_{\mathbf{M}}(\pi)$，并将其视为 $W(P^{\mathrm{std}+}) \subset W$ 的子集。通过用 $w^{\mathrm{std}}_{P_+}$ 共轭，我们可以将 $w_{\mathbf{M}}$ 识别为 $\mathbf{M}^2_{P_+}$ 的一个元素，仍记作 $w_{\mathbf{M}}$。于是得到 Rankin–Selberg 抛物子群 $w_{\mathbf{M}}.P_+$。此外，标准抛物子群 $(w_+.P_{\pi,+}) \cap \mathbf{M}^{\mathrm{std}}_{P_+}$ 的标准 Levi 子群为 $\prod_{i=1}^{m_1} \mathrm{GL}_{r(1,i)} \times \prod_{i=1}^{m_2} \mathrm{GL}_{r(2,i)}$。将 $W_{\mathcal{M}}(\pi)$ 记为 $W((w_+.P_{\pi,+}) \cap \mathbf{M}^{\mathrm{std}}_{P_+})$ 中按块作用于其上的元素所成的集合。它同构于 $\mathfrak{S}(m_1) \times \mathfrak{S}(m_2)$。若将其视为$W$的一个子群，则其元素与 $W_{\mathbf{M}}(\pi)$ 对易。

$\mathcal{P}_\pi$ 所满足的函数方程总结如下命题所述。

引理 6.4. 设 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$。设 $w_{\mathbf{M}} \in W_{\mathbf{M}}(\pi)$，设 $w_{\mathcal{M}} \in W_{\mathcal{M}}(\pi)$。那么对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi$，有

$$\mathcal{P}_\pi(\varphi, \lambda) = \mathcal{P}^{w_{\mathbf{M}}.P_+}\left(M(w_{\mathbf{M}} w_{\mathcal{M}} w_+, \lambda)\varphi_{P_{\pi,+}}, w_{\mathbf{M}} w_{\mathcal{M}} w_+ \lambda\right). \tag{6.15}$$

证明. 用与 [Boi25b, 引理 5.5] 的证明相同的论证，很容易证明，(6.15) 右端的交织算子和正则化周期对 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$ 是良定义的，因此它在 λ 中给出一个亚纯函数。根据 [BL24, 定理 2.3.4], 中的艾森斯坦级数的函数方程，对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$，有等式

$$E^{P^{\mathrm{std}}_+}(M(w_+,\lambda)\varphi_{P_{\pi,+}}, w_+\lambda) = E^{P^{\mathrm{std}}_+}(M(w_{\mathcal{M}}w_+,\lambda)\varphi_{P_{\pi,+}}, w_{\mathcal{M}}w_+\lambda).$$

现在假设 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_\pi$。根据命题 5.10，我们知道$\mathcal{P}^{P_+}$ 可分解为$\mathbf{M}^2_{P_+}$ 上的一个（双线性）内积与$\mathcal{M}^{P_+}$ 上的一个 ζ 函数的乘积。对于前者，根据 [Art05, 定理 7.2],，我们知道全局交织算子在酉轴上的酉性；对于后者，我们有艾森斯坦级数的函数方程。利用命题 6.3 中$\mathcal{P}_\pi(\varphi,\ \lambda)$ 的表达式，我们看到

$$\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda) = \mathcal{P}^{w_{\mathbf{M}}.P_+}\left(\left(M(w_{\mathbf{M}}, w_{\mathcal{M}}w_+\lambda)E^{P^{\mathrm{std}}_+}(M(w_{\mathcal{M}}w_+,\lambda)\varphi_{P_{\pi,+}}, w_{\mathcal{M}}w_+\lambda)\right)(w^{\mathrm{std},-1}_{w_{\mathbf{M}}.P_+}\cdot)\right).$$

注意这里我们使用 $w^{\mathrm{std}}_{P_+} = w^{\mathrm{std}}_{w_{\mathbf{M}}.P_+}$。现在由引理 3.5 可知，我们可以将交织算子与部分艾森斯坦级数互换。由此可知，对于$\lambda \in i\mathfrak{a}^*_\pi - \rho_\pi$，式 (6.15) 成立；对于处于一般位置的 λ，则由解析延拓得出结论。 □

推论 6.5。 设 $w \in W(\pi)$。对于处于一般位置的 $\varphi \in A_{P,\ \pi}(G)$ 和 $\underline{\lambda} \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}} - \rho_\pi$，我们有

$$\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda) = \mathcal{P}_{w\pi}(M(w,\lambda)\varphi, w\lambda). \tag{6.16}$$

证明。 这由命题 6.3 和引理 6.4 得出。 □

6.1.5 $\mathcal{P}_\pi$ 的解析性质

现在我们考察正则化周期 $\mathcal{P}_\pi(\cdot\ \lambda)$ 的奇点。令 $(P,\pi) \in \Pi_H$。设

$$\pi_{1,2} = \left(\boxtimes_{i=1}^{m_1}\pi_{1,i}\boxtimes_{i=1}^{m_2}\pi^{-,\vee}_{2,i}\right)\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^{m_1}\pi^{-,\vee}_{1,i}\boxtimes_{i=1}^{m_2}\pi_{2,i}\right).$$

这是子群 $M_{1,2} \subset M_P$ 的一个离散表示。此外，若 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}$，令 $\lambda_{1,2}$ 为其在 $\mathfrak{a}^*_{M_{1,2},\mathbb{C}}$ 上的限制。在 (6.8) 的坐标下，我们有表达式 $\lambda_{1,2} = ((\lambda(1)\ -\lambda(2)), (-\lambda(1)\ \lambda(2))$。令 $L_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)$ 为定义在 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \nu_\pi$ 上的线性形式的乘积，其定义如下

$$L_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda) = \prod_{\substack{i,j\\ \pi_{1,i}\simeq\pi^{-,\vee}_{2,j}}}(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j)\prod_{\substack{i,j\\ \pi^{-,\vee}_{1,i}\simeq\pi_{2,j}}}(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j). \tag{6.17}$$

它仅取决于 $\lambda_{1,2}$。

命题 6.6。 存在 $k > 0$，使得对于 G 的每个层 J，都存在 $c_J > 0$，使得对于每个 J-对 $(P,\pi) \in \Pi_H$ 以及每个 $\varphi \in A_{P,\pi}(G)$，亚纯函数

$$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi \mapsto L_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda)$$

在区域 $\lambda_{1,\ 2} \in \mathcal{S}_{\pi_{1,\ 2},\ k,\ c_J}$ 中正则（参见 (3.15)）。

证明。设 $w \in W(\pi)$。由命题 4.14，存在如命题所述的 k 和 c_J，使得算子 $M(w, \lambda)$ 在区域 $\mathcal{S}_{\pi, k, c_J}$ 中正则。此外，该区域在 w 作用下稳定。由推论 6.5 可知，我们可以用 $w\pi$ 替换 π。特别地，我们可以并且将假设 $d(1, 1) \geq \ldots \geq d(1, m_1)$，且 $d(2, 1) \geq \ldots \geq d(2, m_2)$。

根据命题 6.3，我们需要研究 $\lambda \mapsto \mathcal{P}^{P_+}(\varphi, \lambda, w_+)$ 的极点。为此，我们想要使用命题 5.11。根据引理 4.3，我们有 $\varphi_{P_{\pi,+}} \in \mathcal{A}_{\pi_+, \nu_+}(G)$，其中 $\pi_+ \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_{P_{\pi,+}})$，且 $\nu_+ \in \mathfrak{a}^*_{P_{\pi,+}}$。在坐标中，我们有

$$\nu_{+,n} = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_+}, \underbrace{-\frac{1}{2}, \frac{\underline{d}(1,1)-1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{\underline{d}(1,m_1)-1}{2}}_{m_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_-} \right), \tag{6.18}$$

$$\nu_{+,n+1} = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_+}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1}, \underbrace{-\frac{1}{2}, \frac{\underline{d}(2,1)-1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}, \frac{\underline{d}(2,m_2)-1}{2}}_{m_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_-} \right), \tag{6.19}$$

回到 §6.1.3 的描述，我们看到

$$\left(\alpha \in \Delta_{P_{\pi,+}}, \quad w_+ \alpha < 0 \right) \implies \langle \nu_+, \alpha^\vee \rangle \geq 0. \tag{6.20}$$

此外，w_+ 仅作用于 $M_{1,2}$。因此，条件 $\lambda_{1,2} \in \mathsf{S}_{\pi_1,2,k,c_J}$ 蕴含 $\lambda + \nu_+ \in \mathsf{R}_{\pi,k,c_J}(w_+)$。现在我们计算 $n_{\pi_+}(w_+, \lambda + \nu_+) = n_{\pi_+,n}(w_+, \lambda + \nu_+) n_{\pi_+,n+1}(w_+, \lambda + \nu_+)$。在一般线性群 $_n$ 一侧，利用 $(I, P, \pi) \in \Pi_H$ 这一事实，由 (6.18) 和引理 4.5 中的计算可得

$$\begin{aligned} n_{\pi_+,n}(w_+, \lambda + \nu_+) = & \prod_{1 \leq i < j \leq m_1} \frac{L\left(\lambda(1)_i - \lambda(1)_j + \frac{\underline{d}(1,i) - \underline{d}(1,j)}{2} + 1, \sigma_{1,i} \times \sigma_{1,j}^\vee\right)}{L\left(\lambda(1)_i - \lambda(1)_j + \frac{\underline{d}(1,i) + \underline{d}(1,j)}{2}, \sigma_{1,i} \times \sigma_{1,j}^\vee\right)} \\ & \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_1 \\ 1 \leq j \leq m_2}} \frac{L\left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j + \frac{\underline{d}(1,i) - \underline{d}(2,j) + 1}{2}, \sigma_{1,i} \times \sigma_{2,j}\right)}{L\left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j + \frac{\underline{d}(1,i) + \underline{d}(2,j) - 1}{2}, \sigma_{1,i} \times \sigma_{2,j}\right)}, \end{aligned}$$

而在一般线性群 $_{n+1}$ 上，我们有

$$n_{\pi_+,n}(w_+, \lambda + \nu_+) = \prod_{1 \leq i < j \leq m_2} \frac{L\left(\lambda(2)_i - \lambda(2)_j + \frac{\underline{d}(2,i) - \underline{d}(2,j)}{2} + 1, \sigma_{2,i} \times \sigma_{2,j}^\vee\right)}{L\left(\lambda(2)_i - \lambda(2)_j + \frac{\underline{d}(2,i) + \underline{d}(2,j)}{2}, \sigma_{2,i} \times \sigma_{2,j}^\vee\right)}.$$

由定理 4.1 可知，我们可以确定这些表达式的极点。在某个区域 $\lambda_{1,2} \in \mathsf{S}_{\pi_1,2,k,c_J}$ 中，除 $L\left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j + \frac{d(1,i) + d(2, j-1)}{2}, \sigma_{1,i} \times \sigma_{2,j}\right)$（其中 $d(1, i) = d(2, j) = 1$）外，所有分母均不为零。不过，这一项会被相应的分子抵消，因此所有极点都来自分子。此外，当 $d(1, i) = 2$ 且 $d(2, j) = 1$，或当 $d(1, i) = 1$ 且 $d(2, j) = 2$ 时，$L\left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j + \frac{d(1,i) - d(2, j+1)}{2}, \sigma_{1,i} \times \sigma_{2,j}\right)$ 可能出现的极点总会被一个极点抵消

对应分母的极点。最后我们看到，可以取

$$L_{\pi,w_+}(\lambda) = \prod_{\substack{i<j \\ \pi_{1,i}\simeq\pi_{1,j}}} (\lambda(1)_i - \lambda(1)_j) \prod_{\substack{i<j \\ \pi_{2,i}\simeq\pi_{2,j}}} (\lambda(2)_i - \lambda(2)_j) \times \prod_{\substack{\pi_{1,i}\simeq\pi_{2,j}^{-,\vee} \\ \underline{d}(2,j)\neq 2}} (\lambda(1)_i + \lambda(2)_j) \prod_{\substack{\pi_{1,i}^{-,\vee}\simeq\pi_{2,j} \\ \underline{d}(1,i)\neq 2}} (\lambda(1)_i + \lambda(2)_j). \tag{6.21}$$

这个仿射线性形式的乘积控制了我们区域内 $M(w_+,\ \lambda)\varphi_{P_{\pi,\ +}}$ 的极点。

另一方面，采用命题 5.10 中的记号，我们有

$$(w_+\nu_+)_{\mathcal{P}} = \left(\left(\frac{\underline{d}(1,1)-1}{2},\dots,\frac{\underline{d}(1,m_1)-1}{2}\right),\left(\frac{\underline{d}(2,1)-1}{2},\dots,\frac{\underline{d}(2,m_2)-1}{2}\right)\right).$$

由于我们对 $d(1,\ i)$ 和 $d(2,\ j)$ 的假设，这些元素属于 $\mathfrak{a}^{*,\ +}{}_{\mathcal{P}}$。特别地，$\lambda_{1,\ 2}\in\mathcal{S}_{\pi_{1,\ 2},\ k,\ c_J}$ 意味着 $(w_+(\lambda+\nu_+))_{\mathcal{P}}\in\mathcal{R}_{(w_+\pi_+)_{\mathcal{P}},\ k,\ c_J}$。采用 (5.21) 中的记号，我们看到 $L_{(w_+\pi_+)_{\mathcal{P}},\ Z}(w_+(\lambda+\nu_+)_{\mathcal{P}_+})$ 是

$$\prod_{\sigma_{2,j}\simeq\sigma_{1,i}^{\vee}}\left(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j+\frac{\underline{d}(1,i)+\underline{d}(2,j)-1}{2}\right)\prod_{\sigma_{2,j}\simeq\sigma_{1,i}^{\vee}}\left(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j+\frac{\underline{d}(1,i)+\underline{d}(2,j)-3}{2}\right)$$
$$\prod_{\substack{1\le i<j\le m_1\\ \sigma_{1,i}\simeq\sigma_{1,j}}}\left(\lambda(1)_i-\lambda(1)_j+\frac{\underline{d}(1,i)-\underline{d}(1,j)}{2}\right)^{-1}\prod_{\substack{1\le i<j\le m_2\\ \sigma_{2,i}\simeq\sigma_{2,j}}}\left(\lambda(2)_i-\lambda(2)_j+\frac{\underline{d}(2,i)-\underline{d}(2,j)}{2}\right)^{-1}. \tag{6.22}$$

第一　　项对于 $\lambda_{1,\ 2}\in\mathcal{S}_{\pi_{1,\ 2},\ k,\ c_J}$ 总是非零。第二项的零点与

$$\prod_{\substack{\pi_{1,i}\simeq\pi_{2,j}^{-,\vee}\\ \underline{d}(2,j)=2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j)\prod_{\substack{\pi_{1,i}^{-,\vee}\simeq\pi_{2,j}\\ \underline{d}(1,i)=2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j).$$

最后，最后两个乘积抵消了 (6.21) 中的前两项。综合以上结果，我们得出结论：该结论可由命题 5.11 推出。 □

最后，我们对正则化周期进行估计。

命题 6.7. 存在 $k>0$，使得对于任意层 J 和 $C>0$，均存在 $c_J>0$、$d>0$、$N>0$ 和 $X_1,\dots,X_r\in U(\mathfrak{g}_\infty)$，使得对于任意 J- 对 $(P,\pi)\in\Pi_H$ 以及任意 $\varphi\in A_{P,\pi}(G)^J$，我们有

$$|L_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda)|\le(1+\|\lambda\|^2)^d\sum_{i=1}^r\|\varphi\|_{-N,X_i}, \tag{6.23}$$

在区域

$$\left\{\lambda\in\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^*-\underline{\rho}_\pi\ \middle|\ \lambda_{1,2}\in\mathcal{S}_{\pi_{1,2},k,c_J},\ \|\Re(\lambda)\|<C\right\}. \tag{6.24}$$

证明。鉴于命题 6.6 中所有明确的计算，这是命题 5.12 的直接推论。

□

6.1.6 定理 1.4 的证明

现在我们结束定理 1.4 的证明。该定理阐述了$\mathcal{P}_\pi$的主要性质。第一点是，兰金–塞尔伯格 ζ 积分的留数 Res $Z_{\sigma_\pi}(\phi,\lambda)$ 可经由$\mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi,\lambda-\nu_p i}(G) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{P,\pi,\lambda}(G)$分解，其中 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$ 处于一般位置。这就是定理 6.2 的内容。第二点是，它定义了关于 φ的连续线性泛函，这一点已在命题 6.7 中得到证明。最后，我们必须证明$\mathcal{P}_\pi$ 具有欧拉乘积展开。若令

$$\mathcal{L}(\lambda,\pi) = \operatorname*{Res}_{\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}-\underline{\rho}_\pi} \frac{L(\lambda-\nu_\pi+\frac{1}{2},\sigma_{\pi,n}\times\sigma_{pi,n+1})}{b(\lambda-\nu_\pi,\sigma_\pi)},$$

然后，通过计算式 (5.20) 的欧拉乘积展开中的留数，我们可知，如 [Boi25b 定理 5.2] 所示，对于 $\varphi = E^{P,*}(\phi,-\nu_\pi)$ 和 $\phi = \otimes_v \phi_v \in \mathcal{A}_{P_\pi,\sigma_\pi}(G)$，当 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi$ 处于一般位置时，

$$\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda) = \mathcal{L}(\lambda,\pi)\prod_{v\in\mathbb{S}} Z^\natural_{\sigma_\pi,v}(\phi_v,\lambda-\nu_\pi),$$

对于某个有限赋值集 $\mathbb{S}$。这正是定理 1.4 的内容，因此证明得以完成。

6.2 递增诱导数据

为证明兰金–塞尔伯格周期的精细谱展开，我们定义一组 $\Pi^\uparrow_H$ 递增诱导数据。更确切地说，若 $(I,P,\pi) \in \Pi_H$，我们希望选取一个诱导 $\mathcal{A}_{Q,\pi'}(G)$，使其与 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$ 同构，并使正则化周期$\mathcal{P}_{\pi'}(\cdot\ \lambda)$ 的奇点在比 $\lambda_{1,2} \in \mathcal{S}^{\pi'_{1,2,k,c_J}}$更大的区域内受到控制。这一点对于我们的轮廓平移论证至关重要。 $\Pi^\uparrow_H$ 的定义相当复杂，建议读者在阅读第 7 节时，必要时再回来查阅。

6.2.1 一组组合构造

我们将 $\Pi^\uparrow_H$ 定义为满足以下条件的元组集（I， P， π， I_1， I_2）。

- $I \in \mathbb{Z}^6_{\geq 0}$ 是形如 $I =$ （n_+， n_1，$n_{\mathrm{c}1}$， n_2，$n_{\mathrm{c}2}$， n_-）的元组。
- I_1 和 I_2 分别是集合 {1，...， m_1} 和 {1，...， m_2} 的子集，其中 m_1 和 m_2 分别为某些整数，且满足 $|I_1| = |I_2|$。我们令 $m = |I_1|$，并记作 $I_1 = \{i_1(1) < \ldots < i_1(m)\}$ 以及 $I_2 = \{i_2(1) < \ldots < i_2(m)\}$。
- 我们有整数元组 $n(+) \in \mathbb{Z}^{m_+}_{\geq 1}$、 $n(1) \in \mathbb{Z}^{m_1}_{\geq 1}$、 $n'(1) \in \mathbb{Z}^{m_1-m}_{\geq 0}$、 $n_{\mathrm{c}}(1) \in \mathbb{Z}^{m}{\mathrm{c}}_{\geq 1}{}^{1}$、 $n(2) \in \mathbb{Z}^{m_2}_{\geq 1}$、 $n'(2) \in \mathbb{Z}^{m_2-m}_{\geq 0}$、 $n_{\mathrm{c}}(2) \in \mathbb{Z}^{m}{\mathrm{c}}_{\geq 1}{}^{2}$ 和 $n(-) \in \mathbb{Z}^{m_-}_{\geq 1}$，满足 $\sum n(+,\ i) = n_+$、 $\sum n(1,\ i) = n_1$、 $\sum n_{\mathrm{c}}(1,\ i) = n_{\mathrm{c}}1$、 $\sum n(2,\ i) = n_2$、 $\sum n_{\mathrm{c}}(2,\ i) = n_{\mathrm{c}}2$，并且 $\sum n(-,\ i) = n_-$，而 P 是 G 的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P) = \left((\underline{n}(+),\underline{n}'(2),\underline{n}(1),\underline{n}_{\mathrm{c}}(1),\underline{n}(-)),(\underline{n}(+),\underline{n}'(1),\underline{n}(2),\underline{n}_{\mathrm{c}}(2),\underline{n}(-))\right). \tag{6.25}$$

- $\pi = \pi_n \boxtimes \pi_{n+1} \in \Pi_{\text{判别式}}(M_P)$具有以下形式

$$\pi_n = \boxtimes_{i=1}^{m_+}\pi_{+,i} \boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_2}}^{m_2} \pi_{2,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_1} \pi_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},1}} \pi_{\mathrm{c},1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}, \tag{6.26}$$

$$\pi_{n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+}\pi_{+,i}^\vee \boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_1}}^{m_1} \pi_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}} \pi_{\mathrm{c},2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_-} \pi_{-,i}^\vee, \tag{6.27}$$

其中

- 所有 $\pi_{\dots}$ 均为 M_P 对应块上的离散自守表示,
- 对于相关的 i，有 $\pi_{1,\,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{1,\,i},\ d(1,\ i))$，$\pi_{2,\,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{2,\,i},\ d(2,\ i))$，其中 $\sigma_{1,\,i} \in \Pi_{\text{尖点}}(\mathrm{GL}_{r(1,\,i)})$ 和 $\sigma_{2,\,i} \in \Pi_{\text{尖点}}(\mathrm{GL}_{r(2,\,i)})$ 是某些表示，
- $d(1,\ 1) \geq \dots \geq d(1,\ m_1) \geq 2$ 和 $d(2,\ 1) \geq \dots \geq d(2,\ m_2) \geq 2$。
- 对于相关的 i，有 $\pi_{\mathrm{c}1,\,i} \in \Pi_{\text{尖点}}(\mathrm{GL}^{n_{\mathrm{c}}(1,\,i)})$，$\pi_{\mathrm{c}2,\,i} \in \Pi_{\text{尖点}}(\mathrm{GL}^{n_{\mathrm{c}}(2,\,i)})$，
- 对于 $1 \leq j \leq m$，有 $\pi_{1,\,i_1(j)} \simeq \pi_{2,\,i_2(j)}^{\vee}$（因此 $d(1,\ i_1(j)) = d(2,\ i_2(j))$ 且 $r(1,\ i_1(j)) = r(2,\ i_2(j))$）。

我们将 $n'(1)$ 和 $n'(2)$ 视为分别由 $\{1, \dots, m_1\} \setminus I_1$ 和 $\{1, \dots, m_2\} \setminus I_2$ 索引的元组。特别地，对于 $i \in \{1, 2\}$ 和 $1 \leq j \leq m_i$，我们有公式 $n(i, j) = d(i, j)r(i, j)$；而对于 $j \notin I_i$，$n'(i, j) = (d(i, j) - 1)r(i, j)$。注意，所有的 $\pi_{1,j}$ 和 $\pi_{2,j}$ 都是剩余的。如果 $I_1 = I_2 = \emptyset$，我们就简单地写作 $(I, P, \pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$。

$\mathfrak{a}_{P,\,\mathbb{C}}^*$ 中的元素分解为

$$\lambda = ((\lambda(+)_n, \lambda(2)_n, \lambda(1)_n, \lambda(1)_{\mathrm{c}}, \lambda(-)_n), (\lambda(+)_{n+1}, \lambda(1)_{n+1}, \lambda(2)_{n+1}, \lambda(2)_{\mathrm{c}}, \lambda(-)_{n+1}) \tag{6.28}$$

我们定义

$$\mathfrak{a}_{\pi}^* = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}_P^* \;\middle|\; \begin{array}{ll} \lambda(+)_n = -\lambda(+)_{n+1}, & \\ \lambda(1)_{n,i} = -\lambda(1)_{n+1,i}, & 1 \leq i \leq m_1, \text{ if } \underline{d}(1,i) \neq 1 \text{ and } i \notin I_1, \\ \lambda(2)_{n,i} = -\lambda(2)_{n+1,i}, & 1 \leq i \leq m_2, \text{ if } \underline{d}(2,i) \neq 1 \text{ and } i \notin I_2, \\ \lambda(1)_{n,i_1(j)} = -\lambda(2)_{n,i_2(j)}, & 1 \leq j \leq m, \\ \lambda(-)_n = -\lambda(-)_{n+1}, & \end{array} \right\}. \tag{6.29}$$

这一记号略显滥用，因为这个空间实际上取决于 I, I_1 和 I_2 的数据。具体依赖关系应根据上下文明确，我们在本节中也会始终采用类似的简化写法。

我们有一个元素 $\underline{\rho}_{\pi} \in \mathfrak{a}_P^*$，它在 (6.25) 的坐标中定义如下：

$$\underline{\rho}_{\pi} = \left(\left(\underbrace{1/4, \dots, 1/4}_{m_+}, 0, 0, 0, \underbrace{-1/4, \dots, -1/4}_{m_-} \right), \left(\underbrace{1/4, \dots, 1/4}_{m_+}, 0, 0, 0, \underbrace{-1/4, \dots, -1/4}_{m_-} \right) \right). \tag{6.30}$$

我们还需要考虑这一变化

$$\underline{\rho}_{\pi}^{\uparrow} = \left(\left(0, \underbrace{1/4, \dots, 1/4}_{m_2 - m}, \underbrace{-1/4, \dots, -1/4}_{m_1}, 0, 0 \right), \left(0, \underbrace{1/4, \dots, 1/4}_{m_1 - m}, \underbrace{-1/4, \dots, -1/4}_{m_2}, 0, 0 \right) \right) \in \mathfrak{a}_P^*. \tag{6.31}$$

我们强调，只有当 $I_1 = I_2 = \emptyset$ 时，它才属于 $\mathfrak{a}_{\pi}^*$。

6.2.2 周期的构造

令 $(I, P, \pi, I_1, I_2) \in \Pi_H^{\uparrow}$。现在我们在 $\mathrm{A}_{P,\pi}(G)$ 上构造一个正则化周期 $\mathrm{P}_{\pi}^{\uparrow}$。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 $n^-(i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2m_i}$ 为满足以下条件的元组：$n^-(i, 2j - 1) = (d(i, j) - 1)r(i, j)$，且 $n^-(i, 2j) = r(i, j)$，其中 $1 \leq j \leq m_i$。令 $P_{\pi}^{\uparrow}$ 为 G 的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P_{\pi}^{\uparrow}) = \left((\underline{n}(+), \underline{n}'(2), \underline{n}^-(1), \underline{n}_{\mathrm{c}}(1), \underline{n}(-)), (\underline{n}(+), \underline{n}'(1), \underline{n}^-(2), \underline{n}_{\mathrm{c}}(2), \underline{n}(-)) \right).$$

对于 $j\in\{1,2\}$，我们也将元组 $n^-_{I_i}(i)\in\mathbb{Z}^{I_i}_{\geq 0}$ 定义为满足以下条件： $n^-_{I_j}(i,j) = (d(i,j)-1)r(i,j)$，其中 $j\in I_i$。注意，若通过映射 i_1 和 i_2 将 I_1 和 I_2 分别与 $\{1,\dots,m\}$ 对应起来，则 $n^-_{I_1}(1) = n^-_{I_2}(2)$。接着，令 $w^\uparrow$ 为 $W(P^\uparrow_\pi)$ 中最短的元素，使得若设 $Q^\uparrow_\pi = w^\uparrow.P^\uparrow_\pi$，则有

$$\underline{n}(Q^\uparrow_\pi) = \Big((\underline{n}(+),\underline{n}'(2),\underline{n}'(1),\underline{n}^-_{I_1}(1),\underline{r}(1),\underline{n}_{\mathrm{c}}(1),\underline{n}(-)),(\underline{n}(+),\underline{n}'(2),\underline{n}'(1),\underline{n}^-_{I_2}(2),\underline{r}(2),\underline{n}_{\mathrm{c}}(2),\underline{n}(-))\Big).$$

换言之， $w^\uparrow$ 只作用于 GL_n 一侧的 $n^-(1)$ 分量，以及 GL_{n+1} 一侧的 $(n'(1)\ n^-(2))$ 分量。它将底部所有 $\mathrm{GL}^{r(1,i)}$ 和 $\mathrm{GL}^{r(2,i)}$ 块移至底部，然后对 GL_n 一侧的 $\mathrm{GL}^{(d(1,i)-1)r(1,i)}$ 以及 GL_{n+1} 上的 $\mathrm{GL}^{(d(2,i)-1)r(2,i)}$ 进行排序，将来自 I_1和 I_2 的项移至底部。最后，它交换 GL_{n+1} 一侧由此得到的 $n'(1)$ 和 $n'(2)$ 块。

令 $P^{\uparrow,\mathrm{std}}_{n+1}$ 为 GL_{n+1} 的标准抛物子群，使得

$$\underline{n}(P^{\uparrow,\mathrm{std}}_{n+1}) = \Big(\underline{n}(+),\underline{n}'(2),\underline{n}'(1),\underline{n}^-_{I_2}(2),k+1,\underline{n}(-)\Big).$$

其中

$$k+1 = \sum_{i=1}^{m_2}\underline{r}(2,i) + \sum_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}}\underline{n}_{\mathrm{c}}(2,i).$$

令 $P^\uparrow_{n+1}$ 为与配对 $(\cdot,\cdot)$ 标准相关联的 G 的 $m_+ + m_1 + m_2 - m + 1^{\text{th}}$ 兰金–塞尔伯格抛物子群，该关联由命题 5.1 中的双射给出。再次注意，$(\cdot)$ 块为 GL_{k+1}。我们有 $w^\uparrow \in {}_{P^{\uparrow,\mathrm{std}}}W_P$ 和 $P_{w^\uparrow} = P^\uparrow_\pi$。

我们定义：对于处于一般位置的 $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 以及 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$

$$\mathcal{P}^\uparrow_\pi(\varphi,\lambda) := \mathcal{P}^{P^\uparrow}(\varphi,\lambda,w^\uparrow). \tag{6.32}$$

请注意，与$\mathcal{P}_\pi$的情形不同，我们更倾向于将$\mathcal{P}^\uparrow_\pi$ 视为整个空间 $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数，而非仅仅视为定义在$\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}$的一个平移上的函数。根据 [Boi25b，引理 4.15]，这是可行的。代价是，线性形式 $\varphi\mapsto\mathcal{P}^\uparrow_\pi(\varphi,\lambda)$ 一般而言并非 $H(\mathbb{A})$-不变的。仿照命题 6.3 的证明可得，$\mathcal{P}^\uparrow_\pi(\varphi,\lambda)$ 在 $\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \rho_\pi - \rho^\uparrow_\pi$ 上的限制是良定义的（另见下文命题 6.8）。

6.2.3 与正则化周期的关系

我们将 (6.32) 中的正则化周期$\mathcal{P}^\uparrow_\pi$ 与定理 6.2 中构造的线性形式$\mathcal{P}_\pi$ 联系起来。首先，对于 $i\in\{1,2\}$，我们用 $n_{I_i}(i)$ 和 $n_{\backslash I_i}(i)$ 表示 $\mathbb{Z}^{I_i}_{\geq 1}$ 和 $\mathbb{Z}^{\{1,\dots,m_i\}\backslash\geq 1}$ 中的元组，使得对于 $1\leq j\leq m_i$，若满足 $n_{I_i}(i,j) = n(i,j)$，则有 $j\in I_i$；否则有 $n_{\backslash I_i}(i,j) = n(i,j)$。现在令$w^\downarrow\in W(P)$ 为满足以下条件的最短元素：若设 $P^\downarrow = w^\downarrow.P$，则

$$n(P^\downarrow) = \Big((n(+),\underline{n}_{\backslash I_1}(1),\underline{n}_{\mathrm{c}}(1),\underline{n}'(2),\underline{n}_{I_1}(1),\underline{n}(-)),(\underline{n}(+),\underline{n}'(1),\underline{n}_{\backslash I_2}(2),\underline{n}_{\mathrm{c}}(2),\underline{n}_{I_2}(2),\underline{n}(-))\Big)$$

集合 $\pi^\downarrow := w^\downarrow\pi$。定义

$$N_1 = \sum_{j\notin I_1}\underline{n}(1,j) + \sum_{j=1}^{m_{\mathrm{c},1}}\underline{n}_{\mathrm{c}}(1,j),\quad N_2 = \sum_{j\notin I_2}\underline{n}(2,j) + \sum_{j=1}^{m_{\mathrm{c},2}}\underline{n}_{\mathrm{c}}(2,j),\quad N_- = \sum_{j\in I_1}\underline{n}(1,j) + n_-.$$

于是我们有 $((n_+,\ N_1,\ N_2,\ N_-)\ P^\downarrow,\ \pi^\downarrow)\in\Pi_H$因此，我们可以考虑定理 6.2 中构造的正则化周期$\mathcal{P}_{\pi^\downarrow}$。注意，我们有

$$w^\downarrow(\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi - \underline{\rho}^\uparrow_\pi) = \mathfrak{a}^*_{\pi^\downarrow,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_{\pi^\downarrow} \tag{6.33}$$

命题 6.8。 设 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}} - \rho_\pi - \underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi}$ 处于一般位置的情形，我们有

$$\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi}(\varphi, \lambda) = \mathcal{P}_{\pi^{\downarrow}}(M(w^{\downarrow}, \lambda)\varphi, w^{\downarrow}\lambda). \tag{6.34}$$

证明。我们首先将 (6.34) 的两边都表示为由σ_π诱导的正则化周期的留数。根据抛物下降（引理 5.4），只需处理 $m_+ = m_- = 0$ 的情形。我们相对于 $M_{P_\pi} \subset M_P$分解 P_π 的标准 Levi 子群 M_{P_π}。由此得到一个如下的对应

$$\mathfrak{a}^*_{P_\pi,n,\mathbb{C}} = \prod_{i\notin I_2} \mathbb{C}^{\underline{d}(2,i)-1} \times \prod_{i=1}^{m_1} \mathbb{C}^{\underline{d}(1,i)} \times \prod_{i=1}^{m_{\mathrm{c},1}} \mathbb{C}, \quad \mathfrak{a}^*_{P_\pi,n+1,\mathbb{C}} = \prod_{i\notin I_1} \mathbb{C}^{\underline{d}(1,i)-1} \times \prod_{i=1}^{m_2} \mathbb{C}^{\underline{d}(2,i)} \times \prod_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}} \mathbb{C}.$$

现在，我们按照定理 6.2 的证明来定义仿射线性形式。坐标也采用相同的约定。我们先考虑由下式描述的仿射线性形式集合 $\Lambda^{\uparrow}_{+}$

$$\begin{cases} \Lambda_+(1,i,j)(\lambda) = -(\lambda(1,i)_{n,\underline{d}(1,i)-j+1} + \lambda(1,i)_{n+1,j} + 1/2), \\ \Lambda_+(2,i,j)(\lambda) = -(\lambda(2,i)_{n,j} + \lambda(2,i)_{n+1,\underline{d}(2,i)-j+1} + 1/2), \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le i \le m_1,\ i \notin I_1, \\ 1 \le j \le \underline{d}(1,i) - 1, \\ 1 \le i \le m_2,\ i \notin I_2, \\ 1 \le j \le \underline{d}(2,i) - 1, \end{cases}$$

以及$_-$的集合 $\Lambda^{\uparrow}$

$$\begin{cases} \Lambda_-(1,i,j)(\lambda) = \lambda(1,i)_{n,\underline{d}(1,i)-j} + \lambda(1,i)_{n+1,j} - 1/2, \\ \Lambda_-(2,i,j)(\lambda) = \lambda(2,i)_{n,j} + \lambda(2,i)_{n+1,\underline{d}(2,i)-j} - 1/2, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le i \le m_1,\ i \notin I_1, \\ 1 \le j \le \underline{d}(1,i) - 1, \\ 1 \le i \le m_2,\ i \notin I_2, \\ 1 \le j \le \underline{d}(2,i) - 1. \end{cases}$$

然后我们加入由下式定义的集合 $\Lambda^{\uparrow,\ \ '}_{+}$

$$\begin{cases} \Lambda'_+(i,j)(\lambda) = -(\lambda(1,i_1(i))_{n,j} + \lambda(2,i_2(i))_{n+1,\underline{d}(2,i)-j+2} + 1/2), \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le i \le m, \\ 2 \le j \le \underline{d}(1,i_1(i)), \end{cases}$$

以及由下式给出的 $\Lambda^{\uparrow,\ \ '}_{-}$

$$\begin{cases} \Lambda'_-(i,j)(\lambda) = \lambda(1,i_1(i))_{n,j} + \lambda(2,i_2(i))_{n+1,\underline{d}(2,i)-j+1} - 1/2, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le \underline{d}(1,i_1(i)), \end{cases}$$

设 $\mathcal{H}$ 为 $\Lambda^{\uparrow}_{+}$、 $\Lambda^{\uparrow}_{-}$、 $\Lambda^{\uparrow,\ \ '}_{+}$ 和 $\Lambda^{\uparrow,\ \ '}_{-}$ 中仿射线性形式的所有零点集的交集。那么我们有

$$\mathcal{H} = \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi - \underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi} - \nu_\pi = (w^{\downarrow})^{-1}\left(\mathfrak{a}^*_{\pi^{\downarrow},\mathbb{C}} - \underline{\rho}_{\pi^{\downarrow}} - \nu_{\pi^{\downarrow}}\right).$$

设 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\ \pi}(G)$。假设 $\varphi = E^*(\phi,\ -\nu_\pi)$，且 $\phi \in \mathcal{A}_{P_\pi,\ \sigma_\pi}(G)$。重复定理 6.2 的证明（另见 [Boi25b，定理 5.2]），可知对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}} - \rho_\pi - \rho^{\uparrow}_{\pi}$，有$_-$ $_-$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Res}_{\Lambda^{\uparrow,\prime}_-} \operatorname{Res}_{\Lambda^{\uparrow}_-} \operatorname{Res}_{\Lambda^{\uparrow,\prime}_+} \operatorname{Res}_{\Lambda^{\uparrow}_+} \end{pmatrix} Z_{\sigma_\pi}(\phi)(\lambda - \nu_\pi) = \mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi}(\varphi, \lambda). \tag{6.35}$$

此外，$\Lambda_+^{\uparrow} \cup \Lambda^{\uparrow,\ _'}$ 和 $\Lambda_-^{\uparrow} \cup \Lambda^{\uparrow,\ +'}$ 是定理 6.2 和 [Boi25b，定理 5.2] 中用于定义 $(P^{\downarrow},\ \pi^{\downarrow})$ 的周期 $\mathcal{P}_{\pi^{\downarrow}}$ 的集合。再次重复这一论证，可得

$$\left(\operatorname*{Res}_{\Lambda_+^{\uparrow,\prime}} \operatorname*{Res}_{\Lambda_-^{\uparrow}} \operatorname*{Res}_{\Lambda_-^{\uparrow,\prime}} \operatorname*{Res}_{\Lambda_+^{\uparrow}}\right) Z_{\sigma_\pi}(\phi)(\lambda - \nu_\pi) = \mathcal{P}_{\pi^{\downarrow}}(M(w^{\downarrow}, \lambda)\varphi, w^{\downarrow}\lambda). \tag{6.36}$$

根据 [Boi25b, 引理 5.1]，中的相同论证，我们可以按任意顺序计算这些留数。因此，(6.35) 与 (6.36) 相等，这就完成了证明。 □

注 6.9. 我们通过一个简单的例子阐明命题 6.8 的内容。取 $n = 2$，从而有 $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$。我们考虑元组 $((0, 2, 0, 2, 1, 0)\ P, \pi, \{1\}, \{1\})$，其中 P 是 G 的标准抛物子群，其标准 Levi 子群为 $(\mathrm{GL}_2) \times (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1)$，而 π 是 M_P 的平凡表示。我们有 $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$，关于这些坐标，$\mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^* = \{(a, (-a, b)) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ 以及 $\rho_\pi + \rho_\pi^{\uparrow} = (-1/4, (-1/4, 0))$。这里 $P^{\uparrow}$ 是 Borel 子群，且 $w_+ = 1$。我们取 $\varphi^\circ \in \mathcal{A}_{P,\overline{\pi}}(G)$，即满足 $\varphi^\circ(1) = 1$ 的唯一 K- 不变向量。假设 $F = \mathbb{Q}$，并记 ζ 为 $\mathbb{Q}$ 的完备 ζ 函数。利用 [CS80] 以及 [Sta01]，的阿基米德计算，并结合引理 4.3 中 $\varphi_{P_0}^\circ$ 的计算，我们看到，对于 $\lambda = (x, (y, z)) \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$

$$\mathcal{P}^{P^{\uparrow}}(\varphi^\circ, \lambda) = \mathrm{vol}([\mathrm{GL}_1]_0) \times \frac{\zeta(x + y + 3/2)\zeta(x + z + 1)}{\zeta(y - x + 3/2)},$$

其中，$[\mathrm{GL}_1]_0$ 的体积是相对于 §3.2.3 中的测度而言的。对于处于一般位置的 $\lambda = (a + 1/4,\ (-a + 1/4,\ b)) \in \mathfrak{a}_{\pi,\ \mathbb{C}}^* - \rho_\pi - \rho_\pi^{\uparrow}$，这个亚纯函数定义良好；对于这样的 λ，我们得到

$$\mathcal{P}_\pi^{\uparrow}(\varphi^\circ, \lambda) = \mathrm{vol}([\mathrm{GL}_1]_0) \times \frac{\zeta(2)\zeta(a + b + 5/4)}{\zeta(-b - a + 7/4)},$$

另一方面，$P^{\downarrow}$ 的标准 Levi 子群为 $(\mathrm{GL}_2) \times (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2)$，而 w_+ 在 GL_3 一侧交换 GL_2 和 GL_1 块。由 (4.7) 中 $M(w^{\uparrow},\ \lambda)$ 的分解，我们得到

$$\mathcal{P}_{\pi^{\downarrow}}(M(w^{\downarrow}, \lambda)\varphi^\circ, w^{\downarrow}\lambda) = \mathrm{vol}([\mathrm{GL}_2]_0) \times \frac{\zeta(-b - a - 1/4)}{\zeta(-b - a + 7/4)}.$$

因此，命题 6.8 可归结为以下两个等式

$$\mathrm{vol}([\mathrm{GL}_1]_0)\zeta(2) = \mathrm{vol}([\mathrm{GL}_2]_0) \quad \text{and} \quad \zeta(a + b + 5/4) = \zeta(-a - b - 1/4).$$

第一个等式等价于通过 [Lan65], 计算 GL_n 的玉河体积，第二个等式则是 ζ 函数的函数方程。

6.2.4 函数方程

现在我们来描述 G 的魏尔群 W 的一些子集。首先定义 $W_{\mathbf{M}}(\pi)$。这是集合 $w = (w_n,\ w_{n+1}) \in W$ 的子集，其中的元素在 $\mathbf{M}_{P^{\uparrow}}^{\mathrm{std}\ 2}$，上按块作用，并对应于置换

$$((\sigma_+, \sigma_{1,2}, \sigma_-), (\sigma_+, \sigma_{1,2}, \sigma_-)), \quad \sigma_+ \in \mathfrak{S}(m_+), \quad \sigma_{1,2} \in \mathfrak{S}(m_1 + m_2 - |I_1|), \quad \sigma_- \in \mathfrak{S}(m_-).$$

这个集合实际上取决于 I 和 I_1, I_2，但我们在记号中省略了这一说明。我们也可以将任何这样的 w（通过用 $w_{P^{\uparrow}}^{\mathrm{std}}$ 共轭）视为 $\mathbf{M}_{P^{\uparrow}}^2$ 的一个元素，并再次用 w 表示它。特别地，我们有兰金–塞尔伯格抛物子群 $w.P^{\uparrow}$。

接着，我们将 $W_{\mathcal{M}}(\pi)$ 定义为在标准抛物子群 $(w^{\uparrow}.P_{\pi}^{\uparrow}) \cap \mathcal{M}_{P^{\uparrow},\mathrm{std}}$ 上按块作用的元素所构成的子集。其元素可识别为有序对 $(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \in \mathfrak{S}(m_{c,1}+m_1) \times \mathfrak{S}(m_{c,2}+m_2)$。接下来的结果由引理 6.4 和命题 6.8 得出。

引理 6.10。令 $\varphi \in A_{P,\pi}(G)$。令 $w_{\mathbf{M}} \in W_{\mathbf{M}}(\pi)$，令 $w_{\mathcal{M}} \in W_{\mathcal{M}}(\pi)$。则对于 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^{*} - \underline{\rho}_{\pi} - \rho_{\pi}^{\uparrow}$ 处于一般位置的情形，我们有

$$\mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}(\varphi,\lambda) = \mathcal{P}^{w_{\mathbf{M}}.P^{\uparrow}}\left(M(w_{\mathbf{M}}w_{\mathcal{M}}w^{\uparrow},\lambda)\varphi_{P_{\pi}^{\uparrow}}, w_{\mathbf{M}}w_{\mathcal{M}}w^{\uparrow}\lambda\right).$$

6.2.5 $\mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}$ 的解析性质

考虑映射

$$\lambda \in \mathfrak{a}_{\pi,\mathbb{C}}^{*} - \underline{\rho}_{\pi} - \mathbb{C}\rho_{\pi}^{\uparrow} \mapsto (\lambda(+)_n, \lambda(1)_n, \lambda(1)_{\mathrm{c}}, \lambda(2)_{n+1}, \lambda(2)_{\mathrm{c}}, \lambda(-)_n).$$

由定义可知，该映射是单射。事实上，对于 $i \notin I_1$，我们有 $\lambda(1)_{n,i} = -\lambda(1)_{n+1,i}$；对于 $i \notin I_2$，我们有 $\lambda(2)_{n,i} = -\lambda(2)_{n+1,i}$。我们定义

$$(\lambda(+),\lambda(1),\lambda(1)_{\mathrm{c}},\lambda(2),\lambda(2)_{\mathrm{c}},\lambda(-)) = (\lambda(+)_n,\lambda(1)_n,\lambda(1)_{\mathrm{c}},\lambda(2)_{n+1},\lambda(2)_{\mathrm{c}},\lambda(-)_n). \tag{6.37}$$

在这些坐标下，$-\rho_{\pi}^{\uparrow}$ 为 $(0, 1/4, 0, 1/4, 0, 0)$。现在定义

$$\lambda_{1,2} = (\lambda(1), \lambda(2)).$$

令 $\pi^{\uparrow} \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_{P_{\pi}^{\uparrow}})$，并令 $\nu^{\uparrow} \in \mathfrak{a}_{P_{\pi}^{\uparrow}}^{*}$ 满足：对于任意 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，都有 $\varphi_{P_{\pi}^{\uparrow}} \in \mathcal{A}_{P_{\pi}^{\uparrow},\pi^{\uparrow},\nu^{\uparrow}}(G)$。若 $\mu \in w^{\uparrow}\mathfrak{a}_{P_{\pi}^{\uparrow}}^{*}$，则记 $\mu = \mu_{\mathcal{P}^{\uparrow}} + \mu_{\mathbf{P}^{\uparrow}}$ 为其相对于 $M_{\text{标准 } P^{\uparrow}} = \mathcal{M}_{P^{\uparrow}}^{\mathrm{std}} \times \mathbf{M}_{P^{\uparrow}}^{\mathrm{std}\,2}$ 的分解。于是我们有

$$(w^{\uparrow}(\lambda+\nu^{\uparrow}))_{\mathcal{P}^{\uparrow},n} = \left(\lambda(1)_1 + \frac{\underline{d}(1,1)-1}{2}, \ldots, \lambda(1)_{m_1} + \frac{\underline{d}(1,m_1)-1}{2}, \lambda(1)_{\mathrm{c}}\right),$$
$$(w^{\uparrow}(\lambda+\nu^{\uparrow}))_{\mathcal{P}^{\uparrow},n+1} = \left(\lambda(2)_1 + \frac{\underline{d}(2,1)-1}{2}, \ldots, \lambda(2)_{m_2} + \frac{\underline{d}(2,m_2)-1}{2}, \lambda(2)_{\mathrm{c}}\right).$$

沿用 (6.26) 和 (6.27) 中的记号，我们定义

$$\pi_{1,2} = \boxtimes_{i=1}^{m_1}\pi_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \pi_{2,i},$$
$$\pi_{\mathcal{P}} = \left(\boxtimes_{i=1}^{m_1}\sigma_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},1,i}} \pi_{\mathrm{c},1,i}\right) \boxtimes \left(\boxtimes_{i=1}^{m_2}\sigma_{2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}} \pi_{\mathrm{c},2,i}\right),$$

这里回顾一下，$\pi_{1,\,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{1,\,i},\ d(1,\,i))$ 和 $\pi_{2,\,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{2,\,i},\ d(2,\,i))$。最后，我们令

$$\begin{aligned} L_{\pi,\mathcal{P}}^{\uparrow}(\lambda) = & \prod_{\pi_{\mathrm{c},1,i} \simeq \pi_{\mathrm{c},2,j}^{\vee}} \left(\lambda(1)_{\mathrm{c},i} + \lambda(2)_{\mathrm{c},j} \pm \frac{1}{2}\right) \\ & \times \prod_{\pi_{\mathrm{c},1,i} \simeq \sigma_{2,j}^{\vee}} \left(\lambda(1)_{\mathrm{c},i} + \lambda(2)_j + \frac{\underline{d}(2,j)-1\pm 1}{2}\right) \prod_{\sigma_{1,i}^{\vee} \simeq \pi_{\mathrm{c},2,j}} \left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_{\mathrm{c},j} + \frac{\underline{d}(1,i)-1\pm 1}{2}\right) \\ & \times \prod_{\substack{\pi_{1,i} \simeq \pi_{2,j}^{-,\vee} \\ i \notin I_1, j \notin I_2}} (\lambda(1)_i + \lambda(2)_j) \prod_{\substack{\pi_{1,i}^{-,\vee} \simeq \pi_{2,j} \\ i \notin I_1, j \notin I_2}} (\lambda(1)_i + \lambda(2)_j). \end{aligned} \tag{6.38}$$

命题 6.11。存在 $k>0$，使得对于 G 的每个层 J，都存在 $c_J>0$，使得对于每个 J-对 (P,π)，若 $(I,P,\pi,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}$，且每个 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，亚纯函数

$$\lambda\mapsto L^{\uparrow}_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi}(\varphi,\lambda)$$

在该区域内正则

$$\left\{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}}-\underline{\rho}_{\pi}-t\underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi}\;\middle|\;(\lambda+t\underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi})_{1,2}\in\mathcal{S}_{\pi_{1,2},k,c_J},\ (w^{\uparrow}(\lambda+\nu^{\uparrow}))_{\mathcal{P}}\in\mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J},\ 0\le t\le 1\right\}. \tag{6.39}$$

注 6.12. 我们对命题 6.11 作如下评述。

- 区域 (6.39) 非空，因为 $d(1,1)\ge\ldots\ge\underline{d}(1,m_1)$ 和 $\underline{d}(2,1)\ge\ldots\ge d(2,m_2)$。
- (6.38) 的最后两个因子只有在 t 接近零时才可能为零。
- 若 $\lambda=\mu-\underline{\rho}_{\pi}-t\underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi}$ 满足 $0\le t\le 1$，则 $(w^{\uparrow}(\mu+\nu^{\uparrow}))_{\mathcal{P}}\in\mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J}$ 意味着 $(w^{\uparrow}(\lambda+\nu^{\uparrow}))_{\mathcal{P}}\in\mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J}$。
- 与命题 6.6（$\mathcal{P}_{\pi}$ 的极点）相比，命题 6.11 的优势在于我们对 $\lambda(1)_c$ 和 $\lambda(2)_c$ 有更大的自由度。

证明。证明遵循与命题 6.6 相同的模式，因此从略。设 λ 属于区域 (6.39)。写作 $\lambda=\mu-\rho_{\pi}-t\rho^{\uparrow}_{\pi}$，使得 $\mu_{1,2}\in\mathsf{S}_{\pi_{1,2},k,c_J}$。根据 §6.2.2 的描述，我们看到，对于任意 $\alpha\in\Delta_{P^{\uparrow}_{\pi}}$，$w^{\uparrow}\alpha<0$ 意味着只要满足 $0\le t\le 1$，就有 $\nu^{\uparrow}-\rho_{\pi}-t\rho^{\uparrow}_{\pi},\alpha^{\vee}\ge 0$。因此，条件 $\mu_{1,2}\in\mathsf{S}_{\pi_{1,2},k,c_J}$ 意味着 $\mu-\rho_{\pi}-t\rho^{\uparrow}_{\pi}+\nu^{\uparrow}\in\mathsf{R}_{\pi,k,c_J}(w^{\uparrow})$。通过直接计算，我们看到可以取

$$L_{\pi,w^{\uparrow}}(\lambda)=\prod_{\substack{i<j\\ \pi_{1,i}\simeq\pi_{1,j}}}(\lambda(1)_i-\lambda(1)_j)\prod_{\substack{i<j\\ \pi_{2,i}\simeq\pi_{2,j}}}(\lambda(2)_i-\lambda(2)_j)\prod_{\substack{\pi_{1,i}\simeq\pi^{-,\vee}_{2,j}\\ \underline{d}(2,j)\neq 2\\ i\notin I_1,j\notin I_2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j)\prod_{\substack{\pi^{-,\vee}_{1,i}\simeq\pi_{2,j}\\ \underline{d}(1,i)\neq 2\\ i\notin I_1,j\notin I_2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j).$$

注意，条件 $d(2,j)=2$ 和 $d(1,i)=2$ 是多余的，因为它们会推出 $\pi_{1,i}$ 或 $\pi_{2,j}$ 是尖点的，这与 $\Pi^{\uparrow}_H$ 的定义不符。剩下的就是计算 (5.21) 中的因子 $L_{(w^{\uparrow}\pi^{\uparrow})_{\mathcal{P}},Z}$。但这与命题 6.6 的证明中的 (6.22) 是同一项计算。唯一的区别是，我们先验地看到了因子

$$\prod_{\substack{\pi_{1,i}\simeq\pi^{-,\vee}_{2,j}\\ \underline{d}(2,j)=2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j)\prod_{\substack{\pi^{-,\vee}_{1,i}\simeq\pi_{2,j}\\ \underline{d}(1,i)=2}}(\lambda(1)_i+\lambda(2)_j).$$

但正如我们刚刚所见，这个条件从未满足。综合以上各点，我们得到命题 6.11。

□

我们还可以给出正则化周期 $\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi}(\varphi,\lambda)$ 的一个界。

命题 6.13. 存在 $k>0$，使得对于任意层 J 和 $C>0$，都存在 $c_J>0$、$d>0$、$N>0$ 和 $X_1,\ldots,X_r\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\infty})$，使得对于任意 J-对 $(P,\pi)\in\Pi$，其中 $(I,P,\pi,I_1,I_2)\in\Pi^{\uparrow}_H$，以及任意 $\varphi\in\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J$，我们有

$$\left|L^{\uparrow}_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi}(\varphi,\lambda)\right|\le(1+\|\lambda\|^2)^d\sum_{i=1}^{r}\|\varphi\|_{-N,X_i}. \tag{6.40}$$

在该区域

$$\left\{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi - t\underline{\rho}^\uparrow_\pi \;\middle|\; (\lambda + t\underline{\rho}^\uparrow_\pi)_{1,2} \in \mathcal{S}_{\pi_{1,2},k,c_J},\ (w^\uparrow(\lambda+\nu^\uparrow))_{\mathcal{P}} \in \mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{P}},k,c_J},\ 0 \le t \le 1,\ \|\Re(\lambda)\| < C\right\}. \tag{6.41}$$

证明。 这与命题 6.7 的证明完全相同。 □

6.2.6 ∅-变换

最后，我们说明如何将 $(I,\ P,\ \pi,\ I_1,\ I_2)$ 关联到另一个元素 $(I_\emptyset,\ P_\emptyset,\ \pi_\emptyset) \in \Pi^\uparrow_H$，该元素将在我们证明 Rankin–Selberg 周期的精细谱展开时发挥作用。我们回顾一下，这意味着 $I_{\emptyset,\ 1} = I_{\emptyset,\ 2} = \emptyset$，因此采用这一记号。与 §6.2.3 中一样，我们定义一个元素 $w_\emptyset \in W(P)$，使得 $P_\emptyset := w_\emptyset.P$ 满足

$$\underline{n}(P_\emptyset) = \left((\underline{n}(+), \underline{n}'(2), \underline{n}_{\setminus I_1}(1), \underline{n}_{\mathrm{c}}(1), \underline{n}_{I_1}(1), \underline{n}(-)), (\underline{n}(+), \underline{n}'(1), \underline{n}_{\setminus I_2}(2), \underline{n}_{\mathrm{c}}(2), \underline{n}_{I_2}(2), \underline{n}(-))\right).$$

标准 Levi 因子与 $M_{P^\downarrow}$ 非常接近，只是 GL_n 一侧的第二个和第三个块乘积被调整为适当的顺序，以符合 (6.25) 的定义。于是我们令

$$I_\emptyset = \left(n_+, \left(\sum_{j\in\{1,\dots,m_1\}\setminus I_1} \underline{n}(1,j)\right), n_{\mathrm{c},1}, \left(\sum_{j\in\{1,\dots,m_2\}\setminus I_2} \underline{n}(2,j)\right), n_{\mathrm{c},2}, \left(\sum_{j\in I_1} \underline{n}(1,j)\right) + n_-\right).$$

我们有

$$w_\emptyset\left(\underline{\rho}_\pi + \underline{\rho}^\uparrow_\pi\right) = \underline{\rho}_{\pi_\emptyset} + \underline{\rho}^\uparrow_{\pi_\emptyset}. \tag{6.42}$$

注意，由于 $I_{\emptyset,\ 1} = I_{\emptyset,\ 2} = \emptyset$，元素 $\rho^\uparrow_{\pi_\emptyset}$ 实际上属于 $\mathfrak{a}^*_{\pi_\emptyset}$。

如命题 6.8 所示，我们可以将这两个正则化周期联系起来。

引理 6.14。 令 $\varphi \in A_{P,\ \pi}(G)$。对于 $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\pi,\ \mathbb{C}} - \underline{\rho}_\pi - \underline{\rho}^\uparrow_\pi$ 处于一般位置时，有

$$\mathcal{P}^\uparrow_\pi(\varphi,\lambda) = \mathcal{P}^\uparrow_{\pi_\emptyset}(M(w_\emptyset,\lambda)\varphi, w_\emptyset\lambda).$$

证明。 这可以按照命题 6.8 证明。 □

最后，我们注意到，$\pi_\emptyset$ 与 §6.2.3 中定义的 $\pi^\downarrow$ 密切相关。我们在下面的引理中总结它们之间的关系。

引理 6.15。 我们有 $\pi^\downarrow = (\pi_\emptyset)^\downarrow$。此外，令 $w^\downarrow_\emptyset$ 为在 *§6.2.3* 中为 $\pi_\emptyset$ 构造的元素“$w^\downarrow$”。则有 $w^\downarrow = w^\downarrow_\emptyset w_\emptyset$ 和 $w^\downarrow_\emptyset \underline{\rho}_{\pi_\emptyset} = \underline{\rho}_{\pi^\downarrow}$。

7 兰金–塞尔伯格周期的展开

本节的目标是计算定理 1.6 中兰金–塞尔伯格周期的精细谱展开。

7.1 谱展开

我们先精确写出在第 7 节证明的结果，然后证明它与定理 1.6 等价。

7.1.1 测度

设 $(I,\ P,\ \pi)\ \in\ \Pi_H$。我们在 $\mathbb{R}$-向量空间 $i\mathfrak{a}_\pi^*$ 上赋予一个哈尔测度。回顾第 3.2.3 节，对于任意代数群 G'，我们都在 $\mathfrak{a}_{G'}$ 上赋予了这样一种哈尔测度：它使 $\mathrm{Hom}(X^*(G')\ \mathbb{Z})$ 的余体积为 1；并在 $i\mathfrak{a}_{G'}^*$ 上赋予对偶哈尔测度。采用第 6.1.1 节的记号，令 G' 为代数群

$$G'=\prod_{i=1}^{m_+}\mathrm{GL}_{\underline{n}(+,i)}\prod_{i=1}^{m_1}\mathrm{GL}_{\underline{d}(1,i)\underline{r}(1,i)}\prod_{i=1}^{m_2}\mathrm{GL}_{\underline{d}(2,i)\underline{r}(2,i)}\prod_{i=1}^{m_-}\mathrm{GL}_{\underline{n}(-,i)}.$$

选取 $X^*(G')$ 的典范基作为 $\mathfrak{a}_{G'}^*$ 的基后，(6.8) 成为一个同构 $\mathfrak{a}_\pi^*\simeq\mathfrak{a}_{G'}^*$。我们在 $i\mathfrak{a}_\pi^*$ 上赋予从 $i\mathfrak{a}_{G'}^*$ 推前而来的测度。注意，若 $m_+=m_-=0$ 且 π 是尖点的，从而 $\mathfrak{a}_\pi^*=\mathfrak{a}_P^*$，则我们得到在 §3.2.3 中赋予 $i\mathfrak{a}_P^*$ 的哈尔测度。

我们也借此机会为递增诱导数据固定测度。设 $(I,\ P,\ \pi,\ I_1,\ I_2)\ \in\Pi_H^{\uparrow}$ 是递增区分数据。回顾一下，我们在 §6.2.3 中定义了一个相关的三元组 $(I^{\downarrow},\ P^{\downarrow},\ \pi^{\downarrow})\ \in\ \Pi_H$，它是通过用元素 $w^{\downarrow}$ 共轭得到的。我们在 $i\mathfrak{a}_\pi^*$ 上赋予刚才所述的 $i\mathfrak{a}_{\pi^{\downarrow}}^*$ 上测度的推前。

7.1.2 主要结果

本节的目标是证明以下定理。回顾一下，对于每个 $(P,\pi)\ \in\Pi_H$，我们已在 §6.1.4 中定义了一个子集 $W(\pi)\ \subset W(P)$。

定理 7.1. 设 J 是 G的一个层。对于每个 $f\in\mathcal{S}([G])^J$ *be have*

$$\int_{[H]}f(h)dh=\sum_{(I,P,\pi)\in\Pi_H}\frac{1}{|W(\pi)|}\int_{\lambda\in i\mathfrak{a}_\pi^*}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda-\underline{\rho}_\pi)\langle f,E(\varphi,\lambda+\underline{\rho}_\pi)\rangle_G d\lambda,\tag{7.1}$$

其中此积分绝对收敛。

正如 [Cha25, 注 3.8.2.1], 中所指出的，这个展开与层J的选择无关。

7.1.3 使用相对特征的另一种版本

在开始证明定理 7.1 之前，我们按照第1节的方式将其重新表述。

令 Π_H^J 为满足 (P,π) 是一个 J-对的 $(I,P,\pi)\ \in\Pi_H$ 的集合。令 $(I,P,\pi)\ \in\Pi_H^J$。对于每个 $F\in\mathcal{S}([G])^J$，以及 $\lambda\in\mathcal{S}_{\pi,k,c_J}$（其中 k 和 c_J 如定理 4.25 中所述），定义

$$\mathcal{I}_{(I,P,\pi)}(F,\lambda)=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle F,E(\varphi,-\overline{\lambda}+\underline{\rho}_\pi)\rangle_G\mathcal{P}_\pi(\varphi,\lambda-\underline{\rho}_\pi).\tag{7.2}$$

相对特征 $\mathcal{I}^{(I,P,\pi)}(F,\lambda)$ 与 J 的选取无关。

引理 7.2。(7.2) 中的级数绝对收敛，并在 λ 上定义一个解析函数。对于固定层 J，对所有 $q>0$，存在连续半范数 $\|\cdot\|_{J,\ q}$ 定义在 $\mathcal{S}([G])^J$ 上，使得对于$(I,P,\pi)\ \in\Pi_H^J$以及任意 $f\in\mathcal{S}([G])^J$，都有

$$\mathcal{I}_{(I,P,\pi)}(F,\lambda)\le\frac{\|F\|_{J,q}}{(1+\|\lambda\|^2)^q(1+\Lambda_\pi^2)^q},\quad\lambda\in i\mathfrak{a}_\pi^*.\tag{7.3}$$

此外，$\mathcal{I}^{(I,P,\pi)}(F,\lambda)$ 具有 $H(\mathbb{A})$不变性，即对于任意 $h\in H(\mathbb{A})$，都有 $\mathcal{I}^{(I,P,\pi)}(R(h)F,\lambda)=\mathcal{I}^{(I,P,\pi)}(F,\lambda)$。

证明。 由命题 4.27 和命题 6.7 可知，界（7.3）成立，因为在 $i\mathfrak{a}_\pi^*-\rho_\pi$ 的邻域内，$L_{\pi,\mathcal{P}}(\lambda)$ 的零点包含于 $L_{\pi,0}(-\lambda)$ 的零点之中。

对于第二个断言，固定远离 $L_{\pi,\mathcal{P}}(\overline{\lambda}-\rho_\pi)$ 的零点的 λ，由命题 4.27 和命题 6.7 再次可知

$$\mathcal{I}_{(I,P,\pi)}(R(h)F,\lambda)=\mathcal{P}_\pi\left(\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle R(h)F,E(\varphi,-\overline{\lambda}+\underline{\rho}_\pi)\rangle_G\varphi,\lambda-\underline{\rho}_\pi\right),$$

其中该级数在 $\mathcal{A}_{P,\pi}(G)^J$ 中收敛。但由于根据定理 6.2，$\mathcal{P}_\pi$ 对 $H(\mathbb{A})$ 不变，这就是 $\mathcal{I}^{(I,P,\pi)}(F,\lambda)$。由解析延拓即得结论。 □

现在可以陈述定理 7.1 的替代版本。

定理 7.3。 对于任意 $F\in\mathcal{S}([G])^J$，有

$$\int_{[H]}F(h)dh=\sum_{(I,P,\pi)\in\Pi_H^J}\frac{1}{|W(\pi)|}\int_{i\mathfrak{a}_\pi^*}\mathcal{I}_{(I,P,\pi)}(F,\lambda)d\lambda. \tag{7.4}$$

其中该积分绝对收敛。

证明。 由引理 7.2 和 (4.39) 可知，该积分绝对收敛。定理 7.3 现在只是定理 7.1 的重新表述。 □

现在令 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $g\in G(\mathbb{A})$。设 $F=K_f(g,\cdot)$，其中 K_f 是 (1.1) 中的核函数。根据 [BPCZ22, 引理 2.10.1, 1], 我们有 $K_f(g,\cdot)\in\mathcal{S}([G])$。一旦注意到以下事实，定理 1.6 在经过变量替换后正好就是定理 7.3：

$$\langle F,E(\varphi,-\overline{\lambda}-\underline{\rho}_\pi)\rangle=E(g,I_P(f,\lambda-\underline{\rho}_\pi)\overline{\varphi},\overline{\lambda}-\underline{\rho}_\pi),\quad \varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J),\quad \lambda\in i\mathfrak{a}_\pi^*.$$

7.2 以部分 ζ 函数展开兰金–塞尔伯格周期

在本节剩余部分，我们固定一个层 J。我们使用兰金–塞尔伯格展开，证明该积分 $\int_{[H]}f(h)dh$ 的第一个谱展开。

7.2.1 结果陈述

为了写出第一个公式，我们需要一些记号。对于每个整数 $0\le r\le n$，令 P_r 为 G 的标准抛物子群，其 Levi 子群为 $M_r:=(\mathrm{GL}_r\times\mathrm{GL}_{n-r})\times(\mathrm{GL}_r\times\mathrm{GL}_{n+1-r})$。注意，它是 G的标准兰金–塞尔伯格抛物子群，因此 $P_r^{\mathrm{std}}=P_r$。我们简记 $\mathbf{M}_r^2$为 $\mathbf{M}_{P_r}^2$，$\mathbf{M}_r$为 $\mathbf{M}_r^2\cap H$，以及 $\mathcal{M}_r$为 $\mathcal{M}_{P_r}$。这些群分别同构于 GL_r^2、GL_r 和 $\mathrm{GL}_{n-r}\times\mathrm{GL}_{n+1-r}$。相对于上文给出的 M_r 的分解，令

$$\underline{z}_r=((0,1/4),(0,1/4))\in\mathfrak{a}_{P_r}^*. \tag{7.5}$$

令 I_r 为元组

$$I_r=(r,0,n-r,0,n+1-r,0). \tag{7.6}$$

我们有元组集 $(I_r,\ P,\ \pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$（见 §6.2.1）。回顾一下，这意味着 $I_1 = I_2 = \emptyset$，采用 §6.2.1 中的记号。展开定义可得，$(I_r,\ P,\ \pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$ 是 G 的标准抛物子群 P 以及 $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 的数据，并满足以下条件。

- 我们有 $P \subset P_r$。令 $\mathcal{P} = P \cap \mathcal{M}_r$ 和 $\mathbf{P}^2 = P \cap \mathbf{M}_r^2$。
- 在此分解下，我们有 $\pi = (\pi_{\mathbf{P}} \boxtimes \pi^{\vee_{\mathbf{P}}}) \boxtimes \pi_{\mathcal{P}}$，其中 $\pi_{\mathbf{P}} \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_{\mathbf{P}})$，且 $\pi_{\mathcal{P}} \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_{\mathcal{P}})$。

令 $(I_r, P, \pi) \in \Pi_{H^\circ}^{\uparrow}$。我们有在 (6.29) 中定义的空间 $\mathfrak{a}_\pi^*$。可以将其描述为 $\mathfrak{a}_\pi^* = \mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^* \oplus \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^*$，其中 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^*$ 反对角嵌入于 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}^2}^* \subset \mathfrak{a}_{P^\circ}^*$。我们有 (6.32) 中的正则化周期 $\mathcal{P}_\pi^{\uparrow}$。根据命题 6.8，在此情形下它就是 $\mathcal{P}_\pi$，因为 $P^{\downarrow} = P$。我们还有 (6.30) 中的元素 $\rho_\pi \in \mathfrak{a}_{P^\circ}^*$。它的坐标为 $((1/4,0),(1/4,0))$。我们用 $\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})$ 表示 $\mathbf{M}_r$ 中半标准抛物子群的集合，其半标准 Levi 因子为 $M_{\mathbf{P}}$；用 $\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})$ 表示 $\mathcal{M}_r$ 中半标准 Levi 因子为 $M_{\mathcal{P}}$ 的半标准抛物子群集合。我们有 §6.1.4 中定义的集合 $W(\pi)$，它满足

$$|W(\pi)| = |\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})|\,|\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})|\,.$$

本节的目标是证明以下命题。

命题 7.4。存在 $c > 0$，使得对于所有 $t > c$ 和 $f \in \mathcal{S}([G])^J$，都有

$$\int_{[H]} f(h)dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(I_r,P,\pi)\in\Pi_H^{\uparrow}} \frac{1}{|W(\pi)|} \int_{i\mathfrak{a}_\pi^* - \underline{\rho}_\pi + t\underline{z}_r} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \mathcal{P}_\pi^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.7}$$

注 7.5。注意，求和仅遍历满足 (P,π) 是一个 J-对的那些 (I_r,P,π)。由定理 4.17 和命题 6.11 可知，命题 7.4 中的被积函数是全纯的；根据命题 4.27 和命题 6.13，它还具有快速衰减。因此，(7.7) 是良定义的。

7.2.2 Unfo兰金–塞尔伯格周期关于部分 ζ 积分的展开 s

设 $0 \le r \le n_\circ$。若 $f \in \mathcal{S}([G])$，我们可以考虑常数项 f_{P_r} 在 $[M_r]$ 上的限制。它先验地是 $\mathcal{T}([M_r])$ 中的一个元素，但其增长可以得到更精细的控制。

引理 7.6。以下断言成立。

1. 对于每个 $g_r \in M_r(\mathbb{A})$ 和 $f \in \mathcal{S}([G])$，映射 $m_r \in [\mathbf{M}_r^2] \mapsto f_{P_r}(m_r g_r)$ 属于 $\mathcal{S}([\mathbf{M}_r^2])$。

2. 设 $N > 0$。存在 $c_N > 0$，使得对于所有 $t > c_N$，都存在 $\mathcal{S}([G])$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_t$，使得

$$|f_{P_r}(m_r g_r)|\,|\det g_r|^{-t} \le \|f\|_t\,\|m_r\|_{\mathbf{M}_r}^{-N}\,\|g_r\|_{\mathcal{M}_r}^{-N}, \quad m_r \in [\mathbf{M}_r], \quad g_r \in [\mathcal{M}_r], \quad f \in \mathcal{S}([G]).$$

证明。第一个断言直接由 [BPCZ22，引理 2.5.13.1] 得出。对于第二个断言，注意到对任意 $m_r \in \mathbf{M}_r(\mathbb{A})$ 和 $g_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{A})$，我们有

$$\delta_{P_r}^{1/2}(m_r g_r) = |m_r|^{n-r+1/2}\,|g_r|^{-r}\,,$$

其中我们记 $|\cdot|$ 为 $|\det(\cdot)|$，行列式取自 G。由 [BPCZ22，等式 (2.4.1.4)] 和 [BPCZ22，引理 2.5.13.1]，，存在 $c>0$，使得对任意 $N'>0$，存在一个$\mathcal{S}([G])$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{N'}$，满足

$$|f_{P_r}(m_r g_r)| \leq \|f\|_{N'} \|m_r\|_{\mathbf{M}_r}^{-N'} \|g_r\|_{\mathcal{M}_r}^{-N'} |m_r|^{-c(n-r+1/2)N'} |g_r|^{crN'}, \tag{7.8}$$

对每个 $m_r \in [\mathbf{M}_r]$、$g_r \in [\mathcal{M}_r]$ 和 $f \in \mathcal{S}([G])$，令 $c_N = c(n+1/2)N$，并取 $t > c_N$。将 (7.8) 应用于 $N' = t/c_N \times N$ 以及施瓦茨函数 $f\,|\cdot|^{-c(n-r+1/2)N'}$，我们得到

$$|f_{P_r}(m_r g_r)|\,|\det g_r|^{-t} \leq \left\| f\,|\cdot|^{-c(n-r+1/2)N'} \right\|_{N'} \|m_r\|_{\mathbf{M}_r}^{-N} \|g_r\|_{\mathcal{M}_r}^{-N},$$

再次对每个 $m_r \in [\mathbf{M}_r]$、$g_r \in [\mathcal{M}_r]$ 和 $f \in \mathcal{S}([G])$，结论得证。 □

F因此，对于任意 $f \in \mathcal{S}([G])$，我们可以考虑扭曲部分对角周期

$$g_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{A}) \mapsto P_r(f)(g_r) := \delta_{P_r}^{-1/2}(g_r) \int_{[\mathbf{M}_r]} f_{P_r}(m_r g_r) \delta_{P_{r,H}}^{-1}(m_r) dm_r, \tag{7.9}$$

根据引理 7.6 和 [BP21, 命题 A.1.1.(vi)]，该积分绝对收敛。

现在回顾 $\mathcal{M}_r$ 上 ζ 积分的构造。令$\mathcal{N}_r$ 为 $\mathcal{M}_r$ 中上三角矩阵的标准博雷尔子群的幺幂根基。令 ψ 为 $N_0(\mathbb{A})$ 上在 $N_{0,H}(\mathbb{A})$ 上平凡的一般自守特征。再次记其在 $\mathcal{N}_r(\mathbb{A})$ 上的限制为 ψ。对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $N > 0$，考虑映射

$$W_{r,f_r} : g_r \in [\mathcal{M}_r] \mapsto \int_{[\mathcal{N}_r]} f_r(n g_r) \overline{\psi}(n) dn, \quad f_r \in \mathcal{T}_N([\mathcal{M}_r]),$$

and

$$Z_r(f_r, s) := \int_{\mathcal{N}_{r,H}(\mathbb{A})\backslash \mathcal{M}_{r,H}(\mathbb{A})} W_{r,f_r}(h_r)\,|\det h_r|^s\, dh_r, \quad f_r \in \mathcal{T}_N([\mathcal{M}_r]). \tag{7.10}$$

前者始终由一个绝对收敛的积分定义，而后者则未必如此。我们有以下来自 [BPCZ22] 的结果。

引理 7.7 ([BPCZ22，引理 7.1.1.1。])。设 $N>0$。存在 $c_N>0$，使得对于每个满足 $R(s) \geq c_N$ 的 $s \in \mathbb{C}$，积分 (7.10) 对于每个 $f_r \in \mathcal{T}_N([\mathcal{M}_r])$ 都绝对收敛。此外，映射 $f_r \in \mathcal{T}_N([\mathcal{M}_r]) \mapsto Z_r(f_r, s)$ 是连续的。

现在我们使用部分 ζ 函数展开兰金–塞尔伯格积分。回顾一下，我们用 R 表示函数空间上的右平移作用。

命题 7.8。对于每个 $f \in \mathcal{S}([G])$，我们有

$$\int_{[H]} f(h) dh = \sum_{r=0}^{n} \int_{K_H} Z_r(P_r(R(k)f), 0) dk. \tag{7.11}$$

证明。注意，根据引理 7.6 和引理 7.7，$Z_r(P_r(R(k)f), 0)$ 都是良定义的。现在我们声称，(7.11) 已在 [BPCZ22, 命题 7.2.0.2]的证明过程中得到了证明。事实上，

[BPCZ22] 表明，存在 $c>0$，使得对每个$R(s) \geq c$ 和 $f \in \mathcal{S}([G])$，等式

$$\int_{[H]} f(h)\,|h|^s\,dh = \sum_{r=0}^{n} \int_{\mathcal{N}_{r,H}(\mathbb{A})\backslash\mathcal{M}_{r,H}(\mathbb{A})} \int_{K_H} \int_{[\mathbf{M}_r]} \delta_{P_{r,H}}^{-1}(h_r m_r)\,|h_r m_r|^s\, W_{r,R(m_r k)f_{P_r}}(h_r) dm_r dh_r dk,$$

其中积分绝对收敛。对于所有 $m_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{A}) \cap H(\mathbb{A})$，我们有 $\delta_{P_r,\,H}(m_r) = \delta_{P_r}^{1/2}(m_r)$。因此，将此结果应用于施瓦茨函数 $g \mapsto f(g)\,|g|^{-c}$，即可得到 (7.11)。注意，[BPCZ22] 假设 f 属于某个正则尖点数据 χ 对应的$\mathcal{S}_\chi([G])$（见[BPCZ22，第 2.9 节7]）。然而，我们在此并未声称这一假设仅用于证明 (7.11) 中与 $r>0$ 相关的项消失。

□

7.2.3 常数项部分周期的谱展开

我们保留 $0 \leq r \leq n$，并写出 (7.9) 中扭曲部分对角周期 P_r 的谱展开。我们考虑满足以下条件的有序对 $(P,\ \pi)$ 的集合 Π_r。

- P是包含于 G 中的 P_r 的标准抛物子群，且$\mathbf{M}_r^2 \cap P$具有$\mathbf{P}^2$的形式。我们将$\mathcal{P} = \mathcal{M}_r \cap P$记作。

- $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$ 分解为
$$\pi = (\pi_{\mathbf{P}} \boxtimes \pi_{\mathbf{P}}^{\vee}) \boxtimes \pi_{\mathcal{P}}.$$

我们将 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^*$ 对角地嵌入 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}^2}$，再进一步嵌入 $\mathfrak{a}_P^*$。对于 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}^2}^*$中$\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^*$ 的反对角线副本，我们记作 $\mathfrak{a}^{*,-}_{\mathbf{P}}$。如 §7.2.1 中所述，相对于 $\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_{\mathbf{P}^2}^* \oplus \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^*$，我们定义

$$\underline{\rho}_{\pi} = ((1/4,0),(1/4,0)), \quad \underline{z}_r = ((0,1/4),(0,1/4)).$$

于是 $\underline{\rho}_{\pi} \in \mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^*$。

对于每个 $g_r = (g_{r,n}, g_{r,n+1}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{A})$，我们有连续线性泛函

$$\varphi = \varphi_n \otimes \varphi_{n+1} \in \mathcal{A}_{P\cap M_r,\pi}(M_r) \mapsto (\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}} \otimes \mathrm{ev}_{g_r})(\varphi) := \langle \varphi_n(\cdot\, g_{r,n}), \overline{\varphi}_{n+1}(\cdot\, g_{r,n+1})\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}},$$

其中，记号 $\varphi_n(\cdot\, g_{r,n})$和 $\varphi_{n+1}(\cdot\, g_{r,n+1})$表示我们考虑这些自守形式在 $M_{\mathbf{P}}$的两个副本上的限制。对于 $\varphi \in \mathcal{A}_{P\cap M_r,\pi}(M_r)$，我们可以考虑自守形式

$$(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}})(\varphi) : g_r \mapsto (\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}} \otimes \mathrm{ev}_{g_r})(\varphi).$$

它属于 $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(\mathcal{M}_r)$。

若现在 $\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G)$，我们定义

$$\varphi_M : m \in M_r(\mathbb{A}) \mapsto \delta_{P_r}^{-1/2}(m)\varphi(m).$$

然后 $\varphi_M \in \mathcal{A}_{P\cap M_r,\ \pi}(M_r)$。通过与前一个映射复合，我们得到

$$\varphi \in \mathcal{A}_{P,\pi}(G) \mapsto (\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}})(\varphi_M) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(\mathcal{M}_r)$$

引理 7.9。 存在 $c>0$，使得对于任意 $t>c$ 和 $f\in \mathcal{S}([G])^J$，都有

$$P_r(f)(g_r)=\sum_{(P,\pi)\in\Pi_r}|\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})|^{-1}\,|\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})|^{-1}$$
$$\times\int_{i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*,-}\oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{*}-\underline{\rho}_{\pi}+t\underline{z}_r}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G E^{\mathcal{M}_r}\left(g_r,(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}})(\varphi_M),\lambda_{\mathcal{P}}\right)d\lambda,\quad(7.12)$$

对每个 $g_r\in M_r(\mathbb{A})$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $f=f_n\otimes f_{n+1}$，因为根据引理 7.6，等式 (7.12) 两边分别定义了 $\mathcal{S}([G])$ 上的连续线性泛函：左端由引理 7.6 得出，右端则由命题 4.27 和 4.28 以及 (4.39) 得出。事实上，由于 t 足够大，根据定理 4.17，积分区域不会与艾森斯坦级数可能存在的奇点相交。我们将 $\rho_{\mathbf{P}_r,H}$ 记为 $\rho_{P_r,H}$ 在 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}_r}$ 上的限制，并将其视为 $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}_r}^*$ 的一个元素。令 $g_r\in\mathcal{M}_r(\mathbb{A})$。根据引理 7.6 的第一条断言以及施瓦茨函数内积的朗兹谱分解（命题 4.30），我们有

$$P_r(f)(g_r)=\delta_{P_r}^{-1/2}(g_r)\sum_{\mathbf{P}\subset\mathbf{P}_r}\sum_{\pi_{\mathbf{P}}\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_{\mathbf{P}})}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{\mathbf{P}^2,\pi_{\mathbf{P}}\boxtimes\pi_{\mathbf{P}}^{\vee}}(J)}$$
$$\times\int_{i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*,-}+2\rho_{\mathbf{P}_r,H}}\langle R(g_r)f_{P_r},E^{\mathbf{M}_r}(\phi,-\overline{\lambda_{\mathbf{P}}})\rangle_{\mathbf{M}_r}\langle\phi_n,\overline{\phi}_{n+1}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}d\lambda_{\mathbf{P}},$$

这里我们再次用 J 表示层，而非 $J\cap\mathbf{M}_r^2$。注意，此处我们人为加入 Petersson 内积 $\langle\phi_n,\phi_{n+1}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}$，以便对 $\mathcal{B}_{\mathbf{P}^2,\pi_{\mathbf{P}}\boxtimes\pi_{\mathbf{P}}^{\vee}}(J)$ 求和，而不是对 $\mathcal{B}_{\mathbf{P},\pi_{\mathbf{P}}}(J)$ 求和。

令 $N>0$ 使得 Langlands 谱分解对 $\mathcal{T}_{-N}([\mathcal{M}_r])$ 中的函数成立（推论 4.31）。将其扩大后，我们还可以假设该定理对 $\mathcal{T}_{-N}([\mathbf{M}_r^2])$ 中的函数成立。取引理 7.6 中的 $c_N>0$ 以及 $t>4c_N$。因此，对于每个 $\mathbf{P}$、$\pi_{\mathbf{P}}$ 和 ϕ，我们可以写出 $g_r\mapsto\langle R(g_r)f_{P_r},E^{\mathbf{M}_r}(\phi,-\lambda_{\mathbf{P}})\rangle_{\mathbf{M}_r}|g_r|^{-t/4}$ 的谱展开。将这个扭曲吸收到积分中，我们看到

$$P_r(f)(g_r)=\delta_{P_r}^{-1/2}(g_r)\sum_{\mathbf{P}\subset\mathbf{P}_r}\sum_{\pi_{\mathbf{P}}\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_{\mathbf{P}})}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{\mathbf{P}^2,\pi_{\mathbf{P}}\boxtimes\pi_{\mathbf{P}}^{\vee}}(J)}\sum_{\mathcal{P}\subset\mathcal{P}_r}\sum_{\pi_{\mathcal{P}}\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_{\mathcal{P}})}\sum_{\phi'\in\mathcal{B}_{\mathcal{P},\pi_{\mathcal{P}}}(J)}$$
$$\times\int_{i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*,-}\oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{*}+2\rho_{\mathbf{P}_r,H}+t\underline{z}_r}\langle f_{P_r},E^{M_r}(\phi\otimes\phi',-\overline{\lambda})\rangle_{\mathbf{M}_r}\langle\phi_n,\overline{\phi}_{n+1}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}E^{\mathcal{M}_r}(g_r,\phi',\lambda_{\mathcal{P}})d\lambda,\quad(7.13)$$

其中，我们将 $\phi\otimes\phi'$ 记作 ϕ 与 ϕ' 的乘积，并将其视为 M_r 上的自守形式。注意，由于我们在命题 4.27 和 4.28 以及（4.39）中对艾森斯坦级数得到的界，我们知道该积分绝对收敛，因此可以交换求和的顺序。

取 $\mathbf{P}$、$\pi_{\mathbf{P}}$、$\mathcal{P}$和 $\pi_{\mathcal{P}}$，如 (7.13) 中所示。令 $P=(\mathbf{P}^2\times\mathcal{P})N_{P_r}$，并令 $\pi=(\pi_{\mathbf{P}}\boxtimes\pi_{\mathbf{P}}^{\vee})\boxtimes\pi_{\mathcal{P}}\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_P)$。则 $(P,\pi)\in\Pi_r$。取 $\lambda\in i\mathfrak{a}^{*,-}{}_{\mathbf{P}}\oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{*}+2\rho_{\mathbf{P}_r,H}+\underline{t}z_r$。由命题 4.27 和引理 7.6 可知，该级数

$$f_{P_r,\pi_\lambda}:=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P\cap M_r,\pi}(J)}\langle f_{P_r},E^{M_r}(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_{\mathbf{M}_r}\varphi_\lambda\quad(7.14)$$

在 $\mathcal{A}_{P\cap M_r,\pi_\lambda}(M_r)^J$ 中绝对收敛。由于 $g\in[G]\mapsto(R(g)f)_{P_r,\pi_\lambda}$ 属于 $\mathcal{A}_{P,\pi_\lambda,-\rho_{P_r}}$，我们有 (G),

$$f_{P_r,\pi_\lambda}=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)}\langle F,\varphi\rangle_{P,\mathrm{Pet}}\varphi_{M,\lambda}.$$

对于固定的 $\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(J)$，我们通过展开积分、考虑由 ρ_{P_r} 引起的扭曲并使用 (7.14)，可验证

$$\langle F, \varphi\rangle_{P,\mathrm{Pet}} = \langle f_{P_r}, E^{M_r}(\varphi, -\overline{\lambda} + \rho_{P_r})\rangle_{P_r}.$$

由此可得

$$f_{P_r,\pi_\lambda} = \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \langle f_{P_r}, E^{M_r}(\varphi, -\overline{\lambda} + \rho_{P_r})\rangle_{P_r}\varphi_{M,\lambda} \tag{7.15}$$

由于 $t \gg 0$， E^{M_r} 的 $E^{M_r}(\varphi, -\lambda+\rho_{P_r})$ 上的艾森斯坦级数 $P_r(F)\backslash G(\overline{F})$ 绝对收敛。因此，利用常数项与艾森斯坦级数的伴随性，我们可以将 (7.15) 改写为

$$f_{P_r,\pi_\lambda} = \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda} + \rho_{P_r})\rangle_G\varphi_{M,\lambda} \tag{7.16}$$

再次由命题 4.27 可知，该和在 $\mathcal{A}_{P\cap M_r,\pi_\lambda}(M_r)^J$ 中绝对收敛。由命题 4.28 可知，线性形式

$$\mathcal{A}_{P\cap M_r,\pi_\lambda}(M_r)^J \mapsto E^{\mathcal{M}_r}\left(g_r, \left(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}\right)(\varphi), \lambda_{\mathcal{P}}\right)$$

是连续的。比较由 (7.14) 和 (7.16) 得到的 f_{P_r,π_λ} 的两个表达式，我们注意到

$$\underline{\rho}_\pi = (\rho_{P_r})_{|\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}} - 2\rho_{\mathbf{P}_r,H},$$

这由定义可得。 □

7.2.4 命题 7.4 证明的结束

现在我们可以结束命题 7.4 的证明。令 $f \in \mathcal{S}([G])^J$。令 $c > 0$ 由引理 7.9 给出。根据命题 4.27 和 4.28 以及 (4.39)，存在 $N > 0$，使得对每个 $t > 4c$，积分

$$g_r \in [\mathcal{M}_r] \mapsto |\det g_r|^{-t/4} \sum_{(P,\pi)\in\Pi_r} |\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})|^{-1} |\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})|^{-1}$$
$$\times \int_{i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*,-}\oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^*-\underline{\rho}_\pi+t\underline{z}_r} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G E^{\mathcal{M}_r}\left(g_r, \left(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}\right)(\varphi_M), \lambda_{\mathcal{P}}\right) d\lambda,$$

在 $\mathcal{T}_{-N}(\mathcal{M}_r)$ 中绝对收敛。此外，假设 $t > 4c_N$，其中 c_N 由引理 7.7 给出。根据引理 7.7、命题 7.8 以及变量替换，我们得出

$$\int_{[H]} f(h)dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(P,\pi)\in\Pi_r} |\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})|^{-1} |\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})|^{-1}$$
$$\times \int_{i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*,-}\oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^*-\underline{\rho}_\pi+t\underline{z}_r} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G \int_{K_H} Z_r(\Big(E^{\mathcal{M}_r}\left(\left(\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}\right)(R(k)\varphi_M), \lambda_{\mathcal{P}}\right), 0\Big) dkd\lambda. \tag{7.17}$$

根据命题 5.7，我们知道，ζ 积分 Z_r 在由剩余谱诱导的自守表示上为零。因此，只要 $\pi_{\mathcal{P}} \notin \Pi_{\mathrm{cusp}}(M_{\mathcal{P}})$，(7.17) 中与 (P,π) 对应的项就为零，故求和遍历三元组 $(I_r, P, \pi) \in \Pi_{H^\circ}^{\uparrow}$。

对于 $(I_r, P, \pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$，根据抛物下降（命题 5.10），并依据 (6.32) 中以正则化周期定义的 $\mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}$，对于每个 $\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(J)$，我们有如下公式

$$\mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}(\varphi, \lambda) = \int_{K_H} Z_r(\left(E^{\mathcal{M}_r}\left(\left(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P},\mathrm{Pet}}\right)(R(k)\varphi_M), \lambda_{\mathcal{P}}\right), 0\right) dk.$$

根据 §7.2.1 中给出的描述，我们还知道 $i\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{*} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{*} - \rho_{\pi} + tz_r$ 无非就是 $i\mathfrak{a}_{\pi}^{*} - \underline{\rho}_{\pi} + tz_r$，并且 $|W(\pi)| = |\mathcal{P}(M_{\mathbf{P}})|\,|\mathcal{P}(M_{\mathcal{P}})|$。命题 7.4 的证明至此完成。

7.3 离散艾森斯坦级数产生的其他留数

在定理 7.1 的其余证明中，我们固定一个施瓦茨函数 $f \in \mathcal{S}([G])^{J}$。现在，我们基于命题 7.4 中的谱展开，计算 $\int_{[H]} f(h)dh$ 的第二个谱展开。具体做法是移动 (7.7) 中各个积分的积分路径。这样一来，我们将穿过被积函数的一些奇点，而这些奇点全部来自艾森斯坦级数 $E(\varphi, -\lambda)$。

7.3.1 结果陈述

在本节中，我们取 $0 \leq r \leq n$ 和 $(I_r, P, \pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$。我们的目标是为下式找到一个新的中间表达式

$$I_{\pi} := \int_{i\mathfrak{a}_{\pi}^{*} - \underline{\rho}_{\pi} + t\underline{z}_r} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}(\varphi, \lambda)\langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.18}$$

对于 I_{π}，我们有如下函数方程。

引理 7.10。对于任意 $w \in W(\pi)$，我们有 $I_{\pi} = I_{w\pi}$。

证明。注意，w 将 $i\mathfrak{a}_{\pi}^{*} - \rho_{\pi} + t\underline{z}_r$ 映到 $i\mathfrak{a}_{w\pi}^{*} - \rho_{w\pi} + t\underline{z}_r$。现在利用变量替换 φ 和 λ 中的变量，并结合 $\mathcal{P}_{\pi}^{\uparrow}$ 的函数方程（引理 6.10）和艾森斯坦级数的函数方程（定理 4.17），即可得到所需结果。

□

将 $\pi = \pi_n \boxtimes \pi_{n+1}$ 写作

$$\pi_n = \boxtimes_{i=1}^{m_+} \pi_{+,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},1}} \pi_{\mathrm{c},1,i}, \quad \pi_{n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+} \pi_{+,i}^{\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}} \pi_{\mathrm{c},2,i}, \tag{7.19}$$

其中 $\pi_{\mathrm{c},1,i}$ 和 $\pi_{\mathrm{c},2,i}$ 是尖点的，而 $\pi_{+,i}$ 是离散的。我们还将每个 i 对应的 $\pi_{+,i} = \mathrm{Speh}(\sigma_{+,i}, d(+,i))$ 记作。由引理 7.10，我们可以假设 $d(+,1) \geq \ldots \geq d(+,m_+)$。我们还定义 $\pi_{+,i}^{+} := \mathrm{Speh}(\sigma_{+,i}, d(+,i)+1)$。

为了陈述我们的中间公式，我们需要一些组合构造。我们用 $\mathcal{G}(\pi)$ 表示满足以下条件的无向简单图 Γ 集合：

- Γ 的顶点为 $\pi_{+,1}, \ldots\ldots, \pi_{+,m_+}, \pi_{\mathrm{c}1,1}, \ldots\ldots, \pi_{\mathrm{c}1,m_{\mathrm{c}1}}, \pi_{\mathrm{c}2,1}, \ldots\ldots, \pi_{\mathrm{c}2,m_{\mathrm{c},2}}$（含重数）；
- Γ 的边形如 $\{\pi_{+,i}, \pi_{\mathrm{c}1,j}\}$，其中 $\sigma_{+,i} \simeq \pi_{\mathrm{c}1,j}$；或者形如 $\{\pi_{+,i}, \pi_{\mathrm{c}2,j}\}$，其中 $\sigma_{+,i}^{\vee} \simeq \pi_{\mathrm{c}2,j}$；
- 每个 $\pi_{\mathrm{c}1,i}$ 和 $\pi_{\mathrm{c}2,i}$ 的度至多为一；
- 每个 $\pi_{+,1}, \ldots, \pi_{+,m_+}$ 的度至多为二；若度为二，则其邻点为某些 $\pi_{\mathrm{c}1,i}$ 和 $\pi_{\mathrm{c}2,j}$（它们不能是 $\pi_{\mathrm{c}1,i}$ 和 $\pi_{\mathrm{c}1,j}$，也不能是 $\pi_{\mathrm{c}2,i}$ 和 $\pi_{\mathrm{c}2,j}$）。

对于每个 i，我们用 $\deg(\mathrm{c}\,1,i)$（分别用 $\deg(\mathrm{c}\,2,i)$）表示$\pi_{\mathrm{c},1,i}$（分别为$\pi_{\mathrm{c},2,i}$）的度，并用 $\deg(+,1,i)$（分别用 $\deg(+,2,i)$）表示$\pi_{+,i}$的形如$\pi_{\mathrm{c},1,j}$（分别为$\pi_{\mathrm{c},2,j}$）的邻居数。这些整数全都只能是零或一。

若 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi)$，我们可以通过以下方式定义某个标准 Levi 子群 M_{Q_Γ} 的离散表示 π_Γ

$$\pi_{\Gamma,n}=\bigboxtimes_{\substack{\deg(+,1,i)=0\\ \deg(+,2,i)=0}}\pi_{+,i}\bigboxtimes_{\substack{\deg(+,2,i)=1\\ \deg(+,1,i)=0}}\pi_{+,i}\bigboxtimes_{\deg(+,1,i)=1}\pi_{+,i}^{+}\bigboxtimes_{\deg(\mathrm{c},1,i)=0}\pi_{\mathrm{c},1,i},\tag{7.20}$$

$$\pi_{\Gamma,n+1}=\bigboxtimes_{\substack{\deg(+,1,i)=0\\ \deg(+,2,i)=0}}\pi_{+,i}^{\vee}\bigboxtimes_{\substack{\deg(+,1,i)=1\\ \deg(+,2,i)=0}}\pi_{+,i}^{\vee}\bigboxtimes_{\deg(+,2,i)=1}\pi_{+,i}^{+,\vee}\cdot\bigboxtimes_{\deg(\mathrm{c},2,i)=0}\pi_{\mathrm{c},2,i}\tag{7.21}$$

这里我们假设每个集合中出现的表示都按顺序 $i=1,2,\ldots$ 排列，其中 i。设 t

$$I_\Gamma=\Bigg(\sum_{\substack{\deg(+,1,i)=0\\ \deg(+,2,i)=0}}\underline{n}(+,i),\sum_{\deg(+,1,i)=1}(\underline{n}(+,i)+\underline{r}(+,i)),\sum_{\deg(\mathrm{c},1,i)}\underline{n}(\mathrm{c},1,i),$$
$$\sum_{\deg(+,2,i)=1}(\underline{n}(+,i)+\underline{r}(+,i)),\sum_{\deg(\mathrm{c},2,i)}\underline{n}(\mathrm{c},2,i),0\Bigg).$$

最后，令

$$I_{\Gamma,1}=I_{\Gamma,2}=\{i\mid\deg(+,1,i)=\deg(+,2,i)=1\}$$

那么，除了一些显然的同一化外，我们有 $(I_\Gamma,Q_\Gamma,\pi_\Gamma,I_{\Gamma,1},I_{\Gamma,2})\in\Pi_H^{\uparrow}$。这是因为我们假设 $d(+,1)\geq\ldots\geq d(+,m_+)$，并且 (7.20) 和 (7.21) 中的张量积是按照指标 i 上的自然顺序取的。

我们将 $\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$ 定义为映射 $\Gamma\in\mathrm{G}(\pi)\mapsto(I_\Gamma,R_\Gamma,\pi_\Gamma,I_{\Gamma,1},I_{\Gamma,2})\in\Pi_H^{\uparrow}$ 的像。注意，其纤维的基数可能严格大于 1。此外，$(I_r,P,\pi)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$，且空图是其唯一的原像。如果 $(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$，我们可以如 (6.26) 和 (6.27) 中那样分解 τ。为与 π 区分，我们记作 $\tau_{1,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_{1,i}(\tau)\ d(\tau,1,i))$、$\tau_{2,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_{2,i}(\tau)\ d(\tau,2,i))$ 和 $\tau_{+,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_{+,i}(\tau)\ d(\tau,+,i))$。$\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$ 的定义要求 $d(\tau,1,i)$ 和 $d(\tau,2,i)$ 均严格大于 1。

设 $(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$。我们在 §6.2.3 中定义了一个三元组 $(I^{\downarrow},Q^{\downarrow},\tau^{\downarrow})\in\Pi_H$。因此，我们也可以考虑 $W(\tau^{\downarrow})$，并将该集合中 $\tau^{\downarrow}$ 的稳定子记为 $\mathrm{Stab}(\tau)$。由于我们已固定 (7.20) 和 (7.21) 中表示的顺序，映射

$$(I',Q',\tau',I_1',I_2')\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)\mapsto(I'^{,\downarrow},Q'^{,\downarrow},\tau'^{,\downarrow})\in\Pi_H\tag{7.22}$$

在集合 $W(\tau^{\downarrow}).\tau^{\downarrow}$ 上方的纤维简化为 (I,Q,τ,I_1,I_2)。

我们有 $M_Q\subset(\text{一般线性群}^{n-n'_{\mathrm{c},1}}\times\text{一般线性群}^{n'_{\mathrm{c},1}})\times(\text{一般线性群}^{n+1-n'_{\mathrm{c},2}}\times\text{一般线性群}^{n'_{\mathrm{c},2}})$。在此分解下，令 z_τ 为元素

$$\underline{z}_\tau=((0,1/4),(0,1/4))\in\mathfrak{a}_\tau^*\subset\mathfrak{a}_Q^*.\tag{7.23}$$

因此，z_τ 仅存在于 $\boxtimes\tau_{\mathrm{c},\,1,\,i}$ 和 $\boxtimes\tau_{\mathrm{c},\,2,\,i}$之上。如果 $Q=P$，则这就是 z_π。最后，回顾一下，我们分别在（6.30）和（6.31）中定义了若干元素 ρ_τ 和 $\rho_\tau^{\uparrow}$。现在可以陈述我们的中间结果了。

命题 7.11。我们有

$$I_\pi = \sum_{(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^\uparrow(\pi)} \frac{|\mathrm{Stab}(\pi)|}{|\mathrm{Stab}(\tau)|} \int_{i\mathfrak{a}_\tau^* - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^\uparrow + 2\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.24}$$

我们将在 §7.3.9 中结束命题 7.11 的证明。

注 7.12。出现 2 在某种程度上是人为的，我们可以将其替换为任意满足 $1 < t < 3$ 的实数 t。在证明过程中将证明，(7.24) 是良定义的，也就是说，$\sum_\varphi \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 在积分域内正则且快速衰减。

7.3.2 论证简述

在开始证明命题 7.11 之前，我们先简要概述一下论证思路。其核心是在定义 I_π 的积分 (7.18) 中移动积分路径，将积分域从 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi + tz_r$ 移至 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi + 2z_r$。我们将逐步进行这一过程，逐渐减小 t，这相当于穿过垂直条带。该过程构成一个归纳论证，内容见 §7.3.3。在每个条带内，我们都会遇到被积函数的极点。这些奇点将在 §7.3.4 中描述。事实证明，它们全都来自艾森斯坦级数 $E(\varphi,-\lambda)$。更确切地说，按照 (7.19) 中的记号，当与 $\pi_{+,i}$（分别与 $\pi_{+,i}^\vee$）对应的线段能够与 $\overline{\pi}_{\mathrm{c},1,j}$（分别与 $\pi_{\mathrm{c},2,j}$）相连时，就会出现这些奇点。由于后者是尖点的，这只有在线段彼此相邻时才可能发生。因此，我们得到一个新的残余表示 τ。§7.3.5 中计算了被积函数沿此类奇点的留数：它是 I_τ 的相对特征，其中 τ 诱导至 G。接下来，我们需要以一种方式移动 (7.18) 中的积分路径，使积分路径所穿过的奇点始终是简单奇点。这样，我们便只需使用一维留数定理即可完成计算。我们先在 §7.3.6 中对来自一般线性群 n 一侧的变量进行这一步技术处理，然后在 §7.3.7 中处理来自一般线性群 $n+1$ 一侧的变量。

为了追踪沿途遇到的所有留数，我们采用上文所述的图论形式体系。其含义如下：每当我们跨过一个由 $\pi_{+,i}$ 与 $\pi_{\mathrm{c},1,j}$（或 $\pi_{+,i}^\vee$ 与 $\pi_{\mathrm{c},2,j}$）之间的并置所产生的奇点时，就在对应的两个顶点之间画一条边。我们对图 Γ 施加的限制意味着，这类留数在每个 $\pi_{\mathrm{c},1,j}$ 和 $\pi_{\mathrm{c},2,j}$ 中至多出现一次，在每个 $\pi_{+,i}/\pi_{+,i}^\vee$ 中至多出现两次；后一种情况下，一个奇点来自 GL_n，另一个来自 GL_{n+1}。在相关元组 $(I_\Gamma, Q_\Gamma, \pi_\Gamma, I_{\Gamma,1}, I_{\Gamma,2})$ 中，这些二重留数记录在 $I_{\Gamma,1}$ 和 $I_{\Gamma,2}$ 里。利用这一形式体系，我们可以将 I_π 写成一个加权和，其项为由图 $\Gamma \in \mathsf{G}(\pi)$ 索引的相对特征 I_{π_Γ}。接下来只需运用一个组合论证，将其改写为对 $\Pi_H^\uparrow(\pi)$ 中元组求和。这正是 §7.3.8 的内容。完成这一步后，命题 7.11 的证明也就完成了。

7.3.3 轮廓的连续变化

命题 7.11 的证明相当复杂，将占用本节剩余部分。我们将自由使用 §6.2.5 中关于元素 $\lambda \in \mathfrak{a}_{\tau,\mathbb{C}}^* - \rho_\delta - \rho_\delta^\uparrow$ 的坐标记号。我们从 (7.18) 中给出的 I_π 定义开始。对于足够大的某个 $t > 0$，积分在区域 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi + tz_r$ 中进行。特别地，对于所有 $1 \le i \le m_+$，$t/2 > d(+,i)$。

令 d 为正整数。我们用 $\Pi_H^\uparrow(\pi, d)$ 表示 $\Pi_H^\uparrow(\overline{\pi})$ 的子集，该子集由满足 $d(\tau, 1, i) > d$ 且 $d(\tau, 2, i) > d$ 对所有 i 都成立的元组 $(I, Q, \underline{\tau}, I_1, I_2)$ 组成。命题 7.11 现由将下一个命题应用于 $d = 1$ 得出。

命题 7.13。 对于所有 $1 \le d \le \lceil t/2 \rceil$， I_π 等于

$$\sum_{(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^\uparrow(\pi,d)} \frac{|\mathrm{Stab}(\pi)|}{|\mathrm{Stab}(\tau)|} \int_{i\mathfrak{a}_\tau^* - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^\uparrow + 2d\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.25}$$

我们将从 $d = \lceil t/2 \rceil$ 开始，通过递减归纳证明命题 7.13。证明将持续到本节末尾，并分成几个引理。证明将在 §7.3.9 结束。我们先进行归纳的初始化步骤。

引理 7.14。 命题 *7.13* 对 $d = \lceil t/2 \rceil$ 成立。

证明。 根据定义， $\Pi_H^\uparrow(\pi, \lceil t/2 \rceil)$ 中唯一的元素是 (I_r, P, π)。为得出结论，我们必须将积分路径从 $i\mathfrak{a}_\pi^* - \rho_\pi + tz_r$ 移至 $i\mathfrak{a}_{\pi_-}^* - \rho_\pi \pm 2\lceil t/2 \rceil z_r$，这可由命题 7.4 得到。 □

接下来，我们将说明如何证明归纳步骤。相关积分如下。对于任意 $(I, Q, \tau, I_1, I_2) \in \Pi_H^\uparrow(\pi, d+1)$，定义

$$I_{\tau,d+1} := \int_{i\mathfrak{a}_\tau^* - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^\uparrow + 2(d+1)\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.26}$$

根据引理 7.15，该积分是良定义的。

7.3.4 极点

我们希望移动积分 (7.26) 中的积分路径。为此，我们先研究被积函数的极点。不过，对一类更广泛的表示进行研究会更有用。目前，我们令 $(I,\ Q,\ \tau,\ I_1,\ I_2) \in \Pi_H^\uparrow(\pi,\ d)$。令 $\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\ \tau}(J)$。我们将考察以下区域：

$$\mathcal{R}_{\tau,d+1}^\uparrow := \left\{ \lambda - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^\uparrow + \nu \;\middle|\; \lambda \in \mathfrak{a}_{\tau,\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{S}_{\tau,k,c_J},\ \nu \in [2d\underline{z}_\tau, 2(d+1)\underline{z}_\tau] \right\}, \tag{7.27}$$

其中， k 和 c_J 取定为定理 4.17 和命题 6.11 给出的值。此外，我们可以假设，对于足够小的 ε，$\mathcal{S}_{\tau,\ k,\ c_J} \subset \{\lambda \mid \|R(\lambda)\| < \varepsilon\}$。

引理 7.15。 对于 $\varphi \in B_{Q,\ \tau}(J)$，$P_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 在 *(7.27)* 的 $R_{\tau,\ d+1}^\uparrow$ 区域内可能出现的极点位于多项式的零点处

$$\begin{aligned} &\prod_{\substack{\sigma_{+,i}(\tau)\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j} \\ \underline{d}(\tau,+,j)=d}} \left(\lambda(+)_i - \lambda(1)_{\mathrm{c},j} - \frac{d+1}{2}\right) \prod_{\substack{\sigma_{+,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},2,j} \\ \underline{d}(\tau,+,i)=d}} \left(-\lambda(+)_i - \lambda(2)_{\mathrm{c},j} - \frac{d+1}{2}\right) \\ \times &\prod_{\substack{\sigma_{2,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j} \\ \underline{d}(\tau,2,i)=d+1 \\ i\notin I_2}} \left(-\lambda(2)_i - \lambda(1)_{\mathrm{c},j} - \frac{d+1}{2}\right) \prod_{\substack{\sigma_{1,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},2,j} \\ \underline{d}(\tau,1,i)=d+1 \\ i\notin I_1}} \left(-\lambda(1)_i - \lambda(2)_{\mathrm{c},j} - \frac{d+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{7.28}$$

此外，它具有快速衰减性，具体而言，若我们将(7.28)中的多项式记为 L，则对于所有$N > 0$，都存在 $C > 0$，使得对于区域 $R_{\tau,d+1}^\uparrow$ 中的所有 λ，我们都有

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \left| L(\lambda)\mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G \right| \le \frac{C}{(1+\|\lambda\|^2)^N}. \tag{7.29}$$

特别地，映射 $\lambda \mapsto \sum_\varphi L(\lambda)P_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 在 $R_{\tau,d+1}^\uparrow$ 中是全纯的。

证明。 根据推论 4.19，我们考察 $L_{\tau,0}(-\lambda)\mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f, L_{\tau\,0}^{-1}(-\lambda)E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 的行为，其中我们回顾一下，$L_{\tau,0}$ 是刻画艾森斯坦级数零点的多项式。

我们从 $L_{\tau,\ 0}(-\lambda)\mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\ \lambda)$ 开始。首先，我们断言我们的区域包含于命题 6.11 的集合 (6.39) 中。采用 §6.2.5 的记号，我们需要证明，对于任意满足 (7.27) 的 ν，$(w^\uparrow(-\rho_{\tau}-\rho_\tau^\uparrow+\nu)+\nu^\uparrow))_{\mathcal{P}^\uparrow}$ 为正。为证明这一点，例如在一般线性群$_n$这一侧，只需注意向量

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\underline{d}(\tau,1,1)-1}{2},\dots,\frac{1}{4}+\frac{\underline{d}(\tau,1,m_1)-1}{2},\frac{d+1}{2},\dots,\frac{d+1}{2}\right)$$

为正。这是因为 $d(\tau,\ 1,\ 1)\ \geq\ldots\geq d(\tau,\ 1,\ m_1)\ >\underline{d}$，而同样的论证在一般线性群$_{n+1}$这一侧也同样适用。

$\mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\ \lambda)$ 的极点因此受 $L_{\tau,\ \mathcal{P}}^\uparrow$ 控制。比较 (4.31)（$L_{\tau,\ 0}$ 的定义）与 (6.38)（$L_{\tau,\ \mathcal{P}}$ 的定义），可知该乘积的极点包含于以下函数的零点中

$$\prod_{\tau_{\mathrm{c},1,i}\simeq\tau_{\mathrm{c},2,j}^\vee}\left(\lambda(1)_{\mathrm{c},i}+\lambda(2)_{\mathrm{c},j}\pm\frac{1}{2}\right)\times\prod_{\sigma_{2,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j}}\left(\lambda(2)_i+\lambda(1)_{\mathrm{c},j}+\frac{\underline{d}(\tau,2,i)-1\pm1}{2}\right)$$
$$\times\prod_{\sigma_{1,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},2,j}}\left(\lambda(1)_i+\lambda(2)_{\mathrm{c},j}+\frac{\underline{d}(\tau,1,i)-1\pm1}{2}\right).$$

我们声称，该乘积在我们的区域 $\mathrm{R}_\tau^\uparrow{}_{,d+1}$ 中非零。事实上，对于第一个因子，我们总有 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{\mathrm{c},i}+\lambda(2)_{\mathrm{c},j})\ \geq d-2\varepsilon\geq 1-2\varepsilon>0$。对于第二个因子，我们有 $\mathrm{R}(\lambda(2)_i+\lambda(1)_{\mathrm{c},j})\ \geq d/2+1/4-2\varepsilon\geq 3/4-2\varepsilon$，而 $(d(\tau,2,i)\ -1\pm1)/2\geq -1/2$，第三个因子也可用同样的论证。因此，$L_{\tau,}{}_0(\lambda)\mathrm{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda)$ 在 $\mathrm{R}_\tau^\uparrow{}_{,d+1}$ 中正则。

现在我们研究 $L_{\tau\,0}^{-1},(-\lambda)E(\varphi,-\lambda)$。只需分别考察亚纯函数$L_{\tau_n}^{-1},0(-\lambda_n)E(\varphi_n,-\lambda_n)$ 和 $L_{\tau_{n+1}}^{-1},0(-\lambda_{n+1})E(\varphi_{n+1},-\lambda_{n+1})$，因此我们只说明第一种情形。由于我们总有 $\rho_{\tau}+\rho_\tau^\uparrow-\nu\in\mathfrak{a}^*{}_{,Q}{}^+$，区域 $\mathrm{R}_\tau^\uparrow{}_{,d+1}$ 包含于 R_{τ,k,c_J}，故可使用推论 4.19。由此可知，$L_{\tau_n}^{-1},0(-\lambda_n)E(\varphi_n,-\lambda_n)$ 的极点由 $L_{\tau_n,E}$ 控制。

回到（4.29）中的定义，我们看到，在我们的区域内，大多数因子立即都不为零。事实上，可以轻易排除两种情况。第一种是可能由同构 $\sigma_{+,i}(\tau)\simeq\sigma_{2,j}(\tau)^\vee$ 导致的极点。于是，对于区域 $\mathrm{R}_\tau^\uparrow{}_{,d+1}$ 中的 λ，与表示 $\tau_{+,i}$ 和 $\tau^-{}_{,2}{}^\vee{}_{,j}$ 相关联的平移线段不可能相连（根据 §4.4.1 的意义），因为 $\mathrm{R}(\lambda(+)_{n,i})\approx\mathrm{R}(\lambda(2)_{n,j})\approx 1/4$（相差 ε）。显然，均值几乎相同的两条线段不可能相连。另一种容易处理的情形是 $\sigma_{+,i}(\tau)\simeq\sigma_{1,j}(\tau)$ 或 $\sigma_{2,k}(\tau)^\vee\simeq\sigma_{1,j}(\tau)$。事实上，在这两种情况下，我们有 $\mathrm{R}(\lambda(+)_{n,i})\approx\mathrm{R}(\lambda(2)_{n,k})\approx 1/4$ 以及 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{n,j})\simeq -1/4$。但显然，均值之差接近 $1/2$ 的两条线段不可能相连。

因此，唯一可能的极点包含在.....的零点中

$$\prod_{\sigma_{1,i}(\tau)\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j}}\left(\lambda(1)_i-\lambda(1)_{\mathrm{c},j}-\frac{\underline{d}(\tau,1,i)+1}{2}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{\sigma_{2,i}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j}\\ i\notin I_2}}\left(-\lambda(2)_i-\lambda(1)_{\mathrm{c},j}-\frac{\underline{d}(\tau,2,i)}{2}\right)\prod_{\sigma_{+,i}(\tau)\simeq\tau_{\mathrm{c},1,j}}\left(\lambda(+)_i-\lambda(1)_{\mathrm{c},j}-\frac{\underline{d}(\tau,+,i)+1}{2}\right).$$

(7.30)

请注意，第二个等式中的符号变化是由于在我们的坐标中有 $\lambda(2)_{n,\,i}=-\lambda(2)_i$（见 §6.2.1）。第一个乘积在区域 $\mathcal{R}^{\uparrow}_{\tau,\,d+1}$ 中非零，因为$R(\lambda(1)_i-\lambda(1)_{\mathrm{c},\,j})\le -1/4+(d+1)/2<(d(\tau,\ 1,\ i)+1)/2$。对于第二个乘积，同样的论证表明，零点来自含有 $d(\tau,\ 2,\ i)=d+1$ 的项；对于第三个乘积，零点则来自 $d(\tau,\ +,\ i)=d$。

在一般线性群$_{n+1}$这一侧重复上述论证后，我们最终看到，区域$\mathcal{R}^{\uparrow}_{\tau,\,d+1}$内$\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\ \overline{\lambda})\langle f,\ E(\varphi,\ -\lambda)\rangle_G$唯一可能的极点确实位于 (7.28) 中多项式的零点处。

为完成引理 7.15 的证明，尚需证明$\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\ \lambda)\langle f,\ E(\varphi,\ -\lambda)\rangle_G$按照 (7.29) 的意义快速衰减。这直接由命题 4.27 和 6.13 得出。 □

7.3.5 留数的计算

现在假设 $(I,\ Q,\ \tau,\ I_1,\ I_2)\in\Pi^{\uparrow}_H(\pi,\ d)$ 来自一个图 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi)$。下面说明如何为 (7.28) 中出现的每个仿射线性形式 Λ 指定一个图 $\Gamma_\Lambda\in\mathcal{G}(\pi)$。

我们来说明 $\Lambda(\lambda)=\lambda(+)_{i_+}-\lambda(1)_{\mathrm{c},i_1}-(d+1)/2$ 的情形。根据 $\Pi^{\uparrow}_H(\pi)$ 的定义，存在指标 j_+ 和 j_1，使得 $\tau_{+,i_+}=\pi_{+,j_+}$ 和 $\tau_{\mathrm{c},1,i_1}=\pi_{\mathrm{c},1,j_1}$。注意，如果要求这些指标 j_+ 和 j_1 恰好对应于表示 τ为 (7.20) 中给出的 $\pi(\Gamma)$ 时所确定的指标，那么它们便是唯一确定的。令 Γ_Λ 为从 Γ 添加边 $\{\pi_{+,j_+},\pi_{\mathrm{c},1,j_1}\}$ 后得到的图。于是有 $\Gamma_\Lambda\in\mathsf{G}(\pi)$。为简单起见，我们将用 Q_Λ 代替 Q_{Γ_Λ}，用 π_Λ 代替 π_{Γ_Λ}，依此类推。

对于 $\Lambda(\lambda)=\lambda(+)_{i_+}-\lambda(2)_{\mathrm{c},i_2}-(d+1)/2$，图 Γ_Λ 的构造方式相同。我们来说明最后一种与我们相关的情形，即 $\Lambda(\lambda)=-\lambda(1)_{i_1}-\lambda(2)_{\mathrm{c},i_2}-(d+1)/2$，其中 $\sigma_{1,i_1}(\tau)^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},2,i_2}$, $d(\tau,1,i_1)=d+1$ 和 $i_1\notin I_1$。和之前一样，定义 j_1 和 j_2，使得 $\tau^{-,\vee}_{1,i_1}=\pi^{\vee}_{+,j_1}$ 和 $\tau_{\mathrm{c},2,i_2}=\pi_{\mathrm{c},2,j_2}$。然后添加边 $\{\pi_{+,j_1},\pi_{\mathrm{c},2,j_2}\}$。注意，$\pi_{+,\,j_1}$ 的度已经是 1，因为它与尖点表示 $\pi_{\mathrm{c},1,l}$ 相连；该表示用于在一般线性群 $_n$ 侧得到 τ_{1,i_1}。

现在我们描述沿着 (7.28) 的零点得到的留数。注意，它们至多都是简单的，因此我们可以使用 §5.5.1 中描述的朴素留数概念。再次从情形 $\Lambda(\lambda)=\lambda(+)_{i_+}-\lambda(2)_{\mathrm{c},\,i_2}-(d+1)/2$ 开始。存在唯一的整数 $1\le k\le m_1(\tau)$，使得

$$\pi_{\Lambda,n}=\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\neq i_+}}^{m_+(\tau)}\tau_{+,i}\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_2}}^{m_2(\tau)}\tau^{-,\vee}_{2,i}\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^{k-1}\tau_{1,i}\boxtimes\pi^{+}_{+,j_+}\boxtimes_{i=k}^{m_1(\tau)}\tau_{1,i}\right)\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\neq i_1}}^{m_{\mathrm{c},1}(\tau)}\tau_{\mathrm{c},1,i},$$
$$\pi_{\Lambda,n+1}=\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\neq i_+}}^{m_+(\tau)}\tau^{\vee}_{+,i}\boxtimes\left(\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_1}}^{k-1}\tau^{-,\vee}_{1,i}\boxtimes\pi^{\vee}_{+,j_+}\boxtimes_{\substack{i=k\\ i\notin I_1}}^{m_1(\tau)}\tau^{-,\vee}_{1,i}\right)\boxtimes_{i=1}^{m_2(\tau)}\tau_{2,i}\boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}(\tau)}\tau_{\mathrm{c},2,i}.$$

这里需要整数 k，因为我们规定 (7.20) 和 (7.21) 中的表示按某一特定顺序出现。与 Γ_Λ 相关联的是一个正则化周期 $\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi_\Lambda}$。

设 $w\in W(Q)$，使得 $w\tau$ 是带有 $(w\tau)_{n+1}=\pi_{\Lambda,\ n+1}$ 的表示，并且

$$(w\tau)_n=\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\neq i_+}}^{m_+(\tau)}\tau_{+,i}\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_2}}^{m_2(\tau)}\tau^{-,\vee}_{2,i}\boxtimes\left(\boxtimes_{i=1}^{k-1}\tau_{1,i}\boxtimes(\tau_{+,i_+}\boxtimes\tau_{\mathrm{c},1,i_1})\boxtimes_{i=k}^{m_1(\tau)}\tau_{1,i}\right)\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\neq i_1}}^{m_{\mathrm{c},1}(\tau)}\tau_{\mathrm{c},1,i}.\quad(7.31)$$

注意

$$w\left(\Lambda^{-1}(\{0\})\cap(\mathfrak{a}^*_{\tau,\mathbb{C}}-\underline{\rho}_\tau-\underline{\rho}^{\uparrow}_\tau)\right)=\mathfrak{a}^*_{\pi_\Lambda,\mathbb{C}}-\underline{\rho}_{\pi_\Lambda}-\underline{\rho}^{\uparrow}_{\pi_\Lambda}-\nu^{Q_\Lambda}_{w.Q,\pi_\Lambda},\quad(7.32)$$

其中，$\nu^{Q_\Lambda}_{w.Q,\ \pi_\Lambda}$ 是在（4.5）中定义的扭曲。此外，在适当缩小常数后，我们有

$$\lambda\in\Lambda^{-1}(\{0\})\cap\mathcal{R}^{\uparrow}_{\tau,d+1}\implies w\lambda+\nu^{Q_\Lambda}_{w.Q,\pi_\Lambda}\in\mathcal{R}^{\uparrow}_{\pi_\Lambda,d+1}.\quad(7.33)$$

如果 $\Lambda(\lambda) = \lambda(+)_{i_+} - \lambda(2)_{c,\ i_2} - (d+1)/2$，则在一般线性群$_{n+1}$一侧，构造完全相同。在 $\Lambda(\lambda) = -\lambda(1)_{i_1} - \lambda(2)_{c,\ i_2} - (d+1)/2$ 的情况下，我们有 $\pi_{\Lambda,\ n} = \tau_n$ 并且

$$\pi_{\Lambda,n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+(\tau)} \tau_{+,i} \boxtimes_{i \notin I_1 \cup \{i_1\}} \tau_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes \left(\boxtimes_{i=1}^{k-1} \tau_{2,i} \boxtimes \tau_{1,i_1}^{\vee} \boxtimes_{i=k}^{m_2(\tau)} \tau_{2,i} \right) \boxtimes_{\substack{i=1 \\ i \neq i_2}}^{m_{c,2}(\tau)} \tau_{c,2,i},$$

对于某个指标 k。在这种情况下，令 $w \in W(R_{n+1})$ 使得

$$(w\tau)_{n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+(\tau)} \tau_{+,i} \boxtimes_{i \notin I_1 \cup \{i_1\}} \tau_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes \left(\boxtimes_{i=1}^{k-1} \tau_{2,i} \boxtimes \left(\tau_{1,i_1}^{-,\vee} \boxtimes \tau_{c,2,i_2} \right) \boxtimes_{i=k}^{m_2(\tau)} \tau_{2,i} \right) \boxtimes_{\substack{i=1 \\ i \neq i_2}}^{m_{c,2}(\tau)} \tau_{c,2,i}$$

关系式 (7.32) 和 (7.33) 仍然成立。

引理 7.16。 设 Λ 是 (7.28) 中出现的任意仿射线性形式。对于处于一般位置的 $\lambda \in \Lambda^{-1}(\{0\}) \cap (\mathfrak{a}_{\tau,\mathbb{C}}^* - \rho_\tau - \rho_\tau^\uparrow)$，有

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda} \left(\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi, \mu) \langle f, E(\varphi, -\overline{\mu}) \rangle_G \right) (\lambda) = - \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q_\Lambda, \pi_\Lambda}(J)} \mathcal{P}_{\pi_\Lambda}^\uparrow(\varphi, \lambda') \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda'}) \rangle_G, \quad (7.34)$$

其中 $\lambda' = w\lambda + \nu_{w.Q,\ \pi_\Lambda}^{Q_\Lambda}$。

证明。 我们只处理 $\Lambda(\lambda) = \lambda(+)_{i_+} - \lambda(1)_{c,\ i_1} - (d+1)/2$ 这一情形，其余情形完全相同。为简便起见，记作 $R = Q_\Lambda$ 和 $\delta = \pi_\Lambda$。

根据引理 7.15，留数在我们朴素意义下是良定义的。由交织算子的酉性和艾森斯坦级数的函数方程（定理 4.17），通过变量替换和解析延拓可知，对于处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q,\ \mathbb{C}}^*$，有

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi, \lambda) \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda}) \rangle_G = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{w.Q, w\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow \left(M(w^{-1}, w\lambda)\varphi, \lambda \right) \langle f, E(\varphi, -w\overline{\lambda}) \rangle_G.$$

由于我们知道 $M(w^{-1}, w\lambda)$（命题 4.11）以及 $\mathcal{P}_\tau^\uparrow$（命题 6.11）的极点，因此得出 $\Lambda^{-1}(\{0\})$ 不包含在 $\lambda \mapsto \mathcal{P}_\tau^\uparrow \left(M(w^{-1}, w\lambda)\varphi, \lambda \right)$ in $\mathfrak{a}_{\tau,\mathbb{C}}^* - \rho_\tau - \rho_\tau^\uparrow$ 的任何奇点中。此外，根据引理 7.15，利用 [Lap08，定理 2.2]，我们可以计算和式 $\sum_\varphi$ 以及内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$中的留数。因此，(7.34) 中的留数为

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{w.Q, w\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow \left(M(w^{-1}, w\lambda)\varphi, \lambda \right) \langle f, \operatorname*{Res}_{\overline{\Lambda}} \left(E(\varphi, -w\overline{\mu}) \right) (\lambda) \rangle_G.$$

设 $\varphi \in \mathcal{A}_{w.Q, w\tau}(G)$。再次运用 [Lap08，定理 2.2], ，可得

$$\operatorname*{Res}_{\overline{\Lambda}} \left(E(\varphi, -w\overline{\mu}) \right) (\lambda) = -E \left(E^{R,*}(\varphi, -\overline{\lambda'} - \nu_{w.Q,\delta}^R) \right).$$

根据 λ'的定义，我们有

$$E^{R,*}(\varphi, -\overline{\lambda'} - \nu_{w.Q,\delta}^R) = -\operatorname*{Res}_{\overline{\Lambda}} (E^R(\varphi, -w\overline{\mu}))(\lambda).$$

注意，$(w.Q)_{w\tau} = R_\delta$。令 $\sigma_{w\tau}$为§4.1.2中定义的 M_{R_δ}的尖点表示，因此存在 $\phi \in \mathcal{A}_{\sigma_{w\tau},\ R_\delta}(G)$，使得 $\varphi = E^{w.Q,\ *}(\phi,\ -\nu_{w\tau})$。由(4.3)中给出的 $E^{R,\ *}$的定义，并且由于$\nu_{w\tau} + \nu^R_{w.Q,\ \delta} = \nu_\delta$，我们有

$$E^{R,*}(\varphi, -\nu^R_{w.Q,\delta}) = E^{R,*}(\phi, -\nu_\delta).$$

特别地，对于每个 $\varphi' \in \mathcal{A}_{Q,\ \delta}(G)$，由命题 4.4 可得

$$\langle \varphi', E^{R,*}(\varphi, -\nu^R_{w.Q,\delta})\rangle_{R,\mathrm{Pet}} = \langle \varphi', E^{R,*}(\phi, -\nu_\delta)\rangle_{R,\mathrm{Pet}} = \langle \varphi'_{R_\delta}, \phi\rangle_{R_\delta,\mathrm{Pet}},$$

但由常数项的传递性也可得

$$\langle \varphi'_{w.Q}, \varphi\rangle_{w.Q,\mathrm{Pet}} = \langle \varphi'_{w.Q}, E^{w.Q,*}(\phi, -\nu_{w\tau})\rangle_{w.Q,\mathrm{Pet}} = \langle \varphi'_{R_\delta}, \phi\rangle_{R_\delta,\mathrm{Pet}}.$$

因此，正则化艾森斯坦级数 $E^{R,\ *}$（定义在 $\mathcal{A}_{w.Q,\ w\tau}$ 上）与沿 $w.Q$ 的常数项（定义在 $\mathcal{A}_{R,\ \delta}(G)$ 上）互为伴随。这意味着 (7.34) 中的留数为

$$-\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R,\delta}(J)} \mathcal{P}^\uparrow_\tau\left(M(w^{-1},\lambda')\varphi_{w.Q}, w^{-1}\lambda'\right)\langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda'})\rangle_G.$$

设 $P^\uparrow_\delta$, $P^\uparrow_\tau$ 和 $w^\uparrow_\delta$, $w^\uparrow_\tau$ 分别为 §6.2.1 和 §6.2.2 中针对 δ 和 τ（或者说，针对相应的元组）定义的兰金–塞尔伯格抛物子群和魏尔群元素。回顾它们的定义可知，存在 $w_\mathcal{M} \in W_\mathcal{M}(\tau)$ 和 $w_\mathbf{M} \in W_\mathbf{M}(\tau)$，使得 $w_\mathcal{M} w_\mathbf{M} w^\uparrow_\tau = w^\uparrow_\delta w$（见 §6.2.4），并且还有 $w_\mathbf{M}.P^\uparrow_\tau = P^\uparrow_\delta$。由 (3.6)、引理 6.10 中证明的正则化周期的函数方程，以及 (6.32) 中$\mathcal{P}^\uparrow_\delta$ 的定义，我们得到

$$\mathcal{P}^\uparrow_\tau\left(M(w^{-1},\lambda')\varphi_{w.Q}, w^{-1}\lambda'\right) = \mathcal{P}^{w_\mathbf{M}.P^\uparrow_\tau}\left(M(w^\uparrow_\delta,\lambda)\varphi_{P^\uparrow_\delta}, w^\uparrow_\delta\lambda'\right) = \mathcal{P}^\uparrow_\delta(\varphi,\lambda').$$

至此，引理的证明完成。 □

注 7.17. 证明引理 7.16 时，我们关键地利用了这样一个事实：经过变量替换后，我们的奇点来自两个τ线段的并置（参见 §4.4.1）。在这种情况下，由艾森斯坦级数的留数张成的像，是由将 τ 中对应的两个分量并置后得到的离散自守表示所诱导的艾森斯坦级数空间。对于其他奇点，计算留数是一个难题（例如参见 [GS24]）。

7.3.6 一般线性群$_n$一侧的改变积分路径

现在固定 $(I, Q, \tau, I_1, I_2) \in \Pi^\uparrow_H(\pi, d+1)$，并假设它来自一个图 $\Gamma \in \mathcal{G}(\pi)$。我们从式 (7.26) 的积分 $I_{\tau,d+1}$ 开始改变积分路径，其中变量取自一般线性群 $_n$ 一侧。定义 $\mathcal{G}(\Gamma, n, d)$ 为满足以下条件的图 $\Gamma' \in \mathcal{G}(\pi)$ 的子集：

- Γ是 Γ′的子图；
- 所有不属于 Γ 的 Γ' 中的边都具有如下形式：$\{\pi_{+,i}, \pi_{\mathrm{c}1,j}\}$，其中 $d(+,i) = d_\circ$ _

换言之，图 $\Gamma' \in \mathcal{G}(\Gamma, n, d)$ 是通过向 Γ 添加边得到的，添加方式与我们在引理 7.16 中沿着 $\Lambda(\lambda) = \lambda(+)_i - \lambda(1)_{c,j} - (d+1)/2$ 描述 $\sum \mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi, \lambda)\langle \overline{f}, E(\varphi, -\lambda)\rangle_G$ 的留数时完全相同。简言之，我们记 $z_{\Gamma'} := z_{\tau_{\Gamma'}}$，依此类推。

回想一下，我们的目标是计算积分

$$I_{\tau,d+1} = \int_{i\mathfrak{a}^*_\tau - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}^{\uparrow}_\tau + 2(d+1)\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi, \lambda)\langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda.$$

引理 7.18. 我们有

$$I_{\tau,d+1} = \sum_{\Gamma' \in \mathcal{G}(\Gamma,n,d)} \int_{i\mathfrak{a}^*_{\pi_{\Gamma'}} + \kappa_{d,d+1}(\Gamma')} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q_{\Gamma'},\pi_{\Gamma'}}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi_{\Gamma'}}(\varphi, \lambda)\langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda, \tag{7.35}$$

其中

$$\kappa_{d,d+1}(\Gamma') = -\underline{\rho}_{\Gamma'} - \underline{\rho}^{\uparrow}_{\Gamma'} + 2d\underline{z}_{\Gamma',n} + 2(d+1)\underline{z}_{\Gamma',n+1}.$$

证明。注意，集合 $\mathsf{G}(\Gamma, n, d)$ 是有限的。对于每个 $\Gamma' \in \mathsf{G}(\Gamma, n, d)$，令 $L_{\Gamma'}$ 为 (7.28) 中定义的多项式，它控制区域 $\mathsf{R}^{\uparrow}_{\pi_{\Gamma'},d+1}$（见 (7.27)）内 $\mathsf{P}^{\uparrow}_{\pi_{\Gamma'}}(\varphi, \lambda) f, E(\varphi, -\lambda)_G$ 的极点。将 Γ' 的像记为 $(I', Q', \tau', I'_1, I'_2)$。根据 (3.15) 中 S_{τ',k,c_J} 的定义，存在 $k' > 0$ 和 $c > 0$，使得对所有 $T > 0$，我们都有

$$\left\{ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\tau',\mathbb{C}} \mid \max|\Im(\lambda_i)| \le T,\ \max|\Re(\lambda_i)| \le c(1+T)^{-k'} \right\} \subset \mathcal{S}_{\tau',k,c_J}. \tag{7.36}$$

注意，由于有限性，k、c_J、k' 和 c 可以选取为与 τ' 无关。

令 D 为 $L_{\Gamma'}$ 的次数中的最大值，并取 $N \ge Dk' + 1$。令 $\varepsilon > 0$。根据引理 7.15，存在 $T > 0$，使得对于每个 τ' 以及每个指标 i，我们都有

$$\sup_{\substack{\lambda \in \mathcal{R}^{\uparrow}_{\tau',d+1} \\ |\Im(\lambda_i)| \ge T}} \left((1+\|\lambda\|^2)^N \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R',\tau'}(J)} \left| L_{\Gamma'}(\lambda) \mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau'}(\varphi, \lambda)\langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda})\rangle_G \right| \right) \le \varepsilon, \tag{7.37}$$

此外

$$(c/4)^{-D}(2T+1)^{Dk'} \int_{\substack{\lambda \in i\mathfrak{a}^*_{\tau'} \\ |\lambda_i| \ge T}} \frac{1}{(1+\|\lambda\|^2)^N} d\lambda \le 1, \quad \frac{(c/4)^{-D}(2T+1)^{Dk'}}{(1+T^2)^{N/2}} \int_{\substack{\lambda \in i\mathfrak{a}^*_{\tau'} \\ \lambda_i = 0}} \frac{1}{(1+\|\lambda\|^2)^{N/2}} d\lambda \le 1. \tag{7.38}$$

令 $\underline{\varepsilon}_{\tau'} \in \mathfrak{a}^*_{\tau'}$ 使得 $\varepsilon_{\tau'}(+)$ 的所有坐标均互不相同，且绝对值小于 $c(2T+1)^{-k'}/4$，其余坐标均为零。令 $\eta = 3c(2T+1)^{-k'}$。定义

$$\kappa_{\tau'} = -\underline{\rho}_{\tau'} - \underline{\rho}^{\uparrow}_{\tau'} + (2d+1)\underline{z}_{\tau',n} + 2(d+1)\underline{z}_{\tau',n+1}.$$

该点是线段 $[\kappa_{d,d+1}(\Gamma')\ -\rho_{\tau'} - \rho^{\uparrow}_{\tau'} + 2(d+1)z_{\tau'}]$ 的中点

令 $(I',\ Q',\ \tau',\ I'_1,\ I'_2)$ 为某个图 Γ' 的像。由引理 7.15，我们可以描述区域中的 $\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau'}(\varphi,\ \lambda)\langle f,\ E(\varphi,\ -\lambda)\rangle_G$ 的极点

$$\left\{ \lambda - \underline{\rho}_{\tau'} - \underline{\rho}^{\uparrow}_{\tau'} + \nu \;\middle|\; \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\tau',\mathbb{C}} \cap \mathcal{S}_{\tau',k,c_J},\ \begin{array}{l} \nu_n \in [2d\underline{z}_{\tau',n}, 2(d+1)\underline{z}_{\tau',n}], \\ \nu_{n+1} = 2(d+1)\underline{z}_{\tau',n+1}. \end{array} \right\}, \tag{7.39}$$

该区域包含于 $\mathcal{R}^{\uparrow}_{\tau',\ d+1}$ 中。由于 τ 来自属于 $\Pi^{\uparrow}_{H}(\pi,\ d+1)$ 的一个元组，根据 $\mathcal{G}(\Gamma,\ n,\ d)$ 的定义，我们知道总有 $d(\tau_{\prime}2,\ j)\ >d+1$，因此区域 (7.39) 中唯一可能的极点是乘积的极点

$$\prod_{\substack{\sigma_{+,i}(\tau')\simeq\tau'_{\mathrm{c},1,j}\\ \underline{d}(\tau',+,j)=d}}\left(\lambda(+)_i-\lambda(1)_{\mathrm{c},j}-\frac{d+1}{2}\right). \tag{7.40}$$

我们也可以用这个乘积替换 $L_{\Gamma'}$。

现在回到最初的表示 τ。根据前述讨论，我们可以移动积分中的积分路径，得到

$$I_{\tau,d+1}=\int_{i\mathfrak{a}^*_\tau+\kappa_\tau+\eta z_{\tau,n}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)}\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.41}$$

对于任意 $\lambda\in i\mathfrak{a}^*_\tau+\kappa_\tau+\eta z_{\underline{\tau},\ n}$，我们有

$$|L_{\Gamma'}(\lambda)|\geq(\eta/4)^D\geq(c/4)^D(2T+1)^{-k'D}. \tag{7.42}$$

这意味着，对于任意 i，由 (7.37) 和 (7.38) 可得

$$\int_{\substack{i\mathfrak{a}^*_\tau+\kappa_\tau+\eta\underline{z}_{\tau,n}\\ |\Im(\lambda_i)|\geq T}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)}\left|\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G\right|d\lambda\leq\varepsilon,$$

因此，存在一个常数 C（与 ε 无关），使得

$$\left|I_{\tau,d+1}-\int_{\substack{i\mathfrak{a}^*_\tau+\kappa_\tau+\eta\underline{z}_{\tau,n}\\ \max|\Im(\lambda_i)|\leq T}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)}\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda\right|\leq C\varepsilon,$$

我们着重考虑第二个积分。根据 Fubini 定理，可以假设最后对变量 $\lambda(+)_{1}$ 积分。我们改变这个最后积分中的积分路径，同时固定其他所有变量。我们希望从 $\mathrm{R}(\lambda(+)_{1})=0$ 移至 $\mathrm{R}(\lambda(+)_{1})=\varepsilon_\tau(+)_{1,}$，并仍满足条件 $|\mathrm{I}(\lambda_i)|\leq T$。为此，我们用另外两条线段连接这两段：实部为 $\mathrm{R}(\lambda(+)_{1})\in[0,\varepsilon_\tau(+)_{1}]$，虚部为 $\mathrm{I}(\lambda(+)_{1})=\pm T$。将此积分路径记为 γ。根据 (7.40) 的描述，被积函数在 $\overline{\gamma}$ 内没有极点。事实上，关键在于，按照我们对 η 的选择，ηz_τ 的坐标实部均不落在 $[-\varepsilon_{\tau}_(+)\ 1,\varepsilon_\tau(+)_{1}]$ 内。此外，沿着 γ 的两条实线段，如 (7.42) 所示，我们有估计 $|L_{\Gamma'}(\lambda)|\geq(c/4)^{D}(2T+1)^{-k'D}$。由 (7.37) 和 (7.38)，沿这两条实线段的积分以线段长度（可假设小于 1）乘以 ε 为界。对每个变量 $\lambda(+)_{i}$ 重复这一积分路径变换，至多改变 C 后，我们得到

$$\left|I_{\tau,d+1}-\int_{\substack{i\mathfrak{a}^*_\tau+\kappa_\tau+\eta\underline{z}_{\tau,n}+\underline{\varepsilon}_\tau\\ \max|\Im(\lambda_i)|\leq T}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)}\mathcal{P}^{\uparrow}_{\tau}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda\right|\leq C\varepsilon. \tag{7.43}$$

我们将式 (7.43) 中的积分记为 $I_{\tau,d+1}(T)$。

现在，我们改变变量 $\lambda(1)_{\mathrm{c},1}$ 的积分路径。令

$$\underline{z}_1 = \left(\underbrace{0, \dots\dots\dots\dots\dots, 0}_{m_+(\tau)+m_2(\tau)-|I_2|+m_1(\tau)}, 1/4, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{\mathrm{c},1}} \right) \in \mathfrak{a}_{Q,n}^*.$$

换言之，$\underline{z}_1$ 是$\mathfrak{a}_Q^*$中的向量，$_n$ 其唯一非零坐标是 $1/4$ 位于τ_{c},1,1之上。我们要从$i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau + \eta z_{\tau,}$ $_n + \varepsilon_\tau$移至$i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau + \eta z_{\mp,n} - 2\underline{\eta} z_1 + \varepsilon_{\tau\circ}$ 根据 Fubini 定理，我们可以最后对 $\lambda(1)_{\mathrm{c}}$,1积分，因此可以认为其他所有变量都固定不变。这意味着我们要将从 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{\mathrm{c}},1) = (d+1)/2 + \eta/4$ 出发、在 $|\mathrm{I}(\lambda(1)_{\mathrm{c}},1)| \le T$ 上的积分移至 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{\mathrm{c}},1) = (d+1)/2 - \eta/4$。根据 (7.40) 的描述，这两个区域中没有极点，或者说$2T \ge |\mathrm{I}(\lambda(1)_{\mathrm{c}},1)| > T$。因此，我们可以考虑一条从上方和下方连接这两条线段的积分路径 γ，使得沿 γ没有非奇点。注意，$|L_{\Gamma'}(\lambda)|$ 沿 γ的下界为 $(c/4)^D(2T+1)^{-k'D}$：在两条虚线段上，这由与之前改变积分路径时相同的论证得到；而在另外两条曲线上，很容易满足这一条件。因此，由 (7.37) 和 (7.38)，区域 $|\mathrm{I}(\lambda(1)_{\mathrm{c}},1)| > T$ 内另外两个积分将由 ε的一个绝对常数所控制。γ 内部的奇点正是 (7.40) 所规定的那些奇点，并且由于$\varepsilon_\tau(+)$的坐标彼此不同，它们都是简单奇点。根据留数定理以及我们对测度的选择，沿 γ 的积分等于留数之和。注意，在引理 7.16 中，我们是相对于线性形式 $\Lambda(\lambda) = \lambda(+)_i - \lambda(1)_{\mathrm{c},j} - (d+1)/2$计算这些留数的。然而，这里我们正在对变量 $\lambda(1)_{\mathrm{c}}$,1中的积分路径进行平移，因此会出现一个 $-$ 符号。由引理 7.16 中的计算可知，适当增大 C后，我们有

$$\left| I_{\tau,d+1}(T) - \left(\int_{\substack{i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau + \eta\underline{z}_{\tau,n} - 2\eta\underline{z}_1 + \underline{\varepsilon}_\tau \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^\uparrow(\varphi,\lambda) \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda}) \rangle_G d\lambda + \sum_{\Gamma'} I_{\Gamma'}(T) \right) \right| \le C\varepsilon. \tag{7.44}$$

这里，Γ' 取遍$\mathcal{G}(\Gamma,\ n,\ d)$中满足以下条件的元素：恰有一条边不属于 Γ，且其形式为$\{\pi_{+,\ i},\ \tau_{\mathrm{c},\ 1,\ 1}\}$，其中$d(+,\ i) = d_\circ$ 在这种情况下，我们对 $\tau' = \pi'_\Gamma$和 $Q' = Q_{\Gamma'}$定义

$$I_{\Gamma'}(T) = \int_{\substack{i\mathfrak{a}_{\tau'}^* + \kappa_{\tau'} + \eta\underline{z}_{\tau',n} + \underline{\varepsilon}_\tau \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q',\tau'}(J)} \mathcal{P}_{\tau'}^\uparrow(\varphi,\lambda) \langle f, E(\varphi, -\overline{\lambda}) \rangle_G d\lambda.$$

注意，这里 ε_τ 与 $\underline{\mathfrak{a}}_{\tau'}^*$ 中的一个元素相对应，该元素在 $\lambda(1)_1$,中的坐标为 $\varepsilon_\tau(+)_1$，并且对于 $i \ge 2$，在 $\lambda(+)_{i-1}$ 中的坐标为 $\varepsilon_\tau(+)_i$。不过，我们断言可以将此积分的积分路径移至$i\mathfrak{a}_{\tau'}^* + \kappa_{\tau'} + \eta z_{\tau',\ n} + \varepsilon_{\tau'\circ}$ 事实上，这一变动将在区域(7.39)内的变量 $\lambda(1)_1$ 中进行；由(7.40)可知，不会穿过任何极点，因此特别地，$L_{\Gamma'}$ 保持不变。根据(7.37)和(7.38)，我们得出结论：至多增大绝对常数 C，便可假设

$$\left| I_{\Gamma'}(T) - I_{\tau',d+1}(T) \right| \le C\varepsilon. \tag{7.45}$$

请注意，在整个过程中，常数 C 与 ε无关。

现在我们可以完成引理 7.18 的证明。由（7.44）和（7.45）可知，$I_{\tau,\ d+1}(T)$ 除了相差 $C\varepsilon$ 外，等于将同一个积分平移到 $i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau + \eta z_{\tau,\ n} - 2\eta z_1 + \varepsilon_\tau$（虚部的绝对值仍由 T 限制）所得的积分，再加上若干 $I_{\tau',\ d+1}(T)$ 之和。下面说明如何处理每一项贡献。

对于第一个积分，我们继续改变每个变量 $\lambda(1)_{\mathrm{c},\,i}$ 的积分路径，方法是减去 $2\eta z_i$。重复完全相同的论证可知，每一步都会增加一个 $I_{\tau',\,d+1}(T)$ 的有限和，其中 τ' 是通过添加一条边 $\{\pi_{+,\,i},\ \pi_{\mathrm{c},\,1,\,j}\}$ 而得到的，该边满足 $d(+,\ i)=d$ 到 Γ。最后，我们的积分沿着 $i\mathfrak{a}_\tau^*+\kappa_\tau-\eta z_{\tau,\,n}+\varepsilon_\tau$ 进行（虚部受到相应限制）。但是，正如（7.41）和（7.43）中那样，通过改变积分路径（这次不会产生留数），我们看到这就是沿着 $i\mathfrak{a}_\tau^*+\kappa_{d,\,d+1}(\Gamma)$ 的积分，除了相差 $C\varepsilon$ 外；这一次，虚部不受限制。这正是（7.35）中来自 Γ 的贡献。

现在只剩下其余的 $I_{\tau',d+1}(T)$。由于 τ's 与图 $\Gamma'\in\mathsf{G}(\Gamma,n,d)$ 相关联，根据引理 7.15，它们的极点在区域 (7.39) 内也由 (7.40) 确定，因此我们可以复现处理 $I_{\tau,d+1}(T)$ 时所用的步骤。我们通过诱导得出结论，因为当 $m_{\mathrm{c}}(\tau')<m_{\mathrm{c}}(\tau)$ 时，我们需要进行积分路径变换的变量更少。注意，每一步我们都会向 Γ' 添加一条形如 $\{\pi_{+,i},\pi_{\mathrm{c},j}\}$ 的边，因此最终得到一个由图 $\mathsf{G}(\Gamma,n,d)$ 索引的和。此外，由于我们按特定顺序改变变量的积分路径，每个图至多出现一次。

现在我们看到，(7.35) 在相差一个 ε 的绝对常数以内成立；取 $\varepsilon\to 0$ 即得结论。引理 7.18 的证明至此结束。 □

7.3.7 一般线性群$_{n+1}$一侧积分路径的变动

我们保留来自图 Γ 以及 §7.3.6 中的记号的元素 $(I,\ Q,\ \tau,\ I_1,\ I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi,\ d+1)$。现在定义 $\mathcal{G}(\Gamma,\ d)$ 为 $\Gamma'\in\mathcal{G}(\pi)$ 的子集，使得

- Γ是 $\Gamma\prime$ 的子图，
- 属于 Γ 但不属于 $\Gamma\prime$ 的所有边均具有以下形式：$\{\pi_{+,\ i},\ \pi_{\mathrm{c}1,\ j}\}$ 或 $\{\pi_{+,\ i},\ \pi_{\mathrm{c}2,\ j}\}$，其中$(i)=d$。

通过改变一般线性群$_{n+1}$一侧变量的积分路径，我们得到以下结果。

引理 7.19。我们有

$$I_{\tau,d+1}=\sum_{\Gamma'\in\mathcal{G}(\Gamma,d)}\int_{i\mathfrak{a}^*_{\pi_{\Gamma'}}-\underline{\rho}_{\Gamma'}-\underline{\rho}^{\uparrow}_{\Gamma'}+2d\underline{z}_{\Gamma'}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q_{\Gamma'},\pi_{\Gamma'}}(J)}\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi_{\Gamma'}}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.46}$$

证明。证明过程与引理 7.18 的思路相同，但有一个重大区别。根据引理 7.18，我们可以从由图 $\Gamma'\in\mathcal{G}(\Gamma,n,d)$ 得到的 (I',Q',τ',I'_1,I'_2) 出发，并改变 (7.35) 中积分的积分路径。现在我们必须研究区域内的极点

$$\left\{\lambda-\underline{\rho}_{\tau'}-\underline{\rho}^{\uparrow}_{\tau'}+\nu\ \middle|\ \lambda\in\mathfrak{a}^*_{\tau',\mathbb{C}}\cap\mathcal{S}_{\tau',k,c_J},\ \begin{array}{l}\nu_n=2d\underline{z}_{\tau',n},\\ \nu_{n+1}\in[2d\underline{z}_{\tau',n+1},2(d+1)\underline{z}_{\tau',n+1}].\end{array}\right\}, \tag{7.47}$$

与引理 7.18 的不同之处在于，我们可以有一些 i 使得 $d(\tau',\ 1,\ i)=d+1$。由引理 7.15 可知，(7.47) 中的极点现在位于.....的零点上

$$\prod_{\substack{\sigma_{+,i}(\tau')^\vee\simeq\tau_{\mathrm{c},2,j}\\ \underline{d}(\tau',+,i)=d}}\left(-\lambda(+)_i-\lambda(2)_{\mathrm{c},j}-\frac{d+1}{2}\right)\prod_{\substack{\sigma_{1,i}(\tau')^\vee\simeq\tau'_{\mathrm{c},2,j}\\ \underline{d}(\tau',1,i)=d+1\\ i\notin I'_1}}\left(-\lambda(1)_i-\lambda(2)_{\mathrm{c},j}-\frac{d+1}{2}\right).$$

借助引理 7.16，我们知道这些奇点产生的留数。重复引理 7.18 中的论证（即截断积分，以假设极点为单极点），可得

$$I_{\tau',d+1}=\sum_{\Gamma''\in\mathcal{G}(\Gamma',n+1,d)}\int_{i\mathfrak{a}^*_{\pi_{\Gamma''}}-\underline{\rho}_{\Gamma''}-\underline{\rho}^{\uparrow}_{\Gamma''}+2d\underline{z}_{\Gamma''}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q_{\Gamma''},\pi_{\Gamma''}}(J)}\mathcal{P}^{\uparrow}_{\pi_{\Gamma''}}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda,$$

其中，$\mathcal{G}(\Gamma',n+1,d)$ 是由满足以下条件的图 $\Gamma''\in\mathcal{G}(\pi)$ 组成的集合：Γ' 是 Γ'' 的子图，并且 Γ'' 中不属于 Γ' 的所有边均具有以下形式：$\{\pi_{+,i},\pi_{\mathrm{c},2,j}\}$，其中 $d(+,i)=d_\circ$。最后，还需注意

$$\mathcal{G}(\Gamma,d)=\bigsqcup_{\Gamma'\in\mathcal{G}(\Gamma,n,d)}\mathcal{G}(\Gamma',n+1,d).$$

□

7.3.8 计算各项贡献

现在我们来完成命题 7.13 的证明。假设 (7.25) 对 $d+1\geq 2$ 成立。令 $\mathcal{G}(\pi,d)$ 为 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi)$ 的子集，满足 $(I_\Gamma,Q_\Gamma,\pi_\Gamma,I_{1,\Gamma},I_{2,\Gamma})\in\Pi^{\uparrow}_H(\pi,d)$。我们需要对 $\Pi^{\uparrow}_H(\pi,d)$ 中的元素求和，而不是对 $\mathcal{G}(\pi,d)$ 中的图求和。以下组合结果说明了这一点。

引理 7.20。有

$$\bigsqcup_{\Gamma\in\mathcal{G}(\pi,d+1)}\mathcal{G}(\Gamma,d)=\mathcal{G}(\pi,d).$$

此外，设 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi,d+1)$，并设 (I,Q,τ,I_1,I_2) 为其像。则映射的纤维

$$\Gamma'\in\mathcal{G}(\Gamma,d)\mapsto(I_{\Gamma'},Q_{\Gamma'},\pi_{\Gamma'},I_{1,\Gamma'},I_{2,\Gamma'})\in\Pi^{\uparrow}_H(\pi,d)\tag{7.48}$$

在像中的一点 (I',Q',τ',I'_1,I'_2) 上，其基数为 $|\text{稳定子}(\tau)||\text{稳定子}(\tau')|^{-1}$。

证明。对于第一点，分解是互不相交的，这是因为对于每个 $\Gamma'\in\mathcal{G}(\pi,d)$，都存在唯一的图 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi,d+1)$，使得 Γ' 通过向 Γ 添加边得到。显然，等式也成立，因为任意 $\Gamma\in\mathcal{G}(\pi,d)$ 都可以通过这一过程得到。

下面讨论第二个断言。由于在映射 (7.22) 下，$W(\tau^{\downarrow})$.$\tau^{\downarrow}$的原像中只有一个元素，因此可以假设我们有分解

$$\tau_+=\boxtimes_{i=1}^k\tau_{+,i}^{\boxtimes k_{+,i}}\boxtimes\tau_{+,\neq d},\quad \tau_{\mathrm{c},1}=\boxtimes_{i=1}^k\sigma_i^{\boxtimes k_{\mathrm{c},1,i}},\quad \tau_{\mathrm{c},2}=\boxtimes_{i=1}^k(\sigma_i^\vee)^{\boxtimes k_{\mathrm{c},2,i}},$$

对于某个整数，其中所有 σ_i 都是某些 GL_r 的两两不相同构尖点表示，对于所有 i，我们都有 $\tau_{+,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_i,d)$，且 $\tau_{+,\neq d}$ 是 Speh 表示 $\mathrm{Speh}(\sigma,d')$ 的乘积，其中 σ 是尖点的，且 $d'\neq d_\circ$。注意，我们允许 $k_{+,i}$、$k_{\mathrm{c},1,i}$ 和 $k_{\mathrm{c},2,i}$ 为零。

令 $\Gamma'\in\mathrm{G}(\Gamma,d)_\circ$。令 $1\leq i\leq k_\circ$ 用 $k_{1,i}$ 表示满足 $\pi_{+,j}\simeq\tau_{+,i}$、$\deg(+,1,j)=1$ 且 $\deg(+,2,j)=0$ 的顶点 $\pi_{+,j}\in\Gamma'$ 的数量；用 $k_{2,i}$ 表示这些顶点中满足 $\deg(+,1,j)=0$ 且 $\deg(+,2,j)=1$ 的顶点数量；最后，$k_{1,2,i}$ 表示满足 $\deg(+,1,j)=\deg(+,2,j)=1$ 的顶点数量。容易验证，在 (7.48) 下像与 Γ' 相同的 $\Gamma''\in\mathrm{G}(\Gamma,d)$ 的数量为

$$\prod_{i=1}^k\left(\frac{k_{\mathrm{c},1,i}!k_{\mathrm{c},2,i}!k_{+,i}!}{(k_{\mathrm{c},1,i}-k_{1,i}-k_{1,2,i})!(k_{\mathrm{c},2,i}-k_{2,i}-k_{1,2,i})!k_{1,i}!k_{2,i}!k_{1,2,i}!(k_{+,i}-k_{1,i}-k_{2,i}-k_{1,2,i})!}\right).$$

若将 Γ' 的像记作 (I',Q',τ',I'_1,I'_2)，则这恰好是 $|\mathrm{Stab}(\tau)||\mathrm{Stab}(\tau')|^{-1}$。证明至此完成。

□

7.3.9 命题 7.13 和命题 7.11 证明的结尾

命题 7.13 现在可由引理 7.19 和引理 7.20 推出。取 $d=1$，也就完成了命题 7.11 的证明。

7.3.10 结论

现在我们可以写出兰金–塞尔伯格周期的新表达式。

命题 7.21。我们有

$$\int_{[H]} f(h)dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(I_r,P,\pi)\in\Pi_H^{\uparrow}} \sum_{(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)} \times \frac{|\mathrm{Stab}(\pi)|}{|W(\pi)||\mathrm{Stab}(\tau)|} \int_{i\mathfrak{a}_\tau^* - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^{\uparrow} + 2\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda, \tag{7.49}$$

其中 $\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$ 是由以下空图构造得到的元组集：该空图由 $w\pi$ 构成，其中 w 是 $W(\pi)$ 中的任意元素，且满足 $d(+,1) \geq \ldots \geq d(+,m_+)$。

证明。 这直接由命题 7.4 和命题 7.11 得出。我们唯一需要验证的是，(7.49) 最后一行中的表达式与 $w\in W(\pi)$ 的选择无关。这由引理 7.10 得出。

□

7.4 正则化周期的额外留数

在本节中，我们继续计算 $\int_{[H]} f(h)dh$ 的谱展开，方法是对 (7.49) 中积分的积分路径进行最后一次移动。与第 7.3 节中的情形不同，这一轮移动将产生额外贡献，来自正则化周期 $\mathcal{P}_\tau^{\uparrow}$ 的留数。

7.4.1 结果陈述

在本节中，我们固定 $0\leq r\leq n$ 以及 $(I_r,P,\pi)\in\Pi_H^{\uparrow}$。接着固定 $(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$。我们的目标是计算积分

$$I_\tau := \int_{i\mathfrak{a}_\tau^* - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^{\uparrow} + 2\underline{z}_\tau} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.50}$$

与第 7.3.1 节一样，积分 I_τ 将产生若干贡献，我们将用图来参数化这些贡献。不过，这里的定义比第 7.3.1 节中的定义简单。

照例，我们可以写成

$$\tau_n = \boxtimes_{i=1}^{m_+}\tau_{+,i} \boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_2}}^{m_2} \tau_{2,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_1} \tau_{1,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},1}} \tau_{\mathrm{c},1,i}, \tag{7.51}$$

$$\tau_{n+1} = \boxtimes_{i=1}^{m_+}\tau_{+,i}^{\vee} \boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_1}}^{m_1} \tau_{1,i}^{-,\vee} \boxtimes_{i=1}^{m_2} \tau_{2,i} \boxtimes_{i=1}^{m_{\mathrm{c},2}} \tau_{\mathrm{c},2,i}. \tag{7.52}$$

由于我们的讨论中不需要提及 π，我们只写作 $\tau_{1,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_{1,i},d(1,i))$，依此类推。我们用 $\mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$ 表示满足下列条件的无向简单图集合 Γ

- 图 Γ 的顶点为 $\tau_{\mathrm{c}1,1},\dots,\tau_{\mathrm{c}1,m_1}$, $\tau_{\mathrm{c}2,1},\dots,\tau_{\mathrm{c}2,m_2}$（含重数）；
- Γ 的边具有如下形式：$\{\tau_{\mathrm{c}1,\ i},\ \tau_{\mathrm{c}2,\ j}\}$ 其中某些 i 和 j 满足 $\tau_{\mathrm{c}1,\ i}\simeq\tau^{\vee}_{\mathrm{c}2,\ j}$;
- 每个顶点的度为 0 或 1。

对每个 i，我们用 $\deg(\mathrm{c}\,1,\ i)$（分别用 $\deg(\mathrm{c}\,2,\ i)$）表示 $\tau_{\mathrm{c},\ 1,\ i}$（分别是 $\tau_{\mathrm{c},\ 2,\ i}$）的度。存在一个双射

$$i\in\{1\le i\le m_{\mathrm{c},1}\mid \deg(\mathrm{c},1,i)=1\}\mapsto j(i)\in\{1\le j\le m_{\mathrm{c},2}\mid \deg(\mathrm{c},2,j)=1\},\tag{7.53}$$

使得 $\tau_{\mathrm{c},\ 2,\ j(i)}$ 是 $\tau_{\mathrm{c},\ 1,\ i}$ 的唯一邻点。于是我们可以定义 G 的一个标准 Levi 子群 M_{R_Γ} 的表示 τ_Γ，其定义为

$$\tau_{\Gamma,n}=\boxtimes_{i=1}^{m_+}\tau_{+,i}\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_2}}^{m_2}\tau_{2,i}^{-,\vee}\boxtimes_{i=1}^{m_1}\tau_{1,i}\underset{\deg(\mathrm{c},1,i)=0}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},1,i}\underset{\deg(\mathrm{c},1,i)=1}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},1,i},\tag{7.54}$$

$$\tau_{\Gamma,n+1}=\boxtimes_{i=1}^{m_+}\tau_{+,i}^{\vee}\boxtimes_{\substack{i=1\\ i\notin I_1}}^{m_1}\tau_{1,i}^{-,\vee}\boxtimes_{i=1}^{m_2}\tau_{2,i}\underset{\deg(\mathrm{c},2,i)=0}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},2,i}\underset{\deg(\mathrm{c},1,i)=1}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},2,j(i)}.\tag{7.55}$$

与表示 τ_Γ 相关联的是一个自然的元组 $J_\Gamma=(n_+,n_1,n_{\mathrm{c}},1,n_2,n_{\mathrm{c}},2,n_-)$。更准确地说，我们有 $n_-=\sum\deg(\mathrm{c}\,1,i)\,n_{\mathrm{c},1,i}$，其中按惯例，$\tau_{\mathrm{c},1,i}$ 是 $\mathrm{GL}^{n_{\mathrm{c}},1,i}$ 的一个尖点表示。于是我们看到，(7.53) 定义了两个集合 $J_{1,\Gamma}$ 和 $J_{2,\Gamma}$，使得 $(J_\Gamma,R_\Gamma,\tau_\Gamma,J_{1,\Gamma},J_{2,\Gamma})\in\Pi_H^{\uparrow}$。我们将以此方式得到的元组集合记为 $\Pi_{H,\mathrm{c}(\tau)}^{\uparrow}$。注意，$(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_{H,\mathrm{c}(\tau)}^{\uparrow}$，因为它是空图的像。为追踪这个起始元组，我们将用字母 J 而非 I 表示 $\Pi_{H,\mathrm{c}(\tau)}^{\uparrow}$ 的元素。希望这不会与我们的固定层（也记作 J）混淆。

由于 τ 是固定的，我们通常将表示 τ_Γ 记作 δ。在这种情况下，我们将有 $\delta_{1,i}=\mathrm{Speh}(\sigma_{1,i}(\delta)d(\delta,1,i))$，等等。我们将需要该元素 $\underline{z}_\delta$

$$\underline{z}_\delta:=((0,0,0,1/4,0,0),(0,0,0,1/4,0,0))\in\mathfrak{a}_R^*,\tag{7.56}$$

其中 $1/4$仅存在于 $\underset{\deg(\mathrm{c},1,i)=0}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},1,i}$ 和 $\underset{\deg(\mathrm{c},2,i)=0}{\boxtimes}\tau_{\mathrm{c},2,i}$之上。

注意，映射的纤维

$$(J',R',\delta',J_1',J_2')\in\Pi_{H,\mathrm{c}}^{\uparrow}(\tau)\mapsto(R'^{,\downarrow},\delta'^{,\downarrow})\in\Pi_H$$

在集合 $W(\delta^{\downarrow}).\delta^{\downarrow}$ 之上总是约化为 (J,R,δ,J_1,J_2)。如 §7.3.1 中所述，我们将 $W(\delta^{\downarrow})$ 中 $\delta^{\downarrow}$ 的稳定子记作 $\mathrm{Stab}(\delta)$。

第 §7.4 节的目标是证明以下命题。

命题 7.22。我们有

$$I_\tau=\sum_{(J,R,\delta,J_1,J_2)\in\Pi_{H,\mathrm{c}}^{\uparrow}(\tau)}\frac{|\mathrm{Stab}(\tau)|}{|\mathrm{Stab}(\delta)|}\int_{i\mathfrak{a}_{\delta^{\downarrow}}^*-\underline{\rho}_{\delta^{\downarrow}}}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R^{\downarrow},\delta^{\downarrow}}(J)}\mathcal{P}_{\delta^{\downarrow}}(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda.$$

命题 7.22 的证明将贯穿第 7.4 节，并在第 7.4.9 节结束。同样，我们将通过分几步改变积分路径来证明它。由于大多数论证与第 7.3 节中用于证明命题 7.11 的论证相似，因此在适当情况下，我们会少作一些细节说明。

7.4.2 对论证的简要描述

与 §7.3.2 中一样，我们概述证明命题 7.22 的主要思路。我们的目标是将 I_τ 中的积分域从 $i\mathfrak{a}_\tau^* - \rho_\tau + \rho_\tau^\uparrow + 2z_\tau$ 移至 $i\mathfrak{a}_{\tau^\downarrow}^* - \rho_{\tau^\downarrow}$。我们分三步完成这一点。

首先要将我们的积分移至 $i\mathfrak{a}_\tau^* - \rho_\tau + \rho_\tau^\uparrow + z_\tau$。这是一个微妙的操作，因为我们的被积函数在此区域内会有奇点。它们将在 §7.4.3 中计算，并且全部来自正则化周期 $\mathrm{P}^\uparrow$，更确切地说，来自同构 $\tau_{\mathrm{c}}\mathbf{,1,}_i \simeq \tau_{\mathrm{c}}^\vee\mathbf{,2,}_j$。我们将在 §7.4.4 中确定相应的留数。它们可以表示为相对特征，存在于对 w 的 $w\tau$ 诱导中，其中 w 是魏尔群中按块作用于 τ 的一个元素。这里的想法相当简单：表示 $\tau_{\mathrm{c}}\mathbf{,1,}_i$ 和 $\tau_{\mathrm{c}}^\vee\mathbf{,2,}_j$ 将从 τ 的 “(c, 1)” 部分和 “(c, 2)” 部分移至 “–” 部分。再一次，为了跟踪这些留数，我们使用图；如果穿过相关奇点，就在与我们的表示相对应的顶点之间添加一条边。我们的约束意味着，对于每个 $\tau_{\mathrm{c}}\mathbf{,1,}_i$ 和 $\tau_{\mathrm{c}}\mathbf{,2,}_j$，这种情况至多发生一次，而在 (7.54) 和 (7.55) 中描述的表示 τ_{T} 正是上文提到的 $w\tau$。

如前所述，我们的被积函数实际上仅当 $t = 1$ 时才沿 $i\mathfrak{a}_\tau^* - \rho_\tau \pm \rho_\tau^\uparrow \pm tz_\tau$ 有极点。我们的目标是在此区域内对 $t < 1$ 进行积分，从而收集留数。问题在于，这会使 $-\lambda$ 离开我们能够控制 $E(\varphi, -\lambda)$ 的正 Weyl 室。为了解决这一问题，我们利用 §3.4.10 中所述区域 $\mathcal{R}_{\tau,k,c}$ 事实上略微超出了该室这一事实。这使我们能够在 $i\mathfrak{a}_\tau^* - \rho_\tau + \rho_\tau^\uparrow + (1-\eta)z_\tau$ 和 $\max |I(\lambda_i)| \leq T$ 上进行积分，其中 η 很小且 T 很大，同时控制尾项的大小。具体做法见 §7.4.5。最终，我们得到一个由图 $\Gamma \in \mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$ 编索引的相对特征之和；相应的 $\delta = \tau_\Gamma$ 沿 $i\mathfrak{a}_\delta^* - \rho_\delta + \rho_\delta^\uparrow + (1-\eta)z_\delta$ 和 $\max |I(\lambda_i)| \leq T$ 进行积分。

此时，我们进行变量替换，用 $w\delta$ 替换 δ，以便将积分带回正 Weyl 室。由于相应的 $\mathcal{R}$-区域彼此重叠，这再次成为可能。事实证明，$w\delta$ 正是 §6.2.6 中描述的表示 $\delta_\emptyset$。考虑到我们的扭曲，并经过简单变形后，我们的积分现在位于区域 $i\mathfrak{a}_{\delta_\emptyset}^* - (1-\eta)(\rho_{\delta_\emptyset} + \rho_{\delta_\emptyset}^\uparrow - z_{\delta_\emptyset})$ 中，并附加要求 $\max |I(\lambda_i)| \leq T$。现在，我们可以将积分路径移至 $i\mathfrak{a}_{\delta_\emptyset}^* - \rho_{\delta_\emptyset}$，并解除对虚部的要求，因为我们的被积函数在相应的条带内是正则的。这就是 §7.4.6 的内容。接下来，只需将结果表示为 $\delta^\downarrow$ 而不是 $\delta_\emptyset$ (§7.4.7)，并在 $\mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$ 中对 $\delta^\downarrow$ 而不是图求和（§7.4.8），即可完成命题 7.22 的证明。

7.4.3 极点

令 $(J,\ R,\ \delta,\ J_1,\ J_2) \in \Pi_{H,\ \mathrm{c}}^\uparrow(\tau)$。我们所关注的区域将是

$$\mathcal{R}_\delta^\uparrow := \left\{ \lambda - \underline{\rho}_\delta - \underline{\rho}_\delta^\uparrow + \underline{z}_\delta \;\middle|\; \lambda \in \mathfrak{a}_{\delta,\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{S}_{\delta,k,c_J} \right\}, \tag{7.57}$$

其中，k 和 c_J 取自定理 4.17 和命题 6.11。在 $\delta = \tau$ 的特殊情形下，我们还令

$$\mathcal{R}_\tau^{\uparrow,+} := \left\{ \lambda - \underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^\uparrow + \nu \;\middle|\; \lambda \in \mathfrak{a}_{\tau,\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{S}_{\tau,k,c_J},\ \nu \in [\underline{z}_\tau, 2\underline{z}_\tau] \right\}, \tag{7.58}$$

引理 7.23. 对于 $\varphi \in B_{R,\ \delta}(J)$，$P_\delta^\uparrow(\varphi, \lambda)\langle f, E(\varphi, -\lambda)\rangle_G$ 在区域 $R_\delta^\uparrow$(或 $R_\tau^{\uparrow,+}$)中的可能极点位于多项式的零点处

$$\prod_{\delta_{\mathrm{c},1,i} \simeq \delta_{\mathrm{c},2,j}^\vee} \left(\lambda(1)_{\mathrm{c},i} + \lambda(2)_{\mathrm{c},j} - \frac{1}{2} \right) \tag{7.59}$$

此外，它具有快速衰减性质，具体来说，若将(7.59)中的多项式记为 L，则对于所有$N>0$，存在 $C>0$，使得对于区域 $R_\delta^\uparrow$ (或 $R_\tau^{\uparrow,+}$)中的所有 λ，我们有

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R,\delta}(J)}\left|L(\lambda)\mathcal{P}_\delta^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G\right|\leq\frac{C}{(1+\|\lambda\|^2)^N}. \tag{7.60}$$

特别地，映射 $\lambda\mapsto\sum_\varphi L(\lambda)P_\delta^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,--\lambda)\rangle_G$ 在这些区域内是全纯的。

证明。通过复现引理 7.15 的论证并使用 $d=0$，即可证明这一点。关键在于，我们总有 $\rho_\delta+\rho_\delta^\uparrow-z_\delta\in\mathfrak{a}^*,{}^+_{R-}$ 这使我们能够使用推论 4.19 来确定艾森斯坦级数的极点。注意，与引理 7.15 的情形相反，式（7.59）中的极点来自周期 $\mathcal{P}_\delta^\uparrow(\varphi,\lambda)$，而不是来自艾森斯坦级数。

□

注 7.24。我们强调，区域$\mathcal{R}_\delta^\uparrow$ 在某种意义上是我们能够控制 $\mathcal{P}_\delta^\uparrow(\varphi,\lambda)\langle f,E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$的极点的最大区域。事实上，注意，在坐标（相对于式（7.54）和（7.55）中给出的 δ 的分解）下

$$\underline{\rho}_\delta+\underline{\rho}_\delta^\uparrow-\underline{z}_\delta=((1/4,1/4,-1/4,-1/4,-1/4),(1/4,1/4,-1/4,-1/4,-1/4))\,.$$

在特例中 殊情况下 $\delta=\tau$ 我们得到 $t\in\mathbb{R}$，使用（7.51）和（7.52）的坐标，而不是 ad

$$\underline{\rho}_\tau+\underline{\rho}_\tau^\uparrow-t\underline{z}_\tau=((1/4,1/4,-1/4,-t/4),(1/4,1/4,-1/4,-t/4))\,,$$

因此，在（7.58）给出的定义中，我们需要 $t\geq1$（即 $\nu\geq z_\tau$）$\mathcal{R}_\tau^{\uparrow,+}$。

7.4.4 留数的计算

我们保留 $(J,\ R,\ \delta,\ J_1,\ J_2)\in\Pi_{H,\ \mathrm{c}}^\uparrow(\tau)$，并描述沿（7.59）所截出的仿射超平面得到的留数。我们假设这个元组来自图 $\Gamma\in\mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$。

令 $1\leq i_1\leq m_{\mathrm{c},1}(\delta)$ 和 $1\leq i_2\leq m_{\mathrm{c},2}(\delta)$ 使得 $\delta_{\mathrm{c},1,i_1}\simeq\delta_{\mathrm{c},2,i_2}$。令 Λ 为仿射线性形式 $\Lambda(\lambda)=\lambda(1)_{\mathrm{c}}、\ i_1+\lambda(2)_{\mathrm{c},i_2}-1/2$。如果我们记录（7.51）和（7.52）中的顺序，则存在唯一确定的指标 j_1 和 j_2，使得 $\delta_{\mathrm{c},1,i_1}=\tau_{\mathrm{c},1,j_1}$ 以及 $\delta_{\mathrm{c},2,i_2}=\tau_{\mathrm{c},2,j_2}$。我们将通过向 Γ 添加边 $\{\tau_{\mathrm{c},1,j_1},\tau_{\mathrm{c},2,j_2}\}$ 所得到的图记为 Γ_Λ，并将与 Γ_Λ 相关联的 $\Pi_{H,\mathrm{c}}^\uparrow(\tau)$ 中的元组记为 $(J_\Lambda,R_\Lambda,\tau_\Lambda,J_{1,\Gamma},J_{2,\Gamma})$。它产生一个正则化周期 $\mathrm{P}_{\tau_\Lambda}^\uparrow$。

与我们之前在 §7.3.5 中计算留数时一样，我们有一个唯一元素 w，它以块的方式作用于 M_R，使得 $w\delta=\tau_\Lambda$。同样，我们需要要求它保持顺序，以确保其唯一性。此外，适当选取常数后，我们有

$$w\left(\Lambda^{-1}(\{0\})\cap(\mathfrak{a}_{\delta,\mathbb{C}}^*-\underline{\rho}_\delta-\underline{\rho}_\delta^\uparrow)\right)=\mathfrak{a}_{\tau_\Lambda,\mathbb{C}}^*-\underline{\rho}_{\delta_\Lambda}-\underline{\rho}_{\delta_\Lambda}^\uparrow,$$

and

$$w\left(\Lambda^{-1}(\{0\})\cap\mathcal{R}_\delta^\uparrow\right)\subset\mathcal{R}_{\tau_\Lambda}^\uparrow.$$

引理 7.25. 对于处于一般位置的 $\lambda\in\Lambda^{-1}(\{0\})\cap(\mathfrak{a}_{\delta,\mathbb{C}}^*-\rho_\delta-\rho_\delta^\uparrow)$，我们有

$$\operatorname*{Res}_\Lambda\left(\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R,\delta}(J)}\mathcal{P}_\delta^\uparrow(\varphi,\mu)\langle f,E(\varphi,-\overline{\mu})\rangle_G\right)(\lambda)=\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R_\Lambda,\tau_\Lambda}(J)}\mathcal{P}_{\tau_\Lambda}^\uparrow(\varphi,w\lambda)\langle f,E(\varphi,-w\overline{\lambda})\rangle_G.$$

证明. 为简单起见，我们令 $R' = R_\Lambda$ 和 $\delta' = \tau_\Lambda$。设 $\varphi \in \mathcal{B}_{R,\delta}(J)$。由引理 7.23 的证明可知，奇点来自周期 $\mathcal{P}^\uparrow_\delta(\varphi,\mu)$。根据式（6.32）中$\mathcal{P}^\uparrow_\delta$的定义，我们有

$$\mathcal{P}^\uparrow_\delta(\varphi,\lambda) := \mathcal{P}^{R^\uparrow}(M(w^\uparrow,\lambda)\varphi_{R^\uparrow_\delta}, w^\uparrow\lambda),$$

其中，抛物子群 $R^\uparrow$ 和 $R^\uparrow_\delta$ 以及元素 $w^\uparrow_\delta$ 在 §6.2.2 中有描述。特别地，当 λ 在仿射超平面 $\Lambda^{-1}(0)$ 上处于一般位置时，交织算子 $M(w^\uparrow,\lambda)^{\varphi_{R^\uparrow_\delta}}$是正则的。因此，我们可以应用命题 5.13 来计算留数。该命题给出了一个兰金–塞尔伯格抛物子群 R 和一个元素 w'，它在 $w^\uparrow.R^\uparrow_\delta$ 上按块作用，使得当 $\lambda \in \Lambda^{-1}(\{0\}) \cap (\mathfrak{a}^*_{\delta,\mathbb{C}} - \rho_\delta - \rho^\uparrow_\delta)$处于一般位置时，我们有

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda}\left(\mathcal{P}^{R^\uparrow}(M(w^\uparrow,\mu)\varphi_{R^\uparrow_\delta}, w^\uparrow\mu)\right)(\lambda) = \mathcal{P}^{\widetilde{R}}\left(M(w'w^\uparrow,\lambda)\varphi_{R^\uparrow_\delta}, w'w^\uparrow\lambda\right).$$

将 §6.2.2 中为 δ'构造的魏尔群中的抛物子群和元素分别记作 $R'^{,\uparrow}$ 和 $w'^{,\uparrow}$。由命题 5.13 中对 w' 和 S 的描述可知，存在$w_{\mathbf{M}} \in W_{\mathbf{M}}(\delta')$使得 $w'w^\uparrow = w_{\mathbf{M}}w'^{,\uparrow}w$ 且 $\widetilde{R} = w_{\mathbf{M}}.R'^{,\uparrow}$。采用 §6.2.4 中的记号，$w_{\mathbf{M}}$对应于 $\mathfrak{S}(m_-(\delta'))$中的一个置换，其作用是将 δ'_- 的各个分量按 (7.54) 和 (7.55) 规定的顺序排列。根据引理 6.10 的函数方程，我们得出

$$\operatorname*{Res}_{\Lambda}\left(\mathcal{P}^{R^\uparrow}(M(w^\uparrow,\mu)\varphi_{R^\uparrow_\delta}, w^\uparrow\mu)\right)(\lambda) = P^\uparrow_{\delta'}(M(w,\lambda)\varphi, w\lambda).$$

接下来只需对关于 $\mathcal{B}_{R,\delta}(J)$ 的求和作变量替换，并使用定理 4.17 中的艾森斯坦级数的函数方程即可得出结论。□

7.4.5 第一次改变积分路径

现在我们可以写出本节第一次改变积分路径的结果。回顾一下，我们固定了 $(I,Q,\tau,I_1,I_2) \in \Pi^\uparrow_H(\pi)$。如 §7.3.6 中一样，我们取 $c > 0$ 和 $k' > 0$，使得对于所有 $T > 0$ 以及 $(J,R,\delta,J_1,J_2) \in \Pi^\uparrow_{H,c}(\tau)$，都有

$$\left\{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\delta,\mathbb{C}} \mid \max|\Im(\lambda_i)| \le T,\ \max|\Re(\lambda_i)| \le c(T+1)^{-k'}\right\} \subset \mathcal{S}_{\delta,k,c_J}. \tag{7.61}$$

对于任意 $T > 0$，我们令

$$\eta(T) = 4c(2T+1)^{-k'}. \tag{7.62}$$

我们从下面的引理开始。回顾一下，我们的目标是计算式 (7.50) 中的积分 I_τ。

引理 7.26。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $T_\varepsilon > 0$，使得对于每个 $T > T_\varepsilon$，都有

$$\left| I_\tau - \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_c(\tau)} \int_{i\mathfrak{a}^*_{\tau_\Gamma} - \underline{\rho}_\Gamma - \underline{\rho}^\uparrow_\Gamma + (1-\eta(T))\underline{z}_\Gamma \atop \max|\Im(\lambda_i)| \le T} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\Gamma,\tau_\Gamma}(J)} \mathcal{P}^\uparrow_{\tau_\Gamma}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda \right| \le \varepsilon. \tag{7.63}$$

注记 7.27。注意，在 (7.63) 中，积分域内的界“$\max|\Im(\lambda_i)| \le T$”是必要的。事实上，若没有这些界，我们就会离开区域 $\mathcal{R}^\uparrow_{\tau_\Gamma}$，因为 $\rho_\Gamma + \rho^\uparrow_\Gamma - (1-\eta(T))z_\Gamma$ 不属于 $\mathfrak{a}^{*,+}_{-R_\Gamma}$（见注 7.24）。

证明。设 $\varepsilon > 0$。论证与引理 7.18 中所用的非常相似，因此这里只概述主要步骤。对任意 T，令 $\varepsilon(T) \in \mathfrak{a}_\tau^*$，使得 $\|\varepsilon(T)\| < (2T+1)^{-k'}/2$，$\varepsilon(T)_n = 0$，且 $\varepsilon(T)_{n+1}$ 的所有坐标均为零，除了变量 $\lambda(2)_{c,\,1}$，……，$\lambda(2)_{c,\,m_{c,\,2}}$ 中的坐标外；这些坐标彼此不同。对任意 T，令

$$\kappa_\tau(T) = -\underline{\rho}_\tau - \underline{\rho}_\tau^{\uparrow} + (1+2\eta(T))\underline{z}_{\tau,n} + (1-\eta(T))\underline{z}_{\tau,n+1} + \underline{\varepsilon}(T). \tag{7.64}$$

根据引理 7.23 的估计以及积分路径的变形（在区域 $\mathcal{R}_\tau^{\uparrow+,}$），我们看到可以选择 T_0，使得对任意 $T > T_0$，都有

$$\left| I_\tau - \int_{\substack{i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau(T) \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda \right| \le \varepsilon.$$

注意，我们现在处于 $\mathcal{R}_\tau^{\uparrow}$ 中。

我们重点考察第二个积分。根据 Fubini 定理，我们可以最后沿 $\lambda(1)_{c,1}$ 积分。考虑由两条虚线段 $|\mathrm{I}(\lambda(1)_{c,1})| \le T$ 沿 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{c,1}) = 1/4 + \eta(T)/2$ 和 $\mathrm{R}(\lambda(1)_{c,1}) = 1/4 - \eta(T)/4$，以及区域 $2T \ge |\mathrm{I}(\lambda(1)_{c,1})| \ge T$ 内连接它们端点的两条曲线所组成的积分路径 γ。根据引理 7.23，该积分路径上没有奇点，并且可以对沿两条附加曲线的积分给出上界。这是因为我们有上界 (7.60)，而且根据对 $\eta(T)$ 和 $\varepsilon(T)$ 的选择，乘积 (7.59) 也有下界。根据引理 7.25 对留数的计算，并进一步变形积分路径后，对每个 $T > T_0$，我们得到

$$\left| I_\tau - \int_{\substack{i\mathfrak{a}_\tau^* + \kappa_\tau(T) - 3\eta(T)z_1 \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{Q,\tau}(J)} \mathcal{P}_\tau^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda - \sum_{\Gamma} I_\Gamma(T) \right| \le C\varepsilon,$$

其中，C 是一个与 T无关的绝对常数，z_1 是 $\mathfrak{a}_\tau^*$ 中唯一非零坐标为 λ的元素$(1)_{c,\,1} = 1/4$，求和遍历图 $\Gamma \in \mathcal{G}_c(\tau)$，这些图只有一条形如$\{\tau_{c,\,1,\,1},\ \tau_{c,\,2,\,j}\}$ 的边，并且

$$I_\Gamma(T) = \int_{\substack{i\mathfrak{a}_{\tau_\Gamma}^* + \kappa_\Gamma(T) \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\Gamma,\tau_\Gamma}(J)} \mathcal{P}_{\tau_\Gamma}^{\uparrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda,$$

$\kappa_\Gamma(T)$按(7.64)中对 τ_Γ的定义。注意，由于(7.61)，积分区域包含于$\mathcal{R}_\delta^{\uparrow}$ 中。现在仿照引理 7.18，通过对变量个数进行诱导，完成引理 7.26 的证明。

□

7.4.6 第二次改变积分路径

本节中，我们固定 $\Gamma \in \mathcal{G}_c(\tau)$。令$(J,\ R,\ \delta,\ J_1,\ J_2)$为$\Pi_{H,\,c}^{\uparrow}$中的对应元组。我们有§6.2.6中的元组$(J_\emptyset,\ \delta_\emptyset,\ R_\emptyset) \in \Pi_H$。与(7.56)中一样，我们设

$$\underline{z}_{\delta_\emptyset} := ((0,0,0,1/4,0,0),(0,0,0,1/4,0,0)) \in \mathfrak{a}_R^*,$$

其中，$1/4$ 仅在 $\boxtimes_i \delta_{\emptyset,\,c,\,1,\,i}\boxtimes_j \delta_{\emptyset,\,c,\,2,\,j}$之上存在。如(6.42)所述，我们有

$$w_\emptyset(\underline{\rho}_\delta + \underline{\rho}_\delta^{\uparrow} - \underline{z}_\delta) = \underline{\rho}_{\delta_\emptyset} + \underline{\rho}_{\delta_\emptyset}^{\uparrow} - \underline{z}_{\delta_\emptyset}. \tag{7.65}$$

请注意，在此情况下$\rho^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - z_{\delta_\emptyset} \in \mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset,\ \mathbb{C}}$。

现在考虑区域

$$\mathcal{R}_{\delta_\emptyset} := \left\{ \lambda - \underline{\rho}_{\delta_\emptyset} - t(\underline{\rho}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - \underline{z}_{\delta_\emptyset}) \;\middle|\; \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset,\mathbb{C}} \cap \mathcal{S}_{\delta_\emptyset,k,c_J}, 0 \le t \le 1 \right\}, \tag{7.66}$$

这里我们再次要求 k 和 c_J 是定理 4.17 和命题 6.11 所规定的。由 (7.65) 可得 $w_\emptyset \mathcal{R}^{\uparrow}_{\delta} \subset \mathcal{R}^{\delta_\emptyset}$。

引理 7.28。对于 $\varphi \in B_{R_\emptyset,\delta_\emptyset}(J)$，$P^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 在 *(7.66)* 的区域 $R^{\delta_\emptyset}$ 内可能出现的极点位于多项式的零点处

$$\prod_{\delta_{\emptyset,\mathrm{c},1,i} \simeq \delta^{\vee}_{\emptyset,\mathrm{c},2,j}} \left(\lambda(1)_i + \lambda(2)_j + \frac{1}{2} \right) \tag{7.67}$$

此外，它具有快速衰减性质，具体而言，若将 *(7.59)* 中的多项式记为 L，则对所有 $N > 0$，存在 $C > 0$，使得对区域 $R^{\delta_\emptyset}$ 内所有 λ，我们都有

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\emptyset,\delta_\emptyset}} \left| L(\lambda) \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda) \langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G \right| \le \frac{C}{(1+\|\lambda\|^2)^N}. \tag{7.68}$$

特别地，$\varphi \mapsto \sum_\varphi L(\lambda) P^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\lambda)\rangle_G$ 在 $R^{\delta_\emptyset}$ 内全纯。

注 7.29. 注意，只要 $t < 1$，来自 (7.67) 的多项式 L 在区域 $i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - \rho_{\delta_\emptyset} - t(\underline{\rho}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - \underline{z}_{\delta_\emptyset})$ 中就不为零。

证明. 这与引理 7.23 的证明相同，并且依赖于推论 4.19（艾森斯坦级数的极点）和命题 6.11。 □

现在我们定义

$$I_{\delta_\emptyset} := \int_{i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - \underline{\rho}_{\delta_\emptyset}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\emptyset,\delta_\emptyset}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.69}$$

由引理 7.28，这个积分良定义且绝对收敛。

引理 7.30. 对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $T > 0$，使得

$$\left| I_{\delta_\emptyset} - \int_{\substack{i\mathfrak{a}^*_\delta - \underline{\rho}_\delta - \underline{\rho}^{\uparrow}_\delta + (1-\eta(T))\underline{z}_\delta \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R,\delta}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda \right| \le \varepsilon. \tag{7.70}$$

证明. 由引理 7.25 中奇点的界和局部化可知，通过改变积分路径，适当增大 T 后，我们可以假设，(7.70) 右侧的积分与下式之差的绝对值为一个常数乘以 ε:

$$\int_{\substack{i\mathfrak{a}^*_\delta + (1-\eta(T))(\underline{z}_\delta - \underline{\rho}_\delta - \underline{\rho}^{\uparrow}_\delta) \\ \max|\Im(\lambda_i)| \le T}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R,\delta}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda \tag{7.71}$$

事实上，关键在于，根据 (7.61)，这个积分区域始终位于 $\mathcal{R}^{\uparrow}_{\delta}$ 中；此外，根据引理 7.23，我们对因子 (7.59) 有一个下界。这两条信息都得益于我们在 (7.62) 中对 $\eta(T)$ 的选择。此外，对于任何足够大的 T，这个估计仍然成立。

根据引理 6.14，对于任意 $\varphi \in \mathcal{B}_{R,\delta}(J)$，我们有如下关系：

$$\mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta}(\varphi,\lambda) = \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(M(w_\emptyset,\lambda)\varphi, w_\emptyset\lambda),$$

其中 $w_\emptyset$ 在 §6.2.6 中定义。通过变量代换，并利用关系式 (6.42)，我们看到 (7.71) 等于

$$\int_{i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - (1-\eta(T))(\underline{\rho}_{\delta_\emptyset} + \underline{\rho}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - \underline{z}_{\delta_\emptyset})} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\emptyset,\delta_\emptyset}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda.$$
$$\max|\Im(\lambda_i)|\le T$$

由于我们现在处于区域 $\mathcal{R}^{\delta_\emptyset}$，因此可以使用引理 7.28，再次改变积分路径，从而得出：除去增大 T 外，该积分与下式的绝对值之差至多为 ε 乘以一个常数

$$\int_{i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - \underline{\rho}_{\delta_\emptyset} - (1-\eta(T))(\underline{\rho}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - \underline{z}_{\delta_\emptyset})} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R_\emptyset,\delta_\emptyset}(J)} \mathcal{P}^{\uparrow}_{\delta_\emptyset}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda.$$
$$\max|\Im(\lambda_i)|\le T$$

只需最后改变一次积分路径，将积分区域从 $i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - \rho_{\delta_\emptyset} - (1-\eta(T))(\rho^{\uparrow}_{\delta_\emptyset} - z_{\delta_\emptyset})$ 移至 $i\mathfrak{a}^*_{\delta_\emptyset} - \rho_{\delta_\emptyset}$。根据注 7.29 中的说明，由于不会穿过任何极点，因此可由引理 7.28 完成这一变换。由此得到 (7.70)，并完成引理 7.30 的证明。 □

7.4.7 回到非递增周期

我们保留图 $\Gamma \in \mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$ 和元组 $(J, R, \delta, J_1, J_2) \in \Pi^{\uparrow}_{H,\mathrm{c}}$。我们的目标是用第 6 章中定义的正则化 Rankin–Selberg 周期 $\mathcal{P}$，而非 $\mathcal{P}^{\uparrow}$，来表示 $I_{\delta_\emptyset}$（定义于 (7.69)）。为此，我们使用 §6.2.3 中描述的 $\delta \mapsto \delta^{\downarrow} \in \Pi_H$ 构造。

引理 7.31. 我们有

$$I_{\delta_\emptyset} = \int_{i\mathfrak{a}^*_{\delta^\downarrow} - \underline{\rho}_{\delta^\downarrow}} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{R^\downarrow,\delta^\downarrow}} \mathcal{P}_{\delta^\downarrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda.$$

证明。 这可由引理 6.15 和一些变量替换得到。 □

7.4.8 计算贡献数

最后需要做的是对元组 $(J, R, \delta, J_1, J_2) \in \Pi^{\uparrow}_{H,\mathrm{c}}(\tau)$ 求和，而不是对图 $\mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau)$ 求和。下一条引理将说明这一点。

引理 7.32. 映射的纤维

$$\Gamma \in \mathcal{G}_{\mathrm{c}}(\tau) \mapsto (J_\Gamma, R_\Gamma, \tau_\Gamma, J_{1,\Gamma}, J_{2,\Gamma}) \in \Pi^{\uparrow}_{H,\mathrm{c}}(\tau)$$

像中的一点上方的 (J, R, δ, J_1, J_2) 的基数为 $|\mathrm{Stab}(\tau)||\mathrm{Stab}(\delta)|^{-1}$.

证明。 证明与引理 7.20 的证明完全相同。 □

7.4.9 命题 7.22 证明的结尾

现在，只需取 $\varepsilon \to 0$ 并使用引理 7.32 的组合结果，即可由引理 7.26、7.30 和 7.31 得出该命题。

7.4.10 结论

我们将明确写出我们所做工作对于计算 $\int_{[H]} f(h)dh$ 的推论。这由命题 7.21 和命题 7.22 的结合得到。

命题 7.33. 我们有

$$\int_{[H]} f(h)dh = \sum_{r=0}^{n} \sum_{(I_r,P,\pi)\in\Pi_H^{\uparrow}} \sum_{(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\pi)} \sum_{(J,R,\delta,J_1,J_2)\in\Pi_{H,\mathrm{c}}^{\uparrow}(\tau)}$$
$$\times \frac{|\mathrm{Stab}(\pi)|}{|W(\pi)||\mathrm{Stab}(\delta)|} \int_{i\mathfrak{a}_{\delta\downarrow}^{*}-\underline{\rho}_{\delta\downarrow}} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{R\downarrow,\delta\downarrow}(J)} \mathcal{P}_{\delta\downarrow}(\varphi,\lambda)\langle f, E(\varphi,-\overline{\lambda})\rangle_G d\lambda. \tag{7.72}$$

其中 $\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$ 是由根据 $w\pi$ 构造的空图得到的元组集，其中 w 是 $W(\pi)$ 中的任意元素，且满足 $d(+,1) \geq \ldots \geq d(+,m_+)$。_ _

7.5 定理 7.1 证明的结尾

我们终于可以结束定理 7.1 的证明了。现在只需更改求和中的指标。为方便读者，我们重述这一结果。

定理 7.34. 我们有

$$\int_{[H]} f(h)dh = \sum_{(P,\pi)\in\Pi_H} \frac{1}{|W(\pi)|} \int_{\lambda\in i\mathfrak{a}_{\pi}^{*}} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{P,\pi}(J)} \mathcal{P}_{\pi}(\varphi,\lambda-\underline{\rho}_{\pi})\langle f, E(\varphi,\lambda+\underline{\rho}_{\pi})\rangle_G d\lambda, \tag{7.73}$$

其中，右端的积分绝对收敛。

证明。 为了证明定理 7.34，我们需要改写命题 7.33。令 $I_{\delta\downarrow}$ 为 (7.72) 中的最后一个积分。根据艾森斯坦级数的函数方程（定理 4.17）以及 $\mathcal{P}_{\pi}$ 的函数方程（推论 6.5），对于任意 $w \in W(\delta^{\downarrow})$，我们有

$$I_{w\delta\downarrow} = I_{\delta\downarrow}. \tag{7.74}$$

令 $0 \leq r \leq n$。令 $\Pi_{H,r}^{\uparrow}$ 为 $\Pi_H^{\uparrow}$ 中由元素 (I_r,P,π) 构成的集合。我们将 $\Pi_{H,r}^{\uparrow}$ 按照关系 $(I_r,P_1,\pi_1) \sim (I_r,P_2,\pi_2)$（若存在某个 $w\in W(\pi_2)$ 使得 $\pi_1 = w\pi_2$）取商，记为 $\Pi_{H,r}^{\uparrow}/W$。注意，由于 I_r 的形式（见 (7.6)），若 $(I_r,P,\pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$ 且 $w\in W(\pi)$，则 $(I_r,w.P,w\pi) \in \Pi_H^{\uparrow}$。此外，集合 $\Pi_H^{\uparrow}(\pi)$ 与 π 的等价类无关。

由（7.74）可知，（7.72）的右端等于

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{(I_r,\overline{P},\overline{\pi})\in\Pi_{H,r}^{\uparrow}/W} \sum_{(I,R,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\overline{\pi})} \sum_{(J,R,\delta,J_1,J_2)\in\Pi_{H,\mathrm{c}}^{\uparrow}(\tau)} \frac{1}{|\mathrm{Stab}(\delta)|} I_{\delta\downarrow}, \tag{7.75}$$

其中，我们再次将 $(I_r,P,\overline{\pi})$ 记作其类的一个代表元。

我们还通过规定：若存在某个$w\in W(\pi_2)$使得 $\pi_1 \sim \pi_2$ $\pi_1 = w\pi_2$，则 $\pi_1 \sim \pi_2$ 与 $\pi_1 = w\pi_2$ 等价，来定义一个等价关系。我们将商记为 Π_H/W。我们声称存在一个双射

$$(J,R,\delta,J_1,J_2) \in \left(\bigcup_{r=0}^{n} \bigcup_{(I_r,\overline{P},\overline{\pi})\in\Pi_{H,r}^{\uparrow}/W} \bigcup_{(I,Q,\tau,I_1,I_2)\in\Pi_H^{\uparrow}(\overline{\pi})} \Pi_{H,\mathrm{c}}^{\uparrow}(\tau) \right) \mapsto \delta^{\downarrow} \in \Pi_H/W. \tag{7.76}$$

我们说明如何构造其逆映射。我们从 $\Pi \in \Pi_H/W$ 出发。可以选择一个代表元 Π，使得我们得到（6.2）和（6.3）中分解的细化

$$\Pi_n = \pi_+ \boxtimes (\pi_{1,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{1,\mathrm{res}}) \boxtimes \pi_{2,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes (\pi_{-,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{res}}),$$
$$\Pi_{n+1} = \pi_+^\vee \boxtimes (\pi_{2,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{2,\mathrm{res}}) \boxtimes \pi_{1,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes \left(\pi_{-,\mathrm{cusp}}^\vee \boxtimes \pi_{-,\mathrm{res}}^\vee\right),$$

其中，带有“cusp”下标的表示是尖点的，而带有“res”下标的表示是剩余的。此外，我们可以假设每个 $\pi_{\dots}$ 内的块按递增顺序排列。例如，这意味着如果我们写成

$$\pi_+ = \boxtimes_{i=1}^{m_+} \mathrm{Speh}(\sigma_{+,i}, \underline{d}(+,i)),$$

那么我们要求 $d(\pm,1) \geq \dots \geq d(\pm,m_+)$。现在，我们将 $\pi_{n,\mathrm{res}}$ 和 $\pi_{n+1,\mathrm{res}}$ 定义为 $\pi_{1,\mathrm{res}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{res}}$ 和 $\pi_{2,\mathrm{res}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{res}}^\vee$ 的块的唯一重新排序，使得如果我们写成

$$\pi_{n,\mathrm{res}} = \boxtimes_{i=1}^{m_n} \mathrm{Speh}(\sigma_{n,i}, \underline{d}(n,i)), \quad \pi_{n+1,\mathrm{res}} = \boxtimes_{i=1}^{m_{n+1}} \mathrm{Speh}(\sigma_{n+1,i}, \underline{d}(n+1,i)), \tag{7.77}$$

那么 $\underline{d}(n,1) \geq \dots \geq \underline{d}(n,m_n)$ 且 $d(\underline{n},1) \geq \dots \geq d(\underline{n},m_{n+1})$，并且 $\pi_{1,\mathrm{res}}$、$\pi_{-,\mathrm{res}}$、$\pi_{2,\mathrm{res}}$ 和 $\pi_{-,\mathrm{res}}^\vee$ 各自的块仍保持原有顺序。

由此可得 根据我们的构造， $\Pi = \delta^\downarrow$ 对于 (J,R,δ,J_1,J_2) 成立，其中 $\in \Pi_H^\uparrow$ 定义为

$$\delta_n = \pi_+ \boxtimes \pi_{2,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes \pi_{n,\mathrm{res}} \boxtimes \pi_{1,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}, \tag{7.78}$$
$$\delta_{n+1} = \pi_+^\vee \boxtimes \pi_{1,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes \pi_{n+1,\mathrm{res}} \boxtimes \pi_{2,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}^\vee, . \tag{7.79}$$

这里的 J 以显然的方式定义，集合 J_1 和 J_2 分别对应于 $\pi_{n,\mathrm{res}}$ 中的离散自守表示$\pi_{-,\mathrm{res}}$ 和 $\pi_{-,\mathrm{res}}^\vee$。

于是有 $(J,R,\delta,J_1,J_2) \in \Pi_{H,\mathrm{c}}^\uparrow(\tau)$，其中 (I,Q,τ,I_1,I_2) 也由 (7.78) 和 (7.79) 定义，只需将 $\pi_{1,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}$ 与 $\pi_{2,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}^\vee$ 分别归为一组。

采用 (7.77) 的记号，我们令 $\sigma_n = \boxtimes_i \sigma_{n,i}$ 和 $\sigma_{n+1} = \boxtimes_i \sigma_{n+1,i}$。现在 $(I,Q,\tau,I_1,I_2) \in \Pi_H^\uparrow(\pi)$，其中 π 满足

$$\pi_n = \left(\pi_+ \boxtimes \pi_{2,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes \pi_{n,\mathrm{res}}^-\right) \boxtimes (\sigma_n \boxtimes \pi_{1,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}),$$
$$\pi_{n+1} = \left(\pi_+^\vee \boxtimes \pi_{1,\mathrm{res}}^{-,\vee} \boxtimes \pi_{n+1,\mathrm{res}}^-\right) \boxtimes \left(\sigma_{n+1} \boxtimes \pi_{2,\mathrm{cusp}} \boxtimes \pi_{-,\mathrm{cusp}}^\vee\right).$$

于是，对于某个 $0 \leq r \leq n$ 以及 G的某个标准抛物子群 P，有 $(I_r,P,\pi) \in \Pi_H^\uparrow$，因此映射 $\Pi \mapsto (J,R,\delta,J_1,J_2)$ 的像落在 (7.76) 的并集中。根据构造，它是 $(J,R,\delta,J_1,J_2) \mapsto \delta^\downarrow$ 的逆映射，因此 (7.76) 确实是一个双射。

最后，我们指出 (7.76) 中的并集彼此不相交。这可以用与刚才类似的论证来证明。由此可见，(7.73) 可由 (7.75) 和轨道计数定理推出。

□

参考文献

[Art78] J. Arthur. “约化群的迹公式 I：与G(有理数域)中共轭类相关的项”。载于：《杜克数学杂志》45.4（1978年），第 911–952 页。doi: 10.1215/S0012-7094-78-04542-8（引文见第 7、25、41–43 页）。

[Art80] J. Arthur. “约化群迹公式 II：截断算子的应用”。载于：《数学汇编》40.1（1980年），第 87–121 页（引文见第 30 页）。[Art82] J. Arthur. “关于由艾森斯坦级数得到的一族分布 II：显式公式”。载于：《美国数学杂志》104.6（1982），第 1289–1336 页。issn：00029327, 10806377（引文见第 27 页）。[Art89] J. Arthur. “交织算子与留数 I：加权特征”。载于：《泛函分析杂志》84.1（1989），第 19–84 页。issn：0022-1236。doi：https://doi.org/10.1016/0022-1236(89)90110-9（引文见第 29 页）。[Art05] J. Arthur. “迹公式导论”。载于《调和分析、迹公式与志村簇》。第 4 卷。Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., 2005，第 1–263 页（引文见第 35、60 页）。[BZSV24] D. Ben-Zvi、Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh. 相对朗兰兹对偶。预印本，arXiv:2409.04677 [math.RT]（2024年）。2024年（引文见第 6 页）。[Ber88] J. Bernstein. “关于普朗歇尔测度的支撑”。载于：《几何与物理杂志》5.4（1988年），第 663–710 页。doi：https://doi.org/10.1016/0393-0440(88)90024-1（引文见第 21 页）。[BK14] J. Bernstein 和 B. Krötz. “Harish-Chandra 模的光滑 Fréchet 整体化”。载于：《以色列数学杂志》199.1（2014），第 45–111 页。doi：10.1007/s11856-013-0056-1（引文见第 21、38 页）。[BL24] J. Bernstein 和 E. Lapid. “关于艾森斯坦级数的亚纯延拓”。载于：《美国数学会杂志》37.1（2024年），第 187–234 页。doi：10.1090/jams/1020（引文见第 21、22、38、60 页）。[BZ76] J. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky. “非阿基米德局部域 F 上的群 GL(n, F)的表示”。英文。载于：《俄罗斯数学综述》31.3（1976），第 1–68 页。doi：10.1070/RM1976v031n03ABEH001532（引文见第 3、9、37 页）。[BP21] R. Beuzart-Plessis. “局部相对特征与酉群 Ichino–Ikeda 猜想的比较”。载于：Jussieu 数学研究所期刊20.6（2021），第 1803–1854 页。doi：10.1017/S1474748019000707（引文见第 18、74 页）。[BPC25] R. Beuzart-Plessis 和 P.-H. Chaudouard. “酉群的全局 Gan–Gross–Prasad 猜想。II：从艾森斯坦级数到 Bessel 周期”。英文。载于：《数学论坛 Pi》13（2025年）。编号 e16，第 98 页。doi：10.1017/fmp.2025.8（引文见第 2 页）。[BPCZ22] R. Beuzart-Plessis、P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor. “酉群的全局 Gan–Gross–Prasad 猜想：端oscopic情形”。载于：《高等科学研究所数学出版物》135（2022），第 183–336 页。issn：0073-8301。doi：10.1007/s10240-021-00129-1（引文见第 2、11、17–20、25、40、49、53、72–75 页）。[BPLZZ21] R. Beuzart-Plessis、Y. Liu、W. Zhang 和 X. Zhu. “尖点谱的分离及其在 Gan–Gross–Prasad 猜想中的应用”。载于：《数学年刊》（第 2 辑）194.2（2021），第 519–584 页。issn：0003-486X。doi：10.4007/annals.2021.194.2.5（引文见第 2 页）。[Boi25a] P. Boisseau. “相对迹公式与 Gan–Gross–Prasad 猜想的若干谱论方面”。博士论文。艾克斯-马赛大学，2025年（引文见第 27、39 页）。

[Boi25b] P. Boisseau. 兰金–塞尔伯格 ζ 积分的留数与分裂非温和 Gan–Gross–Prasad 猜想。2025年。arXiv: 2511.21798 [math.NT]。网址： https://arxiv.org/abs/2511.21798（引自第 6、10、30、34、45、46、48–50、54–60、63、65–67 页）。[Bru06] F. Brumley. “一般线性群 GL_n 上的有效重数一与兰金 – 塞尔伯格 L 函数的窄无零区域 ”。载于：《美国数学杂志》128.6（2006年），第 1455–1474 页。ISSN：0002-9327。DOI： 10.1353/ajm.2006.0042（引自第 9、13、28 页）。[CS80] W. Casselman 与 J. Shalika. “ p进群上的非分歧主系列。II. Whittaker 函数”。载于：《数学汇编》41.2（1980年），第 207–231 页（引自第 12、67 页）。[Cha25] P.-H. Chaudouard. “对称空间 $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$ 的谱展开”。载于：Sel. Math., New Ser. 31.4（2025年）。编号 71，第 108 页。DOI： 10.1007/s00029-025-01066-1（引自第 3、7、9、10、21、23、26、28、30、35、39–44、51、54、71 页）。[DM78] J. Dixmier 与 P. Malliavin. “函数与无穷可微向量的分解”。载于：Bull. Sci. Math. 2.102（1978年），第 307–330 页（引自第 19、25 页）。[Fla79] D. Flath. “表示的张量积分解”。载于：纯数学专题讨论会论文集（1979年）（引自第 20 页）。[Fli88] Y. Z. Flicker. “扭张量与欧拉乘积”。载于：法国数学会通报 116.3（1988年），第 295–313 页。DOI： 10.24033/bsmf.2099 （引自第 2 页）。[GGP12] W. T. Gan、B. Gross 与 D. Prasad. “辛局部根数、中心临界值及经典群表示论中的限制问题”。载于：《Astérisque》346（2012年），第 1–109 页。ISSN：0303-1179（引自第 2 页）。[GGP20] W. T. Gan、B. Gross 与 D. Prasad. “经典群的分支律：非温和情形”。载于：《数学汇编》156.11（2020年），第 2298–2367 页。DOI：10.1112/S0010437X20007496（引自第 3–6、56 页）。[GH24] J. R. Getz 与 H. Hahn.《自守表示导论》。《数学研究生教材》。施普林格 Cham, 2024年。DOI： 10.1007/978-3-031-41153-3（引自第 25 页）。[GS24] D. Ginzburg 与 D. Soudry.《由两个 Speh 表示诱导的一般线性群上的艾森斯坦级数的极点》。2024年。arXiv: 2410.23026（引自第 9、85 页）。[HM15] M. Hanzer 与 G. Muić. “关于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上退化 Eisenstein 级数的像与极点”。载于：《美国数学杂志》137.4（2015年），第 907–951 页。ISSN：0002-9327。DOI： 10.1353/ajm.2015.0029（引自第 9 页）。[Heg24] D. G. Hegde.《非分歧退化 Eisenstein 级数的极点》。2024年。arXiv：2401.13093（引自第 9、35、37 页）。[IY15] A. Ichino 与 S. Yamana. “自守形式的周期：情形 $(\mathrm{GL}_{n+1}\times\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$”。载于：《数学汇编》151.4（2015年），第 665–712 页。DOI： 10.1112/S0010437X14007362（引自第 5、6、10、49、50 页）。[Jac86] H. Jacquet. “关于 Waldspurger 的一个结果”。法语。载于：Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 19.2（1986年），第 185–229 页。ISSN：0012-9593。DOI： 10.24033/asens.1506 （引自第 10 页）。

[JLR99] H. Jacquet、E. Lapid 与 J. Rogawski. “自守形式的周期”。载于：《美国数学会会刊》12.1（1999年），第 173–240 页（引自第 7、51 页）。[JPS83] H. Jacquet、I. I. Piatetskii-Shapiro 与 J. A. Shalika. “兰金–塞尔伯格卷积”。载于：《美国数学杂志》105(2)（1983年），第 367–464 页（引自第 5、10、11、28 页）。[JR11] H. Jacquet 与 S. Rallis. “关于酉群的 Gross–Prasad 猜想”。载于：《关于某些 L函数》。为纪念 Freydoon Shahidi 60 岁生日而举办的某些 L函数会议，地点为美国印第安纳州西拉法叶，2007年7月23–27日。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS）；马萨诸塞州剑桥：Clay 数学研究所，2011年，第 205–264 页（引自第 2 页）。[KS88] C. D. Keys 与 F. Shahidi. “Artin L函数与交织算子的归一化”。载于：高等师范学校科学年刊，第 4 辑，21.1（1988年），第 67–89 页。DOI：10.24033/asens.1551（引自第 26、36 页）。[Lab21] J.-P. Labesse. “Langlands 谱分解”。载于：《Langlands 纲领的起源》。J. Mueller 与 F. Shahidi 编。伦敦数学会讲义丛书。剑桥大学出版社，2021年，第 176–214 页（引自第 8 页）。[Lan65] R. Langlands. “某些 Chevalley 群算术子群的基本域体积”。载于：《代数群与不连续子群》。A. Borel 与 G.D. Mostow 编。第 9 卷。纯数学专题讨论会论文集。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1965年，第 143–148 页（引自第 67 页）。[Lan76] R. P. Langlands. “关于艾森斯坦级数满足的函数方程”。载于：数学讲义 544（1976年）（引自第 3、7、8、11、13、21、22、25 页）。[Lap06] E. Lapid. “关于 Jacquet 相对迹公式的精细谱展开”。载于：Jussieu 数学研究所期刊 5.2（2006年），第 263–308 页。ISSN：1474-7480。DOI：10.1017/S1474748005000289（引自第 7、13 页）。[Lap08] E. Lapid.《关于艾森斯坦级数的一则说明》。Wee Teck Gan、Stephen S. Kudla 与 Yuri Tschinkel 编。马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser Boston，2008年，第 239–249 页。DOI：10.1007/978-0-8176-4639-4_8（引自第 20–22、27、31、40、49、52、84 页）。[Lap13] E. Lapid. “关于 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的 Harish-Chandra Schwartz 空间”。载于：《自守表示与 L 函数》22（2013年）。附录由 F. Brumley 撰写，第 335–377 页（引自第 9、24、28 页）。[LRS99] W. Luo、Z. Rudnick 与 P. Sarnak. “关于一般线性群 GL 的广义 Ramanujan 猜想”。载于：纯数学专题讨论会论文集 66（1999年），第 301–310 页。DOI：10.1090/pspum/066.2/1703764（引自第 9、28 页）。[MW89] C. Mœglin 与 J.-L. Waldspurger. “GL(n) 的剩余谱”。载于：高等师范学校科学年刊，第 4 辑，22.4（1989年），第 605–674 页。DOI：10.24033/asens.1595（引自第 3、5、9、10、26、29、34、38 页）。[MW95] C. Mœglin 与 J.-L. Waldspurger.《谱分解与 Eisenstein 级数：对圣典的释义》。《剑桥数学丛书》。剑桥大学出版社，1995年。DOI：10.1017/CBO9780511470905（引自第 22、25、26、38、40 页）。[MŽ20] G. Muić 与 S. Žunar. “关于施瓦茨空间 S($G(k)\backslash G(\mathbb{A})$）”。载于：《数学月刊》192.3（2020年），第 677–720 页（引自第 19 页）。

[Mül02] W. Müller. “关于 Arthur 迹公式的谱侧”。载于：几何与泛函分析 12.4（2002），第 669–722 页。doi: 10.1007/s00039-002-8263-7 （引于第 23、41、42 页）。[MS04] W. Müller 和 B. Speh. “GLn 的 Arthur 迹公式谱侧的绝对收敛”。载于：几何与泛函分析 14（2004）。附录由 E. M. Lapid 撰写，第 58–93 页。doi: 10.1007/s00039-004-0452-0 （引于第 28、29 页）。[Pat25] Basudev Pattanayak. 一般线性群的商分支定律与 Gan-Gross-Prasad 相关性。2025年。arXiv: 2512.11696 [math.RT]。网址: https://arxiv.org/abs/2512.11696（引于第 6 页）。[Ren10] D. Renard. 约化 p-进群的表示。法语。第 17 卷。Cours Spéc.（巴黎）。巴黎：法国数学会，2010。ISBN：978-2-85629-278-5（引于第 15 页）。[Sta01] E. Stade. “GL(n $\mathbb{R}$)) 惠特克函数的梅林变换 ”。载于：American Journal of Mathematics 123.1 （ 2001 ），第 121–161 页。ISSN：00029327，10806377（引于第 12、67 页）。[Tad86] M. Tadić. “一般线性群不可约表示中的酉表示分类（非阿基米德情形）”。载于：高等师范学校科学年刊 19.3（1986），第 335–382 页（引于第 29 页）。[Vog86] D. A. Jr. Vogan. “阿基米德域上 GL(n) 的酉对偶”。载于：Inventiones mathematicae 83（1986），第 449–506 页（引于第 29 页）。[Zel80] A. V. Zelevinsky. “约化 $\mathfrak{p}$-进群的诱导表示。II. 关于 GL(n) 的不可约表示”。载于：高等师范学校科学年刊，第 4 辑，13.2（1980），第 165–210 页。doi: 10.24033/asens.1379（引于第 55 页）。[Zha14] W. Zhang. “自守周期与 Rankin–Selberg L 函数的中心值”。载于：J. Amer. Math. Soc. 27.2（2014），第 541–612 页。ISSN：0894-0347。doi: 10.1090/S0894-0347-2014-00784-0（引于第 2 页）。[Zyd20] M. Zydor. “Jacquet–Rallis 粗相对迹公式”。法语。载于：J. Reine Angew. Math. 762（2020），第 195–259 页。ISSN：0075-4102。doi: 10.1515/crelle-2018-0027（引于第 2 页）。[Zyd22] M. Zydor. “约化子群上的自守形式周期”。载于：高等师范学校科学年刊（第 4 辑）55.1（2022），第 141–183 页。doi: 10.24033/asens.2493 （引于第 6、10、31、40、44、46–49、51 页）。

Paul Boisseau
马克斯·普朗克数学研究所 ,
维瓦茨街7号,
德国波恩53111，德国

电子邮箱:
boisseau@mpim-bonn.mpg.de