arXiv:2601.02546v1 [math.GR] 5 Jan 2026

具有三性的群及其对应码环的构造

ROSEMARY MIGUEL PIRES、ALEXANDRE GRISHKOV、RODRIGO LUCAS RODRIGUES 和 MARINA RASSKAZOVA

ABSTRACT. 我们推广了 Nagy 提出的码环整体构造 [15]„ 该构造基于 Moufang 环与三性群之间的联系。该推广源于对一个具有三性及 $2n$个生成元的 3 阶幂零群 G_n 的构造，其基础是将 G_n 嵌入若干个 G_3的直积中。在有限情形下，若 G_n 是一个满足 $|G_n| = 2^{4n+m}$ 、且具有 $n \geq 3$ 和 $m = 3\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}$的群，我们证明相应的 Moufang 环是由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 中具有 n个生成元的自由环 $\mathcal{F}_n$ 。这一结果依赖于一种与 G_n类似的构造，即将 $\mathcal{F}_n$ 嵌入若干个 $\mathcal{F}_3$的直积中； $\mathcal{F}_3$是与 G_3相关联的自由码环。

1. INTRODUCTION

若一个集合 L 配备二元运算（x， y） $\mapsto x \cdot y = xy$，且方程$xy = z$ 在给定任意两个变量时均有唯一解，并且存在单位元 1，使得 $1x = x = x1$对每个 $x \in L$都成立，则称其为一个环。我们用记号 x^{-1} 表示 x唯一的双侧逆元。

若环 L 满足以下三个（等价的）Moufang恒等式中的任意一个，则称其为 Moufang 环:

$$((xy)x)z = x(y(xz)), \quad ((xy)z)y = x(y(zy)), \quad (xy)(zx) = (x(yz))x,$$

它们分别是左Moufang恒等式、右Moufang恒等式和中间Moufang恒等式。关于 Moufang 环的基本定义和性质，请参阅 [1]。

在环 L 中，右平移映射 R_x 和左平移映射 L_x, $x \in L$ 定义为$aR_x = ax$ 和 $aL_x = xa$ ，对所有 $a \in L$ 均成立。左、右平移映射生成的集合构成一个群 Mlt(L), 称为 L 的乘法群，它是集合 L 上对称群的子群。记作 Mlt(L) $= \langle L_x, \ R_x \mid x \in L \rangle$.

2020 数学学科分类。 主要分类：20N05。次要分类：20B25。关键词和短语。 三性群，Moufang 环。弗卢米嫩塞联邦大学精确科学研究所数学系，沃尔塔雷东达，里约热内卢，27213-145，巴西。电子邮件：rosemarypires@id.uff.br。圣保罗大学数学系，邮政信箱 66281，圣保罗，05311-970，巴西；以及俄罗斯鄂木斯克的陀思妥耶夫斯基鄂木斯克国立大学。电子邮件：grishkov@ime.usp.br。塞阿拉联邦大学数学系，皮西校区，914 号楼，60455-760，福塔莱萨，巴西。电子邮件：rodrigo@mat.ufc.br。ABC联邦大学数学、计算与认知中心，圣安德烈，圣保罗，09280-560，巴西；以及西伯利亚国立汽车与公路大学，鄂木斯克，鄂木斯克州，644080，俄罗斯电子邮件：marinarasskazova@yandex.ru。

设 a, b 和 c 是环 L 的三个元素。a 和 b 的（环）交换子是 L 中唯一满足 $ab = (ba)(a, b)$ 的元素 (a, b)；a, b 和 c 的（环）结合子是 L 中唯一满足 $(ab)c = a(bc)(a, b, c)$ 的元素 (a, b, c)。L 的核是

$$N(L) = \{a \in L \mid (a, x, y) = (x, y, a) = (x, a, y) = 1, \text{ for all } x, y \in L\}.$$

而 L 的中心是

$$Z(L) = \{x \in N(L) \mid (a, x) = 1, \text{ for all } a \in L\}.$$

Glauberman [6]指出，对于核平凡的 Moufang 环 L，乘法群 Mlt(L) 存在一个阶为 6 的二面体群作为其自同构群。1978年，Doro [3] 引入了带三重性的群这一概念。若 G 是一个群，S 是 G 的自同构群的子群，并且 $S = \langle \sigma, \rho \mid \sigma^2 = \rho^3 = (\sigma\rho)^2 = 1 \rangle \cong S_3$，且对所有 $g \in G$，三重性恒等式$[g, \sigma][g, \sigma]^{\rho}[g, \sigma]^{\rho^2} = 1$ 成立，其中 $[g, \sigma] = g^{-1}g^{\sigma}$，则称 G 为带三重性的群 S。他还证明，任何带三重性的群G S都可以构造出一个 Moufang 环 L，其中群 G 具有一个与 Mlt(L) 同构的置换表示；每个 Moufang 环都可由此通过带三重性的群得到；结合的 Moufang 环对应于wreath积或与之密切相关的构造，而非结合单穆芳环对应于带三重性的单群。自从发现带三重性的群与 Moufang 环之间的关系以来，人们便开始利用带三重性的群，以新的方式构造 Moufang 环。

在 [16], Paige 为每个有限域 $GF(q)$ 定义了一个非结合的有限单穆芳环 $M(q)$。1987年，Liebeck [14] 证明，若 M 是有限单穆芳环，则它要么是结合的（因而是有限单群），要么 M 同构于环 $M(q)$ 之一。他强调，单穆芳环 $M(q)$ 的存在显然与简单群 Mlt($M(q)$) 是三性群这一事实密切相关，并利用有限单群分类证明，唯一的有限单三性群是简单群 Mlt($M(q)$)。

Hall 和 Nagy [13] 拓展了 Doro 所揭示的穆芳环与三性群之间的不完全联系，证明以下概念等价：中心平凡的三性群、穆芳3网、每个点都是某个自同构中心的拉丁方设计，以及穆芳环的同位类。借助这一新方法，他们还为 Doro 的一个定理给出了简明证明。

Grishkov 和 Zavarnitsine（[8], [9]）确定了给定穆方环的极大子环与相应带三重性的群的某些子群之间的对应关系，并描述了与给定穆方环相关的所有可能的带三重性的群（在某种意义上），同时引入了若干泛带三重性的群并讨论了它们的性质。他们还提出了另一种方法，用于构造与给定带三重性的群相对应的穆方环。

Nagy [15] 利用穆方环可以等价地通过带三重性的群这一特定群论概念来描述这一点，为该环提出了一种整体构造。Gagola III [4] 获得了关于与有限穆方环相关的最小可解带三重性的群的信息。

2012年、2013年和2016年，Gagola III [5] 利用三性群证明：由奇数阶阿贝尔群通过阶与3互素的循环群作循环扩张所得到的任何 Moufang 环必定是群；Grishkov 和

Zavarnitsine [10] 构造了一系列非结合 Moufang 环路，其中某些环路含有阿贝尔正规子环路，且相应的商是循环群。特别是，他们给出了一系列新的有限阿贝尔扩循环 Moufang 环路实例，其中最小者的阶为 3.2^6 ，并证明其中一些实例可以嵌入凯莱代数。此外，他们还获得了 Moufang 环中的一些一般乘法公式，构造了阿贝尔群的 Moufang 扩张，并描述了有限单 Moufang 环路在阿贝尔群上的极小扩张结构。

若 Moufang 环 L 满足 L/A 是某个 2 阶中心子群 A 的初等阿贝尔 2-群，则称其为码环。Griess [12] 首次提出了码环的概念并构造了码环。Chein 和 Goodaire [2] 证明，有限码环可以刻画为满足 $|L^2| \leq 2$ 的 Moufang 环 L 。他们还证明，这些码环具有唯一的非单位交换子、唯一的非单位结合子和唯一的非单位平方。在 [7], ，Grishkov 和 R. M. Pires 给出了具有 3 个和 4 个生成元的码环及其相应自同构群的分类。为此，他们引入了特征向量的概念。更确切地说，若 $\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\}$ 是码环 L 的一个最小生成元集，则特征向量定义为 $\lambda =$ （λ_1，…，λ_n，λ_1，2，…，λ_{n-1}，$_n$，λ_1，2，3，…，λ_{n-2}，$_{n-1}$，$_n$），其中 λ_i、λ_i、$_j$、λ_i、$_j$、$_k \in \{0, 1\}$，且 $i < j < k$；这些参数的取值由关系 $a_i^2 =$ （-1）$^{\lambda_i}$、$[a_i, a_j] =$ （-1）$^{\lambda_i}$、^{j} 以及（a_i、a_j、a_k）$=$（-1）$^{\lambda_i}$、$_j$、^{k} 确定。

此外，在 [7], 中，作者构造了由码环生成的簇中的一个自由 Moufang 环，并证明了具有 n 个生成元的码环可以刻画为具有 n 个生成元的自由 Moufang 环的同态像。

上述文章确立了带三重性的群与 Moufang 环之间的联系，并给出了若干重要的构造与分类。本文旨在介绍一种具有 G_n 个生成元的 3 阶幂零带三重性的群的构造，从而推广 G_3的情形。群 G_n 被定义为一个无限的 3 阶幂零群。在有限情形下，通过添加进一步的关系，我们确定其阶，并证明相应的 Moufang 环正是由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 中的自由 Moufang 环 $\mathcal{F}_n$ 。这项工作推广了 Nagy [15]提出的构造：Nagy 的方法针对每个给定的码生成一个特定的带三重性的群，其对应的环就是相应的码环；而我们的构造则提供了一个泛群 G_n ，其对应的环 $\mathcal{F}_n$ 是同一簇中的自由对象，所有秩为 n 的码环都作为商由此产生。

本文安排如下。在第2节中，我们构造一个具有三性和 $2n$ 个生成元的 G_n3 阶幂零群，并说明 G_n 如何嵌入 G_3的若干副本的直积中。在第3节中，我们回顾与由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 相关的一些概念和结果。在第4节中，我们给出有限情形下对应于 G_n 的 Moufang 环；在第5节中，我们确立它与 Nagy 引入的群之间的关系 [15],，说明我们的方法推广了他的结果。

2. A group with triality

本节将构造一个具有三性的 3 阶幂零群。对于群 G 和元素 a，$b \in G$，交换子定义为 $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$。G 的导出子群（或交换子子群）记作 $[G, G] = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle$.

回顾一下，若群 G 的下中心列的幂零阶为 n，则称其为

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \quad (i \geq 1)$$

满足 $\gamma_{n+1}(G) = 1$ 但 $\gamma_n(G) \neq 1$。

设 G_n 是一个由 $2n$ 个生成元 $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ 生成的 3 阶幂零群。对于 $1 \leq i, j \leq n$，记 $u_{ij} := [a_i, a_j]$、$v_{ij} := [b_i, b_j]$ 和 $p_{ij} := [a_i, b_j]$。G_n 的定义关系对所有 $1 \leq i, j, k \leq n$ 均成立，具体如下：

(1) $[a_i, b_i] = 1$, $[a_i^2, G_n] = [b_i^2, G_n] = 1$.
(2) $u_{ij} = u_{ji}$, $v_{ij} = v_{ji}$, $u_{ij}^2 = v_{ij}^2 = 1$, for $i < j$.
(3) $[u_{ij}, G_n] = [v_{ij}, G_n] = 1$, for $i < j$.
(4) $p_{ij} = p_{ji}$, $p_{ij}^2 = 1$, for $i < j$.
(5) $[p_{ij}, a_k] := z_{ijk}$, and $z_{ijk} = z_{jik} = z_{kij}$, for $|\{i, j, k\}| = 3$.
(6) $[p_{ij}, b_k] := t_{ijk}$, and $t_{ijk} = t_{jik} = t_{kij}$, for $|\{i, j, k\}| = 3$.
(7) $t_{ijk}^2 = z_{ijk}^2 = 1$, for $|\{i, j, k\}| = 3$.
(8) $[z_{ijk}, G_n] = [t_{ijk}, G_n] = 1$, for $|\{i, j, k\}| = 3$.

请注意，事实上，根据构造并利用上述关系，G_n 是一个 3 阶幂零群。

接下来，我们关注 $n = 3$ 的情形，并回顾 G_3 的元素的标准形。

注 2.1. 设 $G = G_3$ 是由 $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ 生成、满足上述关系 1 至 8 的幂零群。注意，任意元素 $x \in G$ 都可写成

$$x = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} b_1^{\alpha_4} b_2^{\alpha_5} b_3^{\alpha_6} u_{12}^{\alpha_{12}^1} u_{13}^{\alpha_{13}^1} u_{23}^{\alpha_{23}^1} v_{12}^{\alpha_{12}^2} v_{13}^{\alpha_{13}^2} v_{23}^{\alpha_{23}^2} p_{12}^{\alpha_{12}^3} p_{13}^{\alpha_{13}^3} p_{23}^{\alpha_{23}^3} z_{123}^{\alpha_{123}^1} t_{123}^{\alpha_{123}^2}, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha_l \in \mathbb{Z}$ 对于 $l = 1, \ldots, 6$，且其他指数等于 0 或 1 .

此外，元素 $\mu = u_{12}^{\alpha_{12}^1} u_{13}^{\alpha_{13}^1} u_{23}^{\alpha_{23}^1} v_{12}^{\alpha_{12}^2} v_{13}^{\alpha_{13}^2} v_{23}^{\alpha_{23}^2} z_{123}^{\alpha_{123}^1} t_{123}^{\alpha_{123}^2}$ 属于中心 $Z(G)$。因此，元素 x 可改写为 $x = g\mu$，其中

$$g = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} b_1^{\alpha_4} b_2^{\alpha_5} b_3^{\alpha_6} p_{12}^{\alpha_{12}^3} p_{13}^{\alpha_{13}^3} p_{23}^{\alpha_{23}^3}.$$

考虑 $x = g\mu \in G$，其中 g 和 μ 如注记 2.1 中所定义。为方便起见，我们引入以下矩阵记法来表示 g：

$$g := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_{12}^3 & \alpha_{13}^3 & \alpha_{23}^3 \end{pmatrix}.$$

利用上述矩阵记法，G 中两个元素的乘积可描述如下。

引理 2.2。 设 G 是注记 2.1 中所述的群，并设 g_1、$g_2 \in G$ 由下式给出

$$g_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_{12}^3 & \alpha_{13}^3 & \alpha_{23}^3 \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \beta_{12}^3 & \beta_{13}^3 & \beta_{23}^3 \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ 对于 $i = 1, \ldots, 6$，其他指数均为 0 或 1。于是

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4 & \alpha_5 + \beta_5 & \alpha_6 + \beta_6 \\ \alpha_{12}^3 + \beta_{12}^3 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_1 & \alpha_{13}^3 + \beta_{13}^3 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_6\beta_1 & \alpha_{23}^3 + \beta_{23}^3 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_6\beta_2 \end{pmatrix} \mu,$$

其中第三行中的加法按2取模，而 $\mu \in Z(G)$ 由下式给出

$$\mu \;=\; u_{12}^{\alpha_2\beta_1}\, u_{13}^{\alpha_3\beta_1}\, u_{23}^{\alpha_3\beta_2}\, v_{12}^{\alpha_5\beta_4}\, v_{13}^{\alpha_6\beta_4}\, v_{23}^{\alpha_6\beta_5}\, z_{123}^{\varepsilon_z}\, t_{123}^{\varepsilon_t},$$

其中

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &:= \alpha_{23}^3\beta_1 + \alpha_{13}^3\beta_2 + \alpha_{12}^3\beta_3 + \alpha_5\beta_1\beta_3 + \alpha_6\beta_1\beta_2 + \alpha_4\beta_2\beta_3,\\ \varepsilon_t &:= \alpha_{23}^3\beta_4 + \alpha_{13}^3\beta_5 + \alpha_{12}^3\beta_6 + \alpha_4\alpha_5\beta_3 + \alpha_5\alpha_6\beta_1 + \alpha_4\alpha_6\beta_2\\ &\quad + \alpha_6\beta_2\beta_4 + \alpha_5\beta_3\beta_4 + \alpha_6\beta_1\beta_5 + \alpha_4\beta_3\beta_5 + \alpha_5\beta_1\beta_6 + \alpha_4\beta_2\beta_6.\end{aligned}$$

证明。通过应用 G 的交换子定义和平方关系即可得出该结果。由于计算虽然直接但较为冗长，我们省略细节。□

现在我们引入群 $\mathbb{P}_n$，它为 G_n 提供了一种自然的坐标描述。这将使我们能够证明 G_n 和 $\mathbb{P}_n$ 确实同构。

2.1. 与 G_n 同构的群。 对于 $n \geq 3$，令 $m = 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}$，并考虑 $\mathbb{P}_n = \mathbb{Z}^{2n} \oplus \mathbb{F}_2^m$。设：

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} = (&\alpha_1, \dots, \alpha_n;\ \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n};\ \underbrace{\alpha_{12}^1, \alpha_{13}^1, \dots, \alpha_{1n}^1, \alpha_{23}^1, \dots, \alpha_{n-1,n}^1}_{\binom{n}{2}};\\ &\underbrace{\alpha_{12}^2, \alpha_{13}^2, \dots, \alpha_{1n}^2, \alpha_{23}^2, \dots, \alpha_{n-1,n}^2}_{\binom{n}{2}};\ \underbrace{\alpha_{12}^3, \alpha_{13}^3, \dots, \alpha_{1n}^3, \alpha_{23}^3, \dots, \alpha_{n-1,n}^3}_{\binom{n}{2}};\\ &\underbrace{\alpha_{123}^1, \alpha_{124}^1, \dots, \alpha_{n-2,n-1,n}^1}_{\binom{n}{3}};\ \underbrace{\alpha_{123}^2, \alpha_{124}^2, \dots, \alpha_{n-2,n-1,n}^2}_{\binom{n}{3}})\end{aligned} \tag{2.2}$$

并类似地定义 β。我们在 $\mathbb{P}_n$ 上定义一个乘积如下：

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\gamma} \in \mathbb{P}_n,$$

其中

$$\overline{\gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\tau},$$

$$\begin{aligned}\overline{\tau} = (&\underbrace{0, \dots, 0}_{n};\ \underbrace{0, \dots, 0}_{n};\ \tau_{12}^1, \dots, \tau_{n-1,n}^1;\ \tau_{12}^2, \dots, \tau_{n-1,n}^2;\ \tau_{12}^3, \dots, \tau_{n-1,n}^3;\\ &\tau_{123}^1, \dots, \tau_{n-2,n-1,n}^1;\ \tau_{123}^2, \dots, \tau_{n-2,n-1,n}^2).\end{aligned} \tag{2.3}$$

τ 的坐标从第（$2n \mp 1$）个位置开始，按模 2 给出：

对于 $i < j$：

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^1 &= \alpha_j\beta_i,\\ \tau_{ij}^2 &= \alpha_{j+n}\beta_{i+n},\\ \tau_{ij}^3 &= \alpha_{i+n}\beta_j + \alpha_{j+n}\beta_i;\end{aligned}$$

对于 $i < j < k$：

$$\begin{aligned}\tau_{ijk}^1 &= \alpha_{ij}^3\beta_k + \alpha_{ik}^3\beta_j + \alpha_{jk}^3\beta_i + \alpha_{i+n}\beta_j\beta_k + \alpha_{j+n}\beta_i\beta_k + \alpha_{k+n}\beta_i\beta_j,\\ \tau_{ijk}^2 &= \alpha_{ij}^3\beta_{k+n} + \alpha_{ik}^3\beta_{j+n} + \alpha_{jk}^3\beta_{i+n} + \alpha_{i+n}\alpha_{j+n}\beta_k + \alpha_{i+n}\alpha_{k+n}\beta_j + \alpha_{j+n}\alpha_{k+n}\beta_i\\ &\quad + \alpha_{i+n}(\beta_j\beta_{k+n} + \beta_{j+n}\beta_k) + \alpha_{j+n}(\beta_i\beta_{k+n} + \beta_{i+n}\beta_k) + \alpha_{k+n}(\beta_i\beta_{j+n} + \beta_{i+n}\beta_j).\end{aligned}$$

下面的注记给出了一种计算 $\mathbb{P}_3$ 中两个元素之乘积的更简单方法。

注记 2.3. 令 $\alpha, \beta \in \mathbb{P}_3$，并设 $\gamma = \alpha\beta$。表1的第2、3和4列分别列出了 α、β 和 γ 的坐标。第5列明确列出了 (2.3) 中给出的对应项 τ_{ij}^k 和 τ_{ijk}^ℓ。该表给出了一条简单规则，用于计算 $\mathbb{P}_3$ 中任意两个元素的乘积。

为方便起见，并便于直观地表示任意元素 $x \in \mathbb{P}_3$ 的坐标，我们按照第一列中的顺序写作 $x = (x_1, \ldots, x_{17})$（特别地，$x_7 = x_{12}^1$、$x_8 = x_{13}^1$，依此类推，直到 $x_{17} = x_{123}^2$）。

例如，若 $\alpha, \beta \in \mathbb{P}_3$ 和 $\gamma = \alpha\beta$ 如上所述，我们可以将 γ 的坐标写作 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{17})$，即 $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$，……，$\gamma_6 = \alpha_6 + \beta_6$，$\gamma_7 = \alpha_{12}^1 + \beta_{12}^1 + \tau_{12}^1$，$\gamma_8 = \alpha_{13}^1 + \beta_{13}^1 + \tau_{13}^1$，依此类推。对应于第 7–17 行的项（$\mathbb{F}_2$ 部分）均按模 2 取值。

	$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$	τ_{ij}^k和 τ_{ijk}^ℓ的公式
1	α_1	β_1	$\alpha_1 + \beta_1$	0
2	α_2	β_2	$\alpha_2 + \beta_2$	0
3	α_3	β_3	$\alpha_3 + \beta_3$	0
4	α_4	β_4	$\alpha_4 + \beta_4$	0
5	α_5	β_5	$\alpha_5 + \beta_5$	0
6	α_6	β_6	$\alpha_6 + \beta_6$	0
7	α_{12}^1	β_{12}^1	$\alpha_{12}^1 + \beta_{12}^1 + \tau_{12}^1$	$\tau_{12}^1 = \alpha_2\beta_1$
8	α_{13}^1	β_{13}^1	$\alpha_{13}^1 + \beta_{13}^1 + \tau_{13}^1$	$\tau_{13}^1 = \alpha_3\beta_1$
9	α_{23}^1	β_{23}^1	$\alpha_{23}^1 + \beta_{23}^1 + \tau_{23}^1$	$\tau_{23}^1 = \alpha_3\beta_2$
10	α_{12}^2	β_{12}^2	$\alpha_{12}^2 + \beta_{12}^2 + \tau_{12}^2$	$\tau_{12}^2 = \alpha_5\beta_4$
11	α_{13}^2	β_{13}^2	$\alpha_{13}^2 + \beta_{13}^2 + \tau_{13}^2$	$\tau_{13}^2 = \alpha_6\beta_4$
12	α_{23}^2	β_{23}^2	$\alpha_{23}^2 + \beta_{23}^2 + \tau_{23}^2$	$\tau_{23}^2 = \alpha_6\beta_5$
13	α_{12}^3	β_{12}^3	$\alpha_{12}^3 + \beta_{12}^3 + \tau_{12}^3$	$\tau_{12}^3 = \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_1$
14	α_{13}^3	β_{13}^3	$\alpha_{13}^3 + \beta_{13}^3 + \tau_{13}^3$	$\tau_{13}^3 = \alpha_4\beta_3 + \alpha_6\beta_1$
15	α_{23}^3	β_{23}^3	$\alpha_{23}^3 + \beta_{23}^3 + \tau_{23}^3$	$\tau_{23}^3 = \alpha_5\beta_3 + \alpha_6\beta_2$
16	α_{123}^1	β_{123}^1	$\alpha_{123}^1 + \beta_{123}^1 + \tau_{123}^1$	$\tau_{123}^1 = \alpha_{12}^3\beta_3 + \alpha_{13}^3\beta_2 + \alpha_{23}^3\beta_1 + \alpha_4\beta_2\beta_3 + \alpha_5\beta_1\beta_3 + \alpha_6\beta_1\beta_2$
17	α_{123}^2	β_{123}^2	$\alpha_{123}^2 + \beta_{123}^2 + \tau_{123}^2$	$\tau_{123}^2 = \alpha_{12}^3\beta_6 + \alpha_{13}^3\beta_5 + \alpha_{23}^3\beta_4 + \alpha_4\alpha_5\beta_3 + \alpha_4\alpha_6\beta_2 + \alpha_5\alpha_6\beta_1 + \alpha_4(\beta_2\beta_6 + \beta_5\beta_3) + \alpha_5(\beta_1\beta_6 + \beta_4\beta_3) + \alpha_6(\beta_1\beta_5 + \beta_4\beta_2)$

TABLE 1. $\mathbb{P}_3$中的乘法

使用前一条注记中描述的记号和规则，我们现在可以证明$\mathbb{P}_3$ 是一个群。

引理 2.4。 $\mathbb{P}_3$ 是一个群。

证明。 使用注记 2.3 中所述的记号和规则，我们计算三个元素的乘积以验证结合律。设 a、b、$c \in \mathbb{P}_3$、$x = ab$、$y = bc$、$r = (ab)c$，以及 $s = a(bc)$。我们需要证明 $r = s$。

显然，对于 $i = 1$、……、6，有 $r_i = s_i$。表 2 列出了对于 $i = 7$、……、17 的 r_i 值。相应的 s_i 值可通过类似方式获得：在第二列中将 x 替换为 a，并将 c 替换为 y。通过将这些表达式与表 2 中的各项进行比较，我们得出，对于所有 $i = 7$、……、17，均有 $r_i = s_i$。

因此，在 $\mathbb{P}_3$ 上定义的乘法满足结合律。此外，单位元是 $\mathbb{P}_3$ 的零向量，并且通过直接计算，元素 α 的逆元如下获得。

设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_6;\ \alpha_{12}^1, \alpha_{13}^1, \alpha_{23}^1;\ \alpha_{12}^2, \alpha_{13}^2, \alpha_{23}^2;\ \alpha_{12}^3, \alpha_{13}^3, \alpha_{23}^3;\ \alpha_{123}^1, \alpha_{123}^2)$，其逆元为 $\beta = -\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_6;\ \beta_{12}^1, \beta_{13}^1, \beta_{23}^1;\ \beta_{12}^2, \beta_{13}^2, \beta_{23}^2;\ \beta_{12}^3, \beta_{13}^3, \beta_{23}^3;\ \beta_{123}^1, \beta_{123}^2)$。

请注意，最后 11 个坐标均按模 2 取值。α 的逆元的各个坐标如下：

$$\overline{\beta_i = -\alpha_i \quad (i = 1, \ldots, 6),}$$

$$\beta^1_{12} = \alpha^1_{12} + \alpha_1\alpha_2, \quad \beta^1_{13} = \alpha^1_{13} + \alpha_1\alpha_3, \quad \beta^1_{23} = \alpha^1_{23} + \alpha_2\alpha_3,$$

$$\beta^2_{12} = \alpha^2_{12} + \alpha_4\alpha_5, \quad \beta^2_{13} = \alpha^2_{13} + \alpha_4\alpha_6, \quad \beta^2_{23} = \alpha^2_{23} + \alpha_5\alpha_6,$$

$$\beta^3_{12} = \alpha^3_{12} + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1, \quad \beta^3_{13} = \alpha^3_{13} + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_6\alpha_1, \quad \beta^3_{23} = \alpha^3_{23} + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_6\alpha_2,$$

$$\beta^1_{123} = \alpha^1_{123} + \alpha^3_{12}\alpha_3 + \alpha^3_{13}\alpha_2 + \alpha^3_{23}\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2\alpha_3 + \alpha_5\alpha_1\alpha_3 + \alpha_6\alpha_1\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}\beta^2_{123} = {} & \alpha^2_{123} + \alpha^3_{12}\alpha_6 + \alpha^3_{13}\alpha_5 + \alpha^3_{23}\alpha_4 + \alpha_4\alpha_5\alpha_3 + \alpha_4\alpha_6\alpha_2 + \alpha_5\alpha_6\alpha_1 \\ & + \alpha_4(\alpha_2\alpha_6 + \alpha_5\alpha_3) + \alpha_5(\alpha_1\alpha_6 + \alpha_4\alpha_3) + \alpha_6(\alpha_1\alpha_5 + \alpha_4\alpha_2).\end{aligned}$$

由上述计算可知， $\mathbb{P}_3$ 是一个群。 □

i	r_i	r_i
7	$x_7 + c_7 + x_2c_1$	$a_7 + b_7 + c_7 + a_2b_1 + (a_2 + b_2)c_1$
8	$x_8 + c_8 + x_3c_1$	$a_8 + b_8 + c_8 + a_3b_1 + (a_3 + b_3)c_1$
9	$x_9 + c_9 + x_3c_2$	$a_9 + b_9 + c_9 + a_3b_2 + (a_3 + b_3)c_2$
10	$x_{10} + c_{10} + x_5c_4$	$a_{10} + b_{10} + c_{10} + a_5b_4 + (a_5 + b_5)c_4$
11	$x_{11} + c_{11} + x_6c_4$	$a_{11} + b_{11} + c_{11} + a_6b_4 + (a_6 + b_6)c_4$
12	$x_{12} + c_{12} + x_6c_5$	$a_{12} + b_{12} + c_{12} + a_6b_5 + (a_6 + b_6)c_5$
13	$x_{13} + c_{13} + x_4c_2 + x_5c_1$	$a_{13} + b_{13} + c_{13} + a_4b_2 + a_5b_1 + (a_4 + b_4)c_2 + (a_5 + b_5)c_1$
14	$x_{14} + c_{14} + x_4c_3 + x_6c_1$	$a_{14} + b_{14} + c_{14} + a_4b_3 + a_6b_1 + (a_4 + b_4)c_3 + (a_6 + b_6)c_1$
15	$x_{15} + c_{15} + x_5c_3 + x_6c_2$	$a_{15} + b_{15} + c_{15} + a_5b_3 + a_6b_2 + (a_5 + b_5)c_3 + (a_6 + b_6)c_2$
16	$x_{16} + c_{16} + x_{13}c_3 + x_{14}c_2$ $+x_{15}c_1 + x_4c_2c_3 + x_5c_1c_3 + x_6c_1c_2$	$a_{16} + b_{16} + c_{16} + a_{13}b_3 + a_{14}b_2 + a_{15}b_1 + a_4b_2b_3$ $+a_5b_1b_3 + a_6b_1b_2 + (a_{13} + b_{13} + a_4b_2 + a_5b_1)c_3$ $+(a_4 + b_4)c_2c_3 + (a_{14} + b_{14} + a_4b_3 + a_6b_1)c_2$ $+(a_5 + b_5)c_1c_3 + (a_6 + b_6)c_1c_2 + (a_{15} + b_{15} + a_5b_3 + a_6b_2)c_1$
17	$x_{17} + c_{17} + x_{13}c_6 + x_{14}c_5$ $+x_{15}c_4 + x_4x_5c_3 + x_4x_6c_2 + x_5x_6c_1$ $+x_4(c_2c_6 + c_5c_3) + x_5(c_1c_6 + c_4c_3)$ $+x_6(c_1c_5 + c_4c_2)$	$a_{17} + b_{17} + c_{17} + a_{13}b_6 + a_{14}b_5 + a_{15}b_4 + a_4a_5b_3 + a_4a_6b_2$ $+a_5a_6b_1 + a_4(b_2b_6 + b_5b_3) + (a_6 + b_6)(c_1c_5 + c_4c_2)$ $+a_5(b_1b_6 + b_4b_3) + (a_{14} + b_{14} + a_4b_3 + a_6b_1)c_5$ $+(a_{13} + b_{13} + a_4b_2 + a_5b_1)c_6 + a_6(b_1b_5 + b_4b_2)$ $+(a_{15} + b_{15} + a_5b_3 + a_6b_2)c_4 + (a_4 + b_4)(a_5 + b_5)c_3$ $+(a_4 + b_4)(a_6 + b_6)c_2 + (a_5 + b_5)(a_6 + b_6)c_1$ $+(a_4 + b_4)(c_2c_6 + c_5c_3) + (a_5 + b_5)(c_1c_6 + c_4c_3)$

TABLE 2. 对 $i = 7,\ldots,17$ 的 r_i 显式计算

对于一般情形，类似的计算表明， $\mathbb{P}_n$ 是一个群。供参考， $\mathbb{P}_n$ 中元素的乘积列于表 3（见附录 6），而关于结合律的相应计算汇总于表 4–5。

命题 2.5. $\mathbb{P}_n$ 是一个群。

由于 $\mathbb{P}_n$ 是一个群，其结构反映了 G_n的关系，因此我们可以自然地建立 $\mathbb{P}_n$ 与 G_n之间的同构，如下述命题所示。

命题 2.6. 映射 φ: $\mathbb{P}_n \to G_n$ 定义为

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{\alpha}) = {} & a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}\, b_1^{\alpha_{1+n}}\cdots b_n^{\alpha_{2n}}\, u_{12}^{\alpha^1_{12}}\cdots u_{n-1,n}^{\alpha^1_{n-1,n}}\, v_{12}^{\alpha^2_{12}}\cdots v_{n-1,n}^{\alpha^2_{n-1,n}} \\ & p_{12}^{\alpha^3_{12}}\cdots p_{n-1,n}^{\alpha^3_{n-1,n}}\, z_{123}^{\alpha^1_{123}}\cdots z_{n-2,n-1,n}^{\alpha^1_{n-2,n-1,n}}\, t_{123}^{\alpha^2_{123}}\cdots t_{n-2,n-1,n}^{\alpha^2_{n-2,n-1,n}}\end{aligned}$$

是一个同构。

群 $\mathbb{P}_n$ 和 G_n 同构，因此我们可以利用这个同构证明 G_n 是一个带三重性的群。在下一个小节中，对于情形 $n=3$，我们引入 G_3 的自同构 σ 和 ρ，它们的阶分别为 2 和 3，以证明 G_3是一个带三重性的群 $S=\langle \sigma,\ \rho \mid \sigma^2=\rho^3=(\sigma\rho)^2=1\rangle \cong S_3$。随后，我们将推广这一结果，以确立 G_n 的一般情形（见第 2.3 小节）。

2.2. 的自同构 G_3。在本小节中，我们考虑由 $\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\}$ 生成并满足关系 1 至 8 的 3 阶幂零群 $G=G_3$。我们设 $u_{ij}=[a_i,a_j]$，$v_{ij}=[b_i,b_j]$、$p_{ij}=[a_i,b_j]$ 对于 $i<j$ 成立，而 z_{123}、t_{123} 则根据这些关系相应定义。令 σ、τ 从 G 到自身的映射定义如下:

$$a_i^\sigma=b_i, b_i^\sigma=a_i, u_{ij}^\sigma=v_{ij}, v_{ij}^\sigma=u_{ij}, p_{ij}^\sigma=p_{ij}, z_{ijk}^\sigma=t_{ijk}, t_{ijk}^\sigma=z_{ijk}. \tag{2.4}$$

$$a_i^\tau=a_i, b_i^\tau=a_i^{-1}b_i^{-1}, u_{ij}^\tau=u_{ij}, v_{ij}^\tau=u_{ij}v_{ij}, p_{ij}^\tau=u_{ij}p_{ij}, z_{ijk}^\tau=z_{ijk}, t_{ijk}^\tau=z_{ijk}t_{ijk}. \tag{2.5}$$

接下来，我们首先证明 σ 和 τ 是 G 的 2 阶自同构。然后，我们将利用那些 3 阶自同构构造另一个自同构（见注记 2.12）。

引理 2.7。令 σ 如上定义，并将 $x\in G$ 写成以下形式:

$$x=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}b_1^{\alpha_4}b_2^{\alpha_5}b_3^{\alpha_6}u_{12}^{\alpha_7}u_{13}^{\alpha_8}u_{23}^{\alpha_9}v_{12}^{\alpha_{10}}v_{13}^{\alpha_{11}}v_{23}^{\alpha_{12}}p_{12}^{\alpha_{13}}p_{13}^{\alpha_{14}}p_{23}^{\alpha_{15}}z_{123}^{\alpha_{16}}t_{123}^{\alpha_{17}}, \tag{2.6}$$

其中 $\alpha_l\in\mathbb{Z}$ 当 $l=1$、.....、6 以及 $\alpha_l\in\mathbb{F}_2$ 当 $l=7$、.....、17。于是:

$$x^\sigma=a_1^{\alpha_4}a_2^{\alpha_5}a_3^{\alpha_6}b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}b_3^{\alpha_3}u_{12}^{\alpha_{10}}u_{13}^{\alpha_{11}}u_{23}^{\alpha_{12}}v_{12}^{\alpha_7}v_{13}^{\alpha_8}v_{23}^{\alpha_9}p_{12}^{\alpha'_{13}}p_{13}^{\alpha'_{14}}p_{23}^{\alpha'_{15}}z_{123}^{\alpha'_{16}}t_{123}^{\alpha'_{17}}, \tag{2.7}$$

其中 $\alpha'_{13}=\alpha_{13}+\alpha_1\alpha_5+\alpha_2\alpha_4$、$\alpha'_{14}=\alpha_{14}+\alpha_1\alpha_6+\alpha_3\alpha_4$、$\alpha'_{15}=\alpha_{15}+\alpha_2\alpha_6+\alpha_3\alpha_5$、$\alpha'_{16}=\alpha_{17}+\alpha_1\alpha_5\alpha_6+\alpha_2\alpha_4\alpha_6+\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 和 $\alpha'_{17}=\alpha_{16}+\alpha_1\alpha_2\alpha_6+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_4$。

证明。设 $x\in G$ 由公式 2.6 定义。应用 σ，得到:

$$x^\sigma=b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}b_3^{\alpha_3}a_1^{\alpha_4}a_2^{\alpha_5}a_3^{\alpha_6}v_{12}^{\alpha_7}v_{13}^{\alpha_8}v_{23}^{\alpha_9}u_{12}^{\alpha_{10}}u_{13}^{\alpha_{11}}u_{23}^{\alpha_{12}}p_{12}^{\alpha_{13}}p_{13}^{\alpha_{14}}p_{23}^{\alpha_{15}}t_{123}^{\alpha_{16}}z_{123}^{\alpha_{17}}, \tag{2.8}$$

其中 $\alpha_l\in\mathbb{Z}$、$l=1$、.....、6 和 $\alpha_l\in\mathbb{Z}_2$、$l=7$、.....、17。

我们需要将 x^σ 写成注 2.1 所给出的形式。考虑 $g_1=a_1^0a_2^0a_3^0b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}b_3^{\alpha_3}$ 和 $g_2=a_1^{\alpha_4}a_2^{\alpha_5}a_3^{\alpha_6}b_1^0b_2^0b_3^0p_{12}^{\alpha_{13}}p_{13}^{\alpha_{14}}p_{23}^{\alpha_{15}}$。应用引理 2.2，可得所需结果。□

因此，利用同构 $G_3\cong\mathbb{P}_3$，σ 的作用可以用指数描述如下。

注 2.8. 设 σ 由定义 2.4 给出。若 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{17})^\top\in\mathbb{P}_3$，则由引理 2.7 可直接得出

$$\overline{\alpha}^\sigma=(\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_{10},\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,\alpha'_{13},\alpha'_{14},\alpha'_{15},\alpha'_{16},\alpha'_{17}), \tag{2.9}$$

其中，对于 $l=13,\ldots,17$，α'_l 如引理 2.7 中所述得到。

根据前面的描述，我们现在可以证明 σ 定义了 G 的一个 2 阶自同构。

命题 2.9. 由定义 2.4 给出的映射 σ 是 G 的一个阶为2的自同构。

证明。设 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}=\bar{x}\cdot\bar{y}\in\mathbb{P}_3\cong G$ 分别写成 $x=(x_1,\ldots,x_{17})$、$y=(y_1,\ldots,y_{17})$ 和 $z=(z_1,\ldots,z_{17})$ 的形式。由注 2.8 可得这些元素在 σ 下的像。我们设 $x^\sigma=(x'_1,\ldots,x'_{17})$、$y^\sigma=(y'_1,\ldots,y'_{17})$ 和 $z^\sigma=(z'_1,\ldots,z'_{17})$，分别如此。

利用表1中定义的乘积，我们确定乘积 $x\cdot y$ 和 $x^\sigma\cdot y^\sigma$。记作 $\bar{w}=\bar{x}^\sigma\cdot\bar{y}^\sigma=(w_1,\ldots\ldots,w_{17})$。首先，我们需要证明对于所有$i=1,\ldots\ldots,17$，都有 $z'_i=w_i$。事实上：

$$
\begin{aligned}
&z_1 = z_4 = x_4+y_4 = x_1+y_1 = w_1;\\
&z_7 = z_{10} = x_{10}+y_{10}+x_5y_4 = x_7+y_7+x_2y_1 = w_7;\\
&z_{13} = z_{13}+z_1z_5+z_2z_4 = x_{13}+y_{13}+\cancel{x_4y_2}+\cancel{x_5y_1}+x_1x_5+x_1y_5+\cancel{x_5y_1}+y_1y_5+\\
&\quad +x_2x_4+x_2y_4+\cancel{x_4y_2}+y_2y_4 = x_{13}+y_{13}+x_4y_2+x_5y_1 = w_{13};\\
&z_{16} = z_{17}+z_1z_5z_6+z_2z_4z_6+z_3z_4z_5 = x_{17}+y_{17}+x_{13}y_6+x_{14}y_5+x_{15}y_4+\cancel{x_4x_5y_3}+\\
&+\cancel{x_4x_6y_2}+\cancel{x_5x_6y_1}+\cancel{x_4y_2y_6}+\cancel{x_4y_3y_5}+\cancel{x_5y_1y_6}+\cancel{x_5y_3y_4}+\cancel{x_6y_1y_5}+\cancel{x_6y_2y_4}+\\
&+(x_1x_5x_6+x_1x_6y_5+\cancel{x_5x_6y_1}+\cancel{x_6y_1y_5}+x_1x_5y_6+x_1y_5y_6+\cancel{x_5y_1y_6}+y_1y_5y_6)\\
&+(x_2x_4x_6+x_2x_6y_4+\cancel{x_4x_6y_2}+\cancel{x_6y_2y_4}+x_2x_4y_6+x_2y_4y_6+\cancel{x_4y_2y_6}+y_2y_4y_6)\\
&+(x_3x_4x_5+x_3x_5y_4+\cancel{x_4x_5y_3}+\cancel{x_5y_3y_4}+x_3x_4y_5+x_3y_4y_5+\cancel{x_4y_3y_5}+y_3y_4y_5)\\
&=(x_{17}+x_1x_5x_6+x_2x_4x_6+x_3x_4x_5)+(y_{17}+y_1y_5y_6+y_2y_4y_6+y_3y_4y_5)\\
&+(x_{13}+x_1x_5+x_2x_4)y_6+(x_{14}+x_1x_6+x_3x_4)y_5+(x_{15}+x_2x_6+x_3x_5)y_4+\\
&+x_1y_5y_6+x_2y_4y_6+x_3y_4y_5 = x_{16}+y_{16}+x_{13}y_3+x_{14}y_2+x_{15}y_1+x_4y_2y_3+\\
&+x_5y_1y_3+x_6y_1y_2 = w_{16}.
\end{aligned}
$$

其他项也可用类似方式得到。最后，根据方程 2.9，显然有 $x^{\sigma^2}=x$。因此，σ 是 G 的一个 2 阶自同构。□

类比前一种情况，我们现在计算 τ 对以标准形表示的G中的一个元素的作用。

引理 2.10。设 τ 如定义 2.5 中所定义，且 $x\in G$ 如 2.6中所示书写。则：

$$x^\tau = a_1^{\alpha_1-\alpha_4}a_2^{\alpha_2-\alpha_5}a_3^{\alpha_3-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}b_3^{-\alpha_6}u_{12}^{\alpha'_7}u_{13}^{\alpha'_8}u_{23}^{\alpha'_9}v_{12}^{\alpha_{10}}v_{13}^{\alpha_{11}}v_{23}^{\alpha_{12}}p_{12}^{\alpha'_{13}}p_{13}^{\alpha'_{14}}p_{23}^{\alpha'_{15}}z^{\alpha'_{16}}_{123}t^{\alpha_{17}}_{123}, \tag{2.10}$$

其中

$\alpha'_7=\alpha_7+\alpha_{10}+\alpha_{13}+\alpha_2\alpha_4$、$\alpha'_8=\alpha_8+\alpha_{11}+\alpha_{14}+\alpha_3\alpha_4$、$\alpha'_9=\alpha_9+\alpha_{12}+\alpha_{15}+\alpha_3\alpha_5$、$\alpha'_{13}=\alpha_{13}+\alpha_4\alpha_5$、$\alpha'_{14}=\alpha_{14}+\alpha_4\alpha_6$、$\alpha'_{15}=\alpha_{15}+\alpha_5\alpha_6$ 和 $\alpha'_{16}=\alpha_{16}+\alpha_{17}+\alpha_4\alpha_5\alpha_6$。

证明。将 $x\in G$ 视为陈述中所述的对象，并应用 τ，得到以下结果：

$$x^\tau = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}(a_1^{-\alpha_4}b_1^{-\alpha_4})(a_2^{-\alpha_5}b_2^{-\alpha_5})(a_3^{-\alpha_6}b_3^{-\alpha_6})\mu, \tag{2.11}$$

其中

$\mu=u_{12}^{\alpha_7}u_{13}^{\alpha_8}u_{23}^{\alpha_9}(u_{12}^{\alpha_{10}}v_{12}^{\alpha_{10}})(u_{13}^{\alpha_{11}}v_{13}^{\alpha_{11}})(u_{23}^{\alpha_{12}}v_{23}^{\alpha_{12}})(u_{12}^{\alpha_{13}}p_{12}^{\alpha_{13}})(u_{13}^{\alpha_{14}}p_{13}^{\alpha_{14}})(u_{23}^{\alpha_{15}}p_{23}^{\alpha_{15}})z_{123}^{\alpha_{16}}(z_{123}^{\alpha_{17}}t_{123}^{\alpha_{17}})$。

我们记作$g_1=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}a_1^{-\alpha_4}$、$g_2=b_1^{-\alpha_4}a_2^{-\alpha_5}b_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}$、$g_3=b_3^{-\alpha_6}$等，因此可以将 x^τ 写作

$$x^\tau = g_1g_2g_3\mu.$$

为了得到所需结果，我们将应用 g_1、 g_2 和g_2g_3 中的引理 2.2 的方法，并据此按既定的阶呈现这些元素。事实上:

(1) $g_1 = a_1^{\alpha_1-\alpha_4}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}u_{12}^{\alpha_2\alpha_4}u_{13}^{\alpha_3\alpha_4}$;

(2) $g_2 = \underbrace{b_1^{-\alpha_4}a_2^{-\alpha_5}}\, b_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6} = a_2^{-\alpha_5}b_1^{-\alpha_4}\underbrace{p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}b_2^{-\alpha_5}}\, a_3^{-\alpha_6} = a_2^{-\alpha_5}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}\underbrace{p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}} =$
$= a_2^{-\alpha_5}b_1^{-\alpha_4}\underbrace{b_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} = a_2^{-\alpha_5}\underbrace{b_1^{-\alpha_4}a_3^{-\alpha_6}}\, b_2^{-\alpha_5}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} =$
$= a_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}\underbrace{p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}b_2^{-\alpha_5}}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} =$
$= a_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}t^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}$;

(3) $g_2g_3 = a_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}\underbrace{p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}b_3^{-\alpha_6}}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}t^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} =$
$= a_2^{-\alpha_5}a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}b_3^{-\alpha_6}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}\cancel{t^{2\alpha_4\alpha_5\alpha_6}}$.

Since G_3 is nilpotent of class 3 and satisfies the Properties $(1)-(9)$, we get,

$$\begin{aligned} g_1g_2g_3 &= a_1^{\alpha_1-\alpha_4}a_2^{\alpha_2}\underbrace{a_3^{\alpha_3}a_2^{-\alpha_5}}\, a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}b_3^{-\alpha_6}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}u_{12}^{\alpha_2\alpha_4}u_{13}^{\alpha_3\alpha_4}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6} \\ &= a_1^{\alpha_1-\alpha_4}a_2^{\alpha_2}a_2^{-\alpha_5}a_3^{\alpha_3}a_3^{-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}b_3^{-\alpha_6}p_{12}^{\alpha_4\alpha_5}p_{13}^{\alpha_4\alpha_6}p_{23}^{\alpha_5\alpha_6}u_{12}^{\alpha_2\alpha_4}u_{13}^{\alpha_3\alpha_4}u_{23}^{\alpha_3\alpha_5}z^{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}. \end{aligned}$$

因此,

$$x^\tau = a_1^{\alpha_1-\alpha_4}a_2^{\alpha_2-\alpha_5}a_3^{\alpha_3-\alpha_6}b_1^{-\alpha_4}b_2^{-\alpha_5}b_3^{-\alpha_6}\mu^{'},$$

其中

$$\mu^{'} = u_{12}^{\alpha_7^{'}}u_{13}^{\alpha_8^{'}}u_{23}^{\alpha_9^{'}}v_{12}^{\alpha_{10}}v_{13}^{\alpha_{11}}v_{23}^{\alpha_{12}}p_{12}^{\alpha_{13}^{'}}p_{13}^{\alpha_{14}^{'}}p_{23}^{\alpha_{15}^{'}}z_{123}^{\alpha_{16}^{'}}t_{123}^{\alpha_{17}},$$

并且 $\alpha_i^{'}$ 正如我们所希望的那样。 □

因此，利用同构 $G_3 \cong \mathbb{P}_3$， τ 的作用可以用指数描述如下。

注2.11。 设 τ由定义 2.5 给出，并设 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{17}) \in \mathbb{P}_3$。由命题 2.6 和引理 2.10 可直接得到:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}^\tau &= (\alpha_1-\alpha_4, \alpha_2-\alpha_5, \alpha_3-\alpha_6, -\alpha_4, -\alpha_5, -\alpha_6, \alpha_7+\alpha_{10}+\alpha_{13}+\alpha_2\alpha_4, \\ &\quad \alpha_8+\alpha_{11}+\alpha_{14}+\alpha_3\alpha_4, \alpha_9+\alpha_{12}+\alpha_{15}+\alpha_3\alpha_5, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}+\alpha_4\alpha_5, \\ &\quad \alpha_{14}+\alpha_4\alpha_6, \alpha_{15}+\alpha_5\alpha_6, \alpha_{16}+\alpha_{17}+\alpha_4\alpha_5\alpha_6, \alpha_{17}). \end{aligned}$$

以 τ 作为辅助步骤，我们定义 $\rho = \sigma \circ \tau$，它将在 S_3-作用中扮演第二生成元的角色。

注记 2.12. 令 σ 和 τ 如上所述。注意，如果我们考虑 $\rho = \sigma \circ \tau$，就可以将 ρ 表示为以下形式:

$$(2.12)\quad a_i^\rho = b_i, b_i^\rho = a_i^{-1}b_i^{-1}, u_{ij}^\rho = v_{ij}, v_{ij}^\rho = u_{ij}v_{ij}, p_{ij}^\rho = v_{ij}p_{ij}, z_{ijk}^\rho = t_{ijk}, t_{ijk}^\rho = z_{ijk}t_{ijk}.$$

根据 σ 和 τ定义 ρ 后，下面的命题总结了它们的主要性质。

命题 2.13. 设映射 σ 和 τ 分别如定义 2.4和 2.5所定义。则 τ 和 $\rho = \sigma\circ\tau$ 是 G 的自同构，其阶分别为 2 和 3。

证明。 将 $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} = \overline{x}\cdot\overline{y} \in \mathbb{P}_3 \cong G$ 分别表示为 $x = (x_1, \ldots, x_{17})$、 $y = (y_1, \ldots, y_{17})$ 和 $z = (z_1, \ldots, z_{17})$。根据注2.11，我们确定这些元素在 τ 下的像。假设它们分别为 $x^\tau = (x_1^{'}, \ldots, x_{17}^{'})$、 $y^\tau = (y_1^{'}, \ldots, y_{17}^{'})$ 和$z^\tau = (z_1^{'}, \ldots, z_{17}^{'})$。

参照表1，我们计算乘积 $x\cdot y$ 和 $x^{\tau}\cdot y^{\tau}$。记$w=x^{\tau}\cdot\overline{y}^{\tau}\equiv(w_1,\ldots,w_{17})$。我们需要证明，对于所有 $i=1,\ldots,17$，都有 $z_i^{'}=w_i$，以表明 τ 是 G_3 的同态。下面给出部分项的计算；其余项可以用类似的方法得到。

$$
\begin{aligned}
z_1^{'} &= z_1-z_4=(x_1+y_1)-(x_4+y_4)=x_1^{'}+y_1^{'}=w_1;\\
z_4^{'} &= -z_4=-x_4-y_4=x_4^{'}+y_4^{'}=w_4;\\
z_7^{'} &= z_7+z_{10}+z_{13}+z_2z_4=x_7+y_7+x_{10}+y_{10}+x_{13}+y_{13}+x_2y_1+\cancel{x_4y_2}+\\
&\quad +x_5y_1+x_5y_4+x_2x_4+x_2y_4+\cancel{x_4y_2}+y_2y_4=x_7^{'}+y_7^{'}+x_2^{'}y_1^{'}=w_7;\\
z_{14}^{'} &= z_{14}+z_4z_6=x_{14}+y_{14}+x_4y_3+x_6y_1+(x_4+y_4)(x_6+y_6)=\\
&= x_{14}^{'}+y_{14}^{'}+x_4^{'}y_3^{'}+x_6^{'}y_1^{'}=w_{14};\\
z_{16}^{'} &= z_{16}+z_{17}+z_4z_5z_6=x_{16}+y_{16}+x_{17}+y_{17}+x_{13}y_3+x_{14}y_2+x_{15}y_1+\\
&\quad +x_4y_2y_3+x_5y_1y_3+x_6y_1y_2+x_{13}y_6+x_{14}y_5+x_{15}y_4+x_4x_5y_3+x_4x_6y_2+\\
&\quad +x_5x_6y_1+x_4(y_2y_6+y_5y_3)+x_5(y_1y_6+y_4y_3)+x_6(y_1y_5+y_4y_2)+\\
&\quad +(x_4+y_4)(x_5+y_5)(x_6+y_6)=\\
&= x_{16}^{'}+y_{16}^{'}+x_{13}^{'}y_3^{'}+x_{14}^{'}y_2^{'}+x_{15}^{'}y_1^{'}+x_4^{'}y_2^{'}y_3^{'}+x_5^{'}y_1^{'}y_3^{'}+x_6^{'}y_1^{'}y_2^{'}=w_{16}.
\end{aligned}
$$

此外，由注2.11可知

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^{\tau^2} &= (x_1-x_4+x_4,x_2-x_5+x_5,x_3-x_6+x_6,x_4,x_5,x_6,\\
&\quad x_7+x_{13}+x_2x_4+(x_2-x_5)(-x_4)+x_{13}+x_4x_5,\\
&\quad x_8+x_{14}+x_3x_4+x_{14}+(x_3-x_6)(-x_4)+x_4x_6,\\
&\quad x_9+x_{15}+x_3x_5+(x_3-x_6)(-x_5)+x_{15}+x_5x_6,\\
&\quad x_{10},x_{11},x_{12},x_{13}+x_4x_5+x_4x_5,x_{14}+x_4x_6+x_4x_6,\\
&\quad x_{15}+x_5x_6+x_5x_6,x_{16}+x_{17}+x_4x_5x_6+x_{17}+x_4x_5x_6,x_{17})=\overline{x}.
\end{aligned}
$$

因此 $\overline{x}^{\tau^2}=\overline{x}$。所以，$\tau$ 是 G 的一个 2 阶自同构。

显然，ρ 是 G_3的一个同态。现在，为了完成证明，我们应用注记 2.8 和注 2.11 中确立的性质，明确确定 ρ 和 ρ^2，并验证 $x^{\rho^3}=x$，其中 x 是先前定义的元素。

考虑 x 及其在 ρ 和 ρ^2 作用下的像即可得出这一结论，这些像分别由 $x^{\rho}=(x_1^1,\ldots\ldots,x_{17}^1)$ 和 $x^{\rho^2}=(x_1^2,\ldots\ldots,x_{17}^2)$ 给出。现在我们继续进行具体计算：

$$
\begin{aligned}
\overline{x}^{\rho} &= \sigma(\tau(\overline{x}))=\sigma(x_1-x_4,x_2-x_5,x_3-x_6,-x_4,-x_5,-x_6,x_7+x_{10}+x_{13}+x_2x_4,\\
&\quad x_8+x_{11}+x_{14}+x_3x_4,x_9+x_{12}+x_{15}+x_3x_5,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13}+x_4x_5,\\
&\quad x_{14}+x_4x_6,x_{15}+x_5x_6,x_{16}+x_{17}+x_4x_5x_6,x_{17})=\\
&= (-x_4,-x_5,-x_6,x_1-x_4,x_2-x_5,x_3-x_6,x_{10},x_{11},x_{12},x_7+x_{10}+x_{13}+x_2x_4,\\
&\quad x_8+x_{11}+x_{14}+x_3x_4,x_9+x_{12}+x_{15}+x_3x_5,x_{13}+x_1x_5+x_2x_4+x_4x_5,\\
&\quad x_{14}+x_1x_6+x_3x_4+x_4x_6,x_{15}+x_2x_6+x_3x_5+x_5x_6,x_{17}+x_1x_5x_6+x_2x_4x_6+\\
&\quad +x_3x_4x_5+x_4x_5x_6,x_{16}+x_{17}+x_1x_2x_6+x_2x_3x_4+x_1x_3x_5)=(x_1^1,\ldots,x_{17}^1).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\overline{x}^{\rho^2} &= \rho(x_1^1, \ldots\ldots, x_{17}^1) = (x_4 - x_1,\ x_5 - x_2,\ x_6 - x_3,\ -x_1,\ -x_2,\ -x_3,\\ &x_7 + x_{10} + x_{13} + +x_2x_4,\ x_8 + x_{11} + x_{14} + x_3x_4,\ x_9 + x_{12} + x_{15} + x_3x_5,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\\ &x_{13} + x_2x_4 + +x_1x_5 + x_1x_2,\ x_{14} + x_3x_4 + x_1x_6 + x_1x_3,\ x_{15} + x_3x_5 + x_2x_6 + x_2x_3,\\ &x_{16} + x_{17} + +x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_6 + x_1x_3x_5 + x_1x_5x_6 + x_2x_4x_6,\\ &x_{16} + x_1x_2x_6 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5) = (x_1^2, \ldots\ldots, x_{17}^2)。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{x}^{\rho^3} &= \rho(x_1^2, \ldots, x_{17}^2) = (-x_4^2, -x_5^2, -x_6^2, x_1^2 - x_4^2, x_2^2 - x_5^2, x_3^2 - x_6^2, x_{10}^2, x_{11}^2, x_{12}^2, x_7^2 +\\ &+x_{10}^2 + x_{13}^2 + x_2^2x_4^2, x_8^2 + x_{11}^2 + x_{14}^2 + x_3^2x_4^2, x_9^2 + x_{12}^2 + x_{15}^2 + x_3^2x_5^2, x_{13}^2 + x_1^2x_5^2 +\\ &+x_2^2x_4^2 + x_4^2x_5^2, x_{14}^2 + x_1^2x_6^2 + x_3^2x_4^2 + x_4^2x_6^2, x_{15}^2 + x_2^2x_6^2 + x_3^2x_5^2 + x_5^2x_6^2, x_{17}^2 +\\ &+x_1^2x_5^2x_6^2 + x_2^2x_4^2x_6^2 + x_3^2x_4^2x_5^2 + x_4^2x_5^2x_6^2, x_{16}^2 + x_{17}^2 + x_1^2x_2^2x_6^2 + x_2^2x_3^2x_4^2 +\\ &+x_1^2x_3^2x_5^2) = (x_1, \ldots, x_{17}) = \overline{x}.\end{aligned}$$

□

利用上述构造的自同构，我们可以证明 G_3 是一个带三重性的群。

定理 2.14。考虑分别由定义2.4 和2.12给出的自同构 σ 和 ρ 。则 $G = G_3$ 是一个带三重性的群 $S =< \sigma、\ \rho >$。

证明。令 σ 和 ρ 如命题中所述。根据命题 2.9 和 2.13，σ 和 ρ 分别是阶为 2 和 3 的自同构。此外，通过直接计算，我们观察到 $S =< \sigma,\ \rho >$ 同构于作用在三个元素上的对称群 S_3。

为了证明 G_3 是一个带三重性的群 $S = \langle\sigma,\ \rho\rangle$，还需证明对于每个 $x \in G_3$，方程

$$(x^{-1}x^\sigma)(x^{-1}x^\sigma)^\rho(x^{-1}x^\sigma)^{\rho^2} = 1 \tag{2.13}$$

成立。

设 $x \in G_3$，并令 x^{-1} 和 x^σ 分别为 x 的逆元及其在 σ 下的像。由命题 2.6，$\mathbb{P}_3$ 与 G_3 同构，因此我们可以用 $\mathbb{P}_3$ 的元素表示这些元素。此外，由于 $\mathbb{P}_3 = \mathbb{Z}^6 \oplus \mathbb{F}_2^m$ 与 $m = 3\binom{3}{2} + 2\binom{3}{3}$，我们假设相应的元素分别为 $\underline{x} = (x_1、\ldots\ldots、\ x_{17})$、$\underline{x}^{-1} = y = (y_1、\ldots\ldots、y_{17})$ 和 $x^\sigma = (x_1^{'}、\ldots\ldots、\ x_{17}^{'})$。根据引理 2.4 和注 2.8，我们有：

$$\begin{aligned}\overline{y} &= (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5, -x_6, x_7 + x_2x_1, x_8 + x_3x_1, x_9 + x_3x_2, x_{10} + x_5x_4,\\ &x_{11} + x_6x_4, x_{12} + x_6x_5, x_{13} + x_4x_2 + x_5x_1, x_{14} + x_4x_3 + x_6x_1, x_{15} + x_5x_3 + x_6x_2,\\ &x_{16} + x_{13}x_3 + x_{14}x_2 + x_{15}x_1 + x_4x_2x_3 + x_5x_1x_3 + x_6x_1x_2, x_{17} + x_{13}x_6 + x_{14}x_5\\ &+x_{15}x_4 + x_4x_2x_6 + x_5x_4x_3 + x_6x_1x_5);\\ \overline{x^\sigma} &= (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_7, x_8, x_9, x_{13} + x_1x_5 + x_2x_4, x_{14} + x_1x_6 + x_3x_4,\\ &x_{15} + x_2x_6 + x_3x_5, x_{17} + x_1x_5x_6 + x_2x_4x_6 + x_3x_4x_5, x_{16} + x_1x_2x_6 + x_1x_3x_5\\ &+x_2x_3x_4).\end{aligned}$$

令 x, x^{-1} 和 $x^\sigma \in G_3$ 如上所定义。我们定义 $a = x^{-1}x^\sigma$、$b = (x^{-1}x^\sigma)^\rho$ 以及 $c = (x^{-1}x^\sigma)^{\rho^2}$，并将它们在 $\mathbb{P}_3$ 中的相应元素记为 $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{17})$，

$\bar{b}=(b_1,\ldots,b_{17})$ 以及 $\bar{c}=(c_1,\ldots,c_{17})$。为了明确确定这些元素，我们将使用 y 和 x^σ 的值，应用 $\mathbb{P}_3$ 中乘法的定义以及 ρ 和 ρ^2 的自同构。

我们的目标是证明 $abc=1$，或者等价地，证明 $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c=0$。为此，只需验证 a、b 和 c 的坐标满足线性系统 2.14。之所以如此，是因为表 2 中明确计算了每三个元素的乘积，而该系统正是由此推导出来的。

$$
(2.14)\qquad
\begin{cases}
a_i+b_i+c_i=0 \quad (i=1,...,6)\\
a_7+b_7+c_7+a_2b_1+(a_2+b_2)c_1=0\\
a_8+b_8+c_8+a_3b_1+(a_3+b_3)c_1=0\\
a_9+b_9+c_9+a_3b_2+(a_3+b_3)c_2=0\\
a_{10}+b_{10}+c_{10}+a_5b_4+(a_5+b_5)c_4=0\\
a_{11}+b_{11}+c_{11}+a_6b_4+(a_6+b_6)c_4=0\\
a_{12}+b_{12}+c_{12}+a_6b_5+(a_6+b_6)c_5=0\\
a_{13}+b_{13}+c_{13}+a_4b_2+a_5b_1+(a_4+b_4)c_2+(a_5+b_5)c_1=0\\
a_{14}+b_{14}+c_{14}+a_4b_3+a_6b_1+(a_4+b_4)c_3+(a_6+b_6)c_1=0\\
a_{15}+b_{15}+c_{15}+a_5b_3+a_6b_2+(a_5+b_5)c_3+(a_6+b_6)c_2=0\\
a_{16}+b_{16}+c_{16}+a_{13}b_3+a_{14}b_2+a_{15}b_1+a_4b_2b_3+a_5b_1b_3+a_6b_1b_2\\
\quad +(a_{13}+b_{13}+a_4b_2+a_5b_1)c_3+(a_4+b_4)c_2c_3\\
\quad +(a_{14}+b_{14}+a_4b_3+a_6b_1)c_2+(a_5+b_5)c_1c_3\\
\quad +(a_{15}+b_{15}+a_5b_3+a_6b_2)c_1+(a_6+b_6)c_1c_2=0\\
a_{17}+b_{17}+c_{17}+a_{13}b_6+a_{14}b_5+a_{15}b_4+a_4a_5b_3+a_4a_6b_2+a_5a_6b_1\\
\quad +(a_4+b_4)(a_5+b_5)c_3+(a_4+b_4)(a_6+b_6)c_2+(a_5+b_5)(a_6+b_6)c_1\\
\quad +a_4(b_2b_6+b_5b_3)+a_5(b_1b_6+b_4b_3)+a_6(b_1b_5+b_4b_2)\\
\quad +(a_{13}+b_{13}+a_4b_2+a_5b_1)c_6+(a_4+b_4)(c_2c_6+c_5c_3)\\
\quad +(a_{14}+b_{14}+a_4b_3+a_6b_1)c_5+(a_5+b_5)(c_1c_6+c_4c_3)\\
\quad +(a_{15}+b_{15}+a_5b_3+a_6b_2)c_4+(a_6+b_6)(c_1c_5+c_4c_2)=0
\end{cases}
$$

事实上，计算 a、b 和 c 的值，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \;=(&-x_1+x_4,-x_2+x_5,-x_3+x_6,-x_4+x_1,-x_5+x_2,-x_6+x_3,\\
&x_7+x_{10}+x_1x_2+x_2x_4,x_8+x_{11}+x_1x_3+x_3x_4,x_9+x_{12}+x_2x_3+x_3x_5,\\
&x_7+x_{10}+x_4x_5+x_1x_5,x_8+x_{11}+x_4x_6+x_1x_6,x_9+x_{12}+x_5x_6+x_2x_6,0,\,0,0,\\
&x_{16}+x_{17}+x_3x_{13}+x_2x_{14}+x_1x_2x_6+x_1x_{15}+x_2x_3x_4+x_1x_3x_5+\\
&+x_6x_{13}+x_5x_{14}+x_1x_5x_6+x_4x_{15}+x_3x_4x_5+x_2x_4x_6+x_4x_5x_6,\\
&x_{16}+x_{17}+x_6x_{13}+x_5x_{14}+x_4x_{15}+x_3x_{13}+x_2x_3x_4+x_1x_3x_5+x_2x_{14}+x_1x_{15}\\
&+x_1x_2x_6+x_4x_5x_6+x_3x_4x_5+x_2x_4x_6+x_1x_5x_6\,);
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\bar{b} \;=\; & (x_4-x_1, x_5-x_2, x_6-x_3, -2x_1+2x_4, -2x_2+2x_5, -2x_3+2x_6,\\ & x_7+x_{10}+x_4x_5+x_1x_5, x_8+x_{11}+x_4x_6+x_1x_6, x_9+x_{12}+x_5x_6+x_2x_6,\\ & 0, 0, 0, x_4x_5+x_2x_4+x_1x_5+x_1x_2, x_1x_6+x_4x_6+x_3x_4+x_1x_3, x_3x_5+x_5x_6+\\ & +x_2x_6+x_2x_3, x_{16}+x_{17}+x_6x_{13}+x_5x_{14}+x_4x_{15}+x_3x_{13}+x_2x_3x_4+x_1x_3x_5+\\ & +x_2x_{14}+x_1x_{15}+x_1x_2x_6+x_4x_5x_6+x_3x_4x_5+x_2x_4x_6+x_1x_5x_6, x_1x_3x_5+\\ & +x_1x_2x_3+x_1x_2x_6+x_3x_4x_5+x_2x_3x_4+x_2x_4x_6);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} \;=\; & (2x_1-2x_4, 2x_2-2x_5, 2x_3-2x_6, x_1-x_4, x_2-x_5, x_3-x_6, 0, 0, 0,\\ & x_7+x_{10}+x_1x_2+x_2x_4, x_8+x_{11}+x_1x_3+x_3x_4, x_9+x_{12}+x_2x_3+x_3x_5, x_1x_2+\\ & +x_4x_5+x_2x_4+x_1x_5, x_1x_3+x_4x_6+x_3x_4+x_1x_6, x_2x_3+x_2x_6+x_3x_5+x_5x_6,\\ & x_2x_4x_6+x_2x_3x_4+x_1x_2x_6+x_1x_2x_3+x_4x_5x_6+x_3x_4x_5+x_1x_5x_6+x_1x_3x_5,\\ & x_{16}+x_{17}+x_3x_{13}+x_2x_{14}+x_1x_{15}+x_6x_{13}+x_5x_{14}+x_4x_{15}+x_1x_2x_3).\end{aligned}$$

通过简单计算，我们验证了 a, b 和 c 的坐标满足上述系统，从而证明了其相容性。因此，可得 $a\cdot b\cdot c=0$，这意味着$abc=1$ 属于 G_3。因此，方程（2.13）给出的三元性条件对所有$x\in G_3$均成立，由此得出 G_3 是一个带三重性的群 $S=\langle\sigma,\ \rho\rangle$。□

2.3. 带三重性的群 G_n。 在本小节中，我们证明由上述构造定义的群 G_n确实是一个带三重性的群。我们先引入一些记号。

令 $I_n=\{1,\dots,n\}$和 $T=\{(i,\ j,\ k)\in I_n\mid 1\le i<j<k\le n\}$。显然，$|T|=\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$。对于每个 $\alpha=(i,\ j,\ k)\in T$，定义

$$A_\alpha=\langle a_i,a_j,a_k,b_i,b_j,b_k\rangle.$$

我们还设

$$A=\bigoplus_{\alpha\in T}A_\alpha.$$

定理 2.15. 设 G_n 是一个类为 3 的幂零群，其生成元为 $2n$ s

$$\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}$$

满足关系 (1)–(8)。设 T、 A_α和 A 如上所定义。若每个 A_α 都是一个类为 3 的带三重性的群（满足与 G_3相同的关系），则存在一个嵌入

$$G_n\hookrightarrow A.$$

因此， G_n 是一个带三重性的群。

证明。考虑定理陈述中定义的 G_n、 A 和 A_α。由于每个 A_α 都是一个带三重性的群 $S_\alpha=\langle\sigma_\alpha,\ \rho_\alpha\rangle$，且 A 定义为这类群的直和，因此 A 是一个带三重性的群。事实上，直和 $A=\bigoplus A_\alpha$ 承载着$\alpha\in T$

triality 作用

$$S=\langle\sigma,\rho\rangle\quad\text{with}\quad\sigma=(\sigma_\alpha)_{\alpha\in T},\ \ \rho=(\rho_\alpha)_{\alpha\in T},$$

逐分量作用。

为了构造嵌入，定义

$$\pi\colon G_n\longrightarrow A,\qquad \pi(g)=\big(\pi_\alpha(g)\big)_{\alpha\in T},$$

其中每个 π_α: $G_n \to A_\alpha$ 都由生成元 $x_i \in \{a_i, b_i\}$ 定义如下

$$\pi_\alpha(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \in \alpha, \\ 1, & i \notin \alpha, \end{cases}$$

并唯一地延拓为一个同态。

特别地,

$$\ker(\pi_\alpha) = \langle a_j, b_j \mid j \notin \alpha \rangle.$$

$\ker \pi = 1$ 这一事实可由等式推出

$$\ker \pi = \bigcap_{\alpha \in T} \ker(\pi_\alpha)$$

并由假设 G_n 是 3 阶幂零得出。事实上， G_n中的每个元素都可写成生成元、它们的幂、长度为二的交换子以及长度为三的交换子的乘积。特别地，任何非平凡元素至多涉及三个指标。因此，存在某个包含这些指标的 $\alpha \in T$，使得 π_α 不会将该元素映射到 1。因此，没有非平凡元素属于所有核，由此我们得出

$$\bigcap_{\alpha \in T} \ker(\pi_\alpha) = 1.$$

因此， π 是单射，从而 $G_n \hookrightarrow A$。根据第一同构定理，我们得出

$$G_n \cong \pi(G_n).$$

此外， S 在 A 上的逐分量作用保留了 $\pi(G_n)$：事实上，对于每个 i，都有 $\sigma(\pi(a_i)) = \pi(b_i)$，且 $\sigma(\pi(b_i)) = \pi(a_i)$（ ρ的情形类似）。因此， $\pi(G_n)$是一个带三重性的群。

由于 $G_n \cong \pi(G_n)$，我们得出结论： G_n 也是一个带三重性的群。 □

以下注记将在后续各节中派上用场。

注 2.16。 为方便起见，我们也将定理 2.15 中得到的嵌入写作

$$G_n \hookrightarrow \prod_\alpha G_3^{(\alpha)},$$

因为每个分量 A_α 都同构于 G_3的一个副本。这种记法等价于写作 $A = \bigoplus_\alpha A_\alpha$.

注 2.17。 注意，在构造 G_n时，如果对所有$i = 1, \ldots, n$都施加附加关系$a_i^4 = b_i^4 = 1$，并替换

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{Z}^{2n} \oplus \mathbb{F}_2^m \quad \text{by} \quad \mathbb{P}_n^{(4)} = \mathbb{Z}_4^{2n} \oplus \mathbb{F}_2^m,$$

我们得到与生成元具有无限阶时相同的结果，例如 G_n 与 $\mathbb{P}_n^{(4)}$之间的同构，以及证明 G_n 是一个具有三性的群。

在这种情况下，生成元 a_i， b_i 的阶为 4，而所有中心元（平方元、交换子和结合子）以及元素 $p_{ij} = [a_i, b_j]$的阶均为 2。因此，群 G_n 是有限群，其阶为

$$|G_n| = 4^{2n} \times 2^m = 2^{4n+m},$$

其中 $m = 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}$。特别地，对于 $n = 3$，我们得到 $|G_3| = 2^{23}$。

对于这个群 G_n 及其附加关系，我们将在第4节确定相应的 Moufang 环。

3. The Variety Generated by Code Loops

本节将介绍簇 $\mathcal{E}$，它由所有码环都满足的恒等式定义。这里给出的结果保证了该簇中自由环的存在，并概述了这个环的基本性质及其与码环的关系。更多细节见 [7]。

定义3.1。令 $\mathcal{E}$ 为满足以下恒等式的 Moufang 环簇：

$$\begin{aligned} &x^4 = 1,\ [x,y]^2 = 1,\ (x,y,z)^2 = 1,\\ &\left[x^2,y\right] = 1,\ [[x,y],t] = 1,\ [(x,y,z),t] = 1,\\ &(x^2,y,z) = 1,\ ([x,y],z,t) = 1,\ \ ((x,y,z),t,s) = 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

以下关于结合子、交换子和平方元的性质对每个 Moufang 环都成立。

命题3.2。设 F 为一个 *Moufang* 环。

(1) 若 $(x,y,z)^2 = 1$ 且 F 的所有交换子和结合子都属于中心，则

$$[xy,z] = [x,z][y,z](x,y,z).$$

(2) 若 F 的交换子和结合子都属于中心，则

$$(wx,y,z) = (w,y,z)(x,y,z).$$

(3) 若 *Moufang* 环 F 的平方元和交换子都属于中心，则 n

$$(xy)^2 = x^2y^2[x,y].$$

下文中，我们用 F_n 表示 $\mathcal{E}$ 中的一个自由圈；其存在性将在下一个引理之后回顾。

引理 3.3. 设 F_n 是 $\mathcal{E}$ 中的一个自由圈，其自由生成元集为 $\{x_1,\dots,x_n\}$。那么对于所有 $z \in \mathcal{Z}(F_n)$，存在 $\xi_1,\dots,\xi_n,\ \xi_{ij},\ \xi_{ijk} \in \{0,1\}$，使得 $i,j,k = 1,\dots,n$ 满足

$$z = \prod_{i=1}^{n}(x_i^2)^{\xi_i}\cdot\prod_{i<j}[x_i,x_j]^{\xi_{ij}}\cdot\prod_{i<j<k}(x_i,x_j,x_k)^{\xi_{ijk}}. \tag{3.2}$$

中心的结构有助于确定与 G_n 对应的 Moufang 环。

根据 [7, 定理 2.7，第 170] 页，在簇 $\mathcal{E}$中存在一个秩为 n 的自由圈。我们将这个圈记为 $\mathcal{F}_n$。此外，[7, 推论 2.9，第 171] 页证明了，$\mathcal{E}$ 由所有码环的集合生成。在下文中，我们记 $\mathcal{F}_n = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$。下一个命题给出了与这个自由圈相关的一些性质。

命题 3.4（[7], 推论 2.8，第 171 页）。

(1) 对于任意秩为 n 的码环 L，存在同态 $\varphi : \mathcal{F}_n \to L$，使得$\varphi(\mathcal{F}_n) = L$，且 $\operatorname{codim}_{\mathcal{Z}(\mathcal{F}_n)} \ker(\varphi) = 1$.*(2)* 对于所有余维为 *1* 的 $\mathbb{F}_2$-子空间 $T \subset \mathcal{Z}(\mathcal{F}_n)$，存在一个码环$L(T) = \mathcal{F}_n/T$.*(3)* 环 $L(T)$ 是群，当且仅当 $T \supseteq U_n = (\mathcal{F}_n,\mathcal{F}_n,\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_n \cap U$。

4. The Moufang Loop corresponding to G_n

在第2节中，我们构造了一个具有三性的 3 阶幂零群 G_n ，其生成元为 $2n$个。正如注 2.17 中所指出的，为了确定相应的 Moufang 环，我们考虑满足附加关系 $a_i^4 = b_i^4 = 1$ 的 G_n，其中所有 $i = 1$、.....、n 均成立。本节的主要目标是证明，与该群相关联的环恰好是簇 $\mathcal{E}$ 中的自由环 $\mathcal{F}_n$ 。首先，我们证明 $\mathcal{F}_n$ 可以嵌入秩 3 自由码环的若干个副本的直积中。

4.1. 的嵌入 $\mathcal{F}_n$。 将 M_3 视为具有最少生成元 a、b和 c的自由码环。于是，根据码环的性质，我们有

$$M_3 = \langle a, b, c, [a, b], [a, c], [b, c], a^2, b^2, c^2, (a, b, c)\rangle$$

因此， $|M_3| = 2^{10}$。令 $T = \{(i、\ j、\ k) \mid 1 \le i < j < k \le n\}$ 如前所定义。对于 $\alpha = (i、\ j、\ k) \in T$，记 $M_3^\alpha = \langle x_i、\ x_j、\ x_k\rangle$ 为簇 $\mathcal{E}$中的自由码环。

类比群的情形（定理 2.15），现在我们证明自由环 $\mathcal{F}_n$可嵌入到 M_3的若干副本的直积中。

引理 4.1。 设 $\mathcal{E}$ 为由所有码环组成的集合生成的簇， $\mathcal{F}_n \in \mathcal{E}$ 为具有 n 个生成元的自由环。若 M_3 是具有3 个生成元的自由码环，则 $\mathcal{F}_n$ 可以嵌入到 M_3的若干副本的直积中。

证明。 令 $T = \{(i, j, k) | 1 \le i < j < k \le n\}$和 $L_n = \prod M_3^\alpha$，其中 $M_3^\alpha = \langle x_i, x_j, x_k\rangle$ $_{\alpha\in T}$是簇 $\mathcal{E}$中的自由码环，对每个 $\alpha = (i, j, k) \in T$。考虑映射φ： $\mathcal{F}_n \to L_n$，定义为 $\varphi(x_i) = \prod_{\alpha\in T} \varphi_\alpha(x_i)$，其中 $\varphi_\alpha(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \in \alpha; \\ 1, & i \notin \alpha. \end{cases}$

注意， L_n 是簇 $\mathcal{E}$中的一个码环。虽然它不是自由圈，但其内部包含一个自由结构。

由于 $\mathcal{F}_n$ 是自由的， x_i 的任意像都可以扩展为一个同态。

我们需要证明 $\ker(\varphi) = 1$。首先注意，$\ker(\varphi) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{F}_n)$。事实上，若$x \in \ker(\varphi)$ 且 $y \in \mathcal{F}_n$，则 $xy = yx$，因为对所有 $\alpha = (i, j, k) \in T$，都有 $\varphi_\alpha(x) = 1$，因此

$$\varphi(xy) = (1, 1, \ldots, 1)\varphi(y) = \varphi(y)(1, 1, \ldots, 1) = \varphi(yx).$$

设 $x \in ker(\varphi)$。根据引理 3.3，存在系数 $\xi_i, \xi_{ij}, \xi_{ijk} \in \{0, 1\}$，使得：

$$x = \prod_{1\le i\le n} (x_i^2)^{\xi_i} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} [x_i, x_j]^{\xi_{ij}} \cdot \prod_{1\le i<j<k\le n} (x_i, x_j, x_k)^{\xi_{ijk}}. \tag{4.1}$$

将 φ 应用于 $x \in ker(\varphi)$ 时，每个坐标 $\varphi_\alpha(x)$ 的形式为：

$$\varphi_\alpha(x) = (x_i^2)^{\xi_i}(x_j^2)^{\xi_j}(x_k^2)^{\xi_k}[x_i, x_j]^{\xi_{ij}}[x_i, x_k]^{\xi_{ik}}[x_j, x_k]^{\xi_{jk}}(x_i, x_j, x_k)^{\xi_{ijk}}. \tag{4.2}$$

若存在一个三元组 $(i,\ j,\ k)$ 使得 $\xi_{ijk} = 1$，则选择 $\beta = (i,\ j,\ k)$ 并考虑投影映射 p_β: $L_n \to M_3^\beta$。存在唯一的同态 g_β: $\mathcal{F}_n \to M_3^\beta$，使得 $g_\beta = p_\beta \circ \varphi$。由此得到交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \xrightarrow{\varphi} & L_n \\ & \searrow & \downarrow p_\beta \\ & {\scriptstyle g_\beta} & M_3^\beta \end{array}$$

由于 $\varphi(x) = 1$，因此 $g_\beta(x) = 1$。

为证明 $x = 1$，我们将考虑两种情形：

情形 1： 设

$$x = (x_i^2)^{\xi_i}(x_j^2)^{\xi_j}(x_k^2)^{\xi_k}[x_i, x_j]^{\xi_{ij}}[x_i, x_k]^{\xi_{ik}}[x_j, x_k]^{\xi_{jk}}(x_i, x_j, x_k).$$

然后，计算 $g_\beta(x)$，得到

$$1 = g_\beta(x) = p_\beta(\varphi(x)) = (x_i^2)^{\beta i}(x_j^2)^{\beta j}(x_k^2)^{\beta k}[x_i, x_j]^{\beta ij}[x_i, x_k]^{\beta ik}[x_j, x_k]^{\beta jk}(x_i, x_j, x_k) = x,$$

因为相应的指数相等。

在这种情形下，结论直接成立。

情形 2: 如果 x 的表达式中还存在涉及三个以上生成元下标的其他项，假设还存在另一个三元组 $\gamma = (i', j', k')$，使得 $\xi_{i'j'k'} = 1$。不失一般性，假设：

$$x = (x_i^2)^{\xi_i}(x_j^2)^{\xi_j}(x_k^2)^{\xi_k}[x_i, x_j]^{\xi_{ij}}[x_i, x_k]^{\xi_{ik}}[x_j, x_k]^{\xi_{jk}}(x_i, x_j, x_k)(x_{i'}, x_{j'}, x_{k'}).$$

为了得出 $x = 1$，我们计算 $g_\beta(x)$ 和 $g_\gamma((x_{i'}, x_{j'}, x_{k'}))$。将 g_β 应用于 x，得到：

$$(x_i^2)^{\beta i}(x_j^2)^{\beta j}(x_k^2)^{\beta k}[x_i, x_j]^{\beta ij}[x_i, x_k]^{\beta ik}[x_j, x_k]^{\beta jk}(x_i, x_j, x_k) = 1.$$

因此，x 可以化简为 $x = (x_{i'}, x_{j'}, x_{k'})$。最后，我们将 $g_\gamma = p_\gamma \circ \varphi$ 应用于 $x = (x_{i'}, x_{j'}, x_{k'})$，并确定 $g_\gamma(x) = x = 1$。

请注意，如果存在涉及其他生成元的额外项，则有必要构造同态 g_β，直到 x 完全化简为单位元。

如果不存在满足 $\xi_{ijk} = 1$ 的三元组 $\beta = (i, j, k)$，我们可以着重考察满足 $\xi_{ij} = 1$ 或 $\xi_i = 1$ 的元素，分析过程也将以类似方式进行。□

该引理表明，自由圈 $\mathcal{F}_n$ 可以用若干个 M_3的副本来描述。为延续群情形的类比，下面我们明确确定与 G_3对应的 Moufang 环 M_3。

4.2. 确定与 M_3 对应的 Moufang 环 G_3。 我们先回顾 [3] 和 [9]中给出的一些结果。设 G 是一个带三重性的群 $S =< \sigma, \rho >$。Doro [3] 证明，G 可分解如下：$G = HM^{\rho^2}$，其中 $H = \{x \in G \mid x^\sigma = x\}$ 且 $M = \{x^{-1}x^\sigma \mid x \in G\}$；此外，$(M^{\rho^2}, \star)$ 是一个乘法为

$$x \star y = z \iff xy = hz, \text{ for } h \in H, x, y, z \in M^{\rho^2}. \tag{4.3}$$

Grishkov 和 Zavarnitsine 给出的以下定理，明确描述了与带三重性的群相关联的 Moufang 环结构。

定理 4.2 （[9], 定理 1，第445页）。设 G 是一个带三重性的群，且 $M = \{x^{-1}x^\sigma \mid x \in G\}$。那么，集合 M 关于乘法构成一个 *Moufang* 环

$$m \cdot n = m^{-\rho}nm^{-\rho^2}, \ \forall\ m, n \in M. \tag{4.4}$$

此外，这个 *Moufang* 环 $(M,\cdot)$ 与 *Doro*圈 $(M^{\rho^2},\star)$ 同构，其乘法由（4.3）给出。

定义4.3。 对于带三重性的群 G，我们将与 G相关联的 Moufang 环记为 $L(G)$，即

$$L(G) := \{x^{-1}x^{\sigma} \mid x \in G\},$$

其乘法为

$$m \cdot n = m^{-\rho}nm^{-\rho^2}, \qquad m, n \in L(G).$$

注4.4。 现在，设 G_3 是一个具有 6 个生成元 $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$的 3 阶幂零群，其中每个生成元都满足 $a_i^4 = b_i^4 = 1$ 以及第2节中给出的第1至第8条关系。我们假设 $u_{ij} = [a_i, a_j]$, $v_{ij} = [b_i, b_j]$, $p_{ij} = [a_i, b_j]$ 对 $i < j$ 成立，并根据这些关系相应地定义z_{123}, t_{123} 。此外，自同构 σ 和 ρ 由公式2.4和2.12定义。我们此前已经证明，关于 $S =< \sigma, \rho >$， G_3 是一个带三重性的群。

此外，生成元的平方元以及交换子和结合子都是 2 阶的中心元，这使其阶为 $|G_3| = 2^{23}$。

定理4.5。 设 G_3 是关于 $S =< \sigma$、$\rho >$的带三重性的群，如注记 4.4中所定义。令 M_3 定义如下：

$$M_3 = \{x^{-1}x^{\sigma} \mid x \in G_3\},$$

其乘法律为：

$$m \cdot n = m^{-\rho}nm^{-\rho^2}, \quad for\ all\ m, n \in M_3.$$

集合 M_3 是与 G_3 对应的 *Moufang* 环，并具有以下性质：

(1) 环 M_3 由以下元素生成：

$$\{x_1, x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3], (x_1, x_2, x_3), x_1^2, x_2^2, x_3^2\},$$

其中 $x_i = a_i^{-1}a_i^{\sigma}$对于 $i = 1,2、3$。

(2) M_3 的阶为 $|M_3| = 2^{10}$。

(3) M_3 是由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 中的一个自由环。

证明。 设 $M_3 = \{x^{-1}x^{\sigma} \mid x \in G_3\}$，其中 G_3 是一个带三重性的群，其生成元为 $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$，满足 $a_i^4 = b_i^4 = 1$，且自同构 σ和 ρ满足$\sigma^2 = \rho^3 =(\sigma\rho)^2 = 1$。

由于 M_3 中的乘法定义为：

$$m \cdot n = m^{-\rho}nm^{-\rho^2}, \quad \text{for all } m, n \in M_3,$$

且 M_3 中的元素由 $x^{\sigma}x^{-1}$给出，对所有 $x \in G_3$ ，它们都可以明确描述为：

$$x_i = a_i^{-1}a_i^{\sigma} \quad \text{for } i = 1, 2, 3.$$

因此，我们可以得出结论，环 M_3 由以下元素生成：

$$\{x_1, x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3], (x_1, x_2, x_3), x_1^2, x_2^2, x_3^2\}.$$

为了确定 M_3 的阶，考虑子群：

$$H = \{h \in G_3 \mid h^{\sigma} = h\}.$$

通过直接计算，我们证明该子群的阶为 $|H| = 2^{13}$，因为它由以下元素生成：

$$\{a_ib_i, (a_ib_i)^2, p_{ij}, u_{ij}v_{ij}, tz\}, \quad \text{where } t = t_{123} \text{ and } z = z_{123}.$$

由于 $|G_3| = 2^{23}$，因此可得：

$$|M_3| = \frac{|G_3|}{|H|} = \frac{2^{23}}{2^{13}} = 2^{10}.$$

事实上，根据 Doro 的结果，我们可以将 $G_3 = H.M^{\rho^2}$ 分解，其中 $M = M_3$，而 $(M^{\rho^2}, \star)$ 是一个 Moufang 环，其乘法律由 4.3 给出。此外，正如 Grishkov 和 Zavarnitsine 在定理 4.2 中所证明的，环 $(M^{\rho^2}, \star)$ 与 $(M_3, \cdot)$ 同构。

结构 M_3 满足簇 $\mathcal{E}$ 的定义恒等式，即：$x^4 = 1$、$[x, y]^2 = 1$ 和 $(x, y, z)^2 = 1$，以及中心性条件。因此，M_3 是一个在簇 $\mathcal{E}$ 中自由生成、阶为 2^{10}, 的 Moufang 环。□

由 G_3 得到的环 M_3 具有预期的结构，即秩三自由码环。这个结果使我们能够得到 G_n 与 $\mathcal{F}_n$ 之间的一般对应关系。事实上，根据定理 2.15，G_n 可以嵌入由若干个 G_3 组成的直积中。根据引理 4.1，簇 $\mathcal{E}$ 中的自由圈 $\mathcal{F}_n$ 也嵌入由若干个 M_3 组成的直积中；这些 M_3 是与相应的 G_3 副本相关联的 Moufang 环。

注 4.6. 嵌入 $G_n \hookrightarrow \prod G_3^{(\alpha)}$ 自然地诱导出嵌入 $L(G_n) \hookrightarrow_\alpha \prod M_3^{(\alpha)}$，其中自同构 σ 和 ρ 在直积上逐分量作用。$_\alpha$

因此，我们得到以下结果：

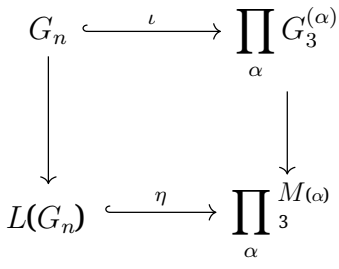
推论 4.7. 设 G_n 是一个具有三性的三阶幂零群，并满足注记 2.17 中给出的附加关系；再设 $\mathcal{F}_n$ 是由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 中具有 n 个生成元的自由圈。那么，$\mathcal{F}_n$ 就是与 G_n 对应的 *Moufang* 环。

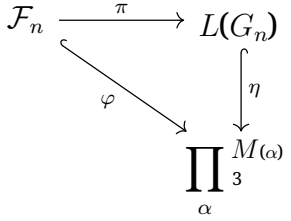
证明。 根据 $\mathcal{F}_n$的泛性质，存在唯一的同态

$$\pi : \mathcal{F}_n \to L(G_n)$$

将每个自由生成元映射到其在 $L(G_n)$中的像。

根据引理 4.1，$\mathcal{F}_n$ 嵌入到若干个 M_3 的直积中。因此，令 $\varphi : \mathcal{F}_n \hookrightarrow \prod_\alpha M_3^{(\alpha)}$ 为此嵌入。此外，令 $\eta: L(G_n) \hookrightarrow \prod_\alpha M_3^{(\alpha)}$ 为注 4.6 中所述的嵌入，并选择使其满足 $\eta \circ \pi = \varphi$。由于 φ 和 η 都是单射，π 也是单射。此外，由于 $\mathcal{F}_n$ 的生成元的像生成了 $L(G_n)$，π 是满射。因此，π 是同构，且 $\mathcal{F}_n \cong L(G_n)$。





与 $\eta \circ \pi = \varphi$

□

这一结果完成了我们旨在建立的构造：一个具有三性的 3 阶幂零群 G_n，其对应的 Moufang 环恰好是由码环生成的簇 $\mathcal{E}$ 中的自由圈 $\mathcal{F}_n$。

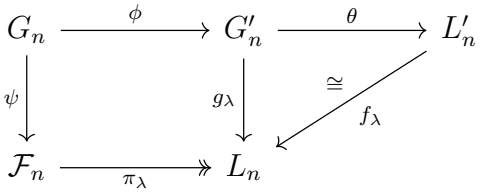
下一节中，我们将此构造与 Nagy 给出的构造进行比较， [15],并说明我们的结果如何推广了他的结果。

5. Comparison with Nagy's construction

在 [15], 中，作者从给定的码出发，构造了一个特定的带三重性的群，本文记作 G'_n；与之关联的环是由该码确定的码环。从这个意义上说，他的方法是具体的：每组参数都会产生一个码环。这里省略其构造的细节。

我们的方法有所不同：我们构造了一个带三性的泛群 G_n，其关联环 $\mathcal{F}_n = L$（G_n）是由码环生成的簇中的自由对象。从这个自由环出发，可以通过由特征向量 λ确定的商 $\mathcal{F}_n \twoheadrightarrow L_n$，得到每个秩为 n 的码环。

这两种构造之间的关系可概括为以下图示：



这里 $\psi : G_n \to \mathcal{F}_n$ 是由推论 4.7 得到的自然映射，而 $\pi_\lambda : \mathcal{F}_n \twoheadrightarrow L_n$ 是由特征向量 λ 确定的典范商。

另一方面，根据 Nagy 给出的构造 [15], ，同态 $\theta : G'_n \to L'_n$ 生成一个码环 L'_n，而同构 $f_\lambda : L'_n \to L_n$ 将此环与由 $\mathcal{F}_n$ 得到的环对应起来。

因此 $g_\lambda := f_\lambda \circ \theta$ 是一个自然映射 $G'_n \to L_n$。最后，根据 G_n 的泛性质，存在一个同态 $\phi : G_n \to G'_n$，使得该图交换：

$$g_\lambda \circ \phi = \pi_\lambda \circ \psi.$$

这表明，两种构造得到的是同一个码环 L_n。在我们的构造中，G_n 给出自由圈 $\mathcal{F}_n$，而每个码环 L_n 都是 $\mathcal{F}_n$ 的一个商。在 Nagy 的构造中，G'_n 直接生成一个码环 L'_n，它与 L_n 同构。此外，这也说明我们的构造实际上推广了 Nagy 的构造：G'_n 对应于一个特定的码环，而 G_n 则是带三重性的自由群，所有这类例子都由它产生。换言之，G'_n 是 G_n 的一个像，而 Nagy 的码环则是 $\mathcal{F}_n$ 的商。

致谢。 A. Grishkov、R. M. Pires 和 M. Rasskazova 感谢国家科学技术发展委员会 CNPq 提供资助（项目编号 406932/ 2023-9）。A. Grishkov 获得了 FAPESP（项目编号 2024/14914-9）、CNPq（项目编号 307593/2023-1）的资助，并得到俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所国家任务项目 FWNF-2022-003 的支持。

References

[1] R. H. Bruck，《二元系统概论》（施普林格出版社，1958年）。[2] O. Chein 和 E. G. Goodaire，具有唯一非单位交换子（结合子、平方）的 Moufang 环，《代数杂志》130（1990）369–384。[3] S. Doro，单穆芳环路，《剑桥哲学学会数学论文集》83（1978年）377–392。[4] S. M. Gagola III，穆芳环的霍尔定理，《代数杂志》323（2010年）3252–3262。[5] S. M. Gagola III，产生 Moufang 环的阿贝尔群与循环群的扩张，《群论杂志》15（2012年）1–7。[6] G. Glauberman，奇数阶环路 II，《代数杂志》8（1968年）393–414。[7] A. Grichkov、R. M. Pires，由码环生成的环路簇，《国际代数与计算杂志》28（2018年）163–177。[8] A. Grishkov、A. Zavarnitsine，Moufang 环的拉格朗日定理，《剑桥哲学学会数学论文集》139（2005年），第1期，41–57。[9] A. N. Grishkov、A.V. Zavarnitsine，三性群，《代数及其应用杂志》5（第4期）（2006年）441–463。[10] A. N. Grishkov、A. V. Zavarnitsine，阿贝尔循环型穆芳环路。《代数通讯》41（第6期）（2013年）2242–2253。[11] A. N. Grishkov、A. V. Zavarnitsine，Moufang 环中的乘法公式。《国际代数与计算杂志》26（第4期）（2016年）705-725。[12] R. L. Griess Jr，码环，《代数杂志》100（1986年）224–234。[13] J. I. Hall、G. P. Nagy，关于穆芳3网和三性群，《塞格德数学学报》67（第3-4期）（2001年）675–685。[14] M. W. Liebeck，有限单穆芳环路的分类，《剑桥哲学学会数学论文集》102（1987年）33–47。[15] G. P. Nagy，码环的直接构造。《离散数学》308（2008年）5349–5357。[16] L. J. Paige，一类单穆芳环路，《美国数学会会刊》7（1956年）471–482。

6. Appendix

	$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$
1	α_1	β_1	$\alpha_1+\beta_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	α_n	β_n	$\alpha_n+\beta_n$
$n+1$	α_{n+1}	β_{n+1}	$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n$	α_{2n}	β_{2n}	$\alpha_{2n}+\beta_{2n}$
$2n+1$	α^1_{12}	β^1_{12}	$\alpha^1_{12}+\beta^1_{12}+\alpha_2\beta_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+\binom{n}{2}$	$\alpha^1_{n-1\,n}$	$\beta^1_{n-1\,n}$	$\alpha^1_{n-1\,n}+\beta^1_{n-1\,n}+\alpha_n\beta_{n-1}$
$2n+\binom{n}{2}+1$	α^2_{12}	β^2_{12}	$\alpha^2_{12}+\beta^2_{12}+\alpha_{2+n}\beta_{1+n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+2\binom{n}{2}$	$\alpha^2_{n-1\,n}$	$\beta^2_{n-1\,n}$	$\alpha^2_{n-1\,n}+\beta^2_{n-1\,n}+\alpha_{2n}\beta_{2n-1}$
$2n+2\binom{n}{2}+1$	α^3_{12}	β^3_{12}	$\alpha^3_{12}+\beta^3_{12}+\alpha_{1+n}\beta_2+\alpha_{2+n}\beta_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}$	$\alpha^3_{n-1\,n}$	$\beta^3_{n-1\,n}$	$\alpha^3_{n-1\,n}+\beta^3_{n-1\,n}+\alpha_{2n-1}\beta_n+\alpha_{2n}\beta_{n-1}$
$2n+3\binom{n}{2}+1$	α^1_{123}	β^1_{123}	$\alpha^1_{123}+\beta^1_{123}+\alpha^3_{12}\beta_3+\alpha^3_{13}\beta_2+\alpha^3_{23}\beta_1$ $+\alpha_{1+n}\beta_2\beta_3+\alpha_{2+n}\beta_1\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_1\beta_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$	$\alpha^1_{n-2\,n-1\,n}$	$\beta^1_{n-2\,n-1\,n}$	$\alpha^1_{n-2\,n-1\,n}+\beta^1_{n-2\,n-1\,n}+\alpha^3_{n-2\,n-1}\beta_n$ $+\alpha^3_{n-2\,n}\beta_{n-1}+\alpha^3_{n-1\,n}\beta_{n-2}$ $+\alpha_{2n-2}\beta_{n-1}\beta_n+\alpha_{2n-1}\beta_{n-2}\beta_n$ $+\alpha_{2n}\beta_{n-2}\beta_{n-1}$
$2n+3\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+1$	α^2_{123}	β^2_{123}	$\alpha^2_{123}+\beta^2_{123}+\alpha^3_{12}\beta_{3+n}+\alpha^3_{13}\beta_{2+n}$ $+\alpha^3_{23}\beta_{1+n}+\alpha_{1+n}\alpha_{2+n}\beta_3+\alpha_{1+n}\alpha_{3+n}\beta_2$ $+\alpha_{2+n}\alpha_{3+n}\beta_1+\alpha_{1+n}(\beta_2\beta_{3+n}+\beta_{2+n}\beta_3)$ $+\alpha_{2+n}(\beta_1\beta_{3+n}+\beta_{1+n}\beta_3)$ $+\alpha_{3+n}(\beta_1\beta_{2+n}+\beta_{1+n}\beta_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}$	$\alpha^2_{n-2\,n-1\,n}$	$\beta^2_{n-2\,n-1\,n}$	$\alpha^2_{n-2\,n-1\,n}+\beta^2_{n-2\,n-1\,n}+\alpha^3_{n-2\,n-1}\beta_{2n}$ $+\alpha^3_{n-2\,n}\beta_{2n-1}+\alpha^3_{n-1\,n}\beta_{2n-2}$ $+\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\beta_n$ $+\alpha_{2n-2}\alpha_{2n}\beta_{n-1}+\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\beta_{n-2}$ $+\alpha_{2n-2}(\beta_{n-1}\beta_{2n}+\beta_{2n-1}\beta_n)$ $+\alpha_{2n-1}(\beta_{n-2}\beta_{2n}+\beta_{2n-2}\beta_n)$ $+\alpha_{2n}(\beta_{n-2}\beta_{2n-1}+\beta_{2n-2}\beta_{n-1})$

Table 3. $\mathbb{P}_n$中的乘法

	$(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\cdot\overline{\gamma}$
1	$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n$
$n+1$	$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}+\gamma_{n+1}$
$\vdots$	$\vdots$
$2n$	$\alpha_{2n}+\beta_{2n}+\gamma_{2n}$
$2n+1$	$\alpha^1_{12}+\beta^1_{12}+\alpha_2\beta_1+\gamma^1_{12}+\alpha_2\gamma_1+\beta_2\gamma_1$
$\vdots$	$\vdots$
$2n+\binom{n}{2}$	$\alpha^1_{n-1\,n}+\beta^1_{n-1\,n}+\alpha_n\beta_{n-1}$ $+\gamma^1_{n-1\,n}+\alpha_n\gamma_{n-1}+\beta_n\gamma_{n-1}$
$2n+\binom{n}{2}+1$	$\alpha^2_{12}+\beta^2_{12}+\alpha_{2+n}\beta_{1+n}+\gamma^2_{12}$ $+\alpha_{n+2}\gamma_{n+1}+\beta_{n+2}\gamma_{n+1}$
$\vdots$	$\vdots$
$2n+2\binom{n}{2}$	$\alpha^2_{n-1\,n}+\beta^2_{n-1\,n}+\alpha_{2n}\beta_{2n-1}$ $+\gamma^2_{n-1\,n}+\alpha_{2n}\gamma_{2n-1}+\beta_{2n}\gamma_{2n-1}$
$2n+2\binom{n}{2}+1$	$\alpha^3_{12}+\beta^3_{12}+\alpha_{1+n}\beta_2+\alpha_{2+n}\beta_1$ $+\gamma^3_{12}+\alpha_{n+1}\gamma_2+\beta_{n+1}\gamma_2+\alpha_{n+2}\gamma_1+\beta_{n+2}\gamma_1$
$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}$	$\alpha^3_{n-1\,n}+\beta^3_{n-1\,n}+\alpha_{2n-1}\beta_n$ $+\alpha_{2n}\beta_{n-1}+\gamma^3_{n-1\,n}+\alpha_{2n-1}\gamma_n$ $+\beta_{2n-1}\gamma_n+\alpha_{2n}\gamma_{n-1}+\beta_{2n}\gamma_{n-1}$
$2n+3\binom{n}{2}+1$	$\alpha^1_{123}+\beta^1_{123}+\alpha^3_{12}\beta_3+\alpha^2_{13}\beta_2+\alpha^3_{23}\beta_1$ $+\alpha_{1+n}\beta_2\beta_3+\alpha_{2+n}\beta_1\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_1\beta_2+\gamma^1_{123}$ $+(\alpha^3_{12}+\beta^3_{12}+\alpha_{1+n}\beta_2+\alpha_{2+n}\beta_1)\gamma_3+(\alpha^3_{1\ 3}$ $+\beta^3_{13}+\alpha_{1+n}\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_1)\gamma_2$ $+(\alpha^3_{23}+\beta^3_{23}+\alpha_{2+n}\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_2)\gamma_1$ $+\alpha_{n+1}\gamma_2\gamma_3+\beta_{n+1}\gamma_2\gamma_3+\alpha_{n+2}\gamma_1\gamma_3+\beta_{n+2}\gamma_1\gamma_3$ $+\alpha_{n+3}\gamma_1\gamma_2+\beta_{n+3}\gamma_1\gamma_2$
$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$	$\alpha^1_{n-2\,n-1\,n}+\beta^1_{n-2\,n-1\,n}+\alpha^3_{n-2\,n-1}\beta_n$ $+\alpha^3_{n-2\,n}\beta_{n-1}+\alpha^3_{n-1\,n}\beta_{n-2}+\alpha_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n$ $+\alpha_{2n-1}\beta_{n-2}\beta_n+\alpha_{2n}\beta_{n-2}\beta_{n-1}+\gamma^1_{n-2\,n-1\,n}$ $+(\alpha^3_{n-2\,n-1}+\beta^3_{n-2\,n-1}+\alpha_{2n-2}\beta_{n-1}+\alpha_{2n-1}\beta_{n-2})\gamma_n$ $+(\alpha^3_{n-2\ n}+\beta^3_{n-2\,n}+\alpha_{2n-2}\beta_n+\alpha_{2n}\beta_{n-2})\gamma_{n-1}$ $+(\alpha^3_{n-1\ n}+\beta^3_{n-1\,n}+\alpha_{2n-1}\beta_n+\alpha_{2n}\beta_{n-1})\gamma_{n-2}$ $+(\alpha_{2n-2}+\beta_{2n-2})\gamma_{n-1}\gamma_n+(\alpha_{2n-1}+\beta_{2n-1})\gamma_{n-2}\gamma_n$ $+(\alpha_{2n}+\beta_{2n})\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}$

TABLE 4. $\mathbb{P}_n$中的乘法：三个元素乘积的一般公式（第一部分）。

	$(\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta})\cdot\overline{\gamma}$
$2n+3\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+1$	$\alpha_{123}^2+\beta_{123}^2+\alpha_{12}^3\beta_{3+n}+\alpha_{13}^2\beta_{2+n}+\alpha_{23}^3\beta_{1+n}$ $+\alpha_{1+n}\alpha_{2+n}\beta_3+\alpha_{1+n}\alpha_{3+n}\beta_2$ $+\alpha_{2+n}\alpha_{3+n}\beta_1+\alpha_{1+n}(\beta_2\beta_{3+n}+\beta_{2+n}\beta_3)$ $+\alpha_{2+n}(\beta_1\beta_{3+n}+\beta_{1+n}\beta_3)+\alpha_{3+n}(\beta_1\beta_{2+n}+\beta_{1+n}\beta_2)$ $+\gamma_{123}^2+(\alpha_{12}^3+\beta_{12}^3+\alpha_{1+n}\beta_2+\alpha_{2+n}\beta_1)\gamma_{3+n}$ $+(\alpha_{13}^3+\beta_{13}^3+\alpha_{1+n}\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_1)\gamma_{2+n}$ $+(\alpha_{23}^3+\beta_{23}^3+\alpha_{2+n}\beta_3+\alpha_{3+n}\beta_2)\gamma_{1+n}+(\alpha_{n+1}$ $+\beta_{n+1})(\alpha_{n+2}+\beta_{n+2)}\gamma_3+(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})(\alpha_{n+3}$ $+\beta_{n+3)}\gamma_2+(\alpha_{n+2}+\beta_{n+2})(\alpha_{n+3}+\beta_{n+3})\gamma_1+(\alpha_{n+1}$ $+\beta_{n+1})(\gamma_2\gamma_{3+n}+\gamma_{2+n}\gamma_3)+(\alpha_{2+n}$ $+\beta_{2+n})(\gamma_1\gamma_{3+n}+\gamma_{1+n}\gamma_3)$ $+(\alpha_{3+n}+\beta_{3+n})(\gamma_1\gamma_{2+n}+\gamma_{1+n}\gamma_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$2n+3\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}$	$\alpha_{(n-2)(n-1)n}^2+\beta_{(n-2)(n-1)n}^2+\alpha_{(n-2)(n-1)}^3\beta_{2n}+\alpha_{(n-2)n}^3\beta_{2n-1}$ $+\alpha_{(n-1)n}^3\beta_{2n-2}+\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\beta_n+\alpha_{2n-2}\alpha_{2n}\beta_{n-1}$ $+\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\beta_{n-2}+\alpha_{2n-2}(\beta_{n-1}\beta_{2n}+\beta_{2n-1}\beta_n)$ $+\alpha_{2n-1}(\beta_{n-2}\beta_{2n}+\beta_{2n-2}\beta_n)+\alpha_{2n}(\beta_{n-2}\beta_{2n-1}$ $+\beta_{2n-2}\beta_{n-1})+\gamma_{(n-2)(n-1)n}^2$ $+\alpha_{(n-2)(n-1)}^3\gamma_{2n}+\beta_{(n-2)(n-1)}^3\gamma_{2n}$ $+\alpha_{(n-2)n}^3\gamma_{2n-1}+\beta_{(n-2)n}^3\gamma_{2n-1}+\alpha_{(n-1)n}^3\gamma_{2n-2}$ $+\beta_{(n-1)n}^3\gamma_{2n-2}+\alpha_{2n-2}\beta_{n-1}\gamma_{2n}+\alpha_{2n-1}\beta_{n-2}\gamma_{2n}$ $+\alpha_{2n-2}\beta_n\gamma_{2n-1}+\alpha_{2n}\beta_{n-2}\gamma_{2n-1}$ $+\alpha_{2n-1}\beta_n\gamma_{2n-2}+\alpha_{2n}\beta_{n-1}\gamma_{2n-2}$ $+(\alpha_{2n-2}+\beta_{2n-2})(\alpha_{2n-1}$ $+\beta_{2n-1})\gamma_n+(\alpha_{2n-2}+\beta_{2n-2})(\alpha_{2n}+\beta_{2n})\gamma_{n-1}$ $+(\alpha_{2n-1}+\beta_{2n-1})(\alpha_{2n}+\beta_{2n})\gamma_{n-2}+(\alpha_{2n-2}$ $+\beta_{2n-2})(\gamma_{n-1}\gamma_{2n}+\gamma_{2n-1}\gamma_n)+(\alpha_{2n-1}$ $+\beta_{2n-1})(\gamma_{n-2}\gamma_{2n}+\gamma_{2n-2}\gamma_n)$ $+(\alpha_{2n}+\beta_{2n})(\gamma_{n-2}\gamma_{2n-1}+\gamma_{2n-2}\gamma_{n-1})$

TABLE 5. $\mathbb{P}_n$中的乘法：三个元素的乘积的一般公式（第二部分）。