arXiv:2601.02558v1 [math.PR] 5 Jan 2026

具有非平稳增量的分数高斯过程的 Lamperti 缩放

Foad Shokrollahi* Saeed Vahdati†

2026年1月7日

摘要

Lamperti 变换为自相似过程与平稳动力学搭建了一座有力的桥梁，因此特别适用于分析缺乏平稳增量的反常扩散模型。本文考察缩放次分数布朗运动和双分数布朗运动的 Lamperti 变换，推导其显式协方差公式、渐近行为和精确的指数混合率。我们还引入由这些高斯场驱动的朗之万型积分过程，确定其自相似指数，并证明它们的拉普蒂像仍构成快速去相关的平稳高斯过程。借助逆 Lamperti 关系和伯克霍夫定理，我们严格建立了对原始非平稳过程的系综量进行单轨迹重构的方法。这些结果将缩放 Lamperti 框架扩展至具有非平稳增量且依赖结构更丰富的高斯过程。

关键词： Lamperti变换；高斯过程；次分数布朗运动和双分数布朗运动；遍历性；混合率。

2020年数学主题分类： 91G20；91G80；60G22。

1 引言

自相似性和反常扩散已成为现代概率论、数理物理以及复杂系统建模中的核心主题。许多用于描述不规则或记忆驱动现象的随机过程，都明显偏离了平稳增量这一经典框架。重要的例子包括分数布朗运动、次分数布朗运动（$s-fBm$）、双分数布朗运动（$bi-fBm$）、缩放布朗运动、连续时间随机游走、莱维飞行，以及各种非马尔可夫高斯模型 [16, 2, 18, 6, 3]。这类系统通常表现出老化、长记忆、非平稳增量和轨迹间涨落，从而违背经典的遍历性。时间平均与系综平均之间的差异通常称为遍历性破缺；在物理实验和生物实验中，这种现象十分常见，因为单个粒子轨迹的行为可能与其预期表现有显著差异 [1, 16]。

将非平稳自相似过程与平稳过程联系起来的一项核心理论工具，是由 [9]提出的 Lamperti 变换。对于一个 H 自相似过程 $X(t)$，该变换

$$X^{\mathrm{LT}}(t) = e^{-Ht}X(e^t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

*瓦萨大学数学与统计系，邮政信箱700号，FIN-65101 瓦萨，芬兰。电子邮箱：foad.shokrollahi@uwasa.fi

†伊斯法罕大学霍恩萨尔校区数学系，伊斯法罕，伊朗。电子邮箱：s.vahdati@khc.ui.ac.ir, sdvahdati@gmail.com

会生成一个严格平稳过程，而其逆关系

$$X(t) = t^H X^{\mathrm{LT}}(\log t)$$

恢复原始动力学。Lamperti 证明，这种映射在自相似过程和平稳过程之间建立了一一对应关系。因此，平稳表示使我们能够运用遍历理论、谱分析、混合概念及相关概率技术，分析原本超出经典遍历定理适用范围的非平稳过程。这一视角在 [14] and 中发展的高斯过程与布朗泛函理论中得到了强调，并与高斯随机过程和遍历性的经典结果密切相关 [15, 7]。

物理学文献对 Lamperti 型变换与反常扩散之间的联系进行了深入探讨。 [16] and 所阐述的分数阶动力学观点，以及随后关于非平稳缩放布朗运动 [3] and 相关非高斯扩散[4, 1] 的研究表明，许多反常输运模型具有自相似性，但不具备平稳增量。在此背景下，时间平均均方位移可能与系综平均存在系统性差异，从而导致弱形式或强形式的遍历性破缺。 [12] 提出了一项影响深远的结果，证明一大类由缩放布朗运动及相关朗之万方程构成的反常扩散模型，可通过适应相似指数的 Lamperti 变换转化为平稳且遍历的过程。他们的分析表明，具有时变扩散率和显著老化效应的模型在变换后会变为平稳过程，并呈现相关性的指数衰减。另一方面， [13] 研究了与亚扩散并存的莱维飞行及相关模型的遍历性质，再次揭示，适当的时间变换和 Lamperti 型表示能够恢复系统的遍历行为，即使这些系统在原始表述中高度非平稳。

除了高斯情形之外，Lamperti 类型的构造也出现在分枝理论和莱维驱动动力学中。在关于具有竞争的连续状态分枝过程的研究中，Lamperti 表示在具有非线性相互作用的分枝动力学与时间变换的莱维过程之间提供了一一对应关系，表明复杂的分枝结构可以编码为沿随机时钟观测到的平稳噪声 [10]。这些发展说明，Lamperti 原理具有结构性，而非特定于某个模型。它为包括高斯过程、莱维飞行、分枝系统和分数阶扩散在内的广泛动力学提供了统一表示。与此同时，[5] 近期在反常扩散和遍历性破缺的背景下重新审视了 Lamperti 变换，阐明了时间变换和相似指数的选择如何决定 Lamperti 映像表现出弱遍历性还是强遍历性。

尽管取得了这些进展，对于增量非平稳的高斯过程，经典 Lamperti 变换仍未得到充分理解。特别是， $s - fBm$ 在 [2] 中引入的过程，以及 $bi - fBm$ 在 [18, 6] 中引入并分析的过程，都带来了重大的分析挑战。这两个过程都是中心高斯且自相似的，但其协方差结构与分数布朗运动的协方差结构存在显著差异。 $s - fBm$ 保留了分数布朗运动的 H-自相似性，但其协方差结合了较弱的长程依赖与独特的短程行为，并且不具有平稳增量。 $bi - fBm$ 引入了一个额外参数 K ，该参数改变了协方差对时间几何结构的依赖，从而得到一个具有非平稳增量的自相似高斯过程二参数族；除特殊情形$K = 1$外，该族无法化归为分数布朗运动。这些特征阻碍了标准遍历性论证的直接应用，也使其 Lamperti 变换的行为在很大程度上仍未得到探索。

近期一项重要进展是将 Lamperti 映射扩展为包含缩放参数 $\alpha > 0$。对于相似指数为 αH、形式为 $X(t) = Y(t^{\alpha})$ 的过程，缩放

Lamperti 变换

$$\mathcal{L}_\alpha[X](t) = e^{-\alpha H t} X(e^{\alpha t})$$

该变换被提出作为经典变换的自然推广，并且已证明其会对平稳像的相关结构产生显著影响 [12, 5]。特别是，缩放布朗运动和缩放分数布朗运动具有非平稳增量，通常表现出弱遍历性破缺；经过映射后，它们变为具有指数协方差衰减的平稳高斯过程。这种指数去相关不同于经典 Lamperti 变换所诱导的缓慢幂律衰减，并在变换域中带来强混合性和完全遍历性。

缩放 Lamperti 框架的一个核心特征是，缩放指数 α 会主动塑造平稳像的长时间行为。在经典 Lamperti 变换（$\alpha = 1$）中，该变换由 [9], 提出，许多高斯自相似过程仅保留幂律相关衰减，遍历性可能失效；对于分数布朗运动以及具有非平稳增量的相关模型，这种行为已有充分记录（例如参见 [15, 7, 2]）。相比之下，选择$\alpha \neq 1$ 具有正则化效应：指数时间变换 $t \mapsto e^{\alpha t}$ 会加速协方差增长，并在平稳表示中引入指数阻尼因子。这一机制是 $s-fBm$和 $bi-fBm$的缩放 Lamperti 变换产生指数相关衰减和强混合性的基础。

在双分数布朗运动情形中，附加参数 K 丰富了协方差结构。自协方差渐近展开中指数 $2H-HK$ 与 $1-HK$ 之间的竞争，使混合速率对 H 和 K均呈现非平凡的依赖关系。这种双参数行为反映了 $bi-fBm$ 的内在结构，正如[18, 6]中所确立的那样：参数 K 是长程依赖的真正修正因子，并决定了 Lamperti 域中控制去相关的指数速率 $c(H,\ K,\ \alpha)$。

本研究旨在将这一缩放 Lamperti 框架扩展到 $s-fBm$和 $bi-fBm$，以及由这些过程驱动的相关朗之万型积分模型。这些模型呈现出比分数布朗运动更复杂的非平稳形式，因此是检验 Lamperti 方法适用范围的天然案例。对于 $s-fBm$，我们证明缩放 Lamperti 变换会产生具有指数衰减的显式平稳协方差，进而推出遍历性以及具有指数速率的强混合性。对于 $bi-fBm$，我们证明缩放变换同样会得到一个平稳高斯过程，并推导出协方差的闭式表达式，同时对参数范围内一致的指数衰减进行严格分析。混合速率取决于 Hurst 参数 H、变形参数 K 和缩放指数 α，我们还得到了描述这种依赖关系的显式公式。在方法层面，分析采用了高斯过程的协方差演算、高斯希尔伯特空间技术，以及 [8, 17], 中的 Malliavin 型工具，并结合关于高斯随机过程和遍历性谱刻画的经典结果 [15, 7]。

我们的结果有一项重要含义：借助逆拉普蒂映射，可以根据其拉普蒂像的单条轨迹观测，恢复原非平稳过程的总体特征。由于平稳像具有遍历性和强混合性，一大类泛函的时间平均几乎必然收敛到其总体期望。通过逆映射，可以得到重构 $s-fBm$ 和 $bi-fBm$ 的矩、概率律及特征函数的公式，也可以重构相关的朗之万型方程。这拓展并系统化了反常扩散 [16, 3, 12, 5] 研究中提出的范式，并进一步印证了这一理念：对于一大类具有非平稳增量的高斯过程，拉普蒂型变换是连接自相似性与平稳性的关键桥梁。

本文组织如下。第2节讨论缩放后的 $s-fBm$和缩放后的 $bi-fBm$：平稳性、精确协方差、渐近性质及遍历性质。第3节介绍由 $s-fBm$ 和 $bi-fBm$ 驱动的朗之万方程构造，并分析其 Lamperti 变换。

第4节给出数值模拟，以验证理论预测。结论见第5节。

2 面向 $s-fBm$ 和 $bi-fB$的 Lamperti变换 m

在许多应用中，人们关注的是在时间上呈现精确幂律标度、但自身并不平稳的随机动力学。若一个实值过程 $X=\{X(t)\}_{t>0}$ 对于每个 $c>0$都满足，则称其为 β-自相似过程，

$$\{X(ct)\}_{t>0} \overset{d}{=} \{c^{\beta}X(t)\}_{t>0}.$$

这一性质体现了特征时间尺度的缺失，是建立反常扩散及相关现象模型的自然起点。在本文中，我们经常将此类过程与幂律时间变换 $t\mapsto t^{\alpha}$、 $\alpha>0$复合，从而得到形如 $t\mapsto X(t^{\alpha})$、自相似指数为 $\alpha\beta$的缩放自相似族。

Lamperti 的观察是，定义在 $(0,\infty)$ 上的自相似过程可以通过指数时间变换和确定性重新缩放，转换为定义在 $\mathbb{R}$ 上的平稳过程。具体而言，指数映射 $t\mapsto e^{\alpha t}$ 将乘法时间缩放转换为加法平移，而前置因子 $e^{-\alpha Ht}$ 则补偿了自相似性所导致的增长。就我们的目的而言，采用下面这一缩放版本更为方便。

定义 2.1。 设 $\alpha>0$, $H\in(0,1)$，并设 $X=\{X(t)\}_{t>0}$ 为一个 αH-自相似过程，即

$$\{X(ct)\}_{t>0} \overset{d}{=} \{c^{\alpha H}X(t)\}_{t>0}, \qquad c>0.$$

X <style id="6">的缩放 *Lamperti* 变换为以下过程

$$X^{\mathrm{LT}}(t) := e^{-\alpha Ht}X(e^{\alpha t}), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{2.1}$$

逆映射为

$$X(t) = t^{\alpha H}X^{\mathrm{LT}}\left(\frac{\log t}{\alpha}\right), \qquad t>0. \tag{2.2}$$

只要 X 是 αH-自相似的，其 Lamperti 变换 X^{LT} 就是平稳的。

注 2.2。 指数 αH 反映了缩放过程的自相似指数，而参数 $e^{\alpha t}$ 使指数时间变换与底层幂律缩放相吻合。逆关系 (2.2) 确保了精确对应，即 $X(e^{\alpha t})=e^{\alpha Ht}X^{\mathrm{LT}}(t)$。当 $\alpha=1$ 时，我们得到经典 Lamperti 变换 $X^{\mathrm{LT}}(t)=e^{-Ht}X(e^{t})$。下文中，这种表示构成了非平稳自相似过程与可进行谱分析和遍历分析的平稳高斯场之间的桥梁。

2.1 $s-fBm$ 的 Lamperti 变换

我们首先讨论 $s-fBm$ 的情形：这是一种增量非平稳但具有精确自相似性的非平稳高斯过程。该过程为理解 Lamperti 变换如何作用于具有长程时间结构、且与分数布朗情形略有不同的高斯过程，提供了一个自然的基准。

定义2.3。 设 $H\in(0,\ 1)$。$s-fBm$ $S_H=\{S_H(t)\}^{t\geq 0}$是一个协方差为

$$\mathbb{E}[S_H(s)S_H(t)] = s^{2H}+t^{2H}-\frac{1}{2}\big((s+t)^{2H}+|t-s|^{2H}\big), \qquad s,t\geq 0. \tag{2.3}$$

该过程是 H-自相似的，即

$$\{S_H(at)\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{a^H S_H(t)\}_{t\geq 0}, \qquad a>0,$$

但其增量并非平稳；例如，参见 [2]。

对于固定的缩放指数 $\alpha>0$，自然可以考虑经时间变换的过程 s

$$Y(t) := S_H(t^\alpha), \qquad t\geq 0, \tag{2.4}$$

这是一个 αH-自相似高斯过程:

$$\{Y(ct)\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{c^{\alpha H} Y(t)\}_{t\geq 0}, \qquad c>0.$$

从应用的角度来看，参数 α 使我们能够将物理时间的缩放与赫斯特指数 H解耦，从而在拟合经验缩放指数时提供额外的灵活性。将定义 2.1 中的缩放 Lamperti 映射应用于 Y，可得到与 S_H相关联的平稳高斯表示。

设 S_H为一个赫斯特指数为 $H\in$（0，1）的 $s-fBm$，且 $\alpha>0$固定。我们考虑缩放过程 $S_H(t^\alpha)$的 Lamperti 变换。

定义 2.4。对于 $t\in\mathbb{R}$ 定义

$$S_H^{\mathrm{LT}}(t) := e^{-\alpha H t} S_H(e^{\alpha t}). \tag{2.5}$$

Th定理 2.5。 过程 S_H^{LT} =$\{S_H^{\mathrm{LT}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个中心平稳高斯过程 $s.$

证明。 高斯性和中心性显然成立，因为 S_H 是中心高斯过程，而 S_H^{LT}是线性变换。为证明平稳性，固定 $u\in\mathbb{R}$ 并注意到

$$S_H^{\mathrm{LT}}(t+u) = e^{-\alpha H(t+u)} S_H(e^{\alpha(t+u)}) = e^{-\alpha H t} e^{-\alpha H u} S_H(e^{\alpha u} e^{\alpha t}).$$

由 S_H的 H-自相似性,

$$S_H(e^{\alpha u}e^{\alpha t}) \overset{d}{=} (e^{\alpha u})^H S_H(e^{\alpha t}) = e^{\alpha H u} S_H(e^{\alpha t}).$$

Thus

$$S_H^{\mathrm{LT}}(t+u) \overset{d}{=} e^{-\alpha H t} e^{-\alpha H u} e^{\alpha H u} S_H(e^{\alpha t}) = e^{-\alpha H t} S_H(e^{\alpha t}) = S_H^{\mathrm{LT}}(t),$$

这表明所有有限维分布都具有平移不变性。因此过程是平稳的。 □

前述结果表明，Lamperti 变换将S_H 的自相似性转化为 S_H^{LT}的平稳性。为了定量利用这一表示，尤其是研究遍历性和混合性质，我们现在以闭式计算 S_H^{LT}的自协方差函数。

定理 2.6。 设 S_H^{LT}是 $s-fBm\,(2.5)$的 *Lamperti* 变换。那么， S_H^{LT}的自协方差函数为

$$R_{S,\alpha}(t) := \mathbb{E}\big[S_H^{\mathrm{LT}}(t) S_H^{\mathrm{LT}}(0)\big] = e^{-\alpha H t}\Big(e^{2\alpha H t} + 1 - \frac{1}{2}\big[(e^{\alpha t}+1)^{2H} + (e^{\alpha t}-1)^{2H}\big]\Big), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

证明。 由式（2.5），

$$R_{S,\alpha}(t) = \mathbb{E}\big[e^{-\alpha H t} S_H(e^{\alpha t})\cdot S_H(1)\big] = e^{-\alpha H t}\mathbb{E}\big[S_H(e^{\alpha t}) S_H(1)\big].$$

利用（2.3），其中 $(s,t) = (e^{\alpha t},1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_H(e^{\alpha t})S_H(1)] &= (e^{\alpha t})^{2H} + 1^{2H} - \frac{1}{2}\big((e^{\alpha t}+1)^{2H} + |e^{\alpha t}-1|^{2H}\big)\\ &= e^{2\alpha H t} + 1 - \frac{1}{2}\big((e^{\alpha t}+1)^{2H} + (e^{\alpha t}-1)^{2H}\big),\end{aligned}$$

由于 $e^{\alpha t} > 0$ 意味着 $|1-e^{\alpha t}| = e^{\alpha t} - 1$。代入得 (2.6)。

在 $t = 0$ 处，我们得到

$$R_{S,\alpha}(0) = 1 + 1 - \frac{1}{2}\big((1+1)^{2H} + (1-1)^{2H}\big) = 2 - 2^{2H-1},$$

这等于 $\mathrm{Var}(S_H(1))$，正如从 $S_H^{\mathrm{LT}}(0) = S_H(1)$ 所预期的那样。该表达式显然关于 t 为偶函数（无论是由平稳性还是直接观察都可得）。 □

$R_{S,\,\alpha}(t)$ 的显式结构使我们能够精确地识别 S_H^{LT} 在较大时间滞后下的时间相关性。特别是，主导指数项决定了过程遗忘其过去的速率，因此支配其遍历性和混合性质。

引理 2.7。设 $R_{S,\,\alpha}$ 由 (2.6) 给出。当 $t \to \infty$ 时，

$$R_{S,\alpha}(t) = e^{-\alpha H t} + O\big(e^{-(2-H)\alpha t}\big), \tag{2.7}$$

因此 $\lim_{t\to\infty} R_{S,\,\alpha}(t) = 0$。

证明。令 $x = e^{\alpha t}$，则 $x \to \infty$ 可写为 $t \to \infty$。于是

$$R_{S,\alpha}(t) = x^{-H}\left(x^{2H} + 1 - \frac{1}{2}\big[(x+1)^{2H} + (x-1)^{2H}\big]\right).$$

我们将 $(x \pm 1)^{2H}$ 按 x 的幂展开。当 $|z| < 1$ 时，

$$\begin{aligned}&(1 \pm z)^{2H}\\ &= 1 \pm 2Hz + \frac{2H(2H-1)}{2}z^2 \pm \frac{2H(2H-1)(2H-2)}{3!}z^3\\ &+ \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{4!}z^4 + O(z^5).\end{aligned}$$

将 $+$ 和 $-$ 的展开式相加，奇次幂项相消，得到

$$(1+z)^{2H} + (1-z)^{2H} = 2\left(1 + \frac{2H(2H-1)}{2}z^2 + \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{4!}z^4 + O(z^6)\right).$$

取 $z = x^{-1}$ 后，得到

$$(1+x^{-1})^{2H} + (1-x^{-1})^{2H} = 2\left(1 + H(2H-1)x^{-2} + O(x^{-4})\right),$$

因此

$$(x+1)^{2H} + (x-1)^{2H} = 2x^{2H}\left(1 + H(2H-1)x^{-2} + O(x^{-4})\right).$$

所以

$$\begin{aligned}x^{2H} + 1 - \frac{1}{2}\big[(x+1)^{2H} + (x-1)^{2H}\big] &= x^{2H} + 1 - x^{2H}\left(1 + H(2H-1)x^{-2} + O(x^{-4})\right)\\ &= 1 - H(2H-1)x^{2H-2} + O(x^{2H-4}).\end{aligned}$$

乘以 x^{-H} 得到

$$R_{S,\alpha}(t) = x^{-H} - H(2H-1)x^{H-2} + O(x^{H-4}),$$

使用 $x = e^{\alpha t}$ 将其还原为 t，得到

$$R_{S,\alpha}(t) = e^{-\alpha H t} - H(2H-1)e^{-(2-H)\alpha t} + O\big(e^{-(4-H)\alpha t}\big),$$

即为式 (2.7)。由于 $R_{S,\alpha}$ 是偶函数，因此相同的衰减规律也适用于 $t \to -\infty$。 □

该引理表明，协方差以主导速率 αH 指数衰减，而次主导修正项的衰减严格更快。特别地，$R_{S,\alpha} \in L^1(\mathbb{R})$，这是平稳高斯过程遍历理论中的一项关键正则性，并直接推出具有明确速率的强混合性。

定理 2.8。设 S_H 为一个次分数布朗运动，且 $H \in (0,1)$ 并且 $\alpha > 0$。那么，在(2.5) 中定义的 *Lamperti* 变换S_H^{LT}是一个遍历且强混合的平稳高斯过程。此外，其 α-混合系数

$$\alpha_S(h) := \sup\Big\{ \big|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\big| : A \in \sigma\{S_H^{\mathrm{LT}}(t) : t \le 0\},\, B \in \sigma\{S_H^{\mathrm{LT}}(t) : t \ge h\} \Big\}$$

满足

$$\alpha_S(h) \le C e^{-\alpha H h}, \qquad h \to \infty,$$

对某个常数 $C > 0$成立。特别地，其显式指数混合速率为

$$\lambda_S(H, \alpha) = \alpha H.$$

证明。令 $X(t) := S_H^{\mathrm{LT}}(t)$，并设 $R_{S,\alpha}(t) = \mathbb{E}[X(t)X(0)]$。由引理 2.7 可得 $\lim_{|t|\to\infty} R_{S,\alpha}(t) = 0$，且收敛速率为指数速率。对于平稳高斯过程，这等价于遍历性；例如，参见 [7, 第 5] 章或 [15]。

为证明强混合性并给出显式速率，我们首先对协方差给出一个精确界。由 (2.7) 可得，当 $|t|$ 足够大时，

$$R_{S,\alpha}(t) = e^{-\alpha H t} + O\big(e^{-(2-H)\alpha t}\big),$$

因此存在 $C_1 > 0$，使得

$$|R_{S,\alpha}(t)| \le C_1 e^{-\alpha H |t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

对于平稳高斯过程，伊布拉吉莫夫–罗扎诺夫不等式（见 [7, 定理 17.2.3]）给出

$$\alpha_S(h) \le C_2 \int_{|t| \ge h} |R_{S,\alpha}(t)|\, dt,$$

对某个 $C_2 > 0$ 成立。利用上述界，

$$\alpha_S(h) \le C_2 \int_h^\infty C_1 e^{-\alpha H t}\, dt = \frac{C_1 C_2}{\alpha H}\, e^{-\alpha H h}.$$

因此 $\alpha_S(h) \le C e^{-\alpha H h}$，其中 $C = C_1 C_2/(\alpha H)$，且指数混合速率恰为$\lambda_S(H, \alpha) = \alpha H$。 □

该定理表明，Lamperti 变换 S_H^{LT}是一个快速混合的高斯场，其去相关速率完全由乘积 αH 决定。这个明确的速率将在后文作为参照，用于比较不同的高斯过程及其对应的朗之万方程。

推论 2.9。设 S_H 和 S_H^{LT}如上所述，且 $f \in L^1(\mathbb{P})$。由伯克霍夫遍历定理，

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(S_H^{\mathrm{LT}}(s))\, ds \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.} \mathbb{E}[f(S_H^{\mathrm{LT}}(0))]. \tag{2.8}$$

利用逆 *Lamperti* 关系 (2.2) 以及 $X(t) = S_H(t^\alpha)$，我们得到

$$S_H(t) = t^{\alpha H} S_H^{\mathrm{LT}}\left(\frac{\log t}{\alpha}\right), \qquad t > 0. \tag{2.9}$$

特别地，对于整数 $k \geq 1$，将 $f(x) = x^k$ 代入 (2.8) 可得

$$\frac{1}{T}\int_0^T (S_H^{\mathrm{LT}}(s))^k \, ds \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.} \mathbb{E}\big[(S_H^{\mathrm{LT}}(0))^k\big],$$

and

$$\mathbb{E}[S_H(t)^k] = t^{k\alpha H}\,\mathbb{E}\big[(S_H^{\mathrm{LT}}(0))^k\big], \qquad t > 0.$$

选择 $f(x) = e^{iux}$ 可得时间平均特征函数几乎必然收敛，并表明可以根据S_H^{LT}的一条长轨迹重构 $S_H(t)$ 的单时刻分布。

该推论凸显了遍历性的实际意义：可以根据平稳 Lamperti 变换的一条实现沿时间取平均，恢复原非平稳过程 $S_H(t)$ 的所有单时刻边缘分布和矩。这一观察凸显了 Lamperti 表示在自相似过程统计推断中的实用价值。

注 2.10. 在次分数情形中，单一有效指数 αH 完全决定了 Lamperti 变换的指数混合速率。

2.2 $bi-fBm$的 Lamperti 变换

现在我们转而讨论 $bi-fBm$，这是一种分数布朗运动的双参数高斯扩展，并应用相同的缩放 Lamperti 框架。额外参数 K 丰富了协方差结构，并带来了更广泛的时间依赖性。因此，了解 H 和 K 如何影响相应 Lamperti 变换的混合性与遍历性质，颇有意义。

定义 2.11。令 $H \in (0,1)$ 且 $K \in (0,1]$。一个 $bi-fBm$ $B_{H,K} = \{B_{H,K}(t)\}_{t\geq 0}$是一个协方差为

$$\mathbb{E}[B_{H,K}(t)B_{H,K}(s)] = 2^{-K}\Big((t^{2H}+s^{2H})^K - |t-s|^{2HK}\Big), \qquad s,t \geq 0. \tag{2.10}$$

该过程是 HK-自相似的，即

$$\{B_{H,K}(ct)\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{c^{HK}B_{H,K}(t)\}_{t\geq 0}, \qquad c > 0. \tag{2.11}$$

例如，参见 [18, 6]。

对于 $\alpha > 0$，我们再次引入幂律时间变换，

$$X(t) := B_{H,K}(t^\alpha), \qquad t \geq 0, \tag{2.12}$$

由此得到一个 αHK-自相似过程:

$$\{X(ct)\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{c^{\alpha HK}X(t)\}_{t\geq 0}, \qquad c > 0. \tag{2.13}$$

将定义 2.1 中的缩放 Lamperti 映射应用于 X，可得到一个编码双分数阶结构的平稳高斯场。与次分数情形一样，这种平稳表示是进行遍历性和混合性分析的自然对象。

定义 2.12。设 X 如式 (2.12) 所示。其 Lamperti 变换为

$$B_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t) := e^{-\alpha HKt}X(e^{\alpha t}) = e^{-\alpha HKt}B_{H,K}(e^{\alpha t}), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

带有逆映射

$$X(t) = t^{\alpha HK}B_{H,K}^{\mathrm{LT}}\left(\frac{\log t}{\alpha}\right), \qquad t > 0. \tag{2.15}$$

定理 2.13。 对于每个 $H \in (0,1)$， $K \in (0,1]$ 和 $\alpha > 0$，由(2.14)定义的过程 $B^{\mathrm{LT}}_{H,K}$ 是一个中心平稳高斯过程。

证明。 高斯性和中心性与前面一样成立。对于平稳性，固定 $u \in \mathbb{R}$ 并计算

$$B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t+u) = e^{-\alpha HK(t+u)} B_{H,K}(e^{\alpha(t+u)}) = e^{-\alpha HKt} e^{-\alpha HKu} B_{H,K}(e^{\alpha u} e^{\alpha t}).$$

由 HK-自相似性 (2.11),

$$B_{H,K}(e^{\alpha u} e^{\alpha t}) \overset{d}{=} (e^{\alpha u})^{HK} B_{H,K}(e^{\alpha t}) = e^{\alpha HKu} B_{H,K}(e^{\alpha t}).$$

Thus

$$B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t+u) \overset{d}{=} e^{-\alpha HKt} B_{H,K}(e^{\alpha t}) = B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t),$$

因此$B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}$ 是平稳的。 □

与次分数情形类似，接下来我们确定$B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}$的自协方差函数。这将揭示缩放参数 H 和 K 在 Lamperti 变换下如何相互作用，并且对于确定精确的混合速率至关重要。

定理 2.14。 设 $B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}(t)$ 为 $bi-fBm$(2.14)的 ***Lamperti*** 变换。定义自协方差函数

$$R_{B,\alpha}(t) := \mathbb{E}[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t)\, B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

那么，对于每个 $t \in \mathbb{R}$,

$$R_{B,\alpha}(t) = e^{-\alpha HKt}\, \mathbb{E}[B_{H,K}(e^{\alpha t}) B_{H,K}(1)], \tag{2.16}$$

且这可以表示为显式形式

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} e^{-\alpha HKt} \Big((e^{2\alpha Ht}+1)^K - (e^{\alpha t}-1)^{2HK} \Big), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

特别地，$R_{B,\,\alpha}(0) = 1$ 且 $R_{B,\,\alpha}$ 是偶函数。

证明。 根据 $R_{B,\,\alpha}$ 的定义以及 Lamperti 变换，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned} R_{B,\alpha}(t) &= \mathbb{E}[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t)\, B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)] = \mathbb{E}[e^{-\alpha HKt} B_{H,K}(e^{\alpha t}) \cdot e^{-\alpha HK\cdot 0} B_{H,K}(e^{\alpha\cdot 0})] \\ &= \mathbb{E}[e^{-\alpha HKt} B_{H,K}(e^{\alpha t}) B_{H,K}(1)]. \end{aligned}$$

因 子 $e^{-\alpha HKt}$ 是确定性的，因此可以将其移到期望之外，从而得到 s

$$R_{B,\alpha}(t) = e^{-\alpha HKt}\, \mathbb{E}[B_{H,K}(e^{\alpha t}) B_{H,K}(1)],$$

这就证明了（2.16）。

为得到显式表达式，我们计算底层 $bi-fBm$ 在时刻对（$e^{\alpha t}$，1）处的协方差。将 $s = e^{\alpha t}$ 和 $t = 1$ 代入协方差公式 (2.10)，得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{H,K}(e^{\alpha t}) B_{H,K}(1)] &= 2^{-K} \Big(((e^{\alpha t})^{2H} + 1^{2H})^K - |e^{\alpha t}-1|^{2HK} \Big) \\ &= 2^{-K} \Big((e^{2\alpha Ht}+1)^K - |e^{\alpha t}-1|^{2HK} \Big). \end{aligned}$$

I特别地，对于 $t \geq 0$，我们有 $e^{\alpha t} \geq 1$，因此 $|e^{\alpha t}-1| = e^{\alpha t}-1$，从而对于 $t \geq 0$

$$\mathbb{E}[B_{H,K}(e^{\alpha t}) B_{H,K}(1)] = 2^{-K} \Big((e^{2\alpha Ht}+1)^K - (e^{\alpha t}-1)^{2HK} \Big).$$

将其代入 (2.16)，可得对所有 $t \geq 0$,

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} e^{-\alpha HKt} \Big((e^{2\alpha Ht} + 1)^K - (e^{\alpha t} - 1)^{2HK} \Big),$$

即为 $[0, \infty$ 上的 (2.17)。

现在计算零点处的值。一方面，根据R_B的定义，α,

$$R_{B,\alpha}(0) = \mathbb{E}[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)^2] = \mathrm{Var}(B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)).$$

另一方面，根据 Lamperti 关系,

$$B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0) = e^{-\alpha HK \cdot 0} B_{H,K}(e^{\alpha \cdot 0}) = B_{H,K}(1),$$

so

$$R_{B,\alpha}(0) = \mathrm{Var}(B_{H,K}(1)).$$

利用 $s = t = 1$ 的协方差公式,

$$\mathrm{Var}(B_{H,K}(1)) = 2^{-K} \Big((1^{2H} + 1^{2H})^K - |1 - 1|^{2HK} \Big) = 2^{-K}(2^K - 0) = 1.$$

因此，$R_{B,\ \alpha}(0) = 1$，这与在 $t = 0$ 处计算的 (2.17) 一致，因为 $e^{\alpha \cdot 0} = 1$ 给出

$$R_{B,\alpha}(0) = 2^{-K} e^0 \Big((1 + 1)^K - (1 - 1)^{2HK} \Big) = 2^{-K} 2^K = 1.$$

接下来需要证明 $R_{B,\ \alpha}$ 是偶函数，并将显式表达式推广到所有 $t \in \mathbb{R}$。由于 $B^{\mathrm{LT}}_{H,\ K}$ 是平稳且中心化的，通常的协方差对称性意味着

$$R_{B,\alpha}(-t) = \mathbb{E}[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(-t) B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)] = \mathbb{E}[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0) B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t)] = R_{B,\alpha}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

因此 $R_{B,\ \alpha}$ 为偶数。特别地，对于 $t < 0$，我们有

$$R_{B,\alpha}(t) = R_{B,\alpha}(-t),$$

且右　　侧由（2.17）给出，其中用 $-t$ 替代 t。这表明该公式

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} e^{-\alpha HKt} \Big((e^{2\alpha Ht} + 1)^K - (e^{\alpha t} - 1)^{2HK} \Big)$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$均成立，同时需考虑 $|e^{\alpha t} - 1|^{2HK}$ 中的绝对值（当$t < 0$时）。综合这些论证，我们得到（2.16）、（2.17）、$R_{B,\ \alpha}(0) = 1$ 的值，以及 $R_{B,\ \alpha}$ 的偶性，从而证明完成。

□

显式表达式（2.17）揭示了两种指数尺度之间的竞争，其由下文将出现的指数 $2H - HK$ 和 $1 - HK$ 所决定。与较为简单的次分数情形相比，这种竞争导致双分数布朗运动情形具有更丰富的混合行为范围。

引理 2.15。 存在常数 c（H, K, α） > 0 使得

$$R_{B,\alpha}(t) = O(e^{-c(H,K,\alpha)t}), \qquad t \to \infty. \tag{2.18}$$

特别地 极限$t \to \infty$ $R_{B,\ \alpha}(t) = 0$。

证明。令 $x = e^{\alpha t}$，于是 $x \to \infty$ 当 $t \to \infty$。由 (2.17)，

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} x^{-HK} \big[(x^{2H} + 1)^K - (x-1)^{2HK} \big].$$

我们展开这两项。首先，

$$(x^{2H} + 1)^K = x^{2HK}(1 + x^{-2H})^K = x^{2HK} + K x^{2HK-2H} + O(x^{2HK-4H}),$$

而

$$(x-1)^{2HK} = x^{2HK}(1 - x^{-1})^{2HK} = x^{2HK} - 2HK x^{2HK-1} + O(x^{2HK-2}).$$

相减后，

$$(x^{2H} + 1)^K - (x-1)^{2HK} = K x^{2HK-2H} + 2HK x^{2HK-1} + O(x^{2HK-4H}) + O(x^{2HK-2}).$$

因此

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} \Big(K x^{HK-2H} + 2HK x^{HK-1} + \text{lower-order terms} \Big).$$

由于 $H \in (0,\ 1)$，$K \in (0, 1]$，我们有 $HK < 1$ 且 $2H > HK$，因此指数 $HK - 2H = -(2H - HK) < 0$ 和 $HK - 1 = -(1 - HK) < 0$。因此，存在 $c(H,\ K) > 0$ 使得 $|R_{B,\ \alpha}(t)| \le C x^{-c(H,K)} = C e^{-c(H,K)\alpha t}$ 对足够大的 t 成立，这就是 (2.18)。$R_{B,\ \alpha}$ 的偶性将该界扩展至 $t \to -\infty$。 □

上文出现的指数 $c(H,\ K,\ \alpha) = \alpha\, c(H,\ K)$ 严格为正，它刻画了双分数参数 K 相较于次分数情形如何减缓或加快相关性的衰减。特别地，$c(H,\ K)$ 随着 K 的变化，在不同的机制之间进行插值，这种插值直接体现在混合速率上。

注记 2.16。与次分数情形不同，在次分数情形中，单个指数 αH 完全决定指数协方差衰减速率；而双分数情形则呈现出两种相互竞争的弛豫机制，它们源自协方差的不同组成部分。这两种机制分别体现在指数 $2H - HK$ 和 $1 - HK$ 中，其中较慢的一种决定了整体混合速率。因此，参数 K 不仅仅是对协方差进行变形，而是显著改变了长程依赖，形成了一种在性质上有别于次分数情形的真正双参数混合结构。

定理 2.17。对于每个 $H \in (0,\ 1)$，$K \in (0, 1]$ 和 $\alpha > 0$，过程 $B_{H,\ K}^{\mathrm{LT}}$ 是一个遍历且强混合的平稳高斯过程。此外，其 α 混合系数

$$\alpha_B(h) := \sup\Big\{ |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| : A \in \sigma\{B_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t) : t \le 0\},\ B \in \sigma\{B_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t) : t \ge h\} \Big\}$$

满足

$$\alpha_B(h) \le C e^{-\alpha \min\{2H-HK,\ 1-HK\}\, h}, \qquad h \to \infty,$$

对于某个 $C > 0$。因此，显式的混合速率为

$$\lambda_B(H, K, \alpha) = \alpha \min\{\, 2H - HK,\ 1 - HK \,\}.$$

证明。设 $R_{B,\ \alpha}$ 如上所述。根据引理 2.15，式 (2.18) 成立，因此 $\lim_{|t|\to\infty} R_{B,\ \alpha}(t) = 0$。对于平稳高斯过程，这等价于遍历性 [15, 7]。

对于强混合性，按照定理中的表述定义系数 $\alpha_B(h)$。如定理 2 的证明所示，8, [7] 得到

$$\alpha_B(h) \le C \int_{|t| \ge h} |R_{B,\alpha}(t)|\, dt,$$

对于 ome $C > 0$。为确定衰减率，我们使用显式的协方差表示 n
s

$$R_{B,\alpha}(t) = 2^{-K} e^{-\alpha HKt}[(e^{2\alpha Ht}+1)^K - (e^{\alpha t}-1)^{2HK}].$$

当 t 较大时，将两项展开可得

$$(e^{2\alpha Ht}+1)^K = e^{2\alpha HKt}\Big(1 + Ke^{-2\alpha Ht} + O(e^{-4\alpha Ht})\Big),$$

$$(e^{\alpha t}-1)^{2HK} = e^{2\alpha HKt}\Big(1 - 2HKe^{-\alpha t} + O(e^{-2\alpha t})\Big).$$

相减后，

$$(e^{2\alpha Ht}+1)^K - (e^{\alpha t}-1)^{2HK} = Ke^{2\alpha HKt-2\alpha Ht} + 2HKe^{2\alpha HKt-\alpha t} + O(e^{2\alpha HKt-4\alpha Ht}).$$

乘以 $e^{-\alpha HKt}$ 后可得

$$R_{B,\alpha}(t) = C_1 e^{-\alpha(2H-HK)t} + C_2 e^{-\alpha(1-HK)t} + \text{faster decaying terms},$$

对于适当的常数 C_1， C_2。衰减最慢的项对应于最小指数，因此存在 $C_3 > 0$ ，使得

$$|R_{B,\alpha}(t)| \le C_3 e^{-\alpha \min\{2H-HK,\ 1-HK\}|t|}.$$

因此，

$$\alpha_B(h) \le C\int_{|t|\ge h} |R_{B,\alpha}(t)|\,dt \le C' e^{-\alpha \min\{2H-HK,\ 1-HK\}h},$$

对于某个 $C' > 0$，由此得到所述界和速率。 □

因此，在双分数情形中，混合速率由两个指数中较小者$2H-HK$和 $1-HK$决定，反映了两种相互竞争的弛豫机制。特别是，对于固定的H ，参数 K 可以显著减慢或加快混合；这一现象在单参数次分数阶情形中并不存在。

推论 2.18。设 $f \in L^1(\mathbb{P})$。则

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(s))\,ds \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.} \mathbb{E}[f(B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0))].$$

利用 (2.15) 以及 $X(t) = B_{H,\,K}(t^\alpha)$，我们有

$$B_{H,K}(t^\alpha) = t^{\alpha HK} B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(\log t), \qquad t > 0.$$

特别地，对于整数 $k \ge 1$,

$$\mathbb{E}\big[B_{H,K}(t^\alpha)^k\big] = t^{k\alpha HK}\mathbb{E}\big[B^{\mathrm{LT}}_{H,K}(0)^k\big].$$

$B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}(s)$ 的时间平均特征函数几乎必然收敛到 $B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}(0)$的总体特征函数，由此可通过自相似性重构 $B_{H,\,K}(t^\alpha)$ 的单时刻分布。

与次分数情形一样，该推论表明，可以从平稳 Lamperti 变换的一条长轨迹中提取关于原始双分数布朗运动$B_{H,\,K}$ 的统计信息。对 H 和 K 的依赖性完全编码于平稳场$B^{\mathrm{LT}}_{H,\,K}$中，后者在分析和数值计算方面通常都更易于处理。

注记 2.19。 竞争的指数 $2H-HK$ 和 $1-HK$ 表明，双分数 Lamperti 协方差的衰减本质上取决于 H 与K之间的相互作用，因此其混合行为比次分数情形更丰富。

3 缩放朗之万方法

在第2节中，我们证明了经缩放的 $s-fBm$ 和 $bi-fBm$ 存在平稳 Lamperti 变换，并具有显式的协方差和混合性质。然而，在许多应用中，人们感兴趣的不仅是原始的高斯驱动过程，还包括由它们激发的线性系统，例如广义朗之万方程。描述这类动力学的一种自然方式，是考虑相对于底层高斯场的幂律型随机积分。所得过程保留了自相似结构，同时带有额外的时间平滑，这又会改变其相关性和混合行为。

本节介绍并分析两种此类构造：一种由 $s-fBm$ 驱动的朗之万型过程，以及一种由 $bi-fBm$ 驱动的类似过程。对于每种情形，我们首先定义幂律随机积分，并证明其自相似性。然后应用定义 2.1 中的缩放 Lamperti 映射，得到平稳高斯表示，最后推导协方差公式和指数混合性质。全文中，我们用上划线区分朗之万型对象与第2节所研究的底层缩放过程的 Lamperti 变换。

3.1 缩放朗之万 $s-fBm$

我们从次分数情形开始。驱动噪声是定义2.3中的 $s-fBm$ S_H，并且我们在时域中引入一个幂律记忆核。这可以看作是广义朗之万方程的一个玩具模型，其幂律摩擦的核指数经过调节，使得积分后仍能保持自相似性。

设 S_H 是一个赫斯特指数为 $H\in(0,1)$ 且协方差为 (2.3) 的 $s-fBm$。受分数布朗情形的启发（例如参见 [16, 3, 12]），我们考虑以下幂律驱动积分。

定义3.1。固定 $\alpha>0$ 和 $H\in(0,1)$。假设对于每个 $t\geq 0$，随机积分

$$\int_0^t y^{H(\alpha-1)}\,dS_H(y)$$

均定义良好（例如，对于 $H>1/2$ 可按路径定义，或对于 $s-fBm$ 可在适当的随机微积分中按 Skorokhod／散度意义定义，参见 [2]）。定义

$$\overline{Y}(t):=c_{H,\alpha}\int_0^t y^{H(\alpha-1)}\,dS_H(y),\qquad t\geq 0, \tag{3.1}$$

其中 $c_{H,\ \alpha}>0$ 是归一化常数。我们称 Y 为*Langevin* 型缩放的 $s-fBm$。

过程 Y 是高斯场 S_H 的线性泛函，因此其自身也是高斯的。下一个引理记录了这一基本事实，后文将反复使用该事实。

引理 3.2. 过程 Y 是中心高斯过程。

证明。对于任意 $t\geq 0$，(3.1) 中的积分是高斯过程 S_H的线性泛函，因此是高斯的。对于任意有限向量 $(Y(t_1)\dots,Y(t_n))$，由线性性可知各分量联合高斯。由于 S_H 是中心化的，且被积函数是确定性的，因此对所有 $t\geq 0$，$\mathbb{E}[Y(t)]=0$。 □

我们构造中的一个关键点是，核中幂次 $H(\alpha-1)$ 的选择确保积分不会破坏自相似性，而只会以可控的方式改变其指标。下一个结果将对此作出精确说明。

定理 3.3. 过程 Y 是 αH-自相似的：

$$\{\overline{Y}(ct)\}_{t\geq 0}\ \overset{d}{=}\ \{c^{\alpha H}\overline{Y}(t)\}_{t\geq 0},\qquad c>0.$$

证明. 设 $c>0, t\geq 0$。由 (3.1) 可得,

$$\overline{Y}(ct)=c_{H,\alpha}\int_0^{ct} y^{H(\alpha-1)}\,dS_H(y).$$

作变量替换 $y=cu$，并利用 H-自相似性 $S_H(cu)\overset{d}{=}c^H S_H(u)$，可得

$$dS_H(cu)\overset{d}{=}c^H dS_H(u),$$

因此

$$\overline{Y}(ct)\overset{d}{=}c_{H,\alpha}\int_0^{t}(cu)^{H(\alpha-1)}\,c^H dS_H(u)=c^{H(\alpha-1)+H}\,c_{H,\alpha}\int_0^t u^{H(\alpha-1)}\,dS_H(u)=c^{\alpha H}\overline{Y}(t).$$

有限维分布也相应地缩放。 □

现在，我们通过定义 2.1 中的缩放Lamperti变换，将这一自相似过程转换到平稳框架中。由此将得到一个平稳高斯过程，其协方差和混合性质可以与第2节中的情形平行地进行分析。

定义 3.4. Y 的 Lamperti 变换是过程 $S_H^{\mathrm{LT}}=\{S_H^{\mathrm{LT}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，定义如下:

$$\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(t):=e^{-\alpha Ht}\overline{Y}(e^{\alpha t}),\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

下一个定理表明，S_H^{LT} 是一个合理的平稳高斯场，与第2节中研究的 Lamperti 变换完全类似。事实上，根据一般的 Lamperti对应，平稳性现在是显而易见的。

定理 3.5. 过程 S_H^{LT} 是中心平稳高斯过程。

证明. 根据引理 3.2，Y 是中心高斯的，因此作为线性变换，S_H^{LT} 也为中心高斯。根据定理 3.3，Y 是 αH-自相似的，而定义 2.1 指出，任意 αH-自相似过程的 Lamperti 变换都是平稳的。将此结论应用于 $X=Y$，即可得证。

□

为理解朗之万核所诱导的时间结构，接下来我们推导 S_H^{LT} 的协方差。该表示将用 $s-fBm$ 协方差的混合二阶导数来表达，并揭示两个长程核之间的显式抵消，其中一个继承自 $|x-y|^{2H-2}$，另一个则来自 $(x+y)^{2H-2}$。

定义

$$R_{\overline{S},\alpha}(t,s):=\mathbb{E}[\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(t)\,\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(s)],\qquad t,s\in\mathbb{R}.$$

定理3.6. 设 Y 由(3.1)给出，其中 $\beta=H(\alpha-1)$。则

$$R_{\overline{S},\alpha}(t,s)=e^{-\alpha H(t+s)}\,\mathbb{E}[\overline{Y}(e^{\alpha t})\overline{Y}(e^{\alpha s})], \tag{3.3}$$

且对所有 $u,v>0$,

$$\mathbb{E}[\overline{Y}(u)\overline{Y}(v)]=c_{H,\alpha}^2H(2H-1)\int_0^u\int_0^v x^\beta y^\beta\Big(|x-y|^{2H-2}-(x+y)^{2H-2}\Big)\,dx\,dy. \tag{3.4}$$

因此,

$$R_{\overline{S},\alpha}(t,s)=c_{H,\alpha}^2H(2H-1)e^{-\alpha H(t+s)}\int_0^{e^{\alpha t}}\int_0^{e^{\alpha s}} x^\beta y^\beta\Big(|x-y|^{2H-2}-(x+y)^{2H-2}\Big)\,dx\,dy. \tag{3.5}$$

证明。 由期望的线性性可从 (3.2) 得到关系式 (3.3)。为计算 $\mathbb{E}[Y(u)Y(v)]$，写作

$$\overline{Y}(u) = c_{H,\alpha} \int_0^u x^\beta \, dS_H(x), \qquad \overline{Y}(v) = c_{H,\alpha} \int_0^v y^\beta \, dS_H(y),$$

因此

$$\mathbb{E}[\overline{Y}(u)\overline{Y}(v)] = c_{H,\alpha}^2 \int_0^u \int_0^v x^\beta y^\beta \, dR_H(x,y),$$

其中 $R_H(x,y) = \mathbb{E}[S_H(x)S_H(y)]$ 由 (2.3) 给出。利用标准高斯等距性（参见 [8, 17]），并对两个变量分别进行分部积分，可得

$$\int_0^u \int_0^v x^\beta y^\beta \, dR_H(x,y) = \int_0^u \int_0^v x^\beta y^\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} R_H(x,y) \, dx \, dy,$$

因为 $R_H(0,y) = R_H(x,0) = 0$。由 (2.3) 可直接计算得

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} R_H(x,y) = H(2H-1)\Big(|x-y|^{2H-2} - (x+y)^{2H-2}\Big),$$

于是得到 (3.4)。将 $u = e^{\alpha t}$, $v = e^{\alpha s}$ 代入 (3.4)，并结合 (3.3)，得到 (3.5)。

□

表达式 (3.5) 表明，除 Lamperti 因子 $e^{-\alpha H(t+s)}$ 外，协方差由一个涉及两个幂律核之差的二重积分控制。$(x+y)^{2H-2}$ 前的负号恰好确保了无穷远处的可积性，并最终使 Lamperti 域中的相关性呈指数衰减。

现在转而讨论遍历性和混合性。与第2节一样，关键步骤是得到协方差的显式指数界，由此便可应用高斯遍历性和混合性判据。

定理 3.7. 过程 S_H^{LT} 是一个遍历且强混合的平稳高斯过程，其协方差和 α-混合系数呈指数衰减。更确切地说，它的 α-混合系数

$$\alpha_{\overline{S}}(h) := \sup\Big\{ \big|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\big| : A \in \sigma\{\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(t) : t \le 0\},\, B \in \sigma\{\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(t) : t \ge h\} \Big\}$$

满足

$$\alpha_{\overline{S}}(h) \le C e^{-\alpha H h}, \qquad h \to \infty,$$

其中某个常数为 $C > 0$。因此，显式的指数混合速率为

$$\lambda_{\overline{S}}(H,\alpha) = \alpha H.$$

证明. 设 $R_{S,\alpha}(t) := R_{S,\alpha}(t,0)$。由 (3.5) 并取 $s = 0$，可得

$$R_{\overline{S},\alpha}(t) = c_{H,\alpha}^2 H(2H-1) e^{-\alpha H t} \int_0^{e^{\alpha t}} \int_0^1 x^\beta y^\beta \Big(|x-y|^{2H-2} - (x+y)^{2H-2}\Big) \, dx \, dy,$$

因为 $\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(0) = \overline{Y}(1)$。内积分遍历 $y \in [0,1]$，且当 $x \to \infty$ 时，核的表现类似于 x 的负次幂：

$$|x-y|^{2H-2} \asymp x^{2H-2}, \qquad (x+y)^{2H-2} \asymp x^{2H-2}.$$

由于 $2H-2 < 0$ 和 y 有界，双重积分至多随 $e^{\alpha t}$ 呈多项式增长；更准确地说，存在 $p > 0$ 使得

$$\int_0^{e^{\alpha t}} \int_0^1 x^\beta y^\beta \Big(|x-y|^{2H-2} - (x+y)^{2H-2}\Big) \, dx \, dy = O(e^{p\alpha t}), \qquad t \to \infty.$$

两个核之间的抵消确保可以选取 $p < H$，使得 $\alpha H - p\alpha > 0$。因此，

$$R_{\overline{S},\alpha}(t) = O\big(e^{-(\alpha H - p\alpha)t}\big),$$

特别地，存在 $C_1 > 0$ 使得

$$|R_{\overline{S},\alpha}(t)| \le C_1 e^{-\alpha H|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

这表明 $\lim_{|t|\to\infty} R_{S,\,\alpha}(t) = 0$，且具有指数速率。对于平稳高斯过程，这意味着其具有遍历性；参见 [15, 7]。

对于强混合性及其显式速率，我们再次调用高斯混合不等式：存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\alpha_{\overline{S}}(h) \le C_2 \int_{|t|\ge h} |R_{\overline{S},\alpha}(t)|\, dt.$$

利用刚刚得到的界，

$$\alpha_{\overline{S}}(h) \le C_2 \int_h^\infty C_1 e^{-\alpha H t}\, dt = \frac{C_1 C_2}{\alpha H} e^{-\alpha H h}.$$

因此，$\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}$ 具有强混合性，其显式指数速率为 $\lambda_S(H,\ \alpha) = \alpha H$。 □

前一个定理表明，朗之万平滑不会削弱底层缩放 $s - fBm$ 的 Lamperti 变换所继承的指数混合性：该速率再次仅由乘积 αH决定。从建模角度来看，这意味着朗之万型动力学的长时间去相关性由与驱动过程相同的有效指数控制。

推论3.8。设 $f \in L^1(\mathbb{P})$。则

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(s))\, ds \ \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.}\ \mathbb{E}[f(\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(0))].$$

此外，由于 Y 具有 αH-自相似性，我们有

$$\mathbb{E}[\overline{Y}(t)^k] = t^{k\alpha H}\mathbb{E}[(\overline{S}_H^{\mathrm{LT}}(0))^k], \qquad t > 0,\ k \ge 1.$$

因此，可以根据 S_H^{LT} 的单轨迹时间平均推断 $Y(\overline{t})$ 的矩和单时刻分布。

这一推论与第2节的重构结果相呼应：非平稳朗之万型过程 Y 的整个单时刻边缘分布族都可以从平稳Lamperti场中恢复，而该场更适合进行遍历采样和数值近似。

3.2 朗之万缩放的 $bi - fBm$

现在，我们构造朗之万方程的双分数布朗运动类比，并分析其Lamperti变换。 $bi - fBm$ 中的附加参数 K 丰富了协方差结构，并带来了更多样的混合行为。与前文一样，我们保留朗之万型变换的上划线记法，以便将其与第 2.2 节中考察的直接Lamperti变换$B_H^{\mathrm{LT}}{}_{,\,K}$ 区分开来。

在此设定下，幂律核与$bi - fBm$ 驱动过程的有效标度指数 HK 相适配，并证明所得过程具有 αHK-自相似性。随后，Lamperti 变换得到一个平稳高斯场，其协方差由两个不同的核组合而成，这两个核源自 $bi - fBm$ 协方差的分解。

令$B_{H,\,K}$ 为协方差为（2.10）的双分数布朗运动。设

$$\beta_{H,K,\alpha} := HK(\alpha - 1).$$

定义 3.9。固定 $\alpha > 0$, $H \in (0,\ 1)$, $K \in (0, 1]$。假设对于每个 $t \geq 0$，随机积分

$$\int_0^t y^{\beta_{H,K,\alpha}}\, dB_{H,K}(y)$$

定义良好（例如可作为路径意义下的黎曼–斯蒂尔切斯积分或散度积分）。定义 e

$$\overline{Y}_{H,K}(t) := c_{H,K,\alpha} \int_0^t y^{\beta_{H,K,\alpha}}\, dB_{H,K}(y), \qquad t \geq 0, \tag{3.6}$$

其中 $c_{H,\ K,\ \alpha} > 0$ 是归一化常数。我们称 $Y_{H,\ K}$ 为朗之万型缩放的 $bi - fBm$。

与次分数情形一样，$Y_{H,\ K}$ 是底层高斯场的线性泛函，因此是高斯且中心化的。

引理 3.10。过程 $Y_{H,\ K}$ 是一个中心高斯过程。

证明。与引理 3.2 中一样，积分表示 (3.6) 表明，$Y_{H,\ K}$ 是中心高斯场 $B_{H,\ K}$的线性泛函，因此是高斯且中心化的。 □

下一个结果确定了 $Y_{H,\ K}$的自相似指数；指数经过精确调整，使自相似性在朗之万积分作用下得以保持，此时 $bi - fBm$的有效指数为HK。

定理 3.11。过程 $Y_{H,\ K}$ 是 αHK-自相似的：

$$\{\overline{Y}_{H,K}(ct)\}_{t\geq 0} \overset{d}{=} \{c^{\alpha HK}\overline{Y}_{H,K}(t)\}_{t\geq 0}, \qquad c > 0.$$

证明。论证与定理 3.3 类似，将 S_H 替换为 $B_{H,\ K}$ 并利用 HK-自相似性 (2.11)。令 $y = cu$,

$$\overline{Y}_{H,K}(ct) = c_{H,K,\alpha} \int_0^{ct} y^{\beta_{H,K,\alpha}}\, dB_{H,K}(y) \overset{d}{=} c_{H,K,\alpha} \int_0^t (cu)^{\beta_{H,K,\alpha}} c^{HK}\, dB_{H,K}(u) = c^{\beta_{H,K,\alpha}+HK}\overline{Y}_{H,K}(t).$$

由于 $\beta_{H,\ K,\ \alpha} + HK = HK(\alpha - 1) + HK = \alpha HK$，结论得证。 □

现在，我们通过缩放 Lamperti 映射将 $Y_{H,\ K}$ 提升为平稳高斯过程，这与次分数朗之万情形以及第 2.2 节中的原始 $bi - fBm$ 情形完全类似。

定义 3.12。$Y_{H,\ K}$ 的 Lamperti 变换是过程

$$\overline{B}^{\mathrm{LT}}_{H,K}(t) := e^{-\alpha HKt}\, \overline{Y}_{H,K}(e^{\alpha t}), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

注意，此记法 $B^{\mathrm{LT}}_{H\ ,\ K}$ 不同于 (2.14) 中的 $B^{\mathrm{LT}}_{H,\ K}$；后者直接对应于 $B_{H,\ K}(t^\alpha)$ 的 Lamperti 变换，不包含朗之万积分。

定理 3.13. 对于每个 $H \in (0,1)$, $K \in (0, 1]$ 和 $\alpha > 0$，过程 $B^{\mathrm{LT}}_{H\ ,K}$ 中定义的过程是一个中心平稳高斯过程。 (3.7)

证明. 高斯性和中心性由引理 3.10 得出。根据定理 3.11, $Y_{H,K}$ 是 αHK-自相似的；将定义 2.1 中的 H 替换为 HK，可知其 Lamperti 变换是平稳的。由此即得结论。

□

接下来讨论协方差结构。对于 $u,\ v > 0$，我们记

$$R_{H,K}(u, v) := \mathbb{E}[B_{H,K}(u)B_{H,K}(v)] = 2^{-K}\Big((u^{2H} + v^{2H})^K - |u - v|^{2HK}\Big),$$

因此，$R_{H,\ K}$ 是协方差 (2.10)。与第3.1小节一样，$Y_{H,\ K}$的协方差可以用 $R_{H,\ K}$的混合二阶导数表示。直接计算可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x^{2H}+y^{2H})^K = 4H^2K(K-1)x^{2H-1}y^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H})^{K-2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}|x-y|^{2HK} = -2HK(2HK-1)|x-y|^{2HK-2},$$

对于 $x \neq y$。因此

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}R_{H,K}(x,y) = 2^{-K}\left(4H^2K(K-1)x^{2H-1}y^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H})^{K-2} + 2HK(2HK-1)|x-y|^{2HK-2}\right).$$

定理3.14。对于所有 $u,\ v>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\overline{Y}_{H,K}(u)\overline{Y}_{H,K}(v)] &= 2^{-K}c_{H,K,\alpha}^2\int_0^u\int_0^v x^{\beta_{H,K,\alpha}}y^{\beta_{H,K,\alpha}} \\ &\quad\times\Big(4H^2K(K-1)x^{2H-1}y^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H})^{K-2} \\ &\quad+2HK(2HK-1)|x-y|^{2HK-2}\Big)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。 利用高斯等距性和分部积分，如定理3.6的证明中所示，可得

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_{H,K}(u)\overline{Y}_{H,K}(v)] = c_{H,K,\alpha}^2\int_0^u\int_0^v x^{\beta_{H,K,\alpha}}y^{\beta_{H,K,\alpha}}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}R_{H,K}(x,y)\,dx\,dy.$$

代入 R_H 的混合导数表达式，K 可得（3.8）。 □

Lamperti变换过程 B_H^{LT} 的协方差，K 通过指数变量变换得到，恰如次分数朗之万情形。我们记录所得的表示式，其中明确展现了 $bi-fBm$ 协方差中两个多项式核之间的相互作用。

定义3.15。 定义 B_H^{LT} ，K 的协方差为 —

$$R_{\overline{B},\alpha}(t,s) := \mathbb{E}\big[\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t)\,\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(s)\big], \qquad t,s\in\mathbb{R}.$$

定理3.16。对所有 $t,\ s\in\mathbb{R}$,

$$R_{\overline{B},\alpha}(t,s) = e^{-\alpha HK(t+s)}\,\mathbb{E}[\overline{Y}_{H,K}(e^{\alpha t})\overline{Y}_{H,K}(e^{\alpha s})], \tag{3.9}$$

并利用(3.8),

$$\begin{aligned}R_{\overline{B},\alpha}(t,s) &= 2^{-K}c_{H,K,\alpha}^2e^{-\alpha HK(t+s)}\int_0^{e^{\alpha t}}\int_0^{e^{\alpha s}} x^{\beta_{H,K,\alpha}}y^{\beta_{H,K,\alpha}} \\ &\quad\times\Big(4H^2K(K-1)x^{2H-1}y^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H})^{K-2} \\ &\quad+2HK(2HK-1)|x-y|^{2HK-2}\Big)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.10}$$

证明。 由期望的线性性可从 (3.7) 得出恒等式 (3.9)。将 (3.8) 代入$u=e^{\alpha t}$, $v=e^{\alpha s}$ ，即可得到 (3.10)。 □

(3.10) 的结构与 (3.5) 十分相似，但现在被积函数包含两个不同的部分：一个来自协方差的 $(u^{2H}+v^{2H})^K$ 部分，另一个来自增量项 $|u-v|^{2HK}$。这两个部分都受到 Lamperti 前因子 $e^{-\alpha HK(t+s)}$ 的调节，二者共同导致相关性的指数衰减，下面将对此进行证明。

在下文中，我们记

$$R_{\overline{B},\alpha}(t) := R_{\overline{B},\alpha}(t,0)$$

为自协方差。

定理 3.17。对于每个 $H\in(0,1)$，$K\in(0,1]$ 和 $\alpha>0$，过程 $B_H^{\mathrm{LT}},_K$ 是遍历且强混合的平稳高斯过程，其协方差和 α-混合系数分别随 $|t|$ 和 h 呈指数衰减。更精确地说，存在常数 $C>0$ 和 $c(H,K,\alpha)>0$ 使得

$$\alpha_{\overline{B}}(h)\le Ce^{-c(H,K,\alpha)h},\qquad h\to\infty,$$

其中 $\alpha_{B}(h)$ 表示 $B_H^{\mathrm{LT}},_K$ 的 α-混合系数。

证明。由 (3.10) 结合 $s=0$ 可得

$$\begin{aligned}R_{\overline{B},\alpha}(t) = e^{-\alpha HKt}\int_0^{e^{\alpha t}}\int_0^1 x^{\beta_{H,K,\alpha}}y^{\beta_{H,K,\alpha}}\\ \times\Big(4H^2K(K-1)x^{2H-1}y^{2H-1}(x^{2H}+y^{2H})^{K-2}\\ +2HK(2HK-1)|x-y|^{2HK-2}\Big)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

积分中的所有核关于 x 和 y 的幂律指数均为负，因为 $x\to\infty$ 且 $y\in[0,1]$ 有界。因此，二重积分至多呈多项式增长：存在 $q>0$ 使得

$$\int_0^{e^{\alpha t}}\int_0^1(\cdots)\,dx\,dy = O(e^{q\alpha t}),\qquad t\to\infty.$$

此外，核的衰减及其消去性确保可以选取 $q<HK$，使得 $\alpha HK-q\alpha>0$。因此

$$R_{\overline{B},\alpha}(t)=O\big(e^{-(\alpha HK-q\alpha)t}\big),$$

并且特别地，存在 $C_1>0$，满足

$$|R_{\overline{B},\alpha}(t)|\le C_1e^{-c(H,K,\alpha)|t|},\qquad t\in\mathbb{R},$$

对于某个 $c(H,K,\alpha)=\alpha(HK-q)>0$。这表明 $\lim_{|t|\to\infty}R_{B,\alpha}(t)=0$ 以指数速率收敛，因此根据标准高斯判据 [15, 7]，$B_H^{\mathrm{LT}},_K$ 是遍历的。

对于强混合性，定义

$$\alpha_{B}(h) := \sup\Big\{|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| : A\in\sigma\{\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t):t\le0\},\,B\in\sigma\{\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t):t\ge h\}$$

Ibragimov-Rozanov 不等式给出

$$\alpha_{\overline{B}}(h)\le C_2\int_{|t|\ge h}|R_{\overline{B},\alpha}(t)|\,dt,$$

对于某个 $C_2>0$。利用 R_B 上的指数界，α，我们得到

$$\alpha_{\overline{B}}(h)\le C_2\int_h^\infty C_1e^{-c(H,K,\alpha)t}\,dt=\frac{C_1C_2}{c(H,K,\alpha)}e^{-c(H,K,\alpha)h},$$

这证明了指数混合，其指数为 $c(H,\ K,\ \alpha)>0$。 □

结论是，尽管 B_H^{LT}，K 的详细协方差结构比次分数情形更复杂，但其定性行为相似：指数去相关和强混合，其速率通过 $c(H,\ K,\ \alpha)$ 显式依赖于 H、K 和 α。

推论 3.18。令 $f \in L^1(\mathbb{P})$。则

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(s))\,ds \xrightarrow[T\to\infty]{a.s.} \mathbb{E}[f(\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(0))].$$

根据 Y_H的 αHK-自相似性，$\overline{\ }_K$，

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_{H,K}(t)^k] = t^{k\alpha HK}\,\mathbb{E}[\overline{B}_{H,K}^{\mathrm{LT}}(0)^k], \qquad t>0,\ k\geq 1.$$

因此，可以从 B_H^{LT}，K 的单轨迹统计量重建按 $bi-fBm$ $\overline{Y_{H,\ K}}$ 缩放的朗之万型过程的系综矩和单时刻分布。

4 数值模拟

本节通过对缩放后的 $s-fBm$ 和缩放后的 $bi-fBm$ 的 Lamperti 变换进行数值实验，展示分析结果。重点在于直观展示 Lamperti 映射所诱导的平稳化，确认理论方差水平和遍历性质，并通过经验特征函数验证高斯性。

所有模拟均在包含 $N=10^5$ 个点、步长为 $\Delta t=10^{-3}$ 的均匀网格上进行，总模拟时长为 $T=N\Delta t$。对于每组参数，我们使用固定的随机种子生成了 $M=500$ 条相互独立的轨迹。对于所有参数值，协方差矩阵在数值上均保持正定；在标准工作站上，使用 $N=10^5$ 的典型运行每次实现约需 20 秒。图中展示了具有代表性的轨迹；所有实现的系综行为均一致。

我们从 $s-fBm$ 过程开始。图 1 的左图展示了缩放过程 $S_H(t^\alpha)$ 的一条轨迹，其振幅大致以 $t^{\alpha H}$ 的速度增长，这是由于 $s-fBm$ 具有自相似和非平稳的特性。右图展示了 Lamperti 变换

$$S_H^{\mathrm{LT}}(t) = e^{-\alpha H t} S_H(e^{\alpha t}),$$

其波动的方差几乎保持恒定，说明了定理 2.5 中证明的平稳化。

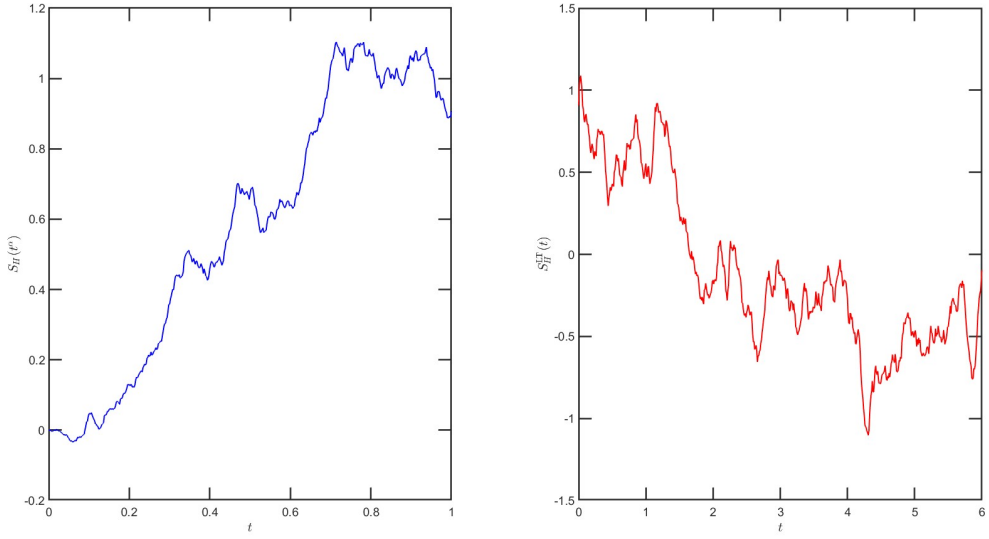


图 1 左：缩放后的 $s-fBm$过程 $S_H(t^\alpha)$ 的样本轨迹，其中 $H=0.7$, $\alpha=3/2$。右：其 Lamperti 变换 $S_H^{\mathrm{LT}}(t) = e^{-\alpha Ht}S_H(e^{\alpha t})$ 的轨迹。

在双分数情形中也能观察到类似的效果。图2左图显示了缩放过程 $B_{H,K}(t^\alpha)$，其方差包络按 $t^{\alpha HK}$ 增长。相比之下，其 Lamperti 变换

$$B_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t) = e^{-\alpha HKt}B_{H,K}(e^{\alpha t}),$$

如右图所示，呈现出具有恒定方差的平稳波动，正如定理 2.13 所预测的那样。

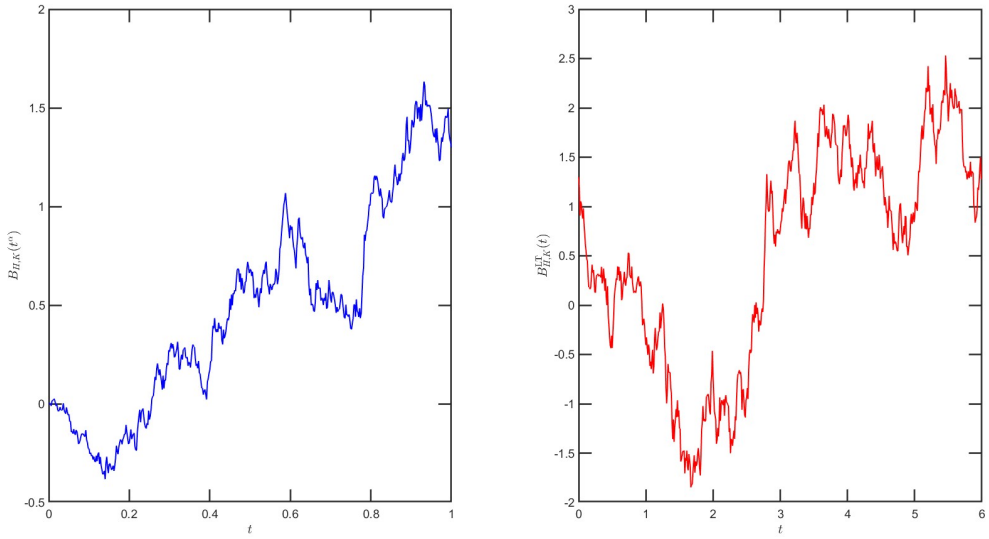


图 2 左：缩放后的 $bi-fBm$过程 $B_{H,\ K}(t^\alpha)$ 的轨迹，其中 $H=0.7$, $K=0.6$,$\alpha=3/2$。右：Lamperti 变换 $B_{H,\ K}^{\mathrm{LT}}(t) = e^{-\alpha HKt}B_{H,\ K}(e^{\alpha t})$ 的轨迹。

现在我们转向遍历性。对于任意平稳过程 X^{LT}，伯克霍夫定理保证，几乎必然地，

$$\frac{1}{T}\int_0^T (X^{\mathrm{LT}}(s))^2\,ds \xrightarrow[T\to\infty]{} \mathbb{E}[(X^{\mathrm{LT}}(0))^2].$$

对于当前这些模型，这些极限为

$$\mathbb{E}\big[(S_H^{\mathrm{LT}}(0))^2\big] = 2 - 2^{2H-1}, \qquad \mathbb{E}\big[(B_{H,K}^{\mathrm{LT}}(0))^2\big] = 1.$$

图3左图展示了S_H^{LT}二阶矩的经验收敛，其稳定在 $2 - 2^{2H-1}$ 附近，符合预期。快速收敛体现了引理 2.7 和定理 2.8 所证明的指数协方差衰减。

为评估高斯性，我们将经验特征函数与其理论形式进行比较。对于次分数Lamperti过程，我们有

$$\mathbb{E}[e^{ikS_H^{\mathrm{LT}}(t)}] = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}k^2\big(2 - 2^{2H-1}\big)\Big),$$

而对于双分数Lamperti过程，

$$\mathbb{E}[e^{ikB_{H,K}^{\mathrm{LT}}(t)}] = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}k^2\Big).$$

图3右图展示了 S_H^{LT}的经验特征函数，它与高斯预测高度吻合。

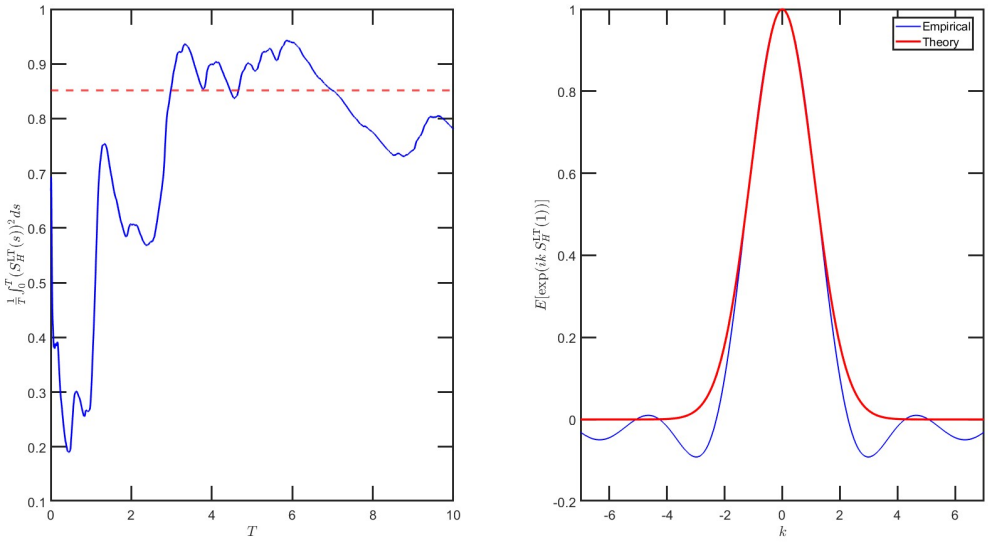


图3 Lamperti $s - fBm$，其中 $H = 0.6,\ \alpha = 3$。左：经验长时二阶矩趋近其理论极限 $2 - 2^{2H-1}$。右：经验特征函数与高斯特征函数的比较。

最后，图4展示了双分数情形下相应的特征函数，它与标准高斯形式相符。这证实 Lamperti 变换所得过程为高斯过程，其方差与解析结果一致。

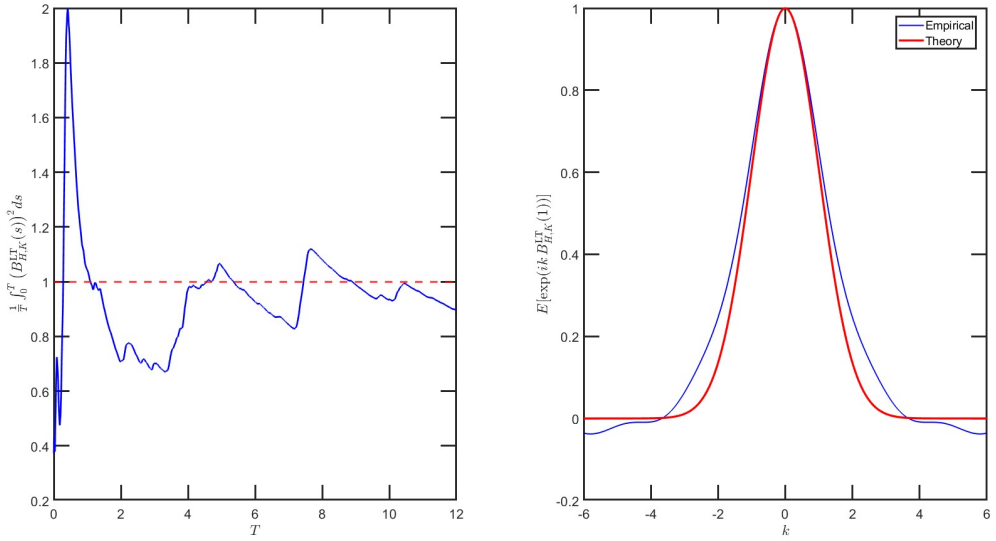


图 4 Lamperti $bi-fBm$，其中 $H=0.8$、 $K=0.6$、 $\alpha=1.5$。经验特征函数与标准高斯特征函数的比较。

5 结论

我们已证明，缩放 Lamperti 变换可将 s-fBm、 bi-fBm 及其朗之万方程积分变体转化为相关性呈指数衰减的平稳高斯过程，从而实现完全遍历性和强混合；相比之下，经典 Lamperti 变换产生的衰减更慢。显式的协方差表示使得我们能够根据 $(H,\ K,\ \alpha)$ 量化混合率，并为从单条轨迹重构这些非平稳模型的系综性质提供了依据。更广泛地说，这些结果阐明了缩放参数 α 在实现指数去相关中的作用，并揭示了双分数情形下 H 与 K 的相互作用如何导致不同的指数衰减机制，凸显了缩放 Lamperti 方法在分析具有非平稳增量的自相似过程时的实用价值。

声明与陈述

资金支持

本手稿的撰写未获得任何资金支持。

利益冲突

作者声明，他们不存在与本文内容相关的利益冲突。

数据可用性

当前研究期间未生成或分析任何数据集。模拟代码可在提出合理请求后向通讯作者索取。

参考文献

[1] E. Barkai，从弱反常扩散到强反常扩散，Physica A 504 (2018)，106–121。[2] T. Bojdecki、L. G. Gorostiza 和 A. Talarczyk，次分数布朗运动及其与占据时间的关系，Statist. Probab. Lett. 69 (2004)，405–419。[3] A. G. Cherstvy 和 R. Metzler，非平稳缩放布朗运动：具有菲克特征的非高斯扩散，EPL 106 (2014)，30002。[4] A. G. Cherstvy 和 R. Metzler，具有时变扩散率的反常扩散，J. Chem. Phys. 142 (2014)，144105。[5] S. Ensch 和 S. Mansfield，反常扩散中的 Lamperti 变换与遍历性破缺，J. Stat. Phys. 190 (2023)，32。[6] C. Houdré 和 J. Villa，一个无限维准螺旋的例子，Contemp. Math. 336 (2003)，195–201。[7] I. A. Ibragimov 和 Yu. A. Rozanov，《高斯随机过程》，Springer，1978。[8] S. Janson，《高斯希尔伯特空间》，剑桥大学出版社，1997。[9] J. Lamperti，半稳定随机过程，Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962)，62–78。[10] J. Lamperti，连续状态分枝过程，美国国家科学院院刊 58 (1967)，382–386。[11] V. Limic 和 A. Dieker，缩放布朗运动及相关过程的 Lamperti 变换，预印本，2024。[12] M. Magdziarz，缩放布朗运动及相关朗之万方程的 Lamperti 变换，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 83 (2020)，105077。[13] M. Magdziarz 和 T. Żorawik，与次扩散共存的莱维飞行及相关模型的遍历性质，J. Math. Anal. Appl. 458 (2018)，1373–1389。[14] R. Mansuy 和 M. Yor，《布朗运动概论》，Universitext，Springer，2008。[15] G. Maruyama，无限可分过程，Theory Probab. Appl. 15 (1970)，1–22。[16] R. Metzler 和 J. Klafter，反常扩散的随机游走指南：一种分数阶动力学方法，Phys. Rep. 339 (2000)，1–77。[17] D. Nualart，《Malliavin 微积分及相关主题》，第二版，Springer，2006。[18] F. Russo 和 C. A. Tudor，关于双分数布朗运动，Stochastic Process. Appl. 116 (2006)，830–856。