arXiv:2601.02561v1 [math.NA] 5 Jan 2026

¨一种基于薛定谔方程的一维浅水方程数值模拟色散正则化方法

GUOSHENG FU 和 CHUN LIU

Abstract. 我们提出了一种用于一维浅水方程（SWE）数值模拟的新型色散正则化框架。通过在动量方程中加入三阶色散项，对经典双曲系统进行正则化；借助马德隆变换，该系统等价于一个带有由底部地形引起的漂移项的散焦型三次非线性薛定谔方程。

我们不直接求解浅水方程，而是求解相应的薛定谔方程，并通过简单的后处理程序恢复流体力学变量。该方法将原始非线性双曲系统转化为半线性复值方程，可采用 Strang时间分裂法与空间谱元离散相结合的方式进行高效近似求解。

数值实验表明，在未发生激波形成的亚临界状态下，薛定谔正则化可为经典浅水解提供 $O(\varepsilon)$ 近似，其中 ε 表示正则化参数。值得注意的是，即使存在移动的润湿 – 干涸界面，且此时会出现真空态、标准浅水方程求解器也常常难以应对，这种收敛特性仍然得以保持。这些结果表明，基于薛定谔方程的表述为含干态浅水流的数值模拟提供了一种稳健且有前景的替代框架。

1. Introduction and Motivation

浅水方程（SWE）是描述河流水力学、海岸工程和地球物理流体动力学中自由表面流的基础模型 [24]。尽管其形式看似简单，浅水方程的数值模拟仍颇具挑战，尤其是在存在湿润–干涸界面和真空态时；此时水深趋于零，方程会发生退化。

针对浅水方程，已经发展出多种数值方法，包括有限体积法、有限差分法和间断 Galerkin（DG）格式。为处理干态，这些方法通常依赖精心设计的保正限制器、静水重构以及针对速度场的特设正则化 [3, 7, 18, 26, 27]。尽管这些方法在许多实际应用中效果显著，但往往会带来较高的算法复杂度，并需要针对具体问题进行调参；此外，如何稳健地处理移动的润湿–干涸前沿，仍然是一个棘手的问题。

另一种建模方法是对双曲型系统进行色散正则化。这种方法不引入人工黏性，而是以一种能够保持守恒律，并且在许多情况下保留其内在哈密顿结构或变分结构的方式加入色散项。此类色散机制自然出现在非线性薛定谔方程的流体力学表述以及 Euler–Korteweg型模型 [9, 20] 中。通过马德隆变换，薛定谔方程的解可以用流体力学变量来解释，从而得到一个包含量子

2020 *Mathematics Subject Classification.* 65M70, 65N35, 76B15, 35Q55。*Key words and phrases.* 浅水方程；色散正则化；非线性薛定谔方程；马德隆变换；湿润与干涸；谱元法；斯特朗分裂。G. Fu 的研究部分得到美国国家科学基金会项目 DMS-2410741 的资助。G. Fu 访问数学与统计创新研究所（IMSI）期间开展了本研究的部分工作。该研究所由美国国家科学基金会（项目编号：DMS-2425650）支持。C. Liu 的研究部分得到美国国家科学基金会项目 DMS-2216926 和 DMS-2410742 的资助。

（或 Bohm）势的色散正则化 Euler型系统。这些方程在薛定谔动力学的半经典极限背景下得到了广泛研究 [6, 8, 13],，其主要目的是理解薛定谔方程本身的行为和极限性质，而非将其用作经典双曲守恒律的数值正则化方法。

在本工作中，我们以这些思想为基础，利用马德隆变换所诱导的色散结构，将其作为一维浅水方程的数值近似框架。具体而言，我们引入了浅水方程的色散正则化，该正则化等价于一个带有由底部地形诱导的漂移项的聚焦立方非线性薛定谔方程。我们不直接求解浅水方程，而是求解相应的薛定谔方程，并通过简单的后处理程序恢复物理变量。这一重构将原始的非线性双曲系统转化为半线性复值方程，非常适合利用时间分裂方法和高阶空间离散进行高效的数值近似。

从建模和数值计算的角度来看，薛定谔方程表述具有多项优点。首先，水深表示为波函数模的平方，从而保证了非负性，并且能够自然地处理真空态。其次，由此得到的半线性结构支持基于斯特朗分裂的高效数值格式，在该方法中，色散子问题和势子问题可以分别处理。最后，在解保持光滑的情况下，色散正则化为无色散浅水方程提供了受控的小参数近似。

本文的主要贡献可概括如下:

- 我们引入了一种一维浅水方程的色散正则化形式，该形式等价于一个受底部地形诱导的漂移项影响的聚焦型三次非线性薛定谔方程。
- 我们对该正则化形式给出了能量变分方法（EnVarA）解释，从基于能量的角度阐明了色散项的来源。
- 我们提出了一种高效的数值方法，在空间上采用谱元离散，在时间上采用斯特朗分裂，从而使色散步骤得到线性常系数子问题，并使势能步骤能够进行解析的逐点更新。
- 通过一系列数值实验，我们证明，所提出的方法在亚临界和无激波区域能够达到 $\mathcal{O}(\varepsilon)$精度，其中包括涉及移动湿润–干涸界面和真空形成的挑战性情形。

本文其余部分的组织结构如下。第2节介绍色散正则化及其与非线性薛定谔方程的等价性，并描述数值离散方法。第3节给出数值结果，展示所提方法的优势与局限性。第4节总结全文，并讨论未来工作的方向。

2. Schrödinger Regularization and Numerical Method

2.1. 浅水方程。我们考虑带有底部地形 $b(x)$ 的一维浅水方程，

$$h_t + (hu)_x = 0, \tag{1a}$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x = -ghb_x, \tag{1b}$$

其中 $g > 0$ 表示引力常数， $h(x,t) \geq 0$ 表示水深， $u(x,t)$ 表示深度平均流速。

2.2. 能量变分方法与色散正则化。 浅水方程可以在能量变分方法（En-VarA）的框架下进行解释。该方法通过能量泛函系统地推导控制方程

其做法是结合最小作用量原理与力平衡定律；例如参见 [12, 19]。这种视角对于阐明方程的保守结构，以及通过修改能量来纳入其他物理效应，尤其有用。

对于一维浅水方程，总能量为

$$\mathcal{E}(h,u) = \mathcal{K}(h,u) + \mathcal{F}(h) = \int_\Omega \frac{1}{2} h|u|^2 \, dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2} g h^2 + g b(x) h \right) dx,$$

其中， $\mathcal{K}$ 表示动能， $\mathcal{F}$ 表示与重力和底部地形相关的势能，Ω为空间域。水深与速度之间的运动学约束即为质量守恒定律 (1a)。在无耗散的情况下，光滑解满足能量守恒定律

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(h,u) = 0. \tag{2}$$

在能量变分方法中，通过引入满足以下条件的流映射 $x = x(X,\ t)$，推导出守恒动力学

$$\partial_t x(X,t) = u(x(X,t),t), \qquad x(X,0) = X,$$

并满足质量守恒。在一维空间中，质量守恒也可等价地用拉格朗日形式表示为

$$h(x(X,t),t)\, x_X(X,t) = h_0(X),$$

或者用欧拉形式表示为 (1a)。

考虑拉格朗日坐标下的动能作用泛函，

$$\mathcal{A}[x] = \int_0^T \int_{\Omega_0} \frac{1}{2}\, h_0(X)\, |\partial_t x(X,t)|^2 \, dX\, dt.$$

对 $x \mapsto x + \eta$ 进行标准变分，其中 $\eta(\cdot,\ 0) = \eta(\cdot,\ T) = 0$，得到

$$\delta\mathcal{A} = -\int_0^T \int_{\Omega_0} h_0(X)\, \partial_{tt} x(X,t)\, \eta(X,t)\, dX\, dt.$$

利用 $h_0(X)\ dX = h(x,\ t)\, dx$ 并结合恒等式 $\partial_{tt}x(X,\ t) = u_t(x,\ t) + u(x,\ t)u_x(x,\ t)$，变换回欧拉变量后，我们得到惯性力

$$f_{\text{inertial}} = \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x} = -\,h\big(u_t + u u_x\big).$$

接下来，我们推导由势能产生的保守力

$$\mathcal{F}(h) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} g h^2 + g b(x) h \right) dx.$$

设 $\xi(x,\ t)$ 为与扰动流动相关的欧拉位移。质量守恒意味着输运恒等式

$$\delta h = -\partial_x(h\,\xi). \tag{3}$$

利用 $\delta\mathcal{F} = \int (\delta\mathcal{F}/\delta h)\ \delta h\, dx$，其中

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta h} = g(h+b),$$

我们得到

$$\delta\mathcal{F} = -\int_\Omega g(h+b)\, \partial_x(h\,\xi)\, dx = \int_\Omega h\, \partial_x\big(g(h+b)\big)\, \xi\, dx,$$

其中最后一步由分部积分得到（假设满足周期边界条件或边界项为零）。因此，

$$f_{\text{conservative}} = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x} = h\, \partial_x\big(g(h+b)\big).$$

EnVarA 力平衡

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x} = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta x},$$

结合质量守恒方程（1a），可恢复动量方程（1b）。

能量变分方法的一项核心优势是，可以通过扩充能量泛函来纳入额外的守恒效应。为引入色散，我们加入 Fisher信息能量

$$\mathcal{F}_{\mathrm{disp}}(h) = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega \left|(\sqrt{h})_x\right|^2 dx = \frac{\varepsilon^2}{8}\int_\Omega \frac{h_x^2}{h}\,dx, \tag{4}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是正则化参数。式（4）所示的能量形式也出现在薛定谔桥和熵正则最优传输问题的另一种背景下；在这些问题中，费舍尔信息项自然源于连续性方程的随机扰动，并可解释为噪声诱导正则化；例如，参见 [10,17]。

直接进行变分计算可得相应的化学势

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{\mathrm{disp}}}{\delta h} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{(\sqrt{h})_{xx}}{\sqrt{h}} \;=:\; \mu, \tag{5}$$

这就是Madelung文献 [9, 20]中的量子（玻姆）势 。利用同一输运恒等式（3），色散项对保守力的贡献为

$$f_{\mathrm{disp}} = \frac{\delta \mathcal{F}_{\mathrm{disp}}}{\delta x} = h\,\mu_x.$$

将各力合并，得到正则化的动量平衡

$$h(u_t + uu_x) + h\,\partial_x\big(g(h+b)\big) + h\,\mu_x = 0. \tag{6}$$

正则化系统（1a）和（6）是哈密顿系统，并满足修正后的能量守恒定律

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}(h,u) + \mathcal{F}_{\mathrm{disp}}(h)\right) = 0,$$

对于光滑解，并满足适当的边界条件。

2.3. 色散正则化与非线性薛定谔¨方程。上一小节推导的色散正则化浅水系统，参见式 (1a) 和 (6)，可以等价地表述为非线性薛定谔方程。这种等价关系源自经典的马德隆变换，并凸显了 Fisher 信息正则化自然引出的薛定谔型结构。

具体而言，假设存在实值速度势 ϕ 使得 $u = \phi_x$，并引入复值波函数

$$\psi(x,t) = \sqrt{h(x,t)}\,\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\phi(x,t)\right),$$

可以证明，正则化浅水方程 (1a)–(6) 在形式上等价于散焦型非线性薛定谔方程¨（非线性薛定谔方程）

$$\mathrm{i}\varepsilon\psi_t = -\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi + gb(x)\psi, \tag{7}$$

其中，底部地形作为外势出现。

流体力学变量，即水深 h 和流量 $q = hu$，可通过以下关系由波函数 ψ 恢复得到

$$h = |\psi|^2, \qquad q = \varepsilon\,\mathrm{Im}\left(\overline{\psi}\,\psi_x\right). \tag{8}$$

本工作的主要目标是在小ε 区域内对非线性薛定谔方程 (7) 进行数值求解，并将所得的马德隆变量 (8) 用作原始无色散浅水方程 (1) 解的近似。

2.4. 半经典极限与近似区域。 非线性薛定谔方程 (7) 的解在极限 $\varepsilon \to 0$ 下的收敛性，已在非线性薛定谔方程的半经典（或零色散）极限背景下得到广泛研究；例如参见 [8, 9, 13]。在无色散浅水方程 (1a)–(1b) 的极限解保持光滑，且水深 h 始终一致地远离零的区域内，众所周知，与薛定谔方程解相关的马德隆变量 (8) 会在局部时间内收敛到相应的浅水系统强解。

当无色散浅水方程出现激波（例如在超临界区域）时，不再预期解能够强逐点收敛。在这种情况下，非线性薛定谔方程的解通常会形成快速振荡波列，称为色散激波，其特征波长的量级为 $O(\varepsilon)$；例如参见 [11, 15, 16]。这一状态下的极限行为通常通过惠特汉调制理论 [25]以弱意义或平均意义来描述。因此，激波形成后，非线性薛定谔方程无法预期能逐点逼近浅水方程的熵解（在半经典非线性薛定谔方程文献中，这通常称为梯度灾变）。

本研究主要关注薛定谔方程近似在无激波区域中的数值可靠性，此时可能出现湿润–干涸界面。由于真空边界附近光滑性丧失，存在移动润湿–干涸前沿时的收敛理论仍远未完善。我们的数值结果表明，即使在这种情况下，非线性薛定谔方程仍能准确近似浅水解。该方法的一个显著特点是，无需采用临时性的润湿–干涸处理：重构得到的水深 $h = |\psi|^2$ 在整个计算过程中始终非负。

2.5. NLS 的数值格式。 NLS（7）的数值近似已得到广泛研究。人们提出了多种离散策略，包括有限差分法、有限元法/间断伽辽金法，以及谱方法或伪谱方法；例如参见 [1, 4–6, 14]。

在半经典状态 $\varepsilon \ll 1$ 下，由于存在高度振荡的解，（7）的数值近似尤其具有挑战性。众所周知，空间网格尺寸和时间步长必须根据小参数 ε 进行选择，才能准确解析振荡行为；例如参见 [5, 21]。若不满足这些分辨率约束，通常会导致精度降低或产生伪数值伪影。

在本文中，我们采用谱元法对（7）进行空间离散。对于时间离散，我们采用二阶 Strang 分裂格式；参见 [6], ，其中将线性色散算子与非线性势项分离。这一策略产生了一种高效算法：色散子步归结为求解一个常系数线性问题，而非线性势子步则可在每个自由度处精确且局部地求解。因此，整体格式具有较高的计算效率，尤其适用于小-ε 状态下的模拟。

为简便起见，我们考虑一维空间区域 $\Omega = [-L, L]$。令 $\Omega_h = \{T\}$为 Ω 的协调剖分，将其划分为若干单元。我们定义复值谱元空间

$$V_h^k = \big\{ v \in H^1(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T),\ \forall T \in \Omega_h \big\}, \tag{9}$$

其中 $k \geq 1$表示多项式次数。与谱元法中的标准做法一样，在实现中采用 Gauss–Lobatto 插值点和基函数。

我们假设（7）满足周期边界条件（其他边界条件将在下一小节中讨论），并定义周期有限元空间

$$V_{h,\mathrm{per}}^k := \big\{ v \in V_h^k : v(-L) = v(L) \big\}.$$

(7) 的空间离散形式如下：求 $\psi_h(t) \in V_{h,\mathrm{per}}^k$，使得

$$\big(\mathrm{i}\varepsilon \psi_{h,t}, \phi_h\big)_h - \frac{\varepsilon^2}{2}\big(\psi_{h,x}, \phi_{h,x}\big)_h = \big(g|\psi_h|^2\psi_h + gb(x)\psi_h, \phi_h\big)_h, \qquad \forall \phi_h \in V_{h,\mathrm{per}}^k. \tag{10}$$

这里，$(\cdot,\cdot)_h$ 表示离散 L^2 内积，通过使用（$k+1$）点高斯–洛巴托求积公式近似计算每个单元上的积分得到。此选择可得到对角质量矩阵。

对于时间离散，我们采用二阶斯特朗分裂法，将 (7) 分解为线性色散子问题和非线性势子问题：

$$\mathrm{i}\varepsilon\psi_t = -\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx}, \tag{11a}$$

$$\mathrm{i}\varepsilon\psi_t = g|\psi|^2\psi + gb(x)\psi. \tag{11b}$$

从已知近似 $\psi_h^n \approx \psi(t_n)$ 出发，时间步长为 $\Delta t > 0$ 的斯特朗分裂算法如下。

步骤 *1*：半步非线性势更新。我们在半时间区间 $[t_n, t_n + \frac{1}{2}\Delta t]$ 上演化 (11b)，其初始条件为 $\psi_h(t_n) = \psi_h^n$。半离散形式为

$$\big(\mathrm{i}\varepsilon\psi_{h,t}, \phi_h\big)_h = \big(g|\psi_h|^2\psi_h + gb(x)\psi_h, \phi_h\big)_h, \qquad \forall \phi_h \in V^k_{h,\mathrm{per}}. \tag{12}$$

由于采用了高斯–洛巴托基函数和求积，该系统在每个自由度处解耦，从而得到以下节点常微分方程：

$$\mathrm{i}\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_h(x_j,t) = g\big(|\psi_h(x_j,t)|^2 + b(x_j)\big)\psi_h(x_j,t), \qquad \forall x_j \in X_h, \tag{13}$$

其中，$X_h = \{x_j\}$ 表示 Ω_h 上所有高斯–洛巴托求积节点的集合。

将 (13) 乘以 $\overline{\psi_h(x_j,t)}$ 并取虚部可得，对所有 $x_j \in X_h$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_h(x_j,t)|^2 = 0$。因此，非线性势步逐点保持 $|\psi_h|$，并且可以精确积分：

$$\psi_h(x_j,t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}g\big(|\psi_h(x_j,t_n)|^2 + b(x_j)\big)(t-t_n)\right)\psi_h(x_j,t_n), \qquad x_j \in X_h. \tag{14}$$

我们将由此得到的 $t_n + \frac{1}{2}\Delta t$ 时刻的解记为 $\psi^{n,*}_h = \psi_h(t_n + \frac{1}{2}\Delta t)$。

步骤 *2*：全步长线性色散更新。接下来，我们从 $\psi^{n,*}_h$ 出发，在整个时间步长 Δt 内演化线性色散子问题 (11a)。采用时间方向的克兰克–尼科尔森离散可得

$$\left(\mathrm{i}\varepsilon\frac{\psi_h^{n+1,*} - \psi_h^{n,*}}{\Delta t}, \phi_h\right)_h - \frac{\varepsilon^2}{2}\big((\psi_{h,x})^{n+1/2,*}, \phi_{h,x}\big)_h = 0, \qquad \forall \phi_h \in V^k_{h,\mathrm{per}}, \tag{15}$$

其中

$$\psi_h^{n+1/2,*} = \frac{1}{2}\big(\psi_h^{n+1,*} + \psi_h^{n,*}\big).$$

该步骤需要求解一个常系数线性系统。在我们的实现中，使用配备谱等价分块对角预处理器的预处理 MINRES 迭代求解器，高效地求解所得系统。

步骤 *3*：半步长非线性势更新。最后，我们再次在半时间区间 $[t_n + \frac{1}{2}\Delta t, t_{n+1}]$ 内应用非线性势步 (11b)，得到

$$\psi_h(x_j,t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}g\big(|\psi_h^{n+1,*}(x_j)|^2 + b(x_j)\big)(t-t_n-\tfrac{1}{2}\Delta t)\right)\psi_h^{n+1,*}(x_j), \qquad x_j \in X_h. \tag{16}$$

最终近似定义为 $\psi_h^{n+1}(x) = \psi_h(x, t_{n+1}) \in V^k_h$，每。

2.6. 边界条件。 本节最后讨论非线性 Schr¨odinger 方程（7）的远场边界条件处理。许多感兴趣的问题自然定义在整个空间 $\mathbb{R}$ 上，而数值模拟必须在有界计算域上进行。因此，有必要在截断域上施加适当的人工边界条件，以最大限度地减少伪反射，并准确表示解的远场行为。

在本研究中，我们采用海绵层（或吸收层）方法来模拟远场边界条件。其思路是在计算域的人工边界附近引入一个阻尼区域，使出射波在到达

边界之前逐渐衰减。这种策略使内部产生的波能够以极小的反射离开计算域，并为薛定谔方程的远场边界提供一种简单而稳健的处理方法。

具体而言，我们将空间域从 $\Omega = [-L, L]$ 扩展至 $\Omega_{\text{ext}} = [-(L+\ell),\ L+\ell]$，其中 $\ell > 0$ 表示海绵层的宽度。区域 $[-(L+\ell),\ -L] \cup [L, L+\ell]$构成海绵层。随后，我们在式（7）中加入复吸收势（CAP）项，得到修正后的方程

$$\mathrm{i}\varepsilon\psi_t = -\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi + gb(x)\psi - \mathrm{i}\sigma(x)\psi. \tag{17}$$

这里，$\sigma(x) \geq 0$ 是一个空间相关的阻尼函数，仅在海绵层内有非零值。

在我们的实现中，$\sigma(x)$ 采用五次平滑阶跃函数来定义，

$$\sigma(x) = \sigma_{\max}\left[6\left(\frac{|x|-L}{\ell}\right)^5 - 15\left(\frac{|x|-L}{\ell}\right)^4 + 10\left(\frac{|x|-L}{\ell}\right)^3\right], \qquad L < |x| < L+\ell, \tag{18}$$

并且对于 $|x| \leq L$，$\sigma(x) = 0$。

海绵层的厚度取为

$$\ell = N\,\frac{2\pi\varepsilon}{|\omega|}, \quad \text{with } N = 16, \tag{19}$$

其中，ω 表示主导出射波数。最大阻尼强度选为

$$\sigma_{\max} = -\frac{2\,\varepsilon|\omega|}{\ell}\,\log(10^{-6}), \tag{20}$$

对应于波穿过海绵层时振幅衰减至目标值 10^{-6}。

设置海绵层后，我们在扩展域边界处施加齐次诺伊曼边界条件$\psi_x = 0$，即在 $|x| = L + \ell$ 处施加。由于出射波在海绵区域内受到强烈衰减，这种简单的边界条件几乎不会在内部计算域中引入反射。

为了将海绵层纳入上一小节所述的 Strang 分裂格式，我们采用如下步骤。线性色散子步 (11a) 保持不变。在内部区域 $[-L, L]$ 上，其中 $\sigma(x) = 0$，非线性势更新仍与 (14)–(16) 完全相同。唯一的修改发生在海绵层中，复吸收势项 $-\mathrm{i}\sigma(x)\psi$ 会引入额外的阻尼效应。在高斯–洛巴托节点$x_j \in X_h$处，海绵层中的半步更新 (14) 可写成闭式形式

$$\psi_h(x_j) \;\mapsto\; \exp\!\left(-\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}g\big(|\psi_h(x_j)|^2 + b(x_j)\big)\frac{\Delta t}{2}\right)\exp\!\left(-\frac{\sigma(x_j)}{\varepsilon}\frac{\Delta t}{2}\right)\psi_h(x_j), \qquad x_j \in X_h. \tag{21}$$

相同的　修改应用于斯特朗分裂方案的最后一个非线性半步　e.

3. Numerical Results

我们通过一系列数值实验，验证所提出的基于 Schr¨odinger 的一维浅水方程近似框架。所有模拟均采用最低阶谱元离散，多项式次数为 $k = 1$。使用分辨率为 $\Delta x = 0.05\,\varepsilon$ 的均匀空间网格，时间步长取为 $\Delta t = \Delta x$。引力常数在整个过程中固定为 $g = 1$。在下文展示的结果中，我们取 $\varepsilon = 0.01$，这代表了本文所研究的小色散状态。所有数值模拟均使用 MFEM 有限元库 [2]完成。

3.1. 黎曼型测试问题。 本小节考虑浅水方程 (1) 的几个典型黎曼问题。在所有情形下，初始数据均由两个常状态构成，并在 $x = 0$处相互分隔，

$$(h(x,0), u(x,0)) = \begin{cases} (h_L, u_L), & x < 0, \\ (h_R, u_R), & x > 0, \end{cases} \tag{22}$$

在平坦底部地形 $b(x) = 0$ 下。根据左右状态的选择，相应的精确解可能涉及稀疏波、真空态或激波形成[24]。

为初始化非线性薛定谔方程（7），我们针对所有黎曼问题采用一致正则化策略。初始水深由光滑剖面近似为

$$h_0(x) = \frac{h_L + h_R}{2} + \frac{h_R - h_L}{2} \tanh(x/\delta), \qquad \delta = 1.2\,\varepsilon, \tag{23}$$

初始波函数定义为

$$\psi(x,0) = \sqrt{h_0(x)}\, \exp\!\left(\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon}\phi_0(x)\right). \tag{24}$$

相位函数 $\phi_0(x)$ 的选取应使其导数为黎曼初始速度的光滑近似，

$$\phi_0'(x) = \frac{u_R + u_L}{2} + \frac{u_R - u_L}{2}\, \tanh\!\left(\frac{x}{\delta}\right). \tag{25}$$

这里取

$$\phi_0(x) = \frac{u_R + u_L}{2} x + \frac{u_R - u_L}{2} \delta \Big(|x/\delta| + \log\big(1 + \mathrm{e}^{-2|x|/\delta}\big) \Big).$$

除非另有说明，计算均在 $\Omega = [-2, 2]$ 上进行，并采用齐次诺伊曼边界条件，最终时刻为 $t = 0.6$。下面讨论三种具有代表性的黎曼数据选取。

3.1.1. 干床溃坝问题。我们首先考虑右侧为干床的溃坝问题，对应于

$$(h_L, u_L) = (1.0, 0), \qquad (h_R, u_R) = (0, 0).$$

The 精确解由单个稀疏波构成，水深为 [24]

$$h(x,t) = \begin{cases} 1, & x/t < -1, \\ \dfrac{(2 - x/t)^2}{9}, & -1 \le x/t \le 2, \\ 0, & x/t > 2. \end{cases}$$

图1展示了最终时刻 $t = 0.6$计算得到的薛定谔波函数，以及重构的水深和流量。如小-ε 状态下所预期的那样，波函数的实部和虚部呈现出快速振荡的行为，其特征频率的量级为 $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$。有趣的是，当用重构的流体力学变量表示解时，这些振荡在很大程度上相互抵消。特别是，水深和流量在干湿界面处均保持光滑，并且在该区域内与相应的无色散浅水黎曼解高度吻合。

在左行稀疏波的波头附近，也观察到了量级为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$的小振幅振荡。这种振荡与薛定谔正则化引入的色散效应相符，并且随着 ε 减小而减弱。总体而言，结果表明，尽管底层波函数具有高度振荡的特性，基于薛定谔方程的方法仍能在无激波区域准确近似浅水解，包括存在移动干湿界面的情况。

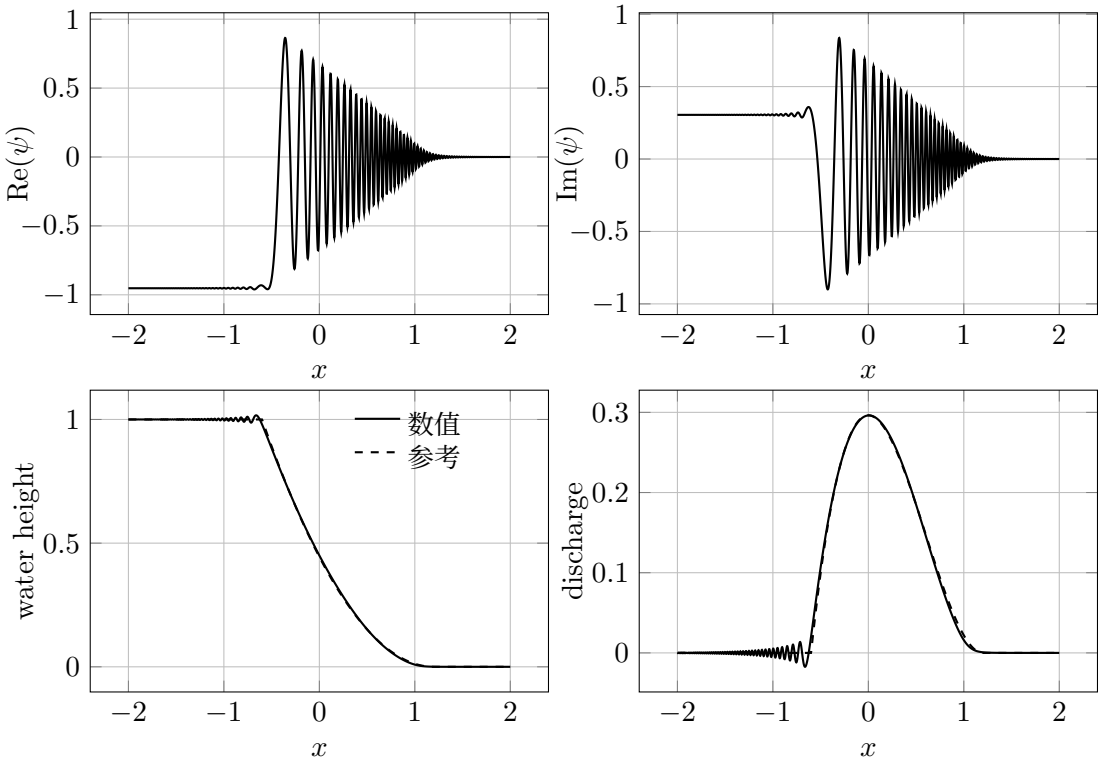

FIGURE 1. 第3.1.1小节所述干床溃坝问题的数值解。上排显示薛定谔波函数 ψ的实部和虚部。下排显示重构后的流体力学变量，即水深 $h = |\psi|^2$ 和流量 $q = \varepsilon\mathrm{Im}(\psi\,\psi_x)$。数值解与相应的无色散浅水黎曼解进行了比较。 —

3.1.2. 湿床溃坝问题。接下来，我们考虑一个右侧为湿床的溃坝黎曼问题，该问题会导致激波形成。左右两侧的初始状态为

$$(h_L, u_L) = (1.0, 0), \qquad (h_R, u_R) = (0.2, 0).$$

对于这一配置，无色散浅水方程的精确解由一个向左传播的稀疏波和其后的一个向右传播的激波 [24]组成。

图2展示了最终时刻 $t = 0.6$湿床溃坝问题的数值解。与前一个例子相同，上排显示薛定谔波函数的实部和虚部，其在小-ε区域呈现快速振荡行为。下排显示重构后的流体力学变量，即水深和流量，以及相应的无色散浅水黎曼解。

在与左行稀疏波相关的区域内，重构得到的水深和流量与无色散浅水解吻合良好。在此状态下，波函数中的振荡用流体动力学变量表示时大多会相互抵消，而基于 Schr¨odinger 的近似能够较为合理地表征其 underlying 浅水动力学。

相比之下，在右行激波附近，Schr¨odinger 解不再近似无色散激波剖面。该解并未像浅水方程中的情形那样收敛为单调熵激波，而是形成了具有色散激波特征的快速振荡结构。这些振荡会持续存在于重构得到的水深和流量中，并不会随着 ε 的减小而消失。

这一现象反映了当前方法的一个根本局限：非线性薛定谔正则化将无色散浅水方程中的梯度灾变

转化为色散激波，而非经典熵激波。因此，尽管基于薛定谔方程的公式在无激波状态下表现良好，但不适用于近似发生激波形成时的浅水解。

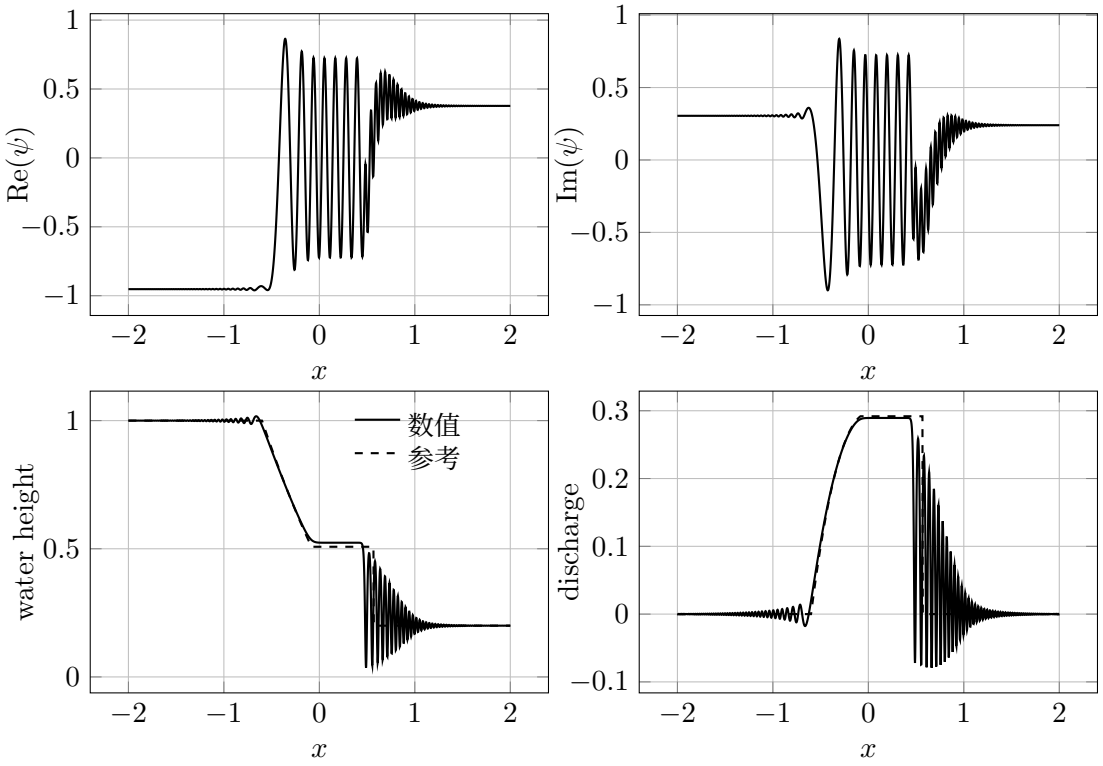

FIGURE 2. 第3.1.2小节所述湿床溃坝问题的数值解。上排显示 Schr¨odinger 波函数 ψ 的实部和虚部。下排显示重构的流体力学变量，即水深 $h = |\psi|^2$ 和流量 $q = \varepsilon\mathrm{Im}(\psi\,\psi_x)$。数值解与相应的无色散浅水黎曼解进行了比较。

3.1.3. 湿初始状态生成真空。 最后，我们考虑一个动态生成真空的黎曼问题。初始状态为

$$(h_L, u_L) = (1.0, -3.0), \qquad (h_R, u_R) = (2.0, 3.0).$$

由于

$$2(a_L + a_R) < u_R - u_L, \qquad a_L = \sqrt{gh_L}, \quad a_R = \sqrt{gh_R},$$

两个稀疏波向外传播，在两者之间形成不断扩大的干区。Th e 精确解 包含一个真空态，并且可以通过解析方式得到 [24]。

由于初始速度不为零，我们采用第2.6小节中所述的海绵层边界处理。计算域扩展为 $\Omega_{\mathrm{ext}} = [-(L+\ell)\ L+\ell]$，其中 $L = 2$，且 $\ell = 16(2\pi\varepsilon/3) \approx 0.335$。

图3展示了最终时刻$t = 0.3$真空生成问题的数值解。与前面的示例一样，薛定谔波函数表现出高度振荡的行为。特别是在左侧和右侧远场区域附近，可以观察到强烈振荡；在那里，振幅趋近于常状态，而波函数的相位快速变化。在整个区域的尺度下，这些振荡过于迅速，无法通过视觉分辨，因此在 $\mathrm{Re}(\psi)$ 和 $\mathrm{Im}(\psi)$ 的图中呈现为饱和状态。

尽管波函数层面呈现出这种高度振荡的行为，重构得到的流体力学变量仍保持良好状态。水深和流量在稀疏波区域内均平滑变化，并准确捕捉到中心干区的形成

。特别是，数值解与无色散浅水黎曼解非常吻合。

在稀疏扇边缘附近重构的变量中，可以观察到量级为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 的小振幅振荡。这些振荡与薛定谔正则化引入的色散效应相符，并且随着 ε 减小而减弱。总体而言，这个例子进一步表明，尽管薛定谔波函数本身高度振荡，但基于薛定谔方程的表述能够准确近似浅水动力学，适用于解未发生激波形成的情形，包括动态出现真空态的情况。

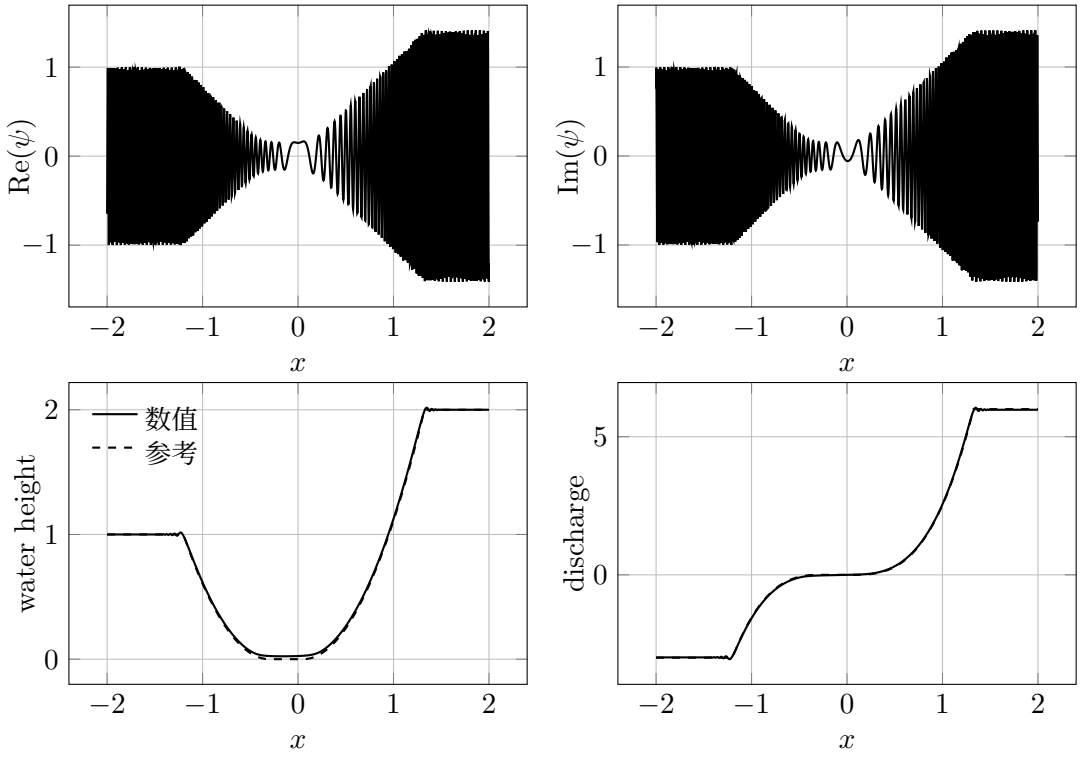

FIGURE 3. 第 3.1.3 小节所述真空生成问题的数值解。上排展示薛定谔波函数 ψ 的实部和虚部。下排展示重构的流体力学变量，即水深 $h = |\psi|^2$ 和流量 $q = \varepsilon \mathrm{Im}(\psi\,\psi_x)$。数值解与相应的无色散浅水黎曼解进行比较。 −

3.2. 抛物碗上的振荡湖泊问题。接下来我们考虑经典的抛物碗地形上的振荡湖泊问题 [22, 23], ，并在无量纲化框架下对其进行表述。底部地形给定为

$$b(x) = x^2,$$

其初始自由液面高程、水深和速度为

$$\eta_0(x) = \max\{0.5 - \sqrt{2}\,x, b(x)\}, \qquad h_0(x) = \eta_0(x) - b(x), \qquad u_0(x) = 0.$$

This 该问题具有一个带有移动湿润–干涸界面的精确周期解,

$$h(x,t) = \eta(x,t) - b(x),$$

其中

$$\eta(x,t) = \max\{0.75 - 0.25\cos(2\sqrt{2}\,t) - \sqrt{2}\,x\cos(\sqrt{2}\,t), b(x)\}.$$

计算域取为 $\Omega = [-2, 2]$，并施加齐次诺伊曼边界条件。初始薛¨定谔波函数由经过正则化的

自由表面剖面构造而成,

$$\psi(x,0)=\sqrt{\delta\log\left(1+\exp\left(\frac{\eta_0(x)-b(x)}{\delta}\right)\right)},\qquad \delta=1.2\,\varepsilon.$$

图4展示了时刻 $t=2.0$、$t=3.0$ 和 $t=4.0$ 的数值解。与前面的例子一样，薛定谔波函数的实部和虚部在小-ε区域呈现快速振荡行为。我们观察到，振荡频率随时间变化，反映了底层波函数的时变相位结构。

尽管波函数层面存在明显振荡，重构得到的自由液面高程仍保持平滑，并紧密贴合无色散浅水方程的精确解。具体而言，数值解准确捕捉了自由液面的周期性运动以及湿润–干涸界面的演变。该例进一步表明，基于薛定谔方程的公式适用于这一情形，且无需在干区附近采用任何临时数值处理，即可捕捉湿润–干涸界面的演变。

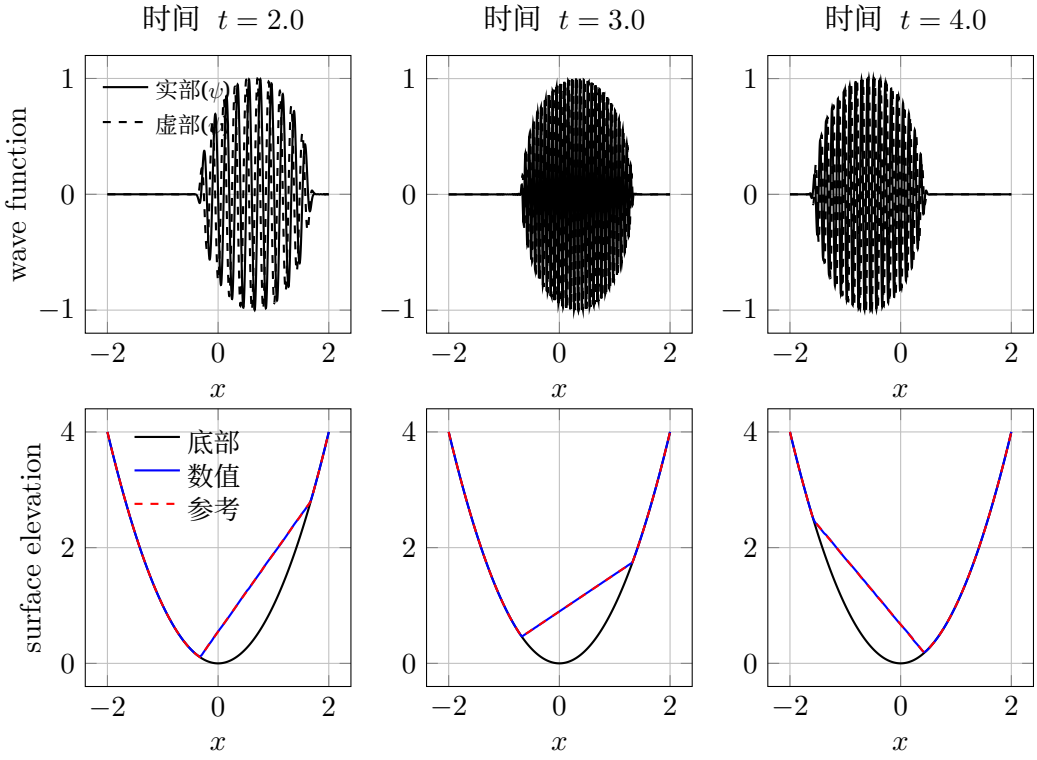

FIGURE 4. 第 3.2 小节所述振荡湖泊问题的数值解。上排显示 Schr¨odinger 波函数 ψ 的实部和虚部。下排显示重构的自由液面高程 $\eta(x)=h(x)+b(x)$，以及底部地形 $b(x)$。左、中、右三列分别对应时刻 $t=2.0$、$t=3.0$ 和 $t=4.0$。

3.3. 良平衡测试。 最后，我们考察基于 Schr¨odinger 的近似方法在静止湖泊构型中的良平衡性质。我们考虑底部地形

$$b(x)=b_{\max}\mathrm{e}^{-10x^2},$$

初始水深和速度

$$h_0(x)=(1-b(x))_+,\qquad u_0(x)=0.$$

无色散浅水方程对应的精确解为静止湖泊状态

$$h(x,t)=(1-b(x))_+,\qquad u(x,t)=0.$$

我们在 Ω 上施加周期边界条件 $= [-2, 2]$，并考虑两个代表性情形：$b_{\max} = 0.9$ 对应全湿稳态，而 $b_{\max} = 1.1$ 则会形成部分干涸构型。最终时刻 $t = 1.0$ 的数值结果如图5所示。

与前面的测试案例不同，在这种情形下，薛定谔波函数的振荡行为显著减弱。这与底层浅水解是速度为零的稳态这一事实相符，因此薛定谔表述中不会产生快速变化的相位。因此，在全湿和部分干涸情形下，ψ 的实部和虚部都相对平滑。

然而，数值解中仍可观察到自由液面高程偏离精确稳态的微小误差。在这两种情形下，这些偏差的量级均为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，这反映了非线性薛定谔方程 (7) 不具备精确的良平衡性质。我们还观察到，部分干涸构型的近似误差略大于全湿情形，不过两种设置下的整体误差量级仍为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$。

4. Conclusion

我们提出了一种基于薛定谔方程的色散正则化框架，用于数值模拟一维浅水方程。该方法通过求解半线性复值薛定谔方程，并通过后处理恢复流体力学变量，将原始非线性双曲系统转化为一种形式，可利用时间分裂和高阶空间离散进行高效近似。该表述的一项主要优势在于，它能够自然地处理真空态和移动的湿润–干涸界面，无需采用临时性的数值处理方法。

数值实验表明，在亚临界且无激波状态下，基于 Schr¨odinger 的近似能够准确表示无色散浅水解，误差通常为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 阶。这包括涉及湿润与干涸、真空生成以及在非平凡水深地形上自由液面随时间运动等具有挑战性的情形。相比之下，当浅水方程中发生激波形成时，Schr¨odinger 正则化产生的是色散激波，而非经典熵激波，这凸显了当前方法在此类状态下的固有限制。

总体而言，结果表明，基于 Schr¨odinger 的色散正则化为浅水流的数值模拟提供了一种有前景的替代框架，适用于解保持光滑，或出现真空和移动岸线的状态。未来的工作将重点开展存在真空时的严格误差分析、向高维情形的扩˙展，以及在更现实的地球物理和工程流动问题中的应用。

References

[1] Georgios D. Akrivis、Vassilios A. Dougalis、Ohannes A. Karakashian 和 William R. McKinney。《非线性 Schr ¨ *Hellenic research in mathematics and* odinger 方程的 *informatics '92 (Athens, 1992)* 421 442 1992 伽辽金–有限元方法》。载于，第 – 页。希腊数学学会，雅典，。[2] Robert Anderson、Julian Andrej、Andrew Barker、Jamie Bramwell、Jean-Sylvain Camier、Jakub Cerveny、Veselin Dobrev、Yohann Dudouit、Aaron Fisher、Tzanio Kolev、Will Pazner、Mark Stowell、Vladimir Tomov、Ido Akkerman、Johann Dahm、David Medina 和 Stefano Zampini。《MFEM：模块化有限元方法库》。 *Computers & Mathematics with Applications*，81：42–74，2021年。面向数值偏微分方程问题的开源软件开发与应用。[3] Emmanuel Audusse、Fran¸cois Bouchut、Marie-Odile Bristeau、Rupert Klein 和 Beno ̂ıt Perthame。《采用静水重构的快速稳定良平衡格式：用于浅水流》。 *SIAM J. Sci.*，( )：–。[4] *Comput.* 25 6 2050 2065, 2004 Weizhu Bao 和 Yongyong Cai。《玻色–爱因斯坦凝聚的数学理论与数值方法》。*Kinet. Relat. Models*，6(1)：1–135，2013年。[5] Weizhu Bao、Shi Jin 和 Peter A. Markowich。《半经典状态下 Schr¨odinger 方程的时间分裂谱近似》。 *J. Comput. Phys.*，175(2)：487–524，2002年。[6] Weizhu Bao、Shi Jin 和 Peter A. Markowich。《半经典状态下非线性 Schr¨odinger 方程的时间分裂谱离散研究》。 *SIAM J. Sci. Comput.*，25(1)：27–64，2003年。[7] Shintaro Bunya、Ethan J. Kubatko、Joannes J. Westerink 和 Clint Dawson。《浅水方程龙格–库塔间断伽辽金解的湿润与干涸处理》。 *Comput. Methods Appl.*，(-)：–。 *Mech. Engrg.* 198 17 20 1548 1562, 2009

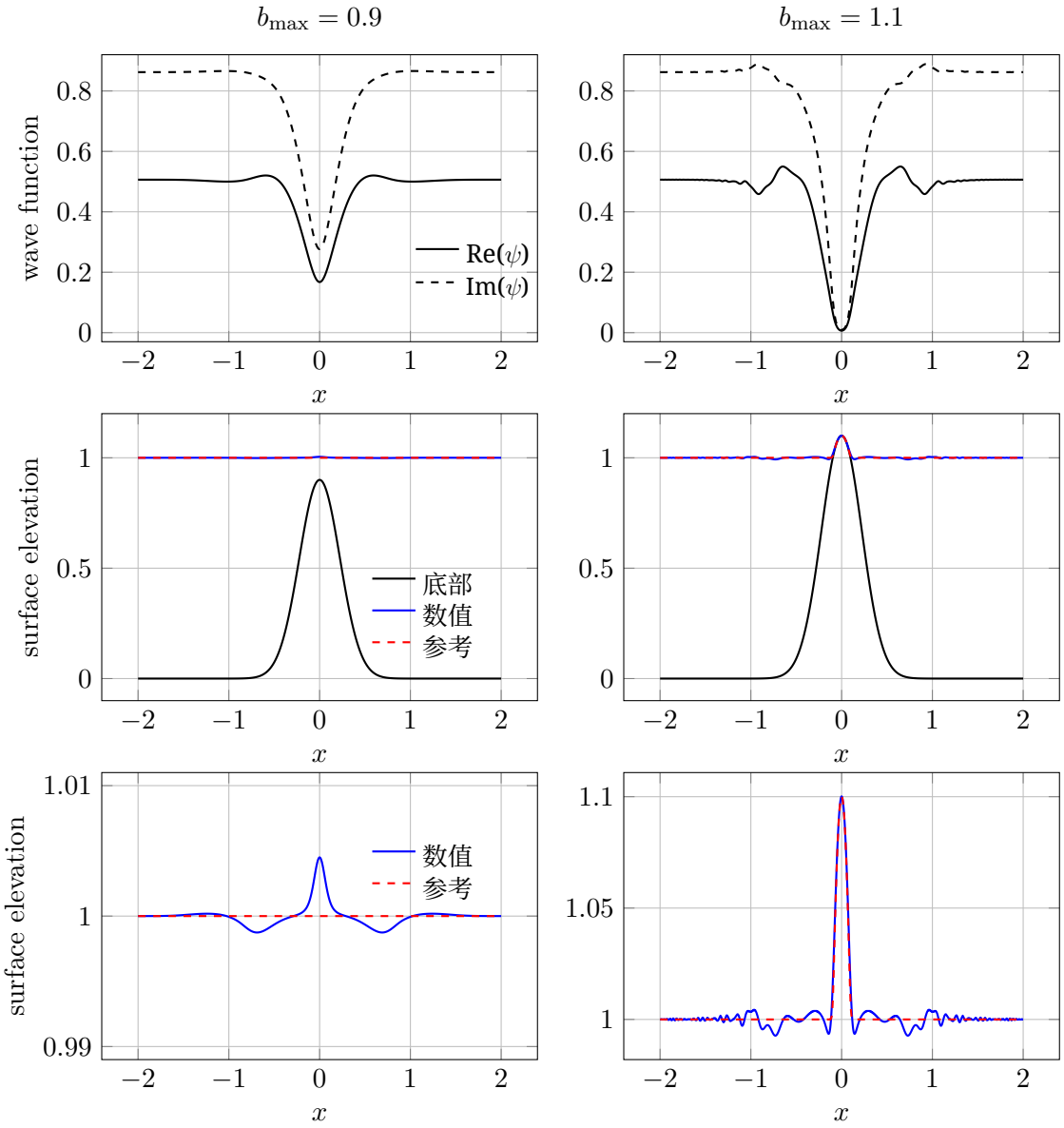

FIGURE 5. 在时间 $t = 1.0$ 对第3.3小节所述良平衡问题的数值解。顶行显示 Schr¨ödinger 波函数 ψ的实部和虚部。中行显示重构的自由液面高程 $\eta(x) = h(x) + b(x)$，其中 $h = |\psi|^2$，以及底部地形 $b(x)$。底行显示不含底部地形的重构自由液面高程 $\eta(x) = h(x) + b(x)$，以突出数值解与精确的（无色散）稳态之间的微小偏差。左列对应于 $b_{\max} = 0.9$的全湿情形，而右列对应于$b_{\max} = 1.1$的部分干涸情形。

[8] R´emi Carles。 *Semi-classical analysis for nonlinear Schrödinger equations—WKB analysis, focal points, coherent states* 2021 。World Scientific Publishing Co.，新加坡，第二版， [2021] ©。[9] R ´ ¨ *Nonlin-earity* 25 10 2843 2873, 2012 emi Carles、Raphael Danchin 和 Jean-Claude Saut。Madelung、Gross-Pitaevskii 与 Korteweg。[10] ，（）：–。[10] 陈永新、Tryphon T. Georgiou 和 Michele Pavon。论最优传输与 Schr¨odinger 桥之间的关系：随机控制视角。 *J. Optim. Theory Appl.*，169(2)：671–691，2016。[11] G. A. El 和 M. A. Hoefer。色散激波与调制理论。 *Phys. D*，333：11–65，2016。[12] Mi-Ho Giga、Arkadz Kirshtein 和 Chun Liu。变分建模与复杂流体。载于 *Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids* 73 113 2018 ，第 – 页。施普林格，Cham，。

[13] E. Grenier. 非线性薛定谔方程的小时间半经典极限。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，126 2 523 530，1998（）：–。[14] Li Guo 和 Yan Xu. 含波算子的非线性薛定谔方程的能量守恒局部间断伽辽金方法。 *J. Sci. Comput.*，65(2):622–647，2015。[15] M. A. Hoefer、M. J. Ablowitz、I. Coddington、E. A. Cornell、P. Engels 和 V. Schweikhard. 玻色–爱因斯坦凝聚体与气体动力学中的色散激波和经典激波。 *Phys. Rev. A*，74:023623，2006年8月。[16] Peter D. Lax 和 C. David Levermore. 科尔特韦格–德弗里斯方程的小色散极限。I. *Comm. Pure Appl. Math.*，36(3):253–290，1983。[17] Christian L´eonard. 薛定谔问题及其与最优传输联系的综述。*Discrete Contin. Dyn. Syst.*，34(4):1533–1574，2014。[18] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*。剑桥应用数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[19] Chun Liu. 弹性复杂流体导论：一种能量变分方法。载于 *Multi-Scale Phenomena in Complex Fluids: Modeling Analysis and Numerical Simulation* 286 337 , ,

第–页。世界科技出版公司，2009年。[20] E. Madelung. 流体动力学形式的量子理论。 *Zeitschrift für Physik*, 40:322–326，1927。[21] Peter A. Markowich、Paola Pietra、Carsten Pohl 和 Hans Peter Stimming. 杜福特–弗兰克尔格式求解薛定谔方程的维格纳测度分析。 *SIAM J. Numer. Anal.*，40(4):1281–1310，2002年。[22] Joe Sampson、Alan Easton 和 Manmohan Singh. 抛物线形底部地形上方的移动边界浅水流。 *ANZIAM J.*，47:C373–C387，2005年。[23] William Carlisle Thacker. 非线性浅水波方程的一些精确解。

J. Fluid , ：–。*Mech.* 107 499 508, 1981

[24] Eleuterio F. Toro. *Computational Algorithms for Shallow Water Equations*。施普林格，Cham，瑞士，第2版，2024年。[25] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*。纯粹与应用数学。威利-跨学科出版社 [John Wiley & Sons], 纽约-伦敦-悉尼，1974年。[26] Yulong Xing 和 Chi-Wang Shu. 含干态浅水方程的高阶有限体积WENO格式。 *Advances in Water Resources*，34(8):1026–1038，2011年。[27] Yulong Xing 和 Xiangxiong Zhang. 非结构三角形网格上浅水方程的保正性平衡间断伽辽金方法。 *J. Sci. Comput.*，57(1):19–41，2013年。

Department of Applied and Computational Mathematics and Statistics University of Notre , , Dame USA.
Email address: gfu@nd.edu

Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, USA.*Email address*: cliu124@iit.edu