受驱自振荡器的动态同步 – 建模与实验

Zhenwei Xu, [1], * Ulrich Kuhl, [1,2] 和 Nicolas Noiray[1], † [1] *CAPS Laboratory, Department of Mechanical and Process Engineering, ETH Zürich, 8092 Zürich, Switzerland*
[2] *Université Côte d'Azur, CNRS, Institut de Physique de Nice (INPHYNI), 06200, Nice, France*（日期：2026年1月7日）

固定频率驱动和幅度强迫下自持振荡器的同步已得到充分理解，但时变强迫如何扰乱相位锁定，研究得却少得多。理论预测，对驱动幅度或频率进行缓慢、确定性的调制，可能导致一种特殊的同步区间：即使超出固定谐波强迫所对应的阿诺德舌边界，振荡相位仍会呈现间歇性锁定。我们在一种可控的气动声学自振荡器（即哨声）中检验了这些预测。该振荡器具有稳健的极限环，并受到频率和振幅调制均可编程的外部声学强迫。在强迫频率或幅度缓慢变化时，我们观察到三种区间：(i) 严格同步；(ii) 间歇同步，其特征是相位锁定与短暂的相位滑移事件交替出现；以及 (iii) 无同步，并伴有规则相位滑移。尤其是在严格同步区间内，振荡器的相位会跟随任意缓慢变化的驱动相位；在振幅调制下，其幅度涨落也会受到强烈抑制。

arXiv:2601.02584v1 [nlin.CD] 5 Jan 2026

I. 引言

周期性强迫下自持振荡器的相位同步（或称相位锁定），是指振荡器的相位调整到与外部周期驱动相匹配 [1, 2]。这一现象已在力学、电子学、化学和生物学领域得到广泛研究[2–4]。关于时间不变的周期性驱动，一个经典结果是阿诺德舌的形成：在驱动幅度–频率平面上呈舌状的区域，其中 n：m会发生相位锁定，且 n 和 m 分别表示驱动与振荡器的振荡周期数。在周期性驱动的情形下，对较高频率振荡进行适当平均处理，将得到一个自治动力系统，用以描述同步区间的稳定性、分岔与转变 [4]。

然而，现实中的驱动往往在频率和振幅上有所变化，使动力学本质上成为非自治的。越来越多的研究开始探讨非自治振荡器中的这些问题 [5–9]。在音乐声学模型中也发现了相关的速率依赖现象：缓慢变化的控制参数会重塑吸引域并改变瞬态动力学 [10, 11]。对于具有时间周期性失谐的一维相位振子（非自治 Adler 方程），Gandhi 等人 展示了它们之间薄过渡层中丰富的鸭形段 [6]。与此同时，时稳理论将具有周期上移动点吸引子的自持非自治振荡器归类为一种确定性且抗扰动的时变频率运动 [7]。近期，Lucas 等人 [8] 从理论上表明，确定性、缓慢变化的驱动能够在固定驱动阿诺德舌边界之外，通过形成有限时间的间歇 状态，使振荡得以稳定；在这种状态下，系统轨迹交替经历存在稳定锁定点的时间段，以及不存在锁定点但平均而言仍稳定的时间段。这种效应在高维模型中同样存在 [8]。基于这些结果，研究者提出了有限时间动力系统框架 [9, 12]。该框架明确处理慢调制（在有界慢时间区间上的慢-快过程），阐明相位何时能够跟踪移动吸引子，并给出了调制条件下有限时间稳定性的定性判据 [9, 12]。

本研究旨在以这些理论预测为基础，利用可控的物理振荡器实验研究动态同步。为此，我们采用哨声，并在其自然自激振荡频率附近对其施加动态驱动。在没有驱动的情况下，当空气质量流量超过临界值时，由于剪切层的某个特征模态与哨声的亥姆霍兹模态之间发生相长相互作用，该气动声学系统会变得线性不稳定，并通过超临界霍普夫分岔产生极限环。近期针对掠流空腔和紧凑孔口的分析与实验，量化了剪切层动力学与声场之间的反馈机制、辐射损耗，以及决定振荡振幅的非线性饱和 [13–15]。我们施加微弱的外部声学驱动来驱动气动声学自激振荡，从而为研究调制下的同步提供了一个理想的测试平台。自持振荡的稳健性与外部驱动的精确可编程性相结合，使哨声成为在实验室中验证非自治同步理论的理想平台。

在霍普夫分岔附近，哨声的气动声学模态振幅可用斯图尔特-朗道振荡器描述 [16]；在来自相位或振幅可编程的入射声场的弱驱动下，标准的相位约化（例如， [17]）可导出含时变驱动的一维相位方程。

* zhenxu@ethz.ch
† noirayn@ethz.ch

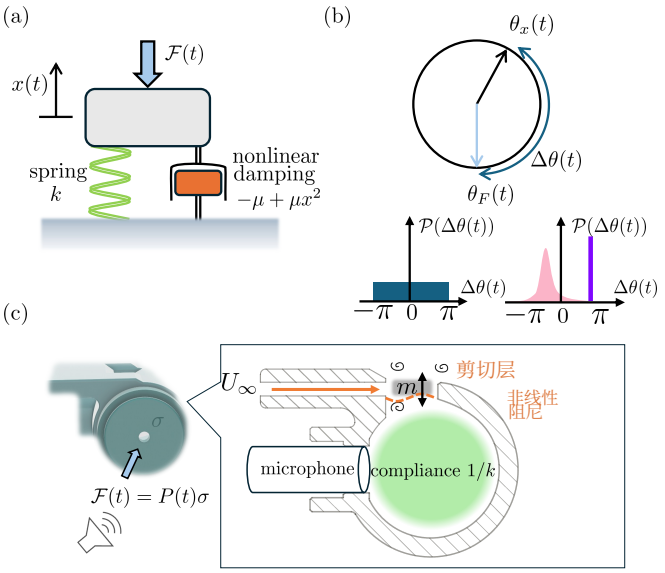

图 1. (a) 范德波尔型质量–弹簧–阻尼器：线性刚度 k （绿色）、负线性阻尼系数 $\mu \in \mathbb{R}^+$和二次非线性阻尼项（橙色），以及外部驱动 $\mathcal{F}$（t）（蓝色）。(b) 相位锁定的相量示意图：极限环圆上的振荡器响应（黑色）和外部驱动（蓝色），并展示相位差 $\mathcal{P}$（$\Delta\phi$（t））概率密度函数的示例，分别对应非同步（蓝色）、准同步（粉色）和同步状态（紫色）。(c) 作为自激振荡器的哨声：腔体顺性 $1/k$ （绿色）、哨笛孔口中的空气质量 m （灰色）、流动诱导的非线性负阻尼（橙色），以及侧孔驱动 $\mathcal{F}$（t）$= P$（t）σ （蓝色）；其中，振荡压力 P（t）由扬声器产生，σ 为孔口面积。

利用单一主导气动声学模态，以及简便易行的频率和振幅慢速/快速扫描，我们对非自治同步进行了系统的实验验证，并展示了静态阿诺德舌边界之外的间歇稳定状态，这与 Lucas 的预测一致等 [8]。此外，我们还测试了在调制足够缓慢但信号可以是任意非周期信号时，对移动吸引子的相位跟踪 [9, 12] 。

本文结构如下。第II 节介绍气动声学系统，推导振荡器振幅和相位的经典慢流方程，并讨论振幅调制和频率调制的影响。第III 节呈现实验结果，包括瞬时频率分析、周期性频率/振幅调制下的同步图（阿诺德舌），以及对非周期相位调制的响应。第IV节总结全文并展望未来工作。

II. 时间调制下的渐近动力学

我们将哨声中受外部声学强迫作用的自持气动声学振荡建模为受外部驱动弱激励的范德波尔（vdP）振荡器。图1(a)中将 vdP 振荡器示意为一个质量–弹簧–阻尼器系统；图1(c)展示了气动声学类比系统，其中腔体顺性、哨笛孔口中的空气质量，以及产生非线性负声阻的剪切层分别对应于机械元件。

有量纲形式下，vdP方程写作

$$\ddot{p} \;-\; \varepsilon\mu\left(1-\frac{p^2}{R^2}\right)\dot{p} \;+\; \omega_n^2 p \;=\; \varepsilon\mathcal{F}(t), \qquad (1)$$

其中 $\mu > 0$ 定义了由气流诱导的非线性负阻尼的线性部分；当流量超过霍普夫分岔阈值时，它会产生一个稳定极限环。在方程（1）中，R 是无驱动范德波尔振子的极限环振幅，即当 $\mathcal{F}(t) = 0$时，而 ω_n 是固有频率。变量 $p(t)$ 对应于哨笛腔体中的声压。小参数 $0 < \varepsilon \ll 1$ 明确表明，我们考虑的是弱阻尼、弱迫自激振荡，因此包络随慢时间尺度演化。

由外部扬声器通过侧向开口施加的声学激励表示为

$$\mathcal{F}(t) = F\,A(t)\,\cos\!\big(\Omega_F(t)\,t+\phi_0\big), \qquad (2)$$

其中 $F = \mathcal{O}(1)$、$A(t)$ 和 $\Omega_F(t)$ 分别是缓慢变化的驱动幅度和频率，ϕ_0 是原点相位；不失一般性，以下将其设为零。

在弱驱动、时间无关的情况下（$A \equiv 1$，$\Omega_F \equiv \Omega_u$ =const。，其中 Ω_u 为未调制驱动频率），将失谐记为 $\Delta\omega = \Omega_u - \omega_n$，并近似

$$p(t) \approx r\cos(\Omega_u t+\theta),$$

其中 r 为受迫极限环振幅，当相位差θ 趋近于一个常数值 [2, 18]时，系统呈现相位同步。等价地，相位差 $\Delta\theta(t) = \theta_p(t) - \theta_F(t)$ 可视为振荡器与驱动之间单位圆上的一个角。因此，同步对应于 $\Delta\theta(t)$ 聚集在某个固定值附近，使其分布 $P(\Delta\theta)$ 呈现尖锐峰值，而非均匀分布，如图 1(b) 所示。在驱动振幅与失谐平面上绘制同步区域，可得到经典的阿诺德舌 [2, 18]。

这里我们关注 $A(\varepsilon t)$和/或 $\Omega_F(\varepsilon t)$随时间缓慢变化的非自治情形。为分析这种调制，我们引入标准的多重时间尺度方

导入 [19],

$$T_0 = t, \qquad T_1 = \varepsilon t, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1,$$
$$p(t) \;=\; p_0(T_0, T_1) \;+\; \varepsilon\, p_1(T_0, T_1) \;+\; \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{3}$$

使振幅和相位在慢时间T_1上演化。随后，我们还将引入显式的调制相位

$$\theta_m(T_1) = \varepsilon \Omega_m t = \Omega_m T_1, \tag{4}$$

调制频率为 Ω_m。因此，θ_m 在慢时间尺度 T_1上推进，并且 Ω_m 的选取远小于自振荡器的固有频率。这一经典方法（例如，[19, 20]）可得出描述瞬时振幅和相位的耦合慢流方程，从而捕捉同步、相位滑移以及慢调制的影响。

接下来，我们分别讨论振幅调制 和频率（相位）调制 。针对每种情况，我们推导慢流方程，确定锁定判据，并讨论其对实验观测到的同步图的影响。

关于本文分析的有效性，与固定振幅谐波驱动的情况不同，在慢调制条件下，微扰近似在时间区间 $T = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$内会产生 $\mathcal{O}(\varepsilon)$误差；不过，这对于我们的实验比较已足够。

还需注意，阿德勒方程通常是在不考虑振幅动力学的情况下推导出来，用于确定锁定判据，例如 [5, 21] ，或用于更现代的分析，如 [17] ；其假设是振荡器的振幅受限于其极限环。

相比之下，我们推导出振幅和相位的耦合慢流方程，从而提供了完整的描述；对于受频率或振幅调制驱动的自振荡器而言，这一点至关重要。

A. 频率调制

首先考虑外部驱动频率缓慢变化的情形，其时间尺度为 $T_0 = t$ 和$T_1 = \varepsilon t$ 以及 $A \equiv 1$。此时驱动可写为

$$\mathcal{F}(T_0, T_1) = F \cos\left(\Omega_u T_0 + k_f \sin\theta_m(T_1)\right), \tag{5}$$

其中，平均（未调制）驱动角频率为 Ω_u，频率调制深度为 k_f，调制相位为 $\theta_m(T_1) = \Omega_m T_1$。采用复数表示法，我们将驱动写为

$$\mathcal{F}(T_0, T_1) = \Re\left\{F\, e^{\,i\Phi(T_0, T_1)}\right\},$$

and

$$\Phi(T_0, T_1) = \Omega_u T_0 + k_f \sin\theta_m(T_1),$$

因此

$$\mathcal{F}(T_0, T_1) = \Re\left\{F\, e^{\,i\Omega_u T_0}\, e^{\,ik_f \sin\theta_m(T_1)}\right\}. \tag{6}$$

雅可比–安格尔展开 [22] 仅应用于缓慢变化的因子，

$$e^{\,ik_f \sin\theta_m(T_1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_f)\, e^{\,in\theta_m(T_1)}, \tag{7}$$

因此复数驱动变为

$$F\, e^{\,i\Phi(T_0, T_1)} = F \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_f)\, e^{\,i\left[\Omega_u T_0 + n\Omega_m T_1\right]}.$$

将首阶项代入受扰动的vdP方程并应用多重尺度法后，只有载波为$e^{i\omega_n T_0}$ 的近共振强迫项会对慢演化产生贡献，其他快速振荡项均会平均为零。保留近共振项（此处为 $n = 0,\ \pm 1$）后，即得到包络振幅 $r(T_1)$和相位 $\theta(T_1)$的慢流系统，

$$\frac{dr}{dT_1} = \frac{\mu}{2}\, r\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{F\, J_0(k_f)}{2\,\omega_n}\, \sin\theta - \frac{F\, J_1(k_f)}{\omega_n}\, \sin\big(\theta - \theta_m\big), \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \Delta\omega - \frac{F\, J_0(k_f)}{2\,\omega_n\, r}\, \cos\theta - \frac{F\, J_1(k_f)}{\omega_n\, r}\, \cos\big(\theta - \theta_m\big), \tag{9}$$

其中 $\Delta\omega = \Omega_u - \omega_n$ 为失谐。令 $k_f = 0$ (因此$J_0(k_f) = 1$, $J_1(k_f) = 0$) 可将方程（8）–（9）化为谐波强迫vdP振子的标准截断慢流方程 [18]。

推导方程（8）–（9）时，截断项仅保留雅可比–安格展开中的 $n = 0, \pm 1$ 阶，即 J_0项和 J_1项。对于较小的 k_f，$J_n(k_f) = \mathcal{O}\big((k_f/2)^{|n|}\big)$，因此 $|J_{\pm 2}| = \mathcal{O}(k_f^2)$，且相关项均较弱并远离共振，故在最低阶近似下平均为零。所得慢流在$\mathcal{O}(k_f^2)$ 修正范围内准确。若纳入 J_2，则会增加与 $\cos(\theta - 2\theta_m)$ 和 $\sin(\theta - 2\theta_m)$ 成正比的项，其系数与 $J_2(k_f)$ 成正比。

对于失谐缓慢变化的相位振子，Lucas 等人 [8] 研究了非自治 Adler 方程 $\dot{\psi} = \Delta\omega(t) + \gamma \sin\psi$，其中 ψ 是相位差，$\Delta\omega(t)$是给定的时变频率失谐，而 $\gamma > 0$ 是耦合常数。瞬时不动点满足 $\Delta\omega(t) + \gamma \sin\psi^*(t) = 0$，且仅当 $|\Delta\omega(t)| \le \gamma$时才存在。根据该不等式在一个调制周期内成立的频次，他们区分出三种区域（其图1中的 I–III 区域，也见图2）：无同步（$|\Delta\omega(t)| > \gamma, \forall t$）、持续同步（$|\Delta\omega(t)| < \gamma, \forall t$），以及一种间歇区域，在该区域中 $|\Delta\omega(t)|$ 每个周期穿越 γ 两次，此时不动点每个周期生成和消失两次。在

间歇情形下，动力学是确定性的。系统在趋近瞬时不动点的时段与漂移时段之间交替，在缓慢调制的每半个周期产生一次滑移。Lucas 等人表明，在平均失谐与耦合构成的参数平面上，持续同步区域与间歇区域的并集比静态舌形区 $|\Delta\omega| < \gamma$更大。调制下阿诺德舌表观上的拓宽是由间歇区域造成的，而最大李雅普诺夫指数为负的 ψ 参数值在广义意义上被视为同步 [8]。

本文采用相同的非自治调制，但从完整的范德波尔模型出发：我们首先推导受迫范德波尔振子的振幅和相位的慢流方程，然后说明（附录A）经过显式变量变换后，慢相位差可化为 Lucas 等人 [8]研究的非自治阿德勒方程。

对于每个冻结调制相位 θ_m，慢流相位方程（9）的瞬时平衡态满足

$$0 = \Delta\omega - \frac{F\,J_0(k_f)}{2\,\omega_n\,r}\cos\theta^* - \frac{F\,J_1(k_f)}{\omega_n\,r}\cos\!\left(\theta^* - \theta_m\right),$$

这定义了一个时变锁定条件。如附录A所述，通过将 θ 变换为相位差 ψ ，可将慢相位动力学改写为非自治阿德勒方程

$$\frac{d\psi}{dT_1} = \Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1) + \gamma_{\mathrm{eff}}(T_1)\,\sin\psi, \tag{10}$$

其有效失谐 $\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1)$ 和耦合 $\gamma_{\mathrm{eff}}(T_1)$ 均为 $\theta_m(T_1)$ =Ω $_mT_1$的显式函数。对于冻结的 T_1，方程（10）存在瞬时不动点，当且仅当 $|\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1)| \le \gamma_{\mathrm{eff}}(T_1)$，这与静态 Adler 情形完全相同。

在小调制范围内 $k_f \ll 1$ 有$J_0(k_f) \approx 1$, $J_1(k_f) \approx k_f/2$, 耦合近乎恒定，而失谐则发生振荡。取最低阶近似，

$$\gamma_{\mathrm{eff}} = \frac{F}{2\,\omega_n\,r}, \quad \Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1) = \Delta\omega - \Omega_m k_f\cos\theta_m(T_1), \tag{11}$$

因此，(10) 化简为 Lucas 等人 [8]所分析的形式。根据他们的分类，根据瞬时不等式$|\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1)| \le \gamma_{\mathrm{eff}}$ 在一个调制周期内成立的频次，可得到三种状态：

$$\text{No synchronization:}\quad \gamma_{\mathrm{eff}} < |\Delta\omega| - \Omega_m k_f, \tag{12}$$

$$\text{持续同步：}\gamma_{\mathrm{eff}} \ge |\Delta\omega| + \Omega_m k_f,\ \text{间歇同步：} \tag{13}$$

$$|\Delta\omega| - \Omega_m k_f \le \gamma_{\mathrm{eff}} \le |\Delta\omega| + \Omega_m k_f. \tag{14}$$

在间歇区域内，$|\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1)| = \gamma$ 每个调制周期穿越两次，会发生两次鞍结分岔，且轨迹在同步与非同步子区间之间确定性地交替。这三个区域对应于示意性

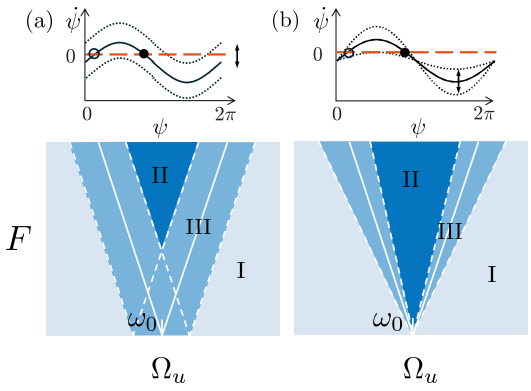

图2. 慢调制下同步图的示意图。上图：相位动力学（黑色实线）在一个调制周期内随时间的演化，以及表示固定点存在时段的水平线（橙色虚线；稳定固定点以实心圆标示，不稳定固定点以空心圆标示）。下图：对应的示意性阿诺德舌，位于平均驱动频率（横轴）和驱动振幅（纵轴）构成的平面中，显示三种状态：浅蓝色——无同步（区域 I），中蓝色——间歇同步（区域 III），深蓝色——持续同步（区域 II）。白色实线边界为经典（未调制）锁定阈值。白色虚线边界表示在调制的两个极值处计算得到的锁定阈值。(a) 频率调制：驱动频率随时间振荡，而驱动振幅保持不变。本图重新绘制，并根据 Lucas *et al.* [8] 调整了标注。(b) 振幅调制：驱动振幅发生振荡，而驱动频率保持不变。内侧白色虚线对应式(27)给出的持续同步阈值，外侧白色虚线对应式(26)给出的广义同步阈值。

相图见图 2（a），以及参考文献 [8]中的区域 I–III。在实验和示意性阿诺德舌图（图2）中，我们采用平均驱动频率与驱动振幅构成的平面（Ω_u, F），该平面与（$\Delta\omega$, γ）中的理论几何结构直接相关，详见参考文献 [8]。

另一种互补的启发式观点，是将9视为静态强迫项与由频率调制产生的近共振边带之和。这两部分合并后形成有效驱动尺度

$$F_{\mathrm{eff}}(k_f) = \frac{F}{2\,\omega_n\,r}\sqrt{J_0(k_f)^2 + \left[2\,J_1(k_f)\right]^2}, \tag{15}$$

其中，平方根反映了载波与第一边带振幅的均方根组合。

对展宽的锁定区间进行粗略估算时，可在一个调制周期内准静态地应用静态判据 $|\Delta\omega| \lesssim F_{\mathrm{eff}}$ 。对于较小的 k_f，有 $J_0(k_f) \approx 1$ 和 $J_1(k_f) \approx k_f/2$，因此 $F_{\mathrm{eff}} \approx F\sqrt{1 + k_f^2}$ / $(2\omega_n r)$。由此，频率调制会在载波与其边带之间重新分配驱动功率，略微增强有效耦合，并拓宽锁定范围，

这里的锁定范围广义上指同步范围，且标称驱动幅值保持不变。

B. 振幅调制

现在考虑谐波驱动的振幅调制情况。振幅调制会影响瞬时耦合强度，从而使锁定条件随时间变化，产生与频率调制下相同的三种状态（持续同步、间歇同步和无同步），但阿诺德舌的交替方式不同。此处驱动取为

$$\mathcal{F}(T_0, T_1) = F\,[1 + k_a \sin\theta_m(T_1)]\cos(\Omega_u T_0), \tag{16}$$

此时驱动频率 Ω_u为常数，振幅调制深度为 k_a，调制相位为 $\theta_m(T_1) = \Omega_m T_1$。

利用上文定义的慢时间 T_1 和前文引入的调制相位 θ_m ，耦合幅相动力学的慢流现在为

$$\frac{dr}{dT_1} = \frac{\mu}{2}\, r\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big) - \frac{F}{2\,\omega_n}\big(1 + k_a \sin\theta_m\big)\,\sin\theta, \tag{17}$$

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \Delta\omega - \frac{F}{2\,\omega_n\, r}\big(1 + k_a \sin\theta_m\big)\,\cos\theta, \tag{18}$$

其中， $0 < k_a < 1$ 为输入幅度调制强度， F 为标称激励水平。

我们首先分析持续同步以及对施加调制的衰减。根据相位慢流（18），可方便地定义时变有效耦合

$$\gamma_{\text{eff}}(T_1) = \frac{F}{2\,\omega_n\, r(T_1)}\,\left[1 + k_a \sin\theta_m(T_1)\right]. \tag{19}$$

对于冻结的 T_1，方程（18）存在平衡态，当且仅当

$$|\Delta\omega| \le |\gamma_{\text{eff}}(T_1)|. \tag{20}$$

因此，要在整个调制过程中保持持续同步，必须满足一致条件

$$|\Delta\omega| \le \min_{T_1} |\gamma_{\text{eff}}(T_1)|. \tag{21}$$

在同步区间内，相位 $\theta(T_1)$ 始终接近缓慢变化的锁定值，记为 $\theta_s(T_1)$，而振幅则保持在受迫极限环值 R_F 附近。写作

$$r(T_1) = R_F + \delta r(T_1), \quad |\delta r| \ll R_F,$$

并对（17）在 R_F 附近进行线性化，可得振幅在调制频率处的正弦响应。若将此响应写为

$$r(T_1) = R_F\,(1 + k_p \sin\theta_m(T_1))\,,$$

其中 k_p 是ρ的归一化输出调制深度，可得

$$k_p = \frac{\delta r}{R_F} = \frac{F\,\sin\theta_s}{2\,\omega_n\, R_F\,\mu}\,k_a = \Big(1 - \frac{R}{R_F}\Big)\,k_a. \tag{22}$$

由于 $R_F > R$，因子 $1 - R/R_F$ 严格介于 0 和 1 之间。这意味着慢速振幅调制会受到衰减（$k_p < k_a$）。因此，在 k_a 的最低阶近似下，将振幅视为准常数，并在耦合项中用 R_F 替代 $r(T_1)$ 是合理的。

采用这一近似后，有效耦合变为

$$\gamma_{\text{eff}}(T_1) \approx \gamma_0\,[1 + k_a \sin\theta_m(T_1)]\,, \quad \gamma_0 = \frac{F}{2\,\omega_n\, R_F}. \tag{23}$$

一个调制周期内的最小值和最大值为

$$\gamma_{\min} = \gamma_0(1 - k_a), \quad \gamma_{\max} = \gamma_0(1 + k_a).$$

如果失谐位于窗口内

$$\gamma_{\min} < |\Delta\omega| < \gamma_{\max}, \tag{24}$$

那么就会出现类似的间歇同步。交越时间满足

$$\sin\theta_m(T_1) = \frac{|\Delta\omega|/\gamma_0 - 1}{k_a} \in [-1, 1], \tag{25}$$

因此，在间歇同步区间内，每个调制周期都会发生两次鞍结分岔。

此外，直线 $|\Delta\omega| = \gamma_0(1 \pm k_a)$ 将失谐与标称耦合平面（$\Delta\omega$， γ_0）中的同步图划分为之前介绍的 I–III 区域。持续同步区域满足

$$|\Delta\omega| \le \gamma_0(1 - k_a),$$

间歇同步区域具有双侧带

$$\gamma_0(1 - k_a) < |\Delta\omega| < \gamma_0(1 + k_a),$$

而当满足以下条件时则不会发生同步

$$|\Delta\omega| \ge \gamma_0(1 + k_a).$$

因此，持续同步在（$\Delta\omega$， γ_0）平面中形成一个内三角形，而广义同步（持续同步加间歇同步）则占据一个更大的外三角形，间歇区域填充在两条边界之间的三角形侧带中，这两条边界在图2中以白色虚线标出。

在失谐量 $|\Delta\omega|$固定时，这些条件可改写为关于驱动振幅 F 的条件。任何宽范围的同步都要求

$$F \ge \frac{2\,\omega_n\, R_F}{1 + k_a}\,|\Delta\omega|, \tag{26}$$

而持续同步则要求

$$F \geq \frac{2\,\omega_n\,R_F}{1-k_a}\,|\Delta\omega|. \tag{27}$$

因此，振幅调制将同步阈值降低至原来的 $1/(1+k_a)$倍（广义同步，即持续同步加间歇同步），但会将持续同步的阈值提高至 $1/(1-k_a)$，从而形成图2(b)所示的外侧三角形变宽、持续同步三角形缩小的效果。

为比较不同慢调制的影响，频率调制表现为随时间变化的失谐，因此沿经典边界移动相当于在（$\Delta\omega,\gamma$）平面中左右移动。由此，广义同步区域变为一个关于静态阿诺德舌边界对称的梯形。相比之下，振幅调制表现为随时间变化的耦合，因此沿经典边界移动相当于在（$\Delta\omega$, γ）平面中上下移动。此时，间歇带表现为较窄的持续同步三角形两侧的两个三角形区域，整体广义阿诺德舌也相应变宽。

III. 实验结果与讨论

图1(c)展示了我们的实验用外部驱动自激振荡器。它是一个3D打印哨笛，按照 [23], 中介绍的设计制成，并作为障碍物安装在一维波导中央。通过体积流量控制器（Bronkhorst）向哨笛供气。调节空气质量流量以诱发自激振荡，而哨笛两侧的4毫米孔口则实现了与波导的声耦合。在这种管道结构中，平均流与声相互作用可视为提供了有效的声增益与损耗 [24]。入射声波由位于波导一端的压缩驱动器（CP850Nd，Beyma）产生。波导、哨笛和外部驱动装置与文献 [23], 中的基本相同；该文献重点研究稳态恒定驱动下的声波散射，而本文则使用同一实验平台研究缓慢变化的非稳态驱动下的同步。实验中，在控制脚本中设定无量纲驱动幅度 F，并将其转换为电压指令，发送至功率放大器和压缩驱动器。使用麦克风（46BD-FV G.R.A.S.）记录哨笛内部的压力；麦克风与哨笛内壁齐平安装。在以下分析中，持续向哨笛供给10 L/min的气流，使其以1160 Hz的自然哨笛频率产生持续自激振荡。

为量化哨声与外部驱动之间的同步程度，本文采用了 [25, 26] 中的相位锁定值（PLV）。其他指标（例如根据延迟嵌入 [27] 估算的最大李雅普诺夫指数，或相位差熵 [28]）在当前这种噪声较大、仅有单一观测量的系统中表现得不够稳健。瞬时相位 $\theta_p(t_k)$ 和 $\theta_F(t_k)$，通过对采样时刻 t_k的压力信号 $p(t)$ 和力 $\mathcal{F}(t)$ 进行希尔伯特变换获得。随后，原始相位差序列

$$\Delta\theta_k = \theta_p(t_k) - \theta_F(t_k). \tag{28}$$

当驱动缓慢调制（频率或振幅）时， $\Delta\theta_k$ 在调制相位 $\theta_m(t)$处包含一个确定性分量。为分离剩余的聚类，需将相位差投影到已知驱动波形上，对其进行解调，并减去拟合分量。具体而言， $\Delta\theta_k$ 近似为

$$\Delta\theta_k = a\,\theta_F(t_k) + \Delta\theta_k^{\perp}, \tag{29}$$

其中

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{N}\theta_F(t_k)\,\Delta\theta_k}{\sum_{k=1}^{N}\theta_F(t_k)^2},$$

且 $\Delta\theta_k^{\perp}$ 为调制校正相位。该投影从 $\Delta\theta_k$中去除了已知的确定性漂移。调制校正相位锁定值（mcPLV）定义为

$$\mathrm{mcPLV} = \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{\,i\,\Delta\theta_k^{\perp}}\right|, \quad 0 \leq \mathrm{mcPLV} \leq 1. \tag{30}$$

接近 1 的值表示持续同步，中间值通常表示间歇性同步，而接近 0 的值表示无同步。在下方的图中，同时给出 mcPLV 和 $\Delta\theta_k^{\perp}$的圆形直方图，以便于解读。

A. 时间周期调制驱动频率下的实验同步

参照图 2(a)中的示意图，对驱动频率进行缓慢调制，并使用上述定义的 mcPLV 对同步进行量化。在频率调制实验中，瞬时驱动频率的形式为

$$\Omega_F(t) = \Omega_u + k_f\,\Omega_m\cos(\Omega_m t),$$

平均驱动频率为 Ω_u，无量纲调制深度为 k_f，调制频率为 Ω_m （此处$f_m = \Omega_m/2\pi = 1$Hz）。因此，调制速度远低于哨声的固有频率 1160 Hz，振荡器在声学时间尺度上经历缓慢变化的失谐。为方便起见，调制深度即频率振幅

$$\Delta f = \frac{k_f\,\Omega_m}{2\pi},$$

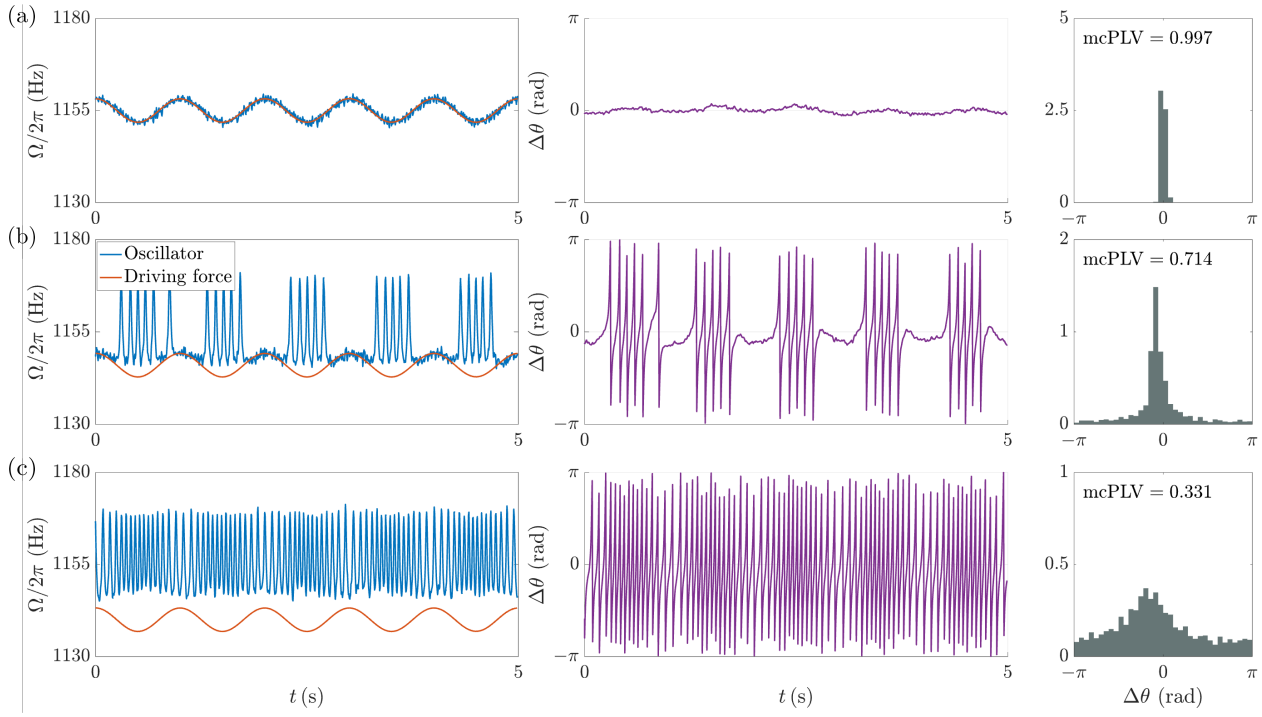

图 3. 图中标出的三个同步状态（I–III）的瞬时频率和相位差分析。5（c）在固定驱动强度 $F = 1.85$ 以及平均驱动频率 $\Omega_u/2\pi = 1155$下，1146、1140 Hz 分别对应（a）、（b）和（c）。每一行对应一种同步状态：左列为驱动（橙色）和振荡器（蓝色）的瞬时频率；中列为包裹的调制校正相位差 $\Delta\theta(t)$；右列为 $\Delta\theta$ 的概率密度及相应的多通道相位锁定值。面板（a）展示持续同步（同步状态 II），（b）展示具有周期性相位滑移的间歇同步（同步状态 III），面板（c）展示无同步（同步状态 I）。聚类越紧密，多通道相位锁定值越接近 1，表示长期同步越强。

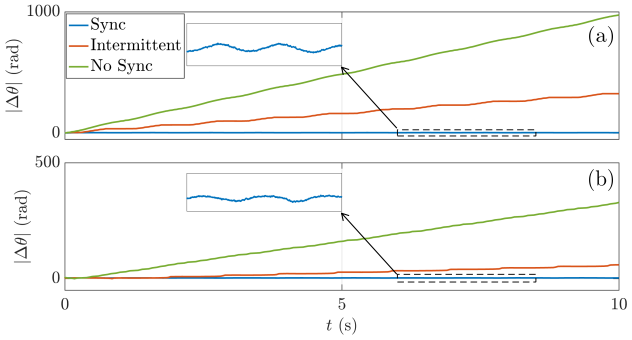

图 4. 三种同步状态下的相位滑移动力学。（a）幅度调制；（b）频率调制。每个面板绘制了代表性点的展开相位差 $|\Delta\theta(t)|$ 的绝对值。颜色表示：蓝色——持续同步（有界且无阶跃），红色——间歇同步（由离散相位滑移分隔的平 plateau），绿色——无同步（具有扩散漂移且无平台结构）。

因此，Δf 是以 Hz 表示的 $\Omega_F(t)$ 的峰值偏差。

图 3 展示了同步图中三个点对应的代表性时间序列，分别对应持续同步、间歇同步、以及无同步。在持续区域中，瞬时响应频率 $\omega_p(t)$（蓝色）紧随调制驱动 $\Omega_F(t)$（橙色）变化，展开后的相位差 $\Delta\theta(t)$ 保持在恒定偏移附近（见图 4），其圆形直方图呈尖锐峰值，且多通道相位锁定值接近 1。在间歇区域中，每段锁频时期都会被相位滑移打断。在同步子区间内 $\omega_p(t) \approx \Omega_F(t$，滑移表现为$\Delta\theta(t)$ 中的阶跃式跳变，从而在直方图中产生多个峰值，并使多通道相位锁定值处于 0 到 1 之间。滑移的时机由慢调制决定，每个调制周期发生一次滑移；这与每个周期发生两次鞍结交叉相一致，因为瞬时失谐会穿过图 2(a) 中的静态舌形边界，也与 Lucas 等人所述的非自治阿德勒动力学相符 [8]。图 4(b) 总结了定性的相位滑移模式：持续轨迹保持有界，间歇轨迹每个调制周期出现一次相位滑移，而无同步轨迹则无界增长。

在无同步区间中，$\omega_p(t)$ 相对于 $\Omega_F(t)$ 漂移，$\Delta\theta(t)$ 表现为有效无界的游走，相位差直方图在 $(-\pi, \pi]$ 上近乎均匀，且多通道相位锁定值较低。图 5汇总了基于多通道相位锁定值的阿诺德舌图，展示在 (Ω_u, F) 平面中，随着调制深度增加（Δf =

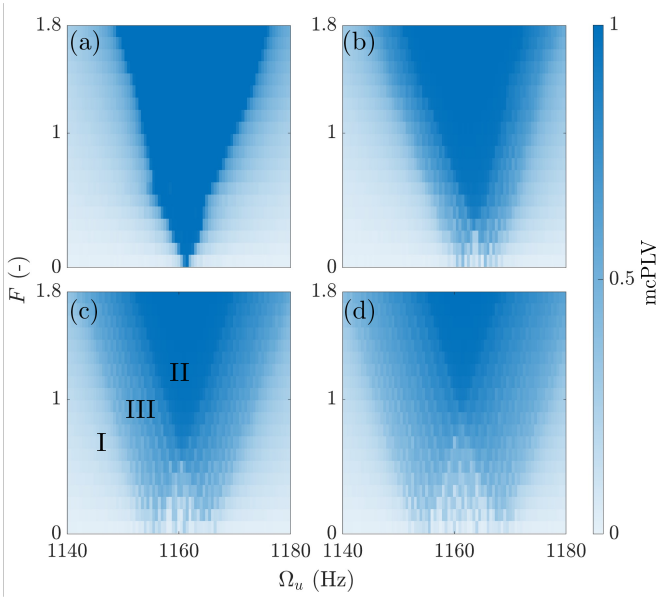

图 5. 在频率调制深度逐渐增加的条件下，基于多通道相位锁定值（mcPLV）实验获得的阿诺德舌图。面板 (a–d) 分别展示峰值频移为 $\Delta f = 0$、$10/2\pi$、$30/2\pi$、$50/2\pi$Hz 时失谐–驱动平面中的同步情况（颜色标示：浅蓝色—无同步，区域 III；中蓝色—间歇同步，区域 II；深蓝色—持续同步，区域 I）。随着 Δf 增加，宽广的同步区域（持续同步和间歇同步）扩大，持续核心区缩小，而间歇带增大，这与非自治失谐图景一致。作为参考，面板 (c) 标出了区域 I–III。

0，$10/2\pi$，$30/2\pi$，$50/2\pi$ Hz）。这里 F 表示控制脚本中使用的同一无量纲驱动强度。对于$\Delta f = 0$，经典 V 形静态舌形区得以重现。随着调制深度增加，宽广的同步区域（持续同步加间歇同步）扩大，无同步与间歇同步之间的边界向外移动，而间歇同步与持续同步之间的边界向内移动。因此，持续同步区域缩小，间歇同步区域扩大，二者的并集则扩大；这一结果在定性上与 Lucas 等人对非自治阿德勒分析所预测的区间几何相符等人 [8]。总之，瞬时轨迹、相位滑移统计和多通道相位锁定值图谱，为参考文献 [8]中提出的理论与数值图景提供了实验对应。

B. 驱动振幅的时间周期性调制

现在考察驱动的慢速振幅调制对同步的影响，并以图2(b)所示的示意几何图为参考。驱动幅度

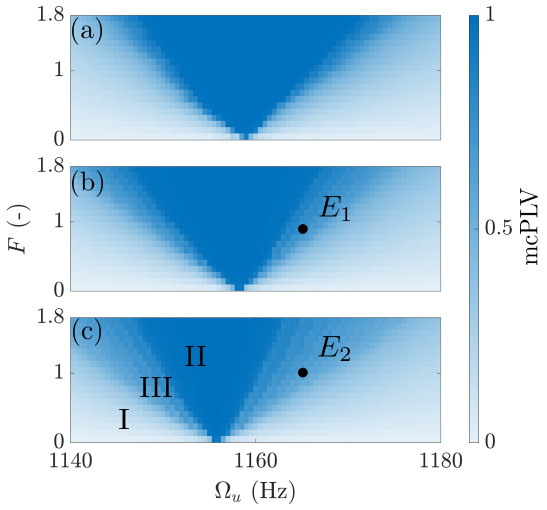

图 6. (a–c) 展示了在 $_u$，F 平面中基于 mcPLV 的阿诺德舌，振幅调制深度逐渐增加时的情况 k_a。区域 I、II 和 III 分别表示无同步、持续同步和间歇同步（同图 2）。面板 (b) 和 (c) 中的示例点 E_1 和 E_2 表示区域 III 内两个工作条件：二者具有相同的 ($_u$，F)，但 k_a 不同；其时间轨迹见图 7。

按照以下方式进行慢速调制

$$\mathcal{F}(t) = F\big[1 + k_a \sin(\Omega_m t)\big] \cos(\Omega_u t),$$

平均驱动频率 Ω_u、振幅调制深度 k_a和调制角频率 Ω_m (再次$f_m = \Omega_m/2\pi = 1$ Hz，远低于自然频率）。同步程度采用与频率调制情形相同的多通道相位锁定值 mcPLV 进行量化。图 6展示了随调制深度$_u$、F增大时，($\Omega k_a = 0.15$，0。30，和 0。50）平面上的 mcPLV 阿诺德舌图。正如时变耦合相位方程（18）和条件 $|\Delta\omega| \le |\gamma_{\mathrm{eff}}(T_1)|$所预测的，持续同步区域收缩为一个内部三角形，间歇同步区域则在其周围形成两个三角形环带，而二者的并集（广义同步）占据一个更大的外部三角形，其尺寸随 k_a增大，如图 2（b）所示。

间歇区内两个代表性点的时间轨迹（E_1: $k_a = 0.30$；E_2: $k_a = 0.50$，具有相同的失谐和平均强迫水平）如图7所示。在每个调制周期内的同步子区间中，瞬时频率 $\omega_p(t)$ 和 $\Omega_F(t)$ 共同演化，锁定相位偏移随包络平滑变化。在非同步间隙期间，相位会累积滑移，导致展开相位差 $\Delta\theta(t)$ 发生阶跃式跳变。对于间歇区内相同的工作点，增大 k_a 会延长未锁定区段，并增加每个调制周期内的相位滑移次数，这与每周期两次锁定条件鞍结穿越的理论图景以及解析间歇窗口一致。

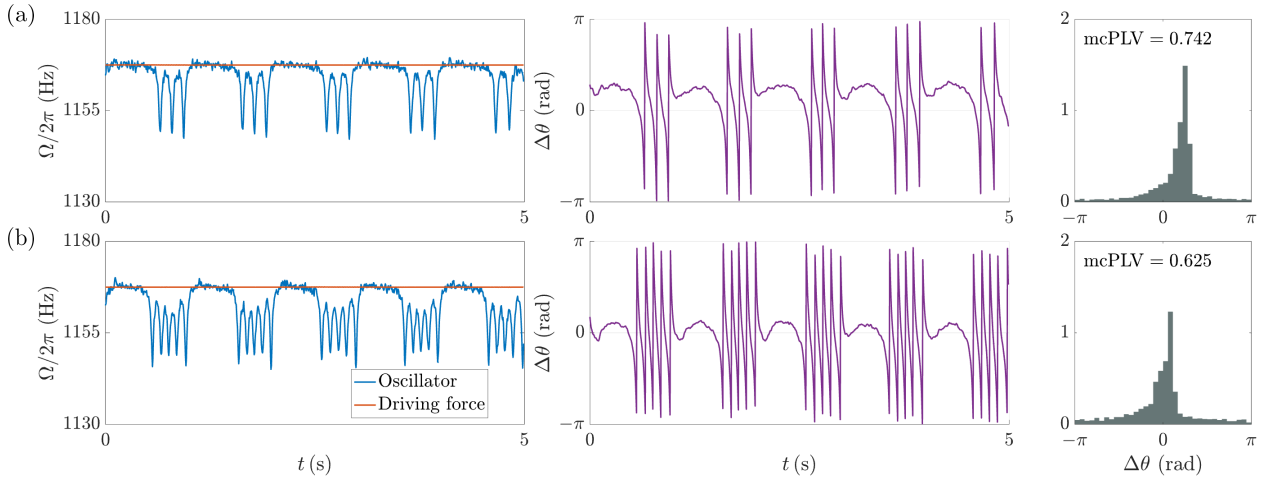

图7. 两种间歇情形下的瞬时频率和相位差 E_1 和 E_2 （标记于图6（b、c））。这两个点具有相同的频率和驱动振幅，但振幅调制深度不同 k_a。当 k_a 从 E_1 增加到 E_2时，在一个调制周期内处于不同步状态的时间比例增大，且相位差中出现额外的相位滑移，这与图3（b）中观察到的频率调制下的间歇行为直接类似。

每周期两次锁定条件穿越的理论图景以及解析间歇窗口。这一趋势在图4(a) 中清晰可见：持续轨迹始终有界，间歇轨迹呈现周期性滑移，而无同步轨迹则表现为无界漂移。

一个慢周期内的锁定比例可以用模型参数表示。在间歇带（24）内，理论预测锁定占空比

$$D_{\text{lock}} = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{|\Delta\omega|/\gamma_0 - 1}{k_a}\right),$$

在持续区域内， $D_{\text{lock}} = 1$ ；在外边界之外， $D_{\text{lock}} = 0$。在间歇带内的固定工作点处，这意味着增大k_a 会在 $|\Delta\omega| < \gamma_0$ 时降低 D_{lock} （滑移时间更长），而在 $|\Delta\omega| > \gamma_0$时增大 D_{lock} ；这与测得的同步区间所占时间比例定性一致。

振幅响应验证了对慢变包络衰减的预测。图8比较了驱动和哨声的归一化包络。测得的输出调制深度 k_p 与输入深度呈线性关系k_a，斜率为 $k_p/k_a \approx 0.034$。对无驱动和受迫极限环振幅R 和 R_F的独立测量$1-R/R_F$）$= 0.028\pm0.016$与理论抑制因子 $k_p = (1 - R/R_F)\ k_a$（式22）推导出的结果在不确定度范围内一致。

综合来看，这些测量结果支持振幅调制下的非自治同步图景。具体而言，调制在阿诺德舌形图平面中造成垂直方向的偏移，通过拓宽间歇带扩大广义同步区域，同时缩小持续核心区。这种行为与.....相辅相成，但同时

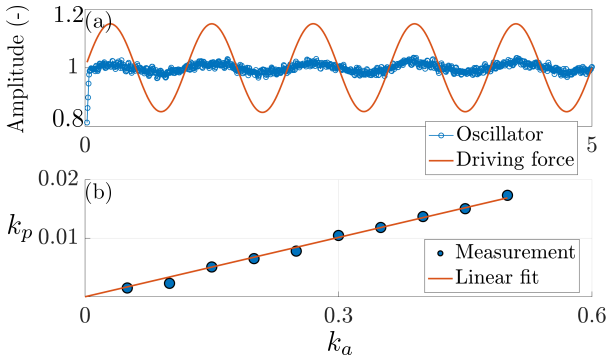

图8. 慢速振幅调制下的振幅响应。上图：当 $k_a = 0.15$时，驱动和振荡器的归一化振幅包络，显示了施加的包络变化在哨声响应中的衰减。输出调制深度为 $k_p = 0.0051$，通过使用单谐波模型拟合归一化响应包络得到。下图：振荡器调制深度 k_p 随输入调制深度k_a的变化。斜率小于1的近似线性关系（$k_p = 0.034\ k_a$）证实了振幅包络衰减的预测，并与理论相符。

也会在频率调制下削弱持续同步，并且与慢流分析及其非自治阿德勒约化在定量上吻合。

C. 非周期调制

为探究相位锁定在随时间变化时的极限，驱动频率受到非周期性变化的影响，并考察哨声维持频率锁定的能力。

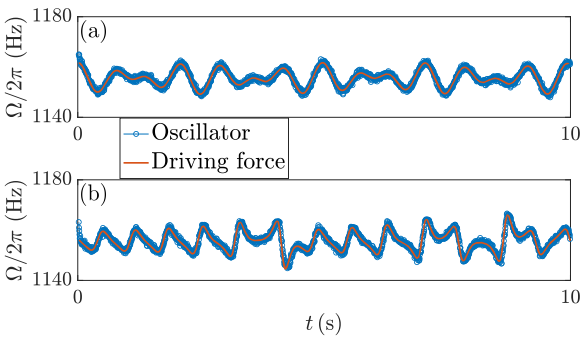

图 9. 非周期调制 (a) 和混沌频率驱动 (b) 下的瞬时频率跟踪。对于非周期驱动，驱动频率（橙色）由两个慢频率 Ω_m 和 $\sqrt{2}\,\Omega_m$调制。在混沌情形下，驱动频率由一段洛伦兹吸引子时间序列调制，同时绘出严格同步区间内的振荡器频率（蓝色）。两条曲线持续重合，表明尽管驱动存在任意的混沌变化，相位锁定仍然稳健。

。9图 (a) 中，驱动频率（橙色）由两个非公度正弦波调制，

$$\Omega_F(t) = \Omega_u + k_{f,1}\,\Omega_m \sin(\theta_m) + k_{f,2}\,\Omega_m \sin(\sqrt{2}\theta_m),$$

而在图 9(b) 中，它遵循一段归一化的洛伦兹时间序列 $s(t)$,

$$\Omega_F(t) = \Omega_u + k_f\,\Omega_m\, s(t).$$

在这两种情形下，瞬时响应频率 $\omega_p(t)$（蓝色）在整个实验过程中都跟随非周期调制的驱动 $\Omega_F(t)$（橙色）。

这种行为与非自治阿德勒方程一致（见 (10)）：只要满足瞬时锁定条件，对于任意失谐轨迹都能保持持续同步

$$|\Delta\omega_{\text{eff}}(t)| \le \gamma_{\text{eff}}(t)$$

对于所有 t 均成立。在当前的非周期测试中，参数的选择使得 $\sup_t |\Omega_F(t) - \omega_n| < \gamma_0$，因此轨迹始终远离阿诺德舌持续同步区域的边界，不会接近可能发生鞍结分岔和相位滑移的区域。

图9 表明，尽管失谐呈准周期或混沌状态，响应频率几乎与驱动频率完全重合，且在整个记录期间均未发生相位滑移。因此，这些观察结果与持续区域内关于频率调制振荡器非自治同步的理论预测一致。

IV. 结论

我们对缓变驱动下自持声学振荡器的同步进行了理论与实验的综合研究。先前研究表明，频率调制会引入间歇区间并扩大广义上的同步区域；我们发现，振幅调制也会通过扩展间歇带产生类似的拓宽效果。实验阿诺德舌图验证了预测的几何形态和各区域特有的相位滑移模式。我们还验证了振幅调制情形下慢变振幅包络的衰减。此外，我们进一步证明，只要瞬时失配低于有效耦合，即使失谐呈非周期性（准周期或混沌），振荡器也能持续跟踪。总之，这些结果验证了气动声学振荡器中振幅调制和频率调制两种类型的慢调制效应。这些发现为实际应用提供了指导：在非线性声学谐振器、可调超材料、同步振荡器网络和基于同步的通信中，频率调制无需提高标称激励水平，便可扩大可用的同步范围。

附录 A：频率调制相位：变换为失谐随时间变化的非自治 Adler 方程

从慢相位动力学（9）出发，

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \Delta\omega - \frac{F\,J_0(k_f)}{2\,\omega_n\,r}\cos\theta - \frac{F\,J_1(k_f)}{\omega_n\,r}\cos\big(\theta - \theta_m(T_1)\big), \tag{A1}$$

并使用以下定义

$$\gamma_1 = \frac{F\,J_0(k_f)}{2\,\omega_n\,r}, \qquad \gamma_2 = \frac{F\,J_1(k_f)}{\omega_n\,r}. \tag{A2}$$

我们可以写成

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dT_1} &= \Delta\omega - \Big[(\gamma_1 + \gamma_2\cos\theta_m)\cos\theta + \gamma_2 \sin\theta_m\,\sin\theta\Big] \\ &= \Delta\omega - R(\theta_m)\,\cos\big(\theta - \delta(\theta_m)\big),\end{aligned} \tag{A3}$$

with

$$R(\theta_m) = \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2\cos\theta_m)^2 + (\gamma_2\sin\theta_m)^2}, \tag{A4}$$

$$\delta(\theta_m) = \arctan\left(\frac{\gamma_2\sin\theta_m}{\gamma_1 + \gamma_2\cos\theta_m}\right). \tag{A5}$$

引入新的相位

$$\psi = \theta - \delta(\theta_m) + \frac{\pi}{2}, \tag{A6}$$

由此可得

$$\frac{d\psi}{dT_1} = \frac{d\theta}{dT_1} - \frac{d\theta_m}{dT_1}\,\delta'(\theta_m), \quad \cos(\theta - \delta) = \sin\psi,$$

式（A3）变为具有时变失谐的非自治阿德勒方程，

$$\frac{d\psi}{dT_1} = \Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1) + \gamma_{\mathrm{eff}}(T_1)\,\sin\psi, \tag{A7}$$

其中

$$\gamma_{\mathrm{eff}}(T_1) = R\big(\theta_m(T_1)\big), \tag{A8}$$
$$\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1) = \Delta\omega - \Omega_m\,\delta'\big(\theta_m(T_1)\big), \tag{A9}$$
$$\delta'(\theta_m) = \frac{\gamma_1\gamma_2\cos\theta_m + \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos\theta_m + \gamma_2^2}. \tag{A10}$$

对于 $k_f \ll 1$，有 $J_0(k_f) \approx 1$ 和 $J_1(k_f) \approx k_f/2$，因此 $\gamma_2/\gamma_1 \approx k_f$ 和

$$\gamma_{\mathrm{eff}}(T_1) = \gamma_1 + \mathcal{O}(k_f), \tag{A11}$$
$$\Delta\omega_{\mathrm{eff}}(T_1) = \Delta\omega - \Omega_m\,k_f\cos\theta_m(T_1) + \mathcal{O}(k_f^2). \tag{A12}$$

因此，相位动力学变为近似恒定的耦合，并伴随周期调制的失谐，从而得到正文中使用的阿德勒型相位方程。

[1] R. Adler，《振荡器中的锁定现象研究》，IRE 会刊 34，351（2006）。[2] A. Pikovsky、M. Rosenblum 和 J. Kurths，*Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*，《剑桥非线性科学丛书》（剑桥大学出版社，2001）。[3] S. H. Strogatz，*Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology chemistry and engineering*（Chapman and Hall/CRC，2024）。[4] S. Strogatz，*Sync: The emerging science of spontaneous order* 2004（企鹅英国，）。[5] R. Jensen，受驱非线性振荡器的同步，《美国物理学杂志》70，607（2002）。[6] P. Gandhi、E. Knobloch 和 C. Beaume，时间周期调制系统中的相位滑移动力学，《物理评论 E》92，062914（2015）。[7] Y. F. Suprunenko、P. T. Clemson 和 A. Stefanovska，时序牵引系统：一类新型自持非自治振荡器，《物理评论快报》111，024101（2013）。[8] M. Lucas、J. Newman 和 A. Stefanovska，通过非自治扰动稳定振荡系统的动力学，《物理评论 E》97，042209（2018）。[9] J. Newman、M. Lucas 和 A. Stefanovska，通过缓变驱动稳定循环过程，《混沌》31，10 1063 5 0066641 2021 . / .（）。[10] B. Bergeot、S. Terrien 和 C. Vergez，利用缓慢时变控制参数预测簧片乐器模型中的瞬态动力学，《混沌》34，10 1063 5 0190512 2024 . / .（）。[11] S. Terrien、B. Bergeot、C. Vergez 和 S. Missoum，具有时变控制参数的动力系统中的吸引域：简单簧片乐器模型中起音瞬态的情况，《声与振动》，119241（2025）。[12] J. Newman、J. P. Scott、J. R. Adams 和 A. Stefanovska，通过时变相位研究非自治振荡器的间歇性相位动力学，《物理学 D》461，134108（2024）。[13] C. Bourquard、A. Faure-Beaulieu 和 N. Noiray，受湍流掠流作用的深腔啸叫：间歇性不稳定的气动声学反馈，《流体力学杂志》909，A19（2021）。[14] E. Boujo、M. Bauerheim 和 N. Noiray，腔体上方湍流混合层的饱和：对平均流周围的谐波驱动，《流体力学杂志》853，386（2018）。[15] A. K. Stoychev、T. Pedergnana 和 N. Noiray，《掠流作用下孔口的非线性声学》，《英国皇家学会会刊 A 辑》480，20230718（2024）。[16] J. D. Crawford 和 E. Knobloch，《流体动力学中的对称性与对称性破缺分岔》，《流体力学年度评论》23，341（1991）。[17] H. Nakao，《非线性振子同步的相位约化方法》，《当代物理学》57，188（2016）。[18] A. Balanov、N. Janson、D. Postnov 和 O. Sosnovtseva，*From simple to complex*（施普林格，2009）。[19] A. H. Nayfeh 和 D. T. Mook，*Nonlinear oscillations*（约翰·威立父子出版公司，2024）。[20] J. Warmi´nski，《范德波尔–马蒂厄振子中的同步效应与混沌》，《理论与应用力学杂志》39，861（2001）。[21] R. V. Jensen，《随机驱动非线性振子的同步》，《物理评论 E》58，R6907（1998）。[22] D. L. Colton、R. Kress 和 R. Kress，*Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory* 93，第 卷（施普林格，1998）。[23] A. K. Stoychev、X. Guo、U. Kuhl 和 N. Noiray，《同步驱动声学：自振荡超原子的非线性散射》，arXiv: 2508 14819 . [ ] 2025 physics.app-ph（）。[24] Y. Aur´egan 和 V. Pagneux，《流动管道声学中的 PT 对称散射》，《物理评论快报》118，174301（2017）。[25] J.-P. Lachaux、E. Rodriguez、J. Martinerie 和 F. J. Varela，《测量脑信号中的相位同步性》，《人脑图谱》8，194（1999）。[26] S. Aydore、D. Pantazis 和 R. M. Leahy，《关于相位锁定值及其性质的说明》，《神经影像》74，231（2013）。[27] M. T. Rosenstein、J. J. Collins 和 C. J. De Luca，《根据小型数据集计算最大李雅普诺夫指数的实用方法》，《物理学 D》65，117（1993）。[28] P. Tass、M. Rosenblum、J. Weule、J. Kurths、A. Pikovsky、J. Volkmann、A. Sc hnitzler 和 H.-J. Freund，《从含噪数据中检测 $n{:}m$相位锁定：在脑磁图中的应用》，《物理评论快报》81，3291（1998）。