arXiv:2601.02592v1 [math.AG] 5 Jan 2026

Torelli 映射与任意乘积$\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} \to \mathcal{A}_g$的纤维积是约化的

Lycka Drakengren

摘要

我们证明，对于 $g = g_1 + \cdots + g_k$，Torelli 映射 $t\colon \mathcal{M}_g^{ct} \to \mathcal{A}_g$ 与任意乘积 $\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} \to \mathcal{A}_g$的纤维积具有约化概形结构。因此，令 $d = t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times$ codi $\mathcal{A}_{g_k}] \in {}^{d}\,\mathcal{M}_g^{ct}$ $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] = 0$ m( )，我们发现类 CH ( ) 是典范的。特别地，我们得到$d > 2g - 3$.

1 引言

1.1 可分解阿贝尔簇模空间与 Torelli 映 p

维数为 g 的主极化代数簇模空间 $\mathcal{A}_g$ 是在 $\mathbb{C}$ 上得到的光滑 Deligne–Mumford 叠，作为一个轨形商

$$\mathcal{A}_g = [\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g],$$

其中 $\mathbb{H}_g$（Siegel 上半空间）是由矩阵构成的空间

$$\mathbb{H}_g = \{\Pi \in M_{g\times g}(\mathbb{C}) | \Pi^T = \Pi, \mathrm{Im}(\Pi) > 0\}.$$

对于任意 $g = g_1 + \cdots + g_k$，我们有一个乘积映射

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} &\to \mathcal{A}_g \\ (X_1, \ldots, X_k) &\mapsto X_1 \times \cdots \times X_k. \end{aligned}$$

将 $\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}$ 的基本类沿 π 推前，我们得到一个循环

$$[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] \in \mathsf{CH}^*(\mathcal{A}_g).$$

$\mathcal{A}_g$ 的交叉理论可以借助模空间 $\mathcal{M}_g^{ct}$ 来研究，该空间参数化对偶图 Γ_C 为树的稳定曲线 C。紧型曲线构成亏格为$_g$的稳定曲线模空间（此处考虑在 $\mathbb{C}$ 上）的一个开子堆栈 $\mathcal{M}_g^{ct} \subset \mathcal{M}_g$。紧型曲线的主极化雅可比簇紧型曲线雅可比簇 $J(C)$

C 参数化多次数为 0 的线丛，其极化由 theta 除子给出。对于 $[C] \in \mathcal{M}_g$，雅可比簇 $J(C)$ 是适当的，当且仅当 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$。***Torelli*** 映射 是如下态射

$$\begin{aligned} t\colon \mathcal{M}_g^{ct} &\to \mathcal{A}_g \\ [C] &\mapsto [J(C)], \end{aligned}$$

其拉回 $t^*\colon \mathsf{CH}^*(\mathcal{A}_g) \to \mathsf{CH}^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 为我们提供了一种研究 $\mathsf{CH}^*(\mathcal{A}_g)$ 中关系的工具。

为了利用过度交理论 [8], 研究拉回 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$，我们需要理解该纤维积的精确概形结构

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{M}_g^{ct} & \xrightarrow{\quad t \quad} & \mathcal{A}_g. \end{array}$$

为了研究 Y 的局部结构，考虑乘积映射到 $\mathbb{H}_g$ 的一个提升会很有帮助，该提升由下式给出

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{H}_{g_1} \times \cdots \times \mathbb{H}_{g_k} &\to \mathbb{H}_g \\ (\Pi_1, \ldots, \Pi_k) &\mapsto \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在局部情形下，我们也可以如下将 Torelli 映射提升到 $\mathbb{H}_g$：对于 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$，为 $H_1(C, \mathbb{Z})$ 选取一个辛基 $\{A_i, B_i\}_{1 \le i \le g}$，并为 $H^0(\omega_C)$ 选取一个满足 $\int_{A_j} \omega_i = \delta_{i,\ j}$ 归一化条件的基 $\{\omega_i\}_{1 \le i \le g}$。周期矩阵

$$\Pi_{i,j} = \int_{B_j} \omega_i$$

给出了 $[J(C)]$ 到 $\mathbb{H}_g$ [3, §11.1] 的一个提升。

1.2 典范类与可分解阿贝尔簇的位置

令 $\pi\colon \mathcal{X}_g \to \mathcal{A}_g$ 为万有阿贝尔簇，$\mathbb{E} = \pi_* \Omega_\pi$ 为 $\mathcal{A}_g$上的霍奇丛。陈类 $\lambda_i = c_i(\mathbb{E})$ 生成子环 $R^*(\mathcal{A}_g) \subset \mathsf{CH}^*(\mathcal{A}_g)$，称为典范环 [16]。对于 $\mathcal{M}_g^{ct}$，我们则将典范环 $R^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 定义为 $\mathsf{CH}^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 中由边界分层上 κ 类与 ψ 类 [9]的乘积的推前生成的 $\mathbb{Q}$-子代数。在这两种情形下，典范环的元素均称为典范类。给定 $\mathsf{CH}^*(\mathcal{A}_g)$ 中的一个循环，自然会问它是否为典范类。对于 $\alpha \in \mathsf{CH}^k(\mathcal{A}_g)$，典范投影 $\mathsf{taut}(\alpha)$ 是满足下列条件的 $R^k(\mathcal{A}_g)$ 中唯一的类

$$\int_{\overline{\mathcal{A}}_g} \alpha \cdot \beta \cdot \lambda_g = \int_{\overline{\mathcal{A}}_g} \mathsf{taut}(\alpha) \cdot \beta \cdot \lambda_g \ \text{ for all } \ \beta \in \mathsf{R}^{\binom{g}{2}-k}(\mathcal{A}_g),$$

其中 $\overline{\mathcal{A}_g}$ 是 $\mathcal{A}_g$ [5]的任意一种环面紧化。要证明 $\alpha \notin R^*(\mathcal{A}_g)$，只需证明 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 中 $t^*\alpha \neq t^*\mathrm{taut}(\alpha)$。

类 $[\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{g-1}] \in \mathrm{CH}^{g-1}(\mathcal{A}_g)$ 已在 [6] 和 [14]中得到研究。在 [14], Iribar L´opez 证明，对于 $g = 12$ 或 $g \geq 16$ 且 g 为偶数的情形，$[\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{g-1}]$ 不是典范类。在[6], Canning、Oprea 和 Pandharipande 利用过度交理论，计算了 t: $\mathcal{M}_g^{ct} \to \mathcal{A}_g$ 与 π: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{g-1} \to \mathcal{A}_g$ 的纤维积上的 Torelli 拉回 $t^*[\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_{g-1}]$。该方法利用了纤维积是约化的这一事实，这一点在 [6] 中通过稳定映射的变形理论得到了证明。通过计算类 $t^*[\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_5]$ 并将其与t^*典范类 $\mathrm{taut}([\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_5])$进行比较，他们得以证明 $[\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_5] \in \mathrm{CH}^5(\mathcal{A}_6)$ 不是典范类。

本文的主要结果定理 1.1 揭示了计算任意 $g = g_1 + \cdots + g_k$ 对应的类 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ 的可能性。在 [4], 中，我们通过改编 [6] 中的方法，给出了计算这些类的递归公式。纤维积 Y 由若干相交分支组成，其维数可能大于 dim($t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$)。[4] 中介绍的第一种计算 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ 的方法，是对 Y 进行分层，确定闭分层包含关系所对应的正规丛，并利用恰当的局部模型，将类 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ 分解为来自闭分层的典范贡献。

定理 1.1。Torelli 映射 t: $\mathcal{M}_g^{ct} \to \mathcal{A}_g$ 与乘积映射 π: $\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} \to \mathcal{A}_g$ 对于 $g = g_1 + \cdots + g_k$ 的纤维积是约化的。

定理 1.1 在第 2.3 节中得到证明。我们使用由 [13], 得到的 Torelli 映射的局部级数展开，以确定 t 与 π 的纤维积的精确概形结构。

1.3 Torelli 映射与一般乘积轨迹的纤维积

为了给出纤维积 Y 的精确局部方程，我们首先描述 Y 的 $\mathbb{C}$-点。根据定义，一个 $\mathbb{C}$-点由一对 $([C], J)$ 给出，其中 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$ 和 $J = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}$，并附带一个同构的选择

$$\iota\colon J(C) \xrightarrow{\sim} X_1 \times \cdots \times X_k.$$

我们描述 $\mathbb{C}$-点 $([C], J, \iota\colon J(C)\pi(J)^{\sim})$如何对应于元组 $([C], J, \sigma)$，其中

$$\sigma\colon V(\Gamma_C)_{>0} \to \{1, \ldots, k\},$$

对于 $V(\Gamma_C)_{>0} = \{v \in V(\Gamma_C) | g(v) > 0\}$，是一个 k-着色，使得 $\sum_{v \in \sigma^{-1}(j)} g(v) = g_j$ 对于$j = 1$, ..., k。令 $\{C_v\}_{v \in V(\Gamma_C)}$ 为 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$ 的不可约分支。由于 C 是紧型的，我们可以将 $J(C) = \prod_{v \in V(\Gamma_C)_{>0}} J(C_v)$ 分解。主极化阿贝尔簇可唯一分解为不可分解主极化阿贝尔簇的乘积 [7, 推论 3.23]。因此，同构 ι 由 $V(\Gamma_C)_{>0}$ 划分成集合 S_1, ... S_k 所确定，使得 ι 对于 $j = 1$, ..., k 诱导同构 $\prod_{v \in S_j} J(C_v) \tilde{\to} X_j$。我们通过 $\sigma(v) = j$ 对 $v \in S_j$, 将一个 k-着色 σ 与 ι 关联起来。此外，我们有

$$J = \Big([\prod_{v \in \sigma^{-1}(1)} J(C_v)], \ldots, [\prod_{v \in \sigma^{-1}(k)} J(C_v)]\Big) \in \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}.$$

今后，我们将 Y 的 $\mathbb{C}$-点记为如上所述的元组 $([C],\ J,\ \sigma)$。

定义 1.2. 对于 $([C], J, \sigma) \in Y$，我们称对偶图 Γ_C 中的一条路径 γ（不含重复顶点）为临界路径，若其满足以下性质：

- γ 的端点 v, v' 均为正亏格
- γ 的内部顶点均为零属
- $\sigma(v) \neq \sigma(v')$

我们将与 $([C], J, \sigma) \in Y$ 相关联的临界路径集合记为 P_σ。

图1展示了 $k = 2$ 的一个点 $([C], J, \sigma) \in Y$，以及与之相关联的 Γ_C 的临界路径。

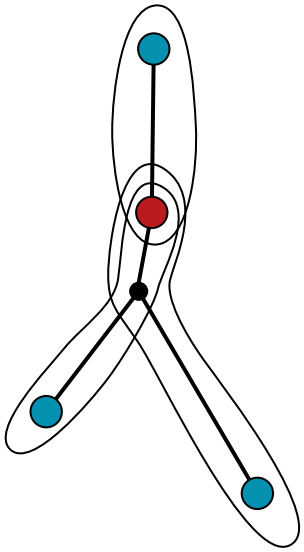

图1：Γ_C 中与 $([C],\ J,\ \sigma) \in Y$ 相关的临界路径，适用于 $k = 2$ 的情形。红色和蓝色顶点分别对应 C_v C 的不可约分支，其中 $\sigma(v) = 1$ 分别为 1 和 2。黑色顶点对应零属曲线。圈出的路径是 Γ_C 的临界路径。

为了描述点 $([C], J, \sigma) \in Y$ 处的概形结构，我们希望用适当的局部坐标描述映射 t 和 π。为此，我们利用 Torelli 映射的一个局部提升，将 $[J(C)]$ 和 J 分别视为 $\mathbb{H}_g$ 和 $\mathbb{H}_{g_1} \times \cdots \times \mathbb{H}_{g_k}$ 的元素。乘积映射 π 用局部坐标描述起来很直接，见第 2.1 节。相比之下，用局部坐标 x, s 描述 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$ 附近的 Torelli 映射 t 则更加困难，其中 x 是与 Γ_C 相关的边界分层所对应的坐标，而 $s = (s_e)_{e \in E(\Gamma_C)}$ 是构造 2.1 中的平滑参数。为此，我们需要将 C 的全纯微分延拓到 $\mathcal{M}_g^{ct}$ 中 $[C]$ 周围的一个邻域，并描述它们如何随 x, s 变化。我们通过改编 [13] 中的结果来实现这一点。具体而言，

给定 C 上的一个全纯微分 Ω，Hu 和 Norton 将一条曲线 $C_{x,s}$ 与 x, s 联系起来（当 $|x|$, $|s|$ 足够小时），并构造出一个显式且经过适当归一化的全纯微分 $\Omega_{x,s}$，定义在 $C_{x,s}$ 上，它关于 x, s 全纯变化，并且限制在 $C_{0,0} = C$ 上时等于 Ω。此外，他们还描述了一种求 $\Omega_{x,s}$ 关于平滑参数 s 的幂级数展开的方法。通过分析这一方法，并对 $H_1(C_{x,s}, \mathbb{Z})$ 的循环上的微分 $\Omega_{x,s}$ 进行积分，我们得到 t 在坐标 x, s 下的性质，从而能够计算 $([C], J, \bar{\sigma})$ 处的显式概形结构。

现在我们陈述定理 1.1 的一个精细版本，描述 Y 的精确局部概形结构。

定理 1.3. 设 x 连同 $s = (s_e)_{e \in E(\Gamma_C)}$ 是 $[C]$ 在 $\mathcal{M}_g^{ct}$ 中一个较小解析邻域的坐标，其中 x 对应于 $\mathcal{M}_g^{ct}$ 中与 Γ_C 相关的边界分层上 $[C]$ 周围的坐标，而 s_e 对应于构造 2.1 中与边 e 相关的节点的光滑化。在 $([C], J, \sigma) \in Y$ 附近的坐标环由下式给出

$$\frac{\mathbb{C}[[x, s]]}{(\prod_{e \in \gamma} s_e)_{\gamma \in P_\sigma}}.$$

特别地，它是约化的。

1.4 Torelli 拉回与乘积轨迹

许多类 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] \in \mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 因维数原因而消失。事实上，我们有 $\dim(\mathcal{M}_g^{ct}) = 3g - 3$ 且 $\dim(\mathcal{A}_g) = {}^{g}{}_{(g+1)\,2}$。$\pi$ 的余维 d 等于 $\sum_{1 \le i < j \le k} g_i g_j$。换言之，我们有

$$\mathrm{codim}(t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]) = \sum_{1 \le i < j \le k} g_i g_j.$$

我们推得，对于 $d > 3g - 3$，$t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] = 0$。如果我们进一步知道类 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ 是典范的，那么由于 $R^{>2g-3}(\mathcal{M}_g^{ct}) = 0$ [10]，可知该类在 $d > 2g - 3$ 时消失。作为定理 1.1 的一个应用，我们在第 3 节证明以下结果：

定理 1.4。对于所有分解 $g = g_1 + \cdots + g_k$，类 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] \in \mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_g^{ct})$ 都是典范的。因此，对于 $d > 2g - 3.$，$t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}] = 0 \in \mathrm{CH}^d(\mathcal{M}_g^{ct})$

对于 g_1，……，g_k，满足 $d \le 2g - 3$ 的情况有以下几种，这意味着 $t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$ 可能非零（见第 3 节）：

命题 1.5。满足 $1 \le g_1 \le \cdots \le g_k$ 和 $\sum_{1 \le i \le k} g_i = g$，且 $d =$ 余维$(t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]) \le 2g - 3$ 的元组 $(g_1$、……、$g_k)$ 为 $(1$、$g - 1)$、$(1$、1、$g - 2)$、$(2$、$g - 2)$ 和 $(3$、$3)$。

特别地，命题 1.5 蕴含，对于 $g \ge 7$，$t^*[\mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}_{g-3}] = 0$ 属于 $\mathrm{CH}^{3g-9}(\mathcal{M}_g^{ct})$。

1.5 进一步方向

定理 1.1 的证明或许可以推广到其他情形，这~值得进一步探讨。设 $\mathcal{P}$: $\mathcal{R}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$ 是满足 [2, 引理 5.1]假设的扩展的 Prym 映射。可以借鉴我们证明定理 1.1 的方法，研究以下问题:

~**问题 1:** Prym 映射 $\mathcal{P}$: $\mathcal{R}_{g+1} \to \mathcal{A}_g$ 与乘积映射的纤维积 $\pi\colon \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k} \to \mathcal{A}_g$ reduced?

~对于 $d > 0$, *Noether-Lefschetz* 轨迹 $\mathrm{NL}_{g,d} \subset \mathcal{A}_g$ 定义为

$$\widetilde{\mathrm{NL}}_{g,d} = \left\{ f\colon E \to (X,\theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} (X,\theta) \in \mathcal{A}_g, E \text{ an elliptic curve,} \\ f \text{ a homomorphism with } \deg(f^*\theta) = d \end{array} \right\}.$$

在 [11], 中，Greer 和 Lian 证明，Torelli 映射$\mathcal{M}^{ct}_{g,1} \to \mathcal{A}_g$ 与映射 ~$\mathrm{NL}_{g,d} \to \mathcal{A}_g$的纤维积对应于一个到变化的椭圆曲线的稳定映射模空间 $\mathcal{M}^{ct}_{g,1}(\mathcal{E}, d)$（记号见 [11]）。这将 $\mathcal{A}_g$的交叉理论与这些稳定映射的 Gromov-Witten 理论联系起来，而后者又与 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ [15]的属 1 Gromov-Witten 理论相关。为了更好地理解交叉理论，我们希望回答以下问题:

问题 2: 给定 $d > 0$, $\mathcal{M}^{ct}_{g,1}(\mathcal{E}, d)$ 的概形结构是什么?

致谢

感谢 Rahul Pandharipande 对这一结果及其应用的关注。我也感谢 Samir Canning、Jeremy Feusi 和 Aitor Iribar L´opez 提出的宝贵意见。作者受到 SNF-200020-219369 的资助。

2 纤维积的约化性

在第 2.1 节中，我们构造了 $[C] \in \mathcal{M}^{ct}_g$、$[J(C)] \in \mathbb{H}_g$ 和 $J \in \mathbb{H}_{g_1} \times \cdots \times \mathbb{H}_{g_k}$ 附近适当的解析邻域和坐标。在第 2.2 节中，我们介绍证明定理 1.3 所需的相关术语，这些术语大多改编自 [13], [12]。在第 2.3 节中，我们分析 t 在给定坐标下的展开。最后，我们在第 2.3 节中给出定理 1.3 的证明。

2.1 局部坐标

令 W 为 $[J(C)] \in \mathbb{H}_g$ 的一个解析邻域，使得对于 $h \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, $hW \cap W = \emptyset$ 满足 $h[J(C)] \neq [J(C)]$。我们选取 W上的坐标 $y = (y_{i,j})_{1 \le i \le j \le g}$，使得与 y相关联的对称矩阵 $\Pi_y \in W$的元素为 $(\Pi_y)_{i,j} = y_{i,j}$，其中 $1 \le i \le j \le g$。

记 V为 W在提升映射 π: $\mathbb{H}_{g_1} \times \cdots \times \mathbb{H}_{g_k} \to \mathbb{H}_g$ 下的原像。设因子 $\mathbb{H}_{g_i}$ 上的坐标为 $x^{(i)} = (x^{(i)}_{m,n})_{1\le m\le n\le g_i}$，使得相关联的对称矩阵 $\Pi_{x^{(i)}} \in \mathbb{H}_{g_i}$ 的元素由 $(\Pi_{x^{(i)}})_{m,n} = x^{(i)}_{m,n}$ 给出，其中 $1 \le m \le n \le g_i$。我们还使用记号 $(x^{(i)})_{1\le i\le k}$ 表示 V上相应的坐标。我们可以假设映射 π 在这些坐标下表示为

$$(\Pi_{\underline{x}^{(1)}}, \ldots, \Pi_{\underline{x}^{(k)}}) \mapsto \begin{pmatrix} \Pi_{\underline{x}^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{\underline{x}^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

令 $U \subset \mathcal{M}^{ct}_g$ 为围绕 $[C]$ 的一个充分小的解析邻域，满足 $t(U) \subset W$，以便我们可以找到坐标 $(x,\ s)$，如 [13, 备注 2.4] 中所示，用于 U：

- 对于每个 $v \in V(\Gamma_C)$，坐标 $x_{v,1}, \ldots, x_{v,3g(v)-3+n(v)}$ 对应于带标记曲线 $[(C_v, q_1, \ldots, q_{n(v)})] \in \mathcal{M}_{g(v),\ n(v)}$ 邻域中的坐标，其中 $q_1, \ldots, q_{n(v)}$ 是 C 中位于 C_v 上的节点。这些坐标

$$\underline{x} = (x_{v,1}, \ldots, x_{v,3g(v)-3+n(v)})_{v\in V(\Gamma_C)}$$

  可以视为 $[C]$ 邻域的坐标，该邻域位于与 Γ_C 相关联的 $\mathcal{M}^{ct}_g$ 的边界分层 $\mathcal{M}^{ct}_{\Gamma_C} = \prod_{v\in V(\Gamma_C)} \mathcal{M}^{ct}_{g(v),\ n(v)}$ 中。

- 对于 C 的对偶图 Γ_C 中的每条边 e，坐标 s_e 对应于相关节点的光滑化，如构造 2.1 中所述。我们记作 $s = (s_e)_{e\in E(\Gamma_C)}$。 –

2.2 术语

本节中的记号大多改编自 [13] 和 [12]。

对于 $[C] \in \mathcal{M}^{ct}_g$，考虑对偶图 Γ_C中的一条有向边 e。其反向有向边记为 $-e$。e 的源顶点记为 v（e），并对应于 C的一个不可约分支 $C_{v(e)}$。我们将与 e相关联的节点 $q_{|e|} \in C$ 在 $C_{v(e)}$ 中的原像记为 q_e。对于 $v \in V$（Γ_C），满足 $v = v$（e）的有向边集合 e 记为 E_v。设 z_e是 q_e 邻域 $V_e \subset C$中的一个局部坐标，使得 z_e: $V_e \to D(0, 1) \subset \mathbb{C}$ 是一个同构，且 z_e（q_e）$= 0$。我们还假设这些 V_e 两两不交。

构造 2.1。对于$[C] \in \mathcal{M}^{ct}_g$和 $s = (s_e)_{e\in E(\Gamma_C)} \in \mathbb{C}^{|E(\Gamma_C)|}$，其中 $|s_e| < 1$，标准拼接 C_s 按如下方式构造 [12, 定义 4.1]：对于每个 $e \in E$（Γ_C），令 U_e 为 q_e的开 $\sqrt{|s_e|}$-邻域。将 U_e 的正向定向边界记为 γ_e。映射 I_e: $\gamma_e \to \gamma_{-e}$ 定义为 $z_e \mapsto s_e/z_{-e}$。我们定义

$$C_{\underline{s}} = (C \setminus \sqcup_{e\in E(\Gamma_C)} U_e)/(\gamma_e \sim_{I_e} \gamma_{-e})_{e\in E(\Gamma_C)}.$$

C_s的全纯结构由$C \setminus \sqcup_{e\in E(\Gamma_C)} U_e$的全纯结构通过在坐标图$(V_e, z_e)$,$(V_{-e}, z_{-e})$中进行变量识别 $z_e = s_e/z_{-e}$ 得到。

定义 2.2。 给定一条光滑曲线 C'、一个固定点 $q_0 \in C'$ 以及关于 $H_1(C', \mathbb{Z})$ 的一组辛基$\{A_i, B_i\}_{1\le i\le g(C')}$，**A-归一化柯西核** $K_{C'}$ 由以下性质唯一确定：

- $K_{C'}(p, q)$ 是 $p \in C'$ 上的亚纯微分，只有简单极点位于 $p = q$ and $p = q_0$，留数为 $\pm\frac{1}{2\pi i}$；
- $\int_{p\in A_i} K_{C'}(p, q) = 0$ 对 $i = 1, \dots, g(C')$

例 2.3。 $\mathbb{P}^1$ 的柯西核，其极点位于 $p = q$ 和 $p = \infty$，由下式给出

$$K_{\mathbb{P}^1}(p, q) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dp}{p - q}.$$

定义 2.4。 该 A-归一化基本双微分 $b_{C'}$ 定义为

$$b_{C'}(p, q) = 2\pi i \cdot d_q K_{C'}(p, q),$$

其中 d_q 表示关于 q的外微分。

我们用 K_v 分别表示与曲线 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$ 的不可约分支 C_v 相关联的柯西核和基本双微分，其中 $v \in V(\Gamma_C)$。

$\sqcup_{e\in E_v} V_e \times \sqcup_{e\in E_v} V_e$ 上 K_v 的正则部分 $\mathbf{K}_v$ 满足

$$\mathbf{K}_v(z_e, \zeta_{e'}) = \begin{cases} K_v(z_e, \zeta_{e'}) & \text{if } e \neq e' \\ K_v(z_e, \zeta_{e'}) - \dfrac{dz_e}{2\pi i(z_e - \zeta_{e'})} & \text{if } e = e', \end{cases}$$

其中我们交替使用记号 $p \in V_e$ 和 $z_e = z_e(p)$ 表示 K_v，$\mathbf{K}_v$ 的各项；此外，ζ_e 是 V_e 中的局部坐标，与 z_e 的记法不同，以区分 K_v 各项中的局部坐标。

对于 $\boldsymbol{b}_v(z_e, \zeta_{e'}) = 2\pi i \cdot d_{\zeta_{e'}}\mathbf{K}_v(z_e, \zeta_{e'})$，我们有

$$\boldsymbol{b}_v(z_e, \zeta_{e'}) = \begin{cases} b_v(z_e, \zeta_{e'}) & \text{if } e \neq e' \\ b_v(z_e, \zeta_{e'}) - \dfrac{dz_e d\zeta_{e'}}{(z_e - \zeta_{e'})^2} & \text{if } e = e'. \end{cases}$$

~ ~对于在第二个变量中取节点处的值所得到的微分，我们记作 $b_v(z_e, q_{e'}) = b_v(z_e, q_{e'})\, dz_e$，其中 $b_v(z_e, \zeta_{e'}) = b_v(z_e, \zeta_{e'})\, dz_e d\zeta_{e'}$；而~对于 $\boldsymbol{b}_v$ 也类似。对于 $e, e' \in E_v$，我们记作 $\beta_{e,e'} = \boldsymbol{b}_v(q_e, q_{e'})$。

令 $[C_{\underline{x},s}] \in U$为与坐标 $x = (x_{v,1}, \dots, x_{v,3g(v)-3+n})_{v\in V(\Gamma_C)}$和 $s = (s_e)_{e\in E(\Gamma_C)}$相关联的曲线。假设我们想改变微分 $\Omega \in H^0(\omega_C)$，以得到全纯微分 $\Omega_{x,s} \in H^0(\omega_{C_{x,s}})$，其中 $\Omega_{0,0} = \Omega$。[13] 中的方法在变量 x上解析地依赖，见 [13, 注 2.4]。因此，不失一般性，我们可以固定$\bar{x} = 0$，并考虑曲线 $C_s = C_{0,s}$上的微分 $\Omega_s = \Omega_{0,s}$。Ω 在 C_v 上的限制记为 Ω_v。

对于 $e \in E(\Gamma_C)$，$r \geq 0$，我们递归地在 V_e 上定义全纯微分 $\xi_e^{(r)}$，如下：

$$\begin{cases} \xi_e^{(0)}(z_e) = \Omega_{v(e)}(z_e) \\ \xi_e^{(r)}(z_e) = \sum_{e' \in E_v} \int_{\zeta_{e'} \in \gamma_{e'}} \mathbf{K}_{v(e)}(z_e, \zeta_{e'}) \cdot I_{e'}^* \xi_{-e'}^{(r-1)}(\zeta_{e'}) \text{ if } r > 0. \end{cases} \tag{1}$$

由于 C 是紧型，$\xi_e^{(0)}(z_e)$ 是全纯的。记 $\xi_e^{(r)}(z_e) = \tilde{\xi}_e^{(r)}(z_e)dz_e$ 以及 $\tilde{\xi}_e = \tilde{\xi}_e^{(0)}(q_e)$。

从顶点 v 出发，在 Γ_C 中所有长度为 r 的有向路径（边可以重复）的集合记为 L_v^r。对于路径 $l = (e_1, \ldots\ldots, e_r) \in L_v^r$，记 $\beta(l) = \prod_{j=1}^{r-1} \beta_{-e_j, e_{j+1}}$ 并记 $s(l) = \prod_{i=1}^{r} s_{e_i}$。令 $|\cdot|_\infty$ 表示范数 $|(s_1, \ldots\ldots, s_r)|_\infty = \sup_i |s_i|$。

给定 $H_1(C_v, \mathbb{Z})$ 的一个辛基 $\{A_i, B_i\}_{1 \leq i \leq g(v)}$，在 $C_v \backslash (\sqcup_{e \in E_v} U_e)$ 上定义微分 $\eta_v = \sum_{r \geq 1} \eta_v^{(r)}$ 如下：

$$\eta_v^{(r)}(z) = \sum_{e \in E_v} \int_{z_e \in \gamma_e} K_v(z, z_e) \cdot I_e^* \xi_{-e}^{(r-1)}(z_e). \tag{2}$$

定理 [13]（定理 1.1）从集合 $\{\eta_v\}_{v \in V(\Gamma_C)}$ 构造出所需的微分 Ω_s：

定理 2.5（Hu, Norton [13]）。对于 $v \in V(\Gamma_C)$，微分 $\Omega_{v,s} = \Omega_v + \eta_v$ 可粘合为 C_s 上的全局全纯微分 Ω_s。此外，η_v 由 $\int_{A_i} \eta_v = 0$ 归一化，其中 $i = 1, \ldots\ldots, g(v)$，从而得到 $\Omega_0 = \Omega$。

注 2.6。[13] 中的定理 1.1 还给出了微分 η_v 的 L^2 界。A 归一化也保证了微分 η_v 的唯一性，使得 $\Omega_v + \eta_v$ 可粘合为全局微分 [13, §2.4]。

考虑 v、$v' \in V(\Gamma_C)$ 对应的 C 的一对不可约分支 C_v、$C_{v'}$。设 $\{A_{i,s}, B_{i,s}\}_{1 \leq i \leq g(v)}$ 是 $H_1(C_v, \mathbb{Z})$ 的一组辛基在 $H_1(C_s, \mathbb{Z})$ 上的延拓，如 §2.4、§4.2] 所述。设 $\{\nu_i\}_{1 \leq i \leq g(v')}$ 是 $C_{v'}$ 的一组全纯微分基，$\{\nu_{i,s}\}_{1 \leq i \leq g(v')}$ 是它们在 C_s 上的延拓，如定理 2.5 所述。记 $\Pi_s(v', v) = \Pi_s(v, v')^T$ 为周期矩阵 Π_s 中对应于在循环 $\{B_{i,s}\}_{1 \leq j \leq g(v)}$ 上对 $\{\nu_{i,s}\}_{1 \leq i \leq g(v')}$ 积分的（$g(v') \times g(v)$）块，该周期矩阵属于 $J(C_s)$。

2.3 局部方程

为了证明定理 1.3，我们将用到以下引理：

引理 2.7。对于正亏格光滑曲线 C 上任意给定的点 p，都存在一个限制为 $1 \in \omega_C|_p \cong \mathbb{C}$ 的全局全纯微分。

引理 2.7 等价地表明，ω_C 对于 $g(C) \geq 1$ 是无基点的，这由黎曼-罗赫定理可得。

引理 2.8。令 v, $v' \in V(\Gamma_C)_{>0}$。将连接 v与 v'的唯一最短边序列标记为（e_1、.....、e_r）。块 $\Pi_s(v',\ v)$ 由如下形式的项组成：对于某个幂级数（p_i）$_{1\le i\le g(v')\ \times g\ (v)}$，其项取自 U 的坐标。如果 v 与 v' 之间最短路径上的其余顶点的亏格均为零，则 p_i 中至少有一个将在 U 的坐标环中是一个单位元。

证明。回顾第 2.2 节中的记号 $\{A_{i,s}, B_{i,s}\}_{1\le i\le g(v)}$ 和 $\{\nu_{i,s}\}_{1\le i\le g(v')}$。假设我们改变微分 $\Omega \in H^0(\omega_C)$，它对应于 $H^0(\omega_{C_{v'}})$ 中的 ν_i，并且对于每个 $v'' \neq v'$，在 $H^0(\omega_{C_{v''}})$ 中取 0。我们首先说明，如何将 [13], 中命题 3.4 的公式根据我们 对 v、v' 和 Ω 的选取，精化为

$$\begin{cases} \eta_v^{(r')}(z) = (-1)^{r'} \sum\limits_{l\in L_v^{r'}} s(l) b_v(z, q_{e_1}) \beta(l) \tilde{\xi}_{-e_{r'}} \\ \qquad\qquad + s_1 \cdots s_r \mathcal{O}(|\underline{s}|_\infty^{r'-r+1}) & \text{if } r' \ge r \\ \eta_v^{(r')}(z) = 0 & \text{if } r' < r. \end{cases} \tag{3}$$

接下来，我们证明可以找到 i, j，使得 $\eta_v^{(r)}(z)$ 在 $B_{j,s}$ 上的积分是$s_{e_1} \cdots s_{e_r}$与一个单位元的乘积。这些事实连同表达式 $\Omega_{v,s} = \Omega_v + \sum_{r'\ge 1} \eta_v^{(r')}$以及 $\Pi_s(v', v)_{i,j} = \int_{B_{j,s}} \Omega_{v,s}$ 将给出所需结果。

关系 $\eta_v^{(r')}(z) = 0$if $r' < r$ 成立，因为 $\xi_e^{(0)}(z_e)$ 在 $v(e) = v'$之外为零；根据 (1) 归纳可知，当将 $v(e)$ 与 v'相连的边数严格大于 r'' 时，$\xi_e^{(r'')}(z_e)$ 为零。对于 $r' \ge r$ 时的 $\eta_v^{(r')}(z)$，可按照 [13]中命题 3.4 的证明，通过对 r 归纳来证明：我们首先证明，对于固定的 $e \in E_v$,

$$\xi_e^{(r')}(z_e) = (-1)^{r'} \sum_{l\in L_v^{r'}} s(l) \boldsymbol{b}_v(z_e, q_{e_1}) \beta(l) \tilde{\xi}_{-e_{r'}} + s_1 \cdots s_r \mathcal{O}(|\underline{s}|_\infty^{r'-r+1}).$$

对于 $r = 1$，我们有

$$\begin{aligned} \xi_e^{(1)}(z_e) &= \int_{\zeta_{e_1}\in\gamma_{e_1}} \mathbf{K}_v(z_e, \zeta_{e_1}) I_{e_1}^* \xi_{-e_1}^{(0)}(\zeta_{e_1}) \\ &= -s_{e_1} \boldsymbol{b}_v(z_e, q_{e_1}) \tilde{\xi}_{-e_1} + \mathcal{O}(|s_{e_1}|^2) \end{aligned}$$

如同 [13, 方程 3.16]。$\eta_v^{(1)}(z)$ 的结果可类似地得到。假设 $r \ge 2$。根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} \xi_{-e_1}^{(r-1)}(z_{-e_1}) =& (-1)^{r-1} \left(\prod_{2\le i\le r} s_{e_i} \right) \boldsymbol{b}_{v(-e_1)}(z_{-e_1}, q_{e_2}) \left(\prod_{2\le i\le r-1} \beta_{-e_i, e_{i+1}} \right) \tilde{\xi}_{-e_r} \\ &+ s_2 \cdots s_r \mathcal{O}(|\underline{s}|_\infty). \end{aligned}$$

注意到术语 $s_2 \cdots s_r \mathcal{O}(|s|_\infty)$ 是 $\underline{z}_{-e_1}$中的全纯微分，对该术语取 $I_{e_1}^*$（随后乘以 $\mathbf{K}_v(z_e, \zeta_{e_1})$ 并在 $\zeta_{e_1} \in \gamma_{e_1}$ 上积分）将得到一个

额外因子 s_1，正如所需。我们通过注意到，与 [13,方程 3.17], 中一样，当 $r'=r$ 时，完成了关于 $\xi_e^{(r')}(z_e)$ 的归纳:

$$\int_{\zeta_{e_1}\in\gamma_{e_1}} \mathbf{K}_v(z_e,\zeta_{e_1})I^*_{e_1}(\boldsymbol{b}_{v(-e_1)}(z_{-e_1},q_{e_2})) = -s_{e_1}b_v(z_e,q_{e_1})\beta_{-e_1,e_2}+\mathcal{O}(|s_{e_1}|^2).$$

考虑 $\xi_e^{(r-1)}(z_e)$ 并使用 (2)，即可得到所需的 $\eta_{v_l}^{(r)}(z)$ 公式。类似地，通过归纳可得 $r'>r$ 的公式；注意， v 与 v' 之间所有长度为 $r'>r$ 的路径都包含路径 $(e_1,\ \ldots,\ e_r)$。

系数 $(\beta_{-e_i,e_{i+1}})_{1\le i\le r-1}$ 非零，因为它们是 $\mathbb{P}^1$ 上两个不同点处基本双微分 $\frac{dwdz}{(w-z)^2}$ 的取值。此外，系数 $\tilde{\xi}_{-e_r}$ 等于 $\tilde{\nu}_i(q_{-e_r})$，其中 $\nu_i(z)=\tilde{\nu}_i(z)dz$。根据引理 2.7，我们可以选取 i，使得 $\tilde{\nu}_i(q_{-e_r})\neq 0$。最后，我们可以在 C_v 上找到一个同调圈 B_j，使得 $\int_{B_j}b_v(z,q_{e_1})\neq 0$。事实上，我们有 $\int_{B_j}b_v(z,q_{e_1})=\tilde{\nu}'_j(q_{e_1})$，其中 ν'_j 是 C_v 的全纯微分，与 A_j [13, p.28] 对偶。根据引理 2.7，存在一个 j，使得 $\tilde{\nu}'_j(q_{e_1})\neq 0$。因此，对于上述的 i,j，(3) 中 $s_{e_1}\cdots s_{e_r}$ 项在 B_j 上的积分非零，正如所需。□

2.3.1 定理 1.3 的证明

定理 *1.3* 的证明。令 $t^*\colon \mathbb{C}[W]\to\mathbb{C}[U]$, $\pi^*\colon \mathbb{C}[W]\to\mathbb{C}[V]$ 表示与 t,π相关联的坐标环上的拉回。由引理 2.8，坐标环$\mathbb{C}[U]$, $\mathbb{C}[V]$ 关于 t^*,π^* 在 $\mathbb{C}[W]$ 上的张量积由变量 $x_{i,j}$和 $x^{(i')}_{m,n}$生成，并满足以下关系:

(1) 对于 $x^{(i')}_{m,n}$和 $\mathbb{C}[V]$ 与 $y_{i,j}\in\mathbb{C}[W]$ 的每个变量，满足 $\pi^*y_{i,j}=x^{(i')}_{m,n}$的唯一变量，

我们有关系 $x^{(i')}_{m,n}=t^*y_{i,j}$。(2) 对于每对顶点 $v,v'\in V(\Gamma_C)_{>0}$，若满足 $\sigma(v)\neq\sigma(v')$，则对边 $e_1,\ldots,e_r$可得到关系$s_{e_1}\cdots s_{e_r}=0$，如引理 2.8 所述。事实上，路径 $e_1,\ldots,e_r$包含一个临界子路径 $e'_1,\ldots,e'_t$。由引理 2.8 可得关系 $s_{e'_1}\cdots s_{e'_t}\cdot$单位元 $=0$，因此 $s_{e_1}\cdots s_{e_r}=0$。

注意，为了获得纤维积中类型 (2) 的极小关系集，我们只需考虑临界路径（$e_1,\ldots,e_r$）的关系 $s_{e_1}\cdots s_{e_r}=0$。

类型 (1) 的关系消去生成元 $x^{(i')}$ </style}对应于 $1\le i'\le k$ 的部分，而类型 (2) 的关系则是平方自由单项式 $\{\prod_{e\in\gamma}s_e\}_{\gamma\in P_\sigma}$。由此得到我们所需的纤维积的坐标环。由于单项式 $\{\prod_{e\in\gamma}s_e\}_{\gamma\in P_\sigma}$ 是平方自由的，因此坐标环是约化的。□

3 $[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]$的 Torelli 拉回

3.1 纤维积的分层

我们根据曲线 $[C] \in \mathcal{M}_g^{ct}$ 的组合类型以及 k-着色 σ，对纤维积 Y（见第 1.3 节）进行分层。

令 T 为 一个亏格为 g的稳定树（见 [9, A.1]），以及 $V(T)_{>0} = \{v \in V(T) | g(v) > 0\}$。Le t

$$\sigma : V(T)_{>0} \to \{1, \ldots, k\}$$

为满足$\sum_{v \in \sigma^{-1}(j)} g(v) = g_j$且对 $j = 1$，.....，k成立的一个划分。对于每一对这样的 (T, σ)，我们得到一个映射

$$\varphi_{(T,\sigma)} : \mathcal{M}_T^{ct} = \prod_{v \in V(T)} \mathcal{M}_{g(v),n(v)}^{ct} \to Y$$

通过粘合映射 ξ_T： $\mathcal{M}_T^{ct} \to \mathcal{M}_g^{ct}$以及映射

$$\mathcal{M}_T^{ct} \to \mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}$$
$$[(C_v, q_1, \ldots, q_{n(v)})_{v \in V(T)}] \mapsto ([\prod_{v \in \sigma^{-1}(1)} J(C_v)], \ldots, [\prod_{v \in \sigma^{-1}(k)} J(C_v)]).$$

将 $\varphi_{(T,\sigma)}$ 在 Y 中的像记为 $Y_{(T,\sigma)}$。闭子概形 $Y_{(T,\sigma)} \subset Y$ 唯一确定了这一对 (T, σ)。形如 $Y_{(T,\sigma)} \subset Y_{(T',\sigma')}$ 的包含关系由稳定图 [9, A.2] 的特化 $T \to T'$ 确定，其中诱导映射 f: $V(T) \to V(T')$ 满足 $\sigma(v) = \sigma'(f(v))$，且 $v \in V(T)_{>0}$。我们将这类特化记作 ϕ: $(T, \sigma) \to (T', \sigma')$，并称 ϕ 为 (T', σ') 上的结构。对于集合 $S = ((T_i, \sigma_i))_{1 \le i \le n}$，我们将集合 $(\phi_i$: $(T, \sigma) \to (T_i, \sigma_i))_{1 \le i \le n}$ 称为 (T, σ) 上的 S 结构，记作 $((T, \sigma), (\phi_i)_{1 \le i \le n})$。若对任意 S 结构 $((T', \sigma'), (\phi_i')_{1 \le i \le n})$ 以及满足 $\phi_i' \circ \phi = \phi_i$（对于 $1 \le i \le n$）的特化 ϕ: $(T, \sigma) \to (T', \sigma')$，映射 ϕ 都是同构，则称 S 结构 $((T, \sigma), (\phi_i)_{1 \le i \le n})$ 是一般的。

命题 3.1。设 $S = ((T_i, \sigma_i))_{1 \le i \le n}$。对于任意 S-结构 $((T, \sigma), (\phi_i)_{1 \le i \le n})$，存在唯一的一般的 S-结构 $((T', \sigma'), (\phi_i')_{1 \le i \le n})$ 以及特殊化 ϕ: $(T, \sigma) \to (T', \sigma')$，满足 $\phi_i' \circ \phi = \phi_i$ for $1 \le i \le n$。

证明。给定 $((T, \sigma), (\phi_i)_{1 \le i \le n})$，唯一的一般的 S-结构是通过收缩 T 中的边得到的；这些边在由 ϕ_i 对所有 $1 \le i \le n$ 诱导的特化 $T \to T_i$ 下被收缩，并带有诱导着色和 S-结构。 □

令 Irr(Y) 为 Y 的不可约分支集合。每个 $Z \in$ Irr(Y) 都具有形式$Y_{(T,\sigma)}$，其中某个点对 (T, σ) 不存在 (T', σ')-结构，使得 $(T', \sigma') \ne (T, \sigma)$。对于任意子集$\mathcal{Z} \subset$ Irr(Y)，记 $S_{\mathcal{Z}} = \{(T, \sigma) | Y_{(T,\sigma)} \in \mathcal{Z}\}$，并令 $G_{\mathcal{Z}}$ 为一般的 $S_{\mathcal{Z}}$-结构集合。

命题 3.2. 映射 $(\varphi_{(T,\sigma)}$: $\mathcal{M}_T^{ct} \to Y)_{(T,\sigma) \in S_{\mathcal{Z}}}$ 的纤维积与 $\bigsqcup_{((T',\sigma'),(\phi_Z)_{Z \in \mathcal{Z}}) \in G_{\mathcal{Z}}} \mathcal{M}_{T'}^{ct}$典范同构。

证明。 映射 $(\varphi_{(T,\sigma)})_{(T,\sigma)\in S_{\mathcal{Z}}}$的纤维积可写为$\bigcup_{((T',\sigma'),(\phi_Z)_{Z\in\mathcal{Z}})\in G_{\mathcal{Z}}}\mathcal{M}^{ct}_{T'}$。命题 3.1 保证这个并是不交的。 □

定义 Strata(Y) 为满足以下条件的闭子概形 $Y_{(T,\sigma)}$ 的集合：对于某个 $\mathcal{Z}\subset$ Irr(Y)，(T,σ) 具有一般的$S_{\mathcal{Z}}$-结构。对于 $Y_{(T,\sigma)}\in$ Strata(Y)，记 $Y^{\circ}{}_{(T,\sigma)}$ 为 $Y_{(T,\sigma)}$ 的开子概形，它是去掉满足 $Y_{(T',\sigma')}\in$ Strata(Y) 的闭子概形 $Y_{(T',\sigma')}\subsetneq Y_{(T,\sigma)}$ 后所得。集合

$$\text{Strata}^{\circ}(Y)=\{Y^{\circ}_{(T,\sigma)}|Y_{(T,\sigma)}\in\text{Strata}(Y)\}$$

构成 Y 的一个局部闭分层。

注 3.3。 将在 [4] 中给出 Torelli 映射 Y 与一般乘积映射 $\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}\to\mathcal{A}_g$ 的纤维积的分层的完整描述。一个组合分层由一棵亏格为 g 的稳定树 T 以及对 $V(T)_{>0}$ 的 k-着色构成，且满足：T 的每条边都位于一条连接两个不同颜色顶点的路径上，而该路径上的其余顶点的亏格均为零。

3.2 定理 1.4 的证明

定理 *1.4* 的证明。 由定理 1.1 可知，纤维积 Y是约化的。利用超额交理论 [8],，我们因此可以将类 $\alpha=t^*[\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}]$ 分解为

$$\alpha=\sum_{Y_{(T,\sigma)}\in\text{Strata}(Y)}\xi_{T*}\alpha_{(T,\sigma)}$$

其中，$\alpha_{(T,\sigma)}$ 支撑在 $Y_{(T,\sigma)}$ 上（见 [4, 定理 5]）。此外，我们可以将 $\alpha_{(T,\sigma)}$ 取为以下对象的正规丛的陈类的多项式：$Y_{(T,\sigma)}$ 在 $Y_{(T',\sigma')}$ 中的正规丛，分别对应于 $(T,\sigma)\to(T',\sigma')$，以及 $\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}$ 在 $\mathcal{A}_g$中的正规丛。

正规丛为

$$N_{\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}/\mathcal{A}_g}=S^2(\bigoplus_{1\le i\le k}\mathbb{E}^{\vee}_{g_i})-\bigoplus_{1\le i\le k}S^2\mathbb{E}^{\vee}_{g_i}=\bigoplus_{1\le i<j\le k}\mathbb{E}^{\vee}_{g_i}\boxtimes\mathbb{E}^{\vee}_{g_j}$$

and

$$N_{Y_{(T,\sigma)}/Y_{(T',\sigma')}}=N_{\mathcal{M}^{ct}_T/\mathcal{M}^{ct}_{T'}}=\bigoplus_{e\in E(T)\setminus E(T')}T_{h_e}\otimes T_{h'_e}$$

其中，h_e、h'_e 是 e 的半边，而 $T_{h_e},T_{h'_e}$ 是与相关因子 $\mathcal{M}^{ct}_T$ [1, §13.3]上h_e,h'_e 对应的切线丛。

对这些正规丛取陈类，我们推得类 $\alpha_{(T,\sigma)}$ 在 $Y_{(T,\sigma)}=\mathcal{M}^{ct}_T$ 上是典范的。沿粘合映射向前推送后，所得的类在 $\mathcal{M}^{ct}_g$ 上是典范的。 □

回顾第 1.4 节，对于 $d=$余维($t^*[\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}]$)，我们有

$$t^*[\mathcal{A}_{g_1}\times\cdots\times\mathcal{A}_{g_k}]=0\ \text{ for }\ d>2g-3.$$

现在我们列出满足 $d\le 2g-3$ 的 $g_1,\ldots,g_k$ 的所有可能情况。

命题 1.5. 满足 $1 \le g_1 \le \cdots \le g_k$ 且 $\sum_{1\le i\le k} g_i = g$，并使 $d = \mathrm{codim}(t^*[\mathcal{A}_{g_1} \times \cdots \times \mathcal{A}_{g_k}]) \le 2g-3$ 的元组 $(g_1, \ldots, g_k)$ 为 $(1, g-1), (1, 1, g-2), (2, g-2)$ 和 $(3, 3)$。

证明。当 $g_1 = 1$、$k \ge 3$ 和 $g_2 \ge 2$时，余维 d 在 $k = 3$和 $g_2 = 2$时取最小值。利用 $d = \sum_{1\le i<j\le k} g_i g_j$，我们得到 $d \ge 1(g-1) + 2(g-3) = 3g-7 > 2g-3$。当 $g_1 = g_2 = 1$ 和 $k \ge 4$时，d 在 $k = 4$ 和 $g_3 = 1$时取最小值，得到$d \ge 3g-6 > 2g-3$。这使得 $g_1 = 1$有以下可能性：$(1, g-1)$、$(1, 1, g-2)$。当$g_1 \ge 2$、$k \ge 3$时，余维 d 在 $k = 3$ 和 $g_1 = g_2 = 2$ 时取最小值。我们得到$d \ge 2(g-2) + 2(g-4) = 4g-12 > 2g-3$。这使得 $g_1 = 2$的情形只剩下$(2, g-2)$。对于$g_1 = 3$、$k = 2$，我们有 $d = 3(g-3)$。因此，使得 $d \le 2g-3$成立的 g 只有 $g = 6$这一种可能。这对应于元组$(3, 3)$。对于 $g_1 \ge 4$，d 在 $k = 2$ 和$g_1 = 4$时取最小值。因此 $d \ge 4(g-4) > 2g-3$。 □

参考文献

[1] Enrico Arbarello、Maurizio Cornalba 和 Phillip A. Griffiths，《代数曲线几何 II》，数学科学基础丛书，第268卷，施普林格出版社，柏林，2011年。[2] Arnaud Beauville，《Prym簇与Schottky问题》，《数学发明》41（1977年），第2期，149–196页。MR 572974[3]Christina Birkenhake 和 Herbert Lange，《复阿贝尔簇》，第2版，数学科学基础丛书，第302卷，施普林格出版社，柏林，2004年。[4] Samir Canning、Lycka Drakengren、Jeremy Feusi、Daniel Holmes、Aitor Iribar L´opez、Denis Nesterov、Dragos Oprea、Rahul Pandharipande、Johannes Schmitt 和 Zheming Sun，《Torelli轨迹、乘积循环与关于 $\mathcal{A}_g$的同态猜想》，撰写中。[5] Samir Canning、Sam Molcho、Dragos Oprea 和 Rahul Pandharipande，《阿贝尔簇模空间上循环的典范投影》，《代数几何》12（2025年），第6期，736–768页。[6]Samir Canning、Dragos Oprea 和 Rahul Pandharipande，《阿贝尔簇模空间上的典范与非典范循环》，《数学发明》242（2025年），第3期，659–723页。MR 4978177[7] C. Herbert Clemens 和 Phillip A. Griffiths，《三次三维簇的中间雅可比簇》，《数学年刊》（第2辑）95（1972年），281–356页。MR 302652[8] William Fulton，《交叉理论》，第2版，数学与其边界领域成果丛书（第3辑）：现代数学综述系列，第2卷，施普林格出版社，柏林，1998年。MR 1644323

[9] Tom Graber 和 Rahul Pandharipande，《曲线模空间上非典范类的构造》，《密歇根数学杂志》51（2003年），第1期，93–109页。MR 1960923[10] Tom Graber 和 Ravi Vakil，《相对虚定位与曲线模空间上典范类的消失》，《杜克数学杂志》130（2005年），第1期，1–37页。MR 2176546[11] Franc¸ois Greer 和 Carl Lian，d-椭圆轨迹与*Torelli* 映射，2024年，即将在《数学研究快报》发表。可见 https://arxiv.org/abs/2404.10826。[12] Samuel Grushevsky、Igor Krichever 和 Chaya Norton，《实归一化微分：稳定曲线上的极限》，《俄罗斯数学综述》74（2019年），第2期，265–324页。[13] Xuntao Hu 和 Chaya Norton，《阿贝尔微分的一般变分公式》，《国际数学研究论文集》2020（2018年），第12期，3540–3581页。[14] Aitor Iribar L´opez，《阿贝尔簇模空间上的诺特-勒夫谢茨循环》，即将在《数学论坛·Pi》（2025年）发表。[15] AitorIribar L´opez、RahulPandharipande 和 Hsian-HuaTseng，《Hilb$^n(\mathbb{C}^2)$ 的 Gromov-Witten 理论与 $\mathcal{A}_g$的诺特-勒夫谢茨理论》，2025年，可见 https://arxiv.org/pdf/2506.12438。[16] Gerard van der Geer，《阿贝尔簇模空间上的循环》，《曲线与阿贝尔簇的模空间》，《数学专题》第E33卷，Friedr. Vieweg，布伦瑞克，1999年，第65–89页。MR 1722539

Lycka Drakengren 数学系，苏黎世联邦理工学院，Rämistrasse 101，8092 苏黎世，瑞士电子邮件地址： lycka.drakengren@math.ethz.ch