arXiv:2601.02595v1 [math.NA] 5 Jan 2026

用于接触问题的无体积锁定混合虚元方法

C. Lovadina*[1, 2]和 L. Molinari, †[1]

[1]“F. Enriques”数学系，米兰大学，Via Cesare Saldini 50 - 20133 米兰，意大利[2]IMATI-CNR，Via Adolfo Ferrata 5 - 27100 帕维亚，意大利

摘要

我们采用虚拟元方法（VEM）研究弹性力学中的二维无摩擦接触问题的逼近。为克服近不可压缩情形下的体积锁定现象，我们采用混合位移/压力（u/p）变分形式，其中压力作为独立未知量引入。我们给出虚拟元方法离散，并进行一般误差分析，明确追踪误差估计中涉及的常数，从而能够考虑含有“小边”的网格。作为示例，我们考虑两种可能的虚拟元方法格式：一阶格式和二阶格式。数值结果证实了理论预测，具体而言，两种格式均表现出：1）对体积参数 λ具有鲁棒性，从而避免出现体积锁定现象；2）即使存在“小边”，也具有良好的表现；3）达到预期的理论收敛率。

1 引言

虚拟元方法（VEM）可视为有限元方法（FEM）和拟一致有限差分方法（MFD）的发展。它们与有限元方法具有相同的变分结构，同时在处理多边形和多面体网格时展现出非凡的灵活性。

自2013年在开创性论文 [5], 中提出以来，VEM在数学界和工程界都引起了广泛且日益增长的关注。这一方法在理论和实际应用方面均取得了长足进展。目前，虚拟元方法文献十分庞大，本文引言无法对其进行全面综述。关于VEM理论与应用的近期（但非穷尽）概述，感兴趣的读者可参阅专著 [3]。

本文采用虚拟元方法研究弹性力学中的接触问题及其逼近（例如参见 [31]和 [36], ）。从数学角度来看，该问题可归结为一个变分不等式系统。例如，关于抽象框架下此类不等式的Galerkin近似，其基础性研究可见[23], [14] 和 [15]。

接触力学中的虚拟元方法首次应用于 [40], ，作者利用虚拟元方法处理网格（尤其是非匹配网格）时的便利性，设计了一种简单高效的基于位移的数值格式，并采用节点对节点方法处理接触区域。在这项开创性工作之后，研究者沿着 [40]中的思路开展了多项拓展研究。例如，[39] 考虑了摩擦接触和大变形； [1] 则为二维接触问题提出了曲边虚拟元。

*carlo.lovadina@unimi.it
†loris.molinari@unimi.it

关于这一主题的虚拟元方法文献综述，另请参阅近期出版的著作 [38] 。从理论角度看，论文 [35] 对应用于无穷小弹性无摩擦接触问题的基本基于位移的虚拟元方法格式进行了收敛分析（关于接触力学中更一般、更复杂的框架，也可参阅论文 [41] 及其中的参考文献）。然而，尽管这些后续研究很有意义，却未涵盖近不可压缩材料的情形。由于我们也希望针对这一情形开发精确的数值格式，因此采用了适当的混合公式，其中压力类变量作为独立未知量显式引入（例如，参见 [11], ）。作为第一步研究，我们考虑最简单的情形，即假设：1）问题为二维；2）每个物体的本构定律均匀且各向同性；3）弹性体发生小位移和小变形；4）接触过程中不存在摩擦。在这种情况下，我们遵循 [10], 的思路开展一般性分析，并提出了两种符合抽象框架的虚拟元格式：一种基于一阶相容性和逼近性质，另一种则旨在满足二阶相容性和逼近性质。分析和数值结果揭示了以下有趣特点：

- 这些方法对 Lam´é 第一参数的选择具有稳健性，即不会出现体积锁定。

- 即使存在“小边”（例如，接触导致非匹配网格时出现的小边），这些方法仍表现良好。从理论角度看，“小边”会在稳定性常数和逼近估计中引入对数退化项。然而，由于这些项增长缓慢，从实际角度看并不会观察到这种退化

- 在通常的假设下，其理论收敛率符合这类问题的预期。特别要指出的是，对于二阶格式，尽管它有可能达到二次收敛率（事实上，该格式应用于线性弹性问题时确实如此），但相对于网格尺寸，收敛阶会受到 $5/2$ 的限制，即使解析解具有正则性也是如此。收敛阶损失 $1/2$ 是接触问题中的典型现象（例如见 [9], ），其原因在于对允许位移的凸集进行离散化，这会引入额外的相容性项。

当然，虚拟元方法并非唯一成功用于数值近似弹性接触问题的方法。在其他方法中，摩擦垫方法（例如参见 [8], [33], [37], [29],）是有限元方法领域中处理非匹配网格情形最常用的方法之一。另一种近期方法利用了 Nitsche方法，例如参见 [17]和 [25]。此外，等几何分析也得到了广泛应用，例如参见 [21], [20]和 [32]。关于多边形/多面体格式，我们提及混合高阶方法（HHO），例如参见 [19], [22], [16], 。

本文组织如下。第 2 节介绍无穷小位移与变形情形下的静态弹性接触问题。具体而言，我们考虑一种合适的位移/压力公式，由此得到一个变分不等式系统。与 [10], 中详述的方法相比，对于仅存在狄利克雷边界条件和接触边界条件的情形（即不涉及诺伊曼边界条件），我们无需依赖任何增广公式。

第3节介绍第2节所述变分系统的虚拟元离散。我们详细说明用于处理可能出现的非匹配网格的技术（即论文 [40] 中提出的节点插入策略）。随后，我们定义虚元法离散问题，并在适当的标准假设下推导出一般性的收敛性结果。这一分析可视为对 [10] 中针对 Signorini问题所做研究的虚拟元方法拓展。不过，我们在此精确追踪了涉及的稳定性常数。此外，我们允许这些量可能依赖于网格尺寸：当网格中存在“小边”时，这一点确实很重要；如果采用节点插入技术，就必须考虑这种情况。

第4节给出了两个符合第3节框架的示例：一阶虚拟元方法和二阶虚拟元方法；后一种方法利用了 [7] 中构造的虚拟元空间。

第5节对二阶方法进行了完整分析，特别是证明了稳定性常数的适当估计。一阶格式基本上可以采用相同的论证进行处理。我们注意到，对于“small edges”情形的处理，部分分析可以使用比本文所采用的工具更精细的方法来完成。例如，可以利用 [6] 或 [13] 中介绍的技术，避免在某些估计中因出现“small edges”而产生的对数项。然而，由于<style id='3'>inf-sup 常数估计，仍会保留一个对数项。因此，我们决定采用更为经典且简便的技术来建立误差估计。

第6节给出了一些数值结果，验证了理论预测。特别是，清楚地观察到了相对于体积参数以及“small edges”存在性的鲁棒性。

最后，在第7节中，我们给出一些结论。
全文采用索伯列夫空间、范数和半范数的标准记号（例如，参见 [28]）。

此外，我们广泛使用记号 $a \lesssim b$ 表示 $a \le C\, b$，其中 C 是一个正常数，且与网格尺寸 h 和体积（第一拉梅）参数λ均无关。类似地，记号 $a \simeq b$ 表示 $a \le C\, b \le C'\, a$，其中正常数 C' 同样与 h 和 λ无关。

2 接触问题的混合公式

设 $\Omega^i \subset \mathbb{R}^2$ 是 $i = 1,2$ 中一个开、有界的利普希茨区域，表示弹性体的参考构型。其边界记为 $\Gamma^i := \partial\Omega^i$，并划分为三个相对开、两两不相交且可测的部分 Γ^i_D、 Γ^i_N 和 Γ^i_C，其中 meas(Γ^i_D) >0。在狄利克雷边界 Γ^i_D 上施加位移，在诺伊曼边界 Γ^i_N 上施加表面力，而接触边界 Γ^i_C 上可能发生接触。

与接触力学中的惯例相同，我们采用主从范式（见 [36], [18]），选择Γ^1_C 作为从边界， Γ^2_C 作为主边界。此外，我们假设存在一个足够光滑的双射映射 $\chi : \Gamma^1_C \to \Gamma^2_C$，用于定义接触配对，并满足 $\chi(\Gamma^1_C) = \Gamma^2_C$。随后，我们定义公共接触界面 $\Gamma_C := \Gamma^1_C = \chi^{-1}(\Gamma^2_C)$。

对于每个物体，我们考虑均匀各向同性材料，并将讨论范围限定在小变形情形。于是，线性化应变-位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}^i + \boldsymbol{\nabla}^T\mathbf{u}^i).$$

对称柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本构方程可用四阶胡克张量 $\mathcal{C}$ 表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) = \mathcal{C}\mathbf{u}^i := 2\mu^i\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) + \lambda^i\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i))\mathbf{Id},$$

其中，tr 表示迹算子，$\mathbf{Id}$为单位张量。正系数 μ^i和 λ^i 为拉梅参数，假设它们在每个区域 Ω^i内为常数，但在不同物体上可能取值不同。

两个物体满足线性化弹性平衡方程，以及狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) = \mathbf{f}^i & \text{in } \Omega^i, \\ \mathbf{u}^i = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma^i_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i)\mathbf{n}^i = \mathbf{g}^i & \text{on } \Gamma^i_N, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$\mathbf{n}^i$ 表示 Γ^i上的外单位法向量，该向量几乎处处有定义。这里假设体载荷$\mathbf{f}^i$ 和表面牵引力$\mathbf{g}^i$ 分别属于 $[L^2(\Omega^i)]^2$ 和

$[L^2(\Gamma_N^i)]^2$, 。为简便起见，施加齐次狄利克雷边界条件，但非齐次条件也可以按常规方法处理。

为表述接触条件，我们首先将接触应力定义为

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1 \quad \text{on } \Gamma_C,$$

及其在从边界上的法向分量和切向分量

$$\sigma_n := \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^1, \quad \boldsymbol{\sigma}_t := \boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \mathbf{n}^1 \quad \text{on } \Gamma_C. \tag{2.2}$$

此外，我们引入接触边界上的法向位移跳跃，其定义为

$$[\![u_n]\!] := (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 \circ \chi) \cdot \mathbf{n}^1 \quad \text{on } \Gamma_C. \tag{2.3}$$

我们还定义初始间隙函数 g_0，假设其非负，表示参考构型中两个物体之间的初始距离。于是，接触约束可表示如下

$$[\![u_n]\!] \leq g_0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n([\![u_n]\!] - g_0) = 0 \quad \text{on } \Gamma_C. \tag{2.4}$$

条件 (2.4) 称为 Signorini条件。第一个不等式确保两个物体不会互相穿透，而第二个条件意味着接触压力 σ_n 纯粹为压缩性。第三个等式称为互补条件，它表明只有当两个物体接触时，接触压力才可能非零。此外，接触边界上的无摩擦条件由下式强制实现

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_C.$$

最后，牛顿第三定律要求接触发生区域内的接触力保持平衡；该条件可写为

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1 + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^2 \circ \chi)(\mathbf{n}^2 \circ \chi) J_\chi = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_C,$$

其中 J_χ 表示映射 χ的雅可比矩阵。

即使在线性弹性问题中，处理近不可压缩材料时（即 $\lambda^i \to \infty$），众所周知，基于位移的公式离散后会受到数值体积锁定的影响，从而降低所计算位移场的精度（见 [4]）。为避免这一现象，经典策略之一是采用该问题的混合变分公式（见 [11], [10]）。这种方法需要引入另一个变量（对于 $i = 1,\ 2$），此处称为压力，定义为

$$p^i := \lambda^i \text{div } \mathbf{u}^i.$$

为推导该问题的弱形式，我们首先给出适用于处理近乎不可压缩接触问题的泛函框架。我们引入可容许位移空间，定义如下

$$\mathbf{V} := \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2 := \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \left[H^1(\Omega^1)\right]^2 \times \left[H^1(\Omega^2)\right]^2 : \mathbf{v}^i = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_D^i \text{ for } i = 1, 2 \right\}, \tag{2.5}$$

其赋予通常的范数和半范数

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 := \left\|\mathbf{v}^1\right\|_{1,\Omega^1}^2 + \left\|\mathbf{v}^2\right\|_{1,\Omega^2}^2 \quad \text{and} \quad |\mathbf{v}|_1^2 := \left|\mathbf{v}^1\right|_{1,\Omega^1}^2 + \left|\mathbf{v}^2\right|_{1,\Omega^2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

此外，我们将压力空间定义为

$$\mathbf{Q} := Q^1 \times Q^2 := L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2), \tag{2.6}$$

赋予 L^2-范数

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{Q}}^2 := \left\|q^1\right\|_{0,\Omega^1}^2 + \left\|q^2\right\|_{0,\Omega^2}^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}.$$

为施加运动学接触条件，我们考虑非空、闭合且凸的子集 $\mathbf{K} \subset \mathbf{V}$，其定义如下（参见 (2.4)）：

$$\mathbf{K} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : [\![v_n]\!] - g_0 \leq 0 \text{ a.e. on } \Gamma_C\}. \tag{2.7}$$

无摩擦接触问题的混合变分公式可通过标准论证得到（参见 [18]），其形式为

$$\begin{cases} \text{find } (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \mathbf{K} \times \mathbf{Q} \text{ such that} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + b(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{p}) \geq F(\mathbf{v} - \mathbf{u}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{q}) - c_\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 & \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中，对 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ 以及 $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$，我们定义

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} a^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i), \quad a^i(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^i) := 2\mu^i \int_{\Omega^i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^i)\, dx, \tag{2.9}$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{q}) := \sum_{i=1}^{2} b^i(\mathbf{v}^i, q^i), \quad b^i(\mathbf{v}^i, q^i) := \int_{\Omega^i} \operatorname{div} \mathbf{v}^i q^i \, dx, \tag{2.10}$$

$$c_\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\lambda^i} c^i(p^i, q^i), \quad c^i(p^i, q^i) := \int_{\Omega^i} p^i q^i \, dx, \tag{2.11}$$

$$F(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} F^i(\mathbf{v}^i), \quad F^i(\mathbf{v}^i) := \int_{\Omega^i} \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{v}^i \, dx + \int_{\Gamma_N^i} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v}^i \, d\Gamma. \tag{2.12}$$

我们注意到，对称双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{V}$ 上连续且强制。此外，对称双线性型 $c_\lambda(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上连续，且具有强制性常数 $\gamma(\lambda) = 1/\max\{\lambda^1, \lambda^2\}$。

关于双线性型 $b(\cdot,\cdot)$，我们注意到它在 $\mathbf{V} \times \mathbf{Q}$ 上连续，并满足适当的 *inf-sup* 条件。更确切地说，我们引入

$$\mathbf{W}^i := \{\mathbf{v}^i \in \mathbf{V}^i : \mathbf{v}^i_{|\Gamma_C} = \mathbf{0}\}, \tag{2.13}$$

并取 $\mathbf{W} := \mathbf{W}^1 \times \mathbf{W}^2$。显然，有 $\mathbf{W} \subset \mathbf{K}$。此外，用 $B_i : \mathbf{V}^i \to (Q^i)' \equiv Q^i$ 表示由 $b^i(\cdot,\cdot)$ 自然诱导的连续线性算子，并用 B_i^t 表示其形式伴随算子。现在我们需要区分两种情况。

1. 若 $|\Gamma_N^i| = 0$，则只有狄利克雷边界条件和接触边界条件。在这种情况下，$\mathbf{W}^i = [H_0^1(\Omega^i)]^2$，且 B_i^t 的核为

$$H^i := \ker B_i^t = \mathbb{R},$$

由此得到

$$Q^i / H^i = L^2(\Omega^i)/\mathbb{R} \simeq L_0^2(\Omega^i).$$

2. 若 $|\Gamma_N^i| > 0$，则会涉及诺伊曼边界条件，且 B_i^t 的核变为平凡核

$$H^i := \ker B_i^t = \{0\}.$$

因此，我们有

$$Q^i / H^i = Q^i = L^2(\Omega^i).$$

令 $\mathbf{H} := H^1 \times H^2$，可推知 inf-sup 条件

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}} \frac{b(\mathbf{w}, \mathbf{q})}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}}} \geq \beta \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \quad \text{for all } \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \tag{2.14}$$

可直接由标准结果推出（见 [11], [24]），无论 H^i（$i = 1,\ 2$）的四种可能组合中的哪一种成立。上文中，我们令 $\mathbf{Q}/\mathbf{H} := (Q^1 \times Q^2)/(H^1 \times H^2)$，且 $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}}$ 表示通常的商范数。

因此，接触问题 (2.8) 满足以下存在性、唯一性和一致稳定性结论。

命题 2.1. 接触问题 *(2.8)* 存在唯一解 $(\mathbf{u},\mathbf{p}) \in \mathbf{K} \times \mathbf{Q}$ 使得

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{p}\|_{\mathbf{Q/H}} \leq C \|F\|_{\mathbf{V}'},$$

其中 C 是与 λ^i无关的正常数。

3 接触问题的虚拟元离散

我们描述接触问题(2.8)的虚拟元离散。给定任意子集$\omega \subset \mathbb{R}^2$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{P}_k(\omega)$表示定义在 ω 上、次数不超过 k 的多项式。

3.1 虚拟元网格

设 $\{\mathcal{T}_h^i\}_h$是Ω^i的一列剖分， $i = 1$，2。我们假设每个剖分由有限个互不重叠的多边形 K 组成，且

$$h_K := \text{diameter}(K), \quad h^i := \max_{K \in \mathcal{T}_h^i} h_K, \quad h := \max_{i=1,2} h^i.$$

给定单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$，我们用 $|K|$ 表示其面积，并假设其边界 ∂K 被分成 $N = N(K)$条直线段，这些直线段称为边。此外，边 $e \in \partial K$ 的长度记为 h_e。每条边的端点称为该单元的顶点。我们强调，某些边可能共线；因此，边的数目可能大于构成多边形 K的直线段数目。

如 [6], 中所述，我们对区域的剖分作出以下三个假设 ns:

(A1) 存在 $\gamma \in \mathbb{R}^+$，其与 h无关，使得所有单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$ 均相对于半径为 $\rho_K \geq \gamma h_K$ 、中心为$\mathbf{x}_K$ 的球 B_K 呈星形;

(A2) 存在 $C \in \mathbb{N}$，其与 h无关，使得对所有 $K \in \mathcal{T}_h^i$， $N(K) \leq C$;

((A3) 存在 $\eta \in \mathbb{R}^+$，其与 h无关，使得对于所有边 $e \in \partial K$ ，均有 $h_e \geq \eta h_K$.

我们注意到，接触边界 Γ_C 从 $\mathcal{T}_h^1$和 $\mathcal{T}_h^2$继承了两种不同的剖分，其中单元对应于内部多边形的整条边。因此，映射 χ 无法保证两个接触边界网格的节点与单元之间存在任何对应关系。这一问题在有限元文献中已得到广泛认识，并且经常导致离散接触条件的实施更加复杂，同时也使问题的分析更加繁琐。然而，虚拟单元在处理悬挂节点方面的灵活性，使得可以采用 [40] 中所述的节点插入算法。通过沿接触边界剖分插入额外节点，总能恢复节点与单元匹配。我们将这种情况称为接触匹配条件，它有利于在理论上和实际实现中实施离散节点到节点接触条件。不过需要注意的是，该算法可能自然地产生包含“小边”的剖分。更具体地说，在已有多边形内部插入新节点可能导致违反假设 (A3)。因此，我们将在较弱的假设 (A1) 和 (A2) 下开展分析。

除非应用节点插入算法 ，否则在此处及本文其余部分，我们假设接触匹配条件 成立，但允许出现任意小的边；剖分 $\mathcal{T}_h$ 表示由算法添加的节点丰富后的两个原始剖分 $\mathcal{T}_h^1$ 和$\mathcal{T}_h^2$ 的并集。因此，接触边界 Γ_C具有唯一的剖分 $\mathcal{T}_h^c$，其节点为$\mathbf{x}_l^c$，其中 $l = 0$， $\cdots$， $l^\star$，边为 e_l^c，其中 $l = 0$， $\cdots$， $l^\star - 1$，其中

$$e_l^c := (\mathbf{x}_l^c, \mathbf{x}_{l+1}^c) \quad \text{for } l = 0, \cdots, l^\star - 1.$$

此外，我们假设接触边界的端点$\mathbf{c}_1$ 和$\mathbf{c}_2$ 是某个多边形 K的顶点。对于 $l = 0, \cdots, l^\star - 1$，我们将每条接触边上的中点集合记为$\mathbf{x}_{l+1/2}^c$。下文中，我们用 Ω 表示 $\Omega^1 \cup \Omega^2$ 的并集，并且主要

使用上述网格 $\mathcal{T}_h$，除非需要明确提及子域 Ω^i 和网格 $\mathcal{T}_h^i$。

为简化起见，下文假设 Γ_C 是一条直线。不过，如 [36], 中所述，分片线性（或更一般地，分片光滑）的 Γ_C 情形也可以用相同的技术精确处理：在每条直线段上定义所有量，并考虑乘积空间和分片对偶配对。

此外，为了进行下文的讨论，我们需要定义

$$h_m := \min_{K\in\mathcal{T}_h} h_{m(K)}, \tag{3.1}$$

其中

$$h_{m(K)} = \min_{e\in\partial K} |e| \text{ is the length of the smallest edge of the element } K. \tag{3.2}$$

全局双线性型 $a(\cdot,\cdot)$、$b(\cdot,\cdot)$ 和 $c_\lambda(\cdot,\cdot)$ 涉及 $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ 上的积分（参见 (2.9)-(2.11)），范数 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ 也都可以剖分为局部贡献。事实上，采用显然的记号可得

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a^K(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V},$$

$$b(\mathbf{v},\mathbf{q}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} b^K(\mathbf{v},\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{u}\in\mathbf{V} \text{ and } \forall \mathbf{q}\in\mathbf{Q},$$

$$c_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_\lambda^K(\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{Q},$$

and

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}\|_{1,K}^2\Big)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \qquad \|\mathbf{q}\|_{0,\Omega} = \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\mathbf{q}\|_{0,K}^2\Big)^{1/2} \quad \forall \mathbf{q}\in\mathbf{Q}.$$

以上及下文中，稍微滥用一下记号：当$\mathbf{p}$ 和$\mathbf{q}$取在单元 K 上时，我们约定，若 $K\in\mathcal{T}_h^i$，则$\mathbf{p} = p^i_{|K}$ 和$\mathbf{q} = q^i_{|K}$。$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$也同样处理。此外，我们基于多边形分解 $\mathcal{T}_h^i$定义 Ω^i 上的 H^1-分片半范数。

$$|\mathbf{v}|_{1,\Omega,h} := \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|_{1,K}^2\Big)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v}\in[L^2(\Omega)]^2 \text{ such that } \mathbf{v}_{|K}\in[H^1(K)]^2.$$

对于离散空间，我们考虑两个有限维子空间$\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h^1 \times \mathbf{V}_h^2 \subset \mathbf{V}$ 和$\mathbf{Q}_h := Q_h^1 \times Q_h^2 \subset \mathbf{Q}$。我们假设$\mathbf{V}_h^i$ 和 Q_h^i 均由局部空间$\mathbf{V}_{h|K}^i$ 和 $Q_{h|K}^i$拼接而成。此外，我们要求，对于任意 $K\in\mathcal{T}_h^i$ 以及某个整数 $k\geq 1$，都有 $[\mathbb{P}_k(K)]^2 \subset \mathbf{V}_{h|K}^i$。

3.2 离散双线性型

现在，我们定义接触问题离散化中涉及的双线性型的离散版本。对于 $b(\cdot,\cdot)$ 和 $c_\lambda(\cdot,\cdot)$，我们只需考虑它们在离散空间上的限制，并假设这些双线性型是可计算的。按照虚拟元方法框架中的惯例，我们引入一个对称且可计算的离散双线性型 $a_h : \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \to \mathbb{R}$，其可分解为

$$a_h(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a_h^K(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h, \tag{3.3}$$

其中局部离散双线性形式

$$a_h^K : \mathbf{V}_{h|K} \times \mathbf{V}_{h|K} \to \mathbb{R}$$

近似连续双线性型 $a^K(\cdot,\cdot)$，并满足以下性质：

• **k-一致性**：对于所有 $\mathbf{z}_k \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$ 和 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}^{h|K}$

$$a_h^K(\mathbf{z}_k, \mathbf{v}_h) = a^K(\mathbf{z}_k, \mathbf{v}_h); \tag{3.4}$$

• **稳定性</style：存在两个正量 ,**h_K 和 $\alpha^\star_{h_K}$，它们可能依赖于 h_K，使得对于所有 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}^{h|K}$，均有

$$\alpha_{\star,h_K}\, a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \le a_h^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \le \alpha^\star_{h_K}\, a^K(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \tag{3.5}$$

为定义双线性型 $a_h^K(\cdot,\cdot)$，我们采用以下策略，见 [5]。对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$，引入能量投影算子 $\Pi^{\varepsilon}_{\cdot,k}{}^K : \mathbf{V}_{h|K} \to [\mathbb{P}_k(K)]^2$，定义为

$$\begin{cases} a^K(\mathbf{z}_k, \mathbf{v}_h - \Pi_k^{\varepsilon,K}\mathbf{v}_h) = 0 & \forall \mathbf{z}_k \in [\mathbb{P}_k(K)]^2, \\ P_j^K(\mathbf{v}_h - \Pi_k^{\varepsilon,K}\mathbf{v}_h) = 0 & \text{for } j = 1,2,3, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 P_j^K是用于固定刚体运动的适当算子。容易验证，能量投影定义良好，且对所有 $\mathbf{z}_k \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$，有 $\Pi^{\varepsilon}_{\cdot,k}{}^K \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k$。我们还引入一个（对称的）稳定化双线性形式 $S^K : \mathbf{V}^{h|K} \times \mathbf{V}^{h|K} \to \mathbb{R}$，并设

$$a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := a^K(\Pi_k^{\varepsilon,K}\mathbf{u}_h, \Pi_k^{\varepsilon,K}\mathbf{v}_h) + S^K\big((I - \Pi_k^{\varepsilon,K})\mathbf{u}_h, (I - \Pi_k^{\varepsilon,K})\mathbf{v}_h\big), \tag{3.7}$$

对于所有 $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}^{h|K}$。

$a_h^K(\cdot,\cdot)$的对称性以及稳定性性质（3.5）可直接推出局部和全局离散双线性型的连续性

$$a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \le 2\mu_K \alpha^\star_{h_K} |\mathbf{u}_h|_{1,K} |\mathbf{v}_h|_{1,K} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{h|K}, \tag{3.8}$$

其中，当 $\mu_K = \mu^i$ 若 $K \in \mathcal{T}_h^i$时成立。类似地，由稳定性 (3.5) 以及$a(\cdot,\cdot)$ 的强制性可得离散双线性型的强制性:

$$\alpha_{\star,h}\, \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \le a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{3.9}$$

其中

$$\alpha_{\star,h} := \min_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha_{\star,h_K}, \qquad \alpha := \min\{\alpha^1, \alpha^2\}. \tag{3.10}$$

3.3 离散问题

设 $\mathbf{K}_h \subset \mathbf{V}_h$ 是 $\mathbf{V}_h$ 的一个非空、闭且凸的子集，其中包含零元素 $0_{\mathbf{V}}$，但不一定包含于 $\mathbf{K}$ 中。对于任意 $\mathbf{F}_h \in \mathbf{V}_h'$，我们考虑接触问题的虚拟元方法离散

$$\begin{cases} \text{Find } (\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) \in \mathbf{K}_h \times \mathbf{Q}_h \text{ such that} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + b(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) \ge \mathbf{F}_h(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, \mathbf{q}_h) - c_\lambda(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) = 0 & \forall \mathbf{q}_h \in \mathbf{Q}_h. \end{cases} \tag{3.11}$$

显然，双线性型 $b(\cdot,\cdot)$ 和 $c_\lambda(\cdot,\cdot)$ 在离散空间上也连续，并且$c_\lambda(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{Q}_h$ 上也是强制的。此外，由 (3.8) 可得 $a_h(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{V}_h$ 上连续，即

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \le 2\mu_{max} \alpha_h^\star |\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{3.12}$$

其中我们设

$$\mu_{max} := \max\{\mu^1, \mu^2\}, \qquad \alpha_h^\star := \max_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha^\star_{h_K}. \tag{3.13}$$

为证明离散问题的适定性，我们假设存在$\mathbf{W}_h \subseteq \mathbf{K}_h \cap \mathbf{W}$ 使得离散 inf-sup 条件成立（见 [10]），即

$$\exists \beta_h > 0 : \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_h} \frac{b(\mathbf{w}_h, \mathbf{q}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{V}}} \ge \beta_h \|\mathbf{q}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \quad \text{for all } \mathbf{q}_h \in \mathbf{Q}_h. \tag{3.14}$$

在前述假设下，同时回顾强制性以及（3.9），因此可知问题 3.11 存在唯一解（$\mathbf{u}_h$,$\mathbf{p}_h$）$\in \mathbf{K}_h \times \mathbf{Q}_h$。

3.4 一般收敛性结果

本节中，我们针对狄利克雷接触边界条件的情形，对近似误差给出一个抽象估计；对于出现诺伊曼边界条件的其他情形，可以采用类似且更简单的方法处理。在继续讨论之前，我们先引入以下正交分解:

$$q^i = \bar{q}^i + q_0^i \quad \forall q^i \in Q^i,$$

其中 $q_0^i \in H^i$ 和 $\bar{q}^i \in (H^i)^\perp$ ，并注意到

$$\left\|q^i\right\|_{Q^i/H^i} := \inf_{c\in H^i} \left\|q^i + c\right\|_{0,\Omega^i} = \left\|\bar{q}^i\right\|_{0,\Omega^i} \quad \forall q^i \in Q^i.$$

命题 3.1. 设 $(\mathbf{u},\mathbf{p})$ 和 $(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h)$ 分别为连续问题和离散问题的解。那么，对于任意 $\mathbf{p}_I \in \mathbf{Q}_h$, $F_h \in \mathbf{V}_h'$ 以及 $\mathbf{u}_\pi = (\mathbf{u}_\pi^1, \mathbf{u}_\pi^2)$ 满足 $\mathbf{u}_{\pi|K}^i \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$, ，有

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \le C_p(h)\big(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} \big),$$

其中

$$C_p(h) := \max\{1, {\beta_h}^{-1}, 2\mu_{max}{\beta_h}^{-1}(\alpha_h^\star + 1)\}. \tag{3.15}$$

证明。 根据三角不等式，我们有

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \le \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{p}_I \in \mathbf{Q}_h. \tag{3.16}$$

由 inf-sup 条件可得

$$\beta_h \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \le \sup_{\mathbf{w}_h\in\mathbf{W}_h} \frac{b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}_I - \mathbf{p}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}} = \sup_{\mathbf{w}_h\in\mathbf{W}_h} \left(\frac{b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}_I - \mathbf{p})}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}} + \frac{b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p} - \mathbf{p}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}} \right). \tag{3.17}$$

N接下来，我们分别对每一项进行估计。首先，我们注意到 $b^i(\cdot,\cdot)$ 的连续性 impli es

$$b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}_I - \mathbf{p}) = b(\mathbf{w}_h, \bar{\mathbf{p}}_I - \bar{\mathbf{p}}) \le \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}},$$

由此可得

$$\frac{|b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}_I - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}} \le \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}}. \tag{3.18}$$

接下来，由于 $(\mathbf{u},\mathbf{p})$ 和 $(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h)$ 分别是 (2.8) 和 (3.11) 的解，因此可得

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \tag{3.19}$$

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}_h) = F_h(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_h. \tag{3.20}$$

利用 $\mathbf{W}_h \subset \mathbf{W}$，我们可以对任意 $\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_h$ 检验方程 (3.19)，从而得到:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p}) = F(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_h. \tag{3.21}$$

将 (3.21) 和 (3.20) 相减，对于所有 $\mathbf{w}_h \in \mathbf{W}_h$，可得

$$b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p} - \mathbf{p}_h) = \langle F - F_h, \mathbf{w}_h\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} + \big(a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)\big) =: \mu_1(\mathbf{w}_h) + \mu_2(\mathbf{w}_h). \tag{3.22}$$

项 $\mu_1(\mathbf{w}_h)$ 可以很容易地估计为

$$|\mu_1(\mathbf{w}_h)| = |\langle F - F_h, \mathbf{w}_h\rangle|_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} \le \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega}. \tag{3.23}$$

对于项 $\mu_2(\mathbf{w}_h)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_2(\mathbf{w}_h) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - a^K(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \Big) \quad (\text{use } \pm\mathbf{u}_\pi \text{ and } (3.4)) \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(a_h^K(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_\pi, \mathbf{w}_h) + a^K(\mathbf{u}_\pi - \mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \Big) \quad (\text{use } (3.8)) \\
&\le 2\mu_{max}\big(\alpha_h^\star |\mathbf{w}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + |\mathbf{w}_h|_{1,\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \big) \\
&\le 2\mu_{max}\alpha_h^\star |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} + 2\mu_{max} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{u}_\pi$ 在每个 $K \in \mathcal{T}_h$ 上都是次数为 k 的分片多项式。因此

$$|\mu_2(\mathbf{w}_h)| \leq 2\mu_{max}\alpha_h^\star \, |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \, \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} + 2\mu_{max} \, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \, \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} \, . \tag{3.24}$$

然后，将 (3.23) 和 (3.24) 代入 (3.22)，可得

$$\frac{|b(\mathbf{w}_h, \mathbf{p} - \mathbf{p}_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} \leq \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} + 2\mu_{max}\alpha_h^\star \, |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + 2\mu_{max} \, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} \, . \tag{3.25}$$

将 (3.18) 和 (3.25) 代入 (3.17)，并应用三角不等式，可得

$$\begin{aligned}\beta_h \, \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q/H}} \leq \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} + 2\mu_{max} \, \alpha_h^\star \, |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \\ + 2\mu_{max} \, (\alpha_h^\star + 1) \, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q/H}} \, .\end{aligned}$$

定义 $\tilde{C}_p(h) := \max\{\beta_h^{-1}, 2\mu_{max}\beta_h^{-1} \, (\alpha_h^\star + 1)\}$，可得

$$\|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q/H}} \leq \tilde{C}_p(h)\big(\|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} + |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q/H}} \big). \tag{3.26}$$

最后，由 (3.16) 可得

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q/H}} \leq C_p(h)\Big(\|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} + \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q/H}} \Big),$$

~其中 $C_p(h) := \max\{1, C_p(h)\}$。 □

在继续估计位移场的误差之前，我们注意到，迹算子的连续性（见 [27]）意味着存在一个正常数 C_{Γ_C}，使得

$$\int_{\Gamma_C} \psi[\![v_n]\!] d\Gamma \leq C_{\Gamma_C} \, \|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'} \, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \text{for all } \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)' \text{ and } \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{3.27}$$

我们现在可以证明以下结果。

命题 *3.2.* 设 $(u, p) \in K \times Q$ 和 $(u_h, p_h) \in K_h \times Q_h$ 分别为连续问题和离散问题的解。则对于每个 $u_I \in K_h$、$p_I \in Q_h$，使得 $(p_I)_0 = p_0$，$F_h \in V_h'$，$u_\pi = (u_\pi^1, u_\pi^2)$ 使得 $u_{\pi|K} \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$，以及 $\psi_h \in L^2(\Gamma_C)$ 使得 $\psi_{h|e_l^c} \in \mathbb{P}_0(e_l^c)$ 对所有 $0 \leq l \leq l^\star - 1$ 均成立，有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{4}{\alpha_{\star,h}\alpha} \int_{\Gamma_C} \psi_h\big([\![u_{I,n}]\!] - [\![u_{h,n}]\!]\big) \, d\Gamma + C(h)\Big(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{\mathbf{V}}^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h}^2 + \\ + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q/H}}^2 + \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|\sigma_n - \psi_h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'}^2 \Big).\end{aligned}$$

令

$$C_1(h) := \frac{96}{\alpha_{\star,h}\alpha}\mu_{max}^2 \max\big\{(\alpha_h^\star)^2, 1\big\},$$

$$C_2(h) := \frac{1}{2}C_p(h)^2 \max\big\{5 + \frac{1}{\lambda_{min}} + \frac{6}{\alpha_{\star,h}\alpha}, 1 + \frac{5}{\lambda_{min}} + \frac{6}{\alpha_{\star,h}\alpha}(1 + \frac{1}{\lambda_{min}^2})\big\},$$

并回顾 (3.27)，常数 $C(h)$ 给定为

$$C(h) := \frac{8}{\alpha_{\star,h}\alpha} \max\big\{C_1(h), C_2(h), \frac{3}{\alpha_{\star,h}\alpha}, \frac{3C_{\Gamma_C}^2}{\alpha_{\star,h}\alpha}\big\}. \tag{3.28}$$

证明。令 $(\mathbf{u},\mathbf{p}) \in \mathbf{K} \times \mathbf{Q}$ 和 $(\mathbf{u}_h,\mathbf{p}_h) \in \mathbf{K}_h \times \mathbf{Q}_h$ 分别为连续问题和离散问题的解。令 $\mathbf{u}_I \in \mathbf{K}_h$，并设 $\boldsymbol{\delta}_h := \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_h$。最后，令 $\mathbf{u}_\pi$ 为

分片多项式函数，即对于所有 $K \in \mathcal{T}_h$，$\mathbf{u}_{\pi|K} \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$。因此，利用标准技术可得:

$$\begin{aligned}\alpha_{\star,h}\alpha \left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{1,\Omega}^2 &\leq a_h(\boldsymbol{\delta}_h,\boldsymbol{\delta}_h) = a_h(\mathbf{u}_I,\boldsymbol{\delta}_h) - a_h(\mathbf{u}_h,\boldsymbol{\delta}_h)\\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(a_h^K(\mathbf{u}_I-\mathbf{u}_\pi,\boldsymbol{\delta}_h) + a^K(\mathbf{u}_\pi-\mathbf{u},\boldsymbol{\delta}_h)\Big) + \Big(a(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta}_h) + b(\boldsymbol{\delta}_h,\mathbf{p}) - F(\boldsymbol{\delta}_h)\Big)\\ &+ \Big(b(\boldsymbol{\delta}_h,\mathbf{p}_h) - b(\boldsymbol{\delta}_h,\mathbf{p})\Big) + \Big(F(\boldsymbol{\delta}_h) - F_h(\boldsymbol{\delta}_h)\Big) =: R_1+R_2+R_3+R_4.\end{aligned} \tag{3.29}$$

现在，我们将分别估计 R_1，R_2，R_3和 R_4。

对 R_1 的估计。利用双线性型的局部连续性

$$R_1 \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(2\mu_K\alpha_{h_K}^\star \left|\mathbf{u}_I-\mathbf{u}_\pi\right|_{1,K}\left|\boldsymbol{\delta}_h\right|_{1,K} + 2\mu_K\left|\mathbf{u}_\pi-\mathbf{u}\right|_{1,K}\left|\boldsymbol{\delta}_h\right|_{1,K}\Big).$$

应用柯西-施瓦茨不等式和三角不等式，可得

$$\begin{aligned}R_1 &\leq 2\mu_{max}\alpha_h^\star \left|\mathbf{u}_I-\mathbf{u}_\pi\right|_{1,\Omega,h}\left|\boldsymbol{\delta}_h\right|_{1,\Omega} + 2\mu_{max}\left|\mathbf{u}_\pi-\mathbf{u}\right|_{1,\Omega,h}\left|\boldsymbol{\delta}_h\right|_{1,\Omega}\\ &\leq 4\mu_{max}\max\{\alpha_h^\star,1\}\left|\boldsymbol{\delta}_h\right|_{1,\Omega}\big(\left|\mathbf{u}_I-\mathbf{u}\right|_{1,\Omega} + \left|\mathbf{u}_\pi-\mathbf{u}\right|_{1,\Omega,h}\big).\end{aligned}$$

最后，由杨氏不等式可得

$$R_1 \leq \frac{1}{12}\alpha_{\star,h}\alpha\left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{\mathbf{V}}^2 + C_1(h)(\left\|\mathbf{u}_I-\mathbf{u}\right\|_{\mathbf{V}}^2 + \left|\mathbf{u}_\pi-\mathbf{u}\right|_{1,\Omega,h}^2), \tag{3.30}$$

其中

$$C_1(h) := \frac{96}{\alpha_{\star,h}\alpha}\mu_{max}^2\max\left\{(\alpha_h^\star)^2,1\right\}. \tag{3.31}$$

对 R_2 的估计。（该项的处理沿用 [10] 和 [9] 中详述的方法。）容易验证，R_2 可写为

$$R_2 = a(\mathbf{u},\boldsymbol{\delta}_h) + b(\boldsymbol{\delta}_h,\mathbf{p}) - F(\boldsymbol{\delta}_h) = \int_{\Gamma_C}\sigma_n\big(\llbracket u_{I,n}\rrbracket - \llbracket u_{h,n}\rrbracket\big)d\Gamma.$$

设 $\psi_h \in L^2(\Gamma_C)$，使得对于所有 $0\leq l\leq l^\star-1$，都有 $\psi_{h|e_l^c}\in\mathbb{P}_0(e_l^c)$。通过加上并减去 ψ_h，得到:

$$R_2 = \int_{\Gamma_C}(\sigma_n-\psi_h)\big(\llbracket u_{I,n}\rrbracket - \llbracket u_{h,n}\rrbracket\big)d\Gamma + \int_{\Gamma_C}\psi_h\big(\llbracket u_{I,n}\rrbracket - \llbracket u_{h,n}\rrbracket\big)d\Gamma.$$

现在，我们来估计第一项。由估计 (3.27) 和杨氏不等式，得

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_C}(\sigma_n-\psi_h)\big(\llbracket u_{I,n}\rrbracket - \llbracket u_{h,n}\rrbracket\big)d\Gamma &\leq C_{\Gamma_C}\left\|\sigma_n-\psi_h\right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'}\left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{1,\Omega}\\ &\leq \frac{1}{12}\alpha_{\star,h}\alpha\left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{1,\Omega}^2 + \frac{3C_{\Gamma_C}^2}{\alpha_{\star,h}\alpha}\left\|\sigma_n-\psi_h\right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'}^2.\end{aligned}$$

Thus

$$R_2 \leq \frac{1}{12}\alpha_{\star,h}\alpha\left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{3C_{\Gamma_C}^2}{\alpha_{\star,h}\alpha}\left\|\sigma_n-\psi_h\right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'}^2 + \int_{\Gamma_C}\psi_h\big(\llbracket u_{I,n}\rrbracket - \llbracket u_{h,n}\rrbracket\big)d\Gamma. \tag{3.32}$$

对 R_3 的估计。对于任意 $\mathbf{p}_I\in\mathbf{Q}_h$，满足 $(\mathbf{p}_I)_0 = \mathbf{p}_0$,，我们有（加上并减去$\mathbf{p}_I$ 和$\mathbf{u}$，并使用 (3.11) 和 (2.8)）

$R_3 = b(\boldsymbol{\delta}_h,\ \mathbf{p}_h) - b(\boldsymbol{\delta}_h,\ \mathbf{p}) = \big(b(\mathbf{u}_I-\mathbf{u},\ \mathbf{p}_h-\mathbf{p}_I) - b(\boldsymbol{\delta}_h,\ \mathbf{p}-\mathbf{p}_I)\big) - c_\lambda(\mathbf{p}_h-\mathbf{p},\ \mathbf{p}_h-\mathbf{p}_I) =: I+II$

我们分别对 I 和 II 进行界定。对于 I，我们很容易得到

$$I = b(\mathbf{u}_I-\mathbf{u},\mathbf{p}_h-\mathbf{p}_I) - b(\boldsymbol{\delta}_h,\mathbf{p}-\mathbf{p}_I) \leq \left\|\mathbf{u}_I-\mathbf{u}\right\|_{1,\Omega}\left\|\mathbf{p}_h-\mathbf{p}_I\right\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \left\|\boldsymbol{\delta}_h\right\|_{1,\Omega}\left\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_I\right\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}}.$$

应用估计式 (3.26) 和三角不等式，可得

$$\begin{aligned} I \leq \tilde{C}_p(h)\big(&\|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} + \|\boldsymbol{\delta}_h\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{1,\Omega} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \\ &+ \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}}\big) \|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\delta}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{p}_I - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} . \end{aligned} \tag{3.33}$$

对于 II，我们得到（加上并减去 $\mathbf{p}$，并回顾（$\mathbf{p}_I$）$_0 = \mathbf{p}_0$，$c_\lambda(\cdot,\ \cdot)$ 的定义以及λ_{min} = 最小值（λ^1, λ^2））

$$\begin{aligned} II &= -c_\lambda(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}, \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_I) = -c_\lambda(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}, \mathbf{p}_h - \mathbf{p}) - c_\lambda(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_I) \\ &\leq -c_\lambda(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_I) = -c_\lambda(\bar{\mathbf{p}}_h - \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}_I) \leq \frac{1}{\lambda_{min}} \|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} . \end{aligned}$$

利用命题 3.1 和三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} II \leq \frac{1}{\lambda_{min}} C_p(h)\big(&\|\boldsymbol{\delta}_h\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{1,\Omega} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,\Omega,h} + \\ &+ \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'}\big) \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} . \end{aligned} \tag{3.34}$$

因此，结合（3.33）和（3.34），适当地应用杨氏不等式，并注意到$\tilde{C}_p(h) \geq \max\{1, C_p(h)\}$，我们有

$$R_3 \leq \frac{3}{12}\alpha_{\star,h}\alpha \|\boldsymbol{\delta}_h\|^2_{\mathbf{V}} + C_2(h)\big(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|^2_{\mathbf{V}} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|^2_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|^2_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|F - F_h\|^2_{\mathbf{V}'}\big), \tag{3.35}$$

其中

$$C_2(h) := \frac{1}{2} C_p(h)^2 \max\big\{5 + \frac{1}{\lambda_{min}} + \frac{6}{\alpha_{\star,h}\alpha}, 1 + \frac{5}{\lambda_{min}} + \frac{6}{\alpha_{\star,h}\alpha}(1 + \frac{1}{\lambda^2_{min}})\big\}. \tag{3.36}$$

对 R_4 的估计。由连续性，我们有

$$R_4 = F(\boldsymbol{\delta}_h) - F_h(\boldsymbol{\delta}_h) \leq \|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} \|\boldsymbol{\delta}_h\|_{\mathbf{V}} .$$

因此，应用杨氏不等式可得

$$R_4 \leq \frac{1}{12}\alpha_{\star,h}\alpha \|\boldsymbol{\delta}_h\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{3}{\alpha_{\star,h}\alpha} \|F - F_h\|^2_{\mathbf{V}'} . \tag{3.37}$$

结合式 (3.30)、(3.32)、(3.35) 和 (3.37)，由式 (3.29) 可推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_{\star,h}\alpha \|\boldsymbol{\delta}_h\|^2_{\mathbf{V}} \leq C_3(h)\big(&\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|^2_{\mathbf{V}} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|^2_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|^2_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|F - F_h\|^2_{\mathbf{V}'} \\ &+ \|\sigma_n - \psi_h\|^2_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_C)'}\big) + \int_{\Gamma_C} \psi_h\big([\![u_{I,n}]\!] - [\![u_{h,n}]\!]\big) d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.38}$$

其中

$$C_3(h) := 2\max\big\{C_1(h), C_2(h), \frac{3}{\alpha_{\star,h}\alpha}, \frac{3C^2_{\Gamma_C}}{\alpha_{\star,h}\alpha}\big\}. \tag{3.39}$$

由式 (3.38) 和三角不等式，结论得证。 □

最后，结合命题 3.1 和命题 3.2，可得接触问题的以下收敛性结果。

定理 3.1. 设 $(\mathbf{u},p) \in K \times Q$ 和 $(\mathbf{u}_h, p_h) \in K_h \times Q_h$ 分别为连续问题和离散问题的解。那么，对于每个满足 $(p^i_l)_0 = p^i_0$，$F_h \in V'_h$ 的 $\mathbf{u}_I \in K_h$，$p_I \in Q_h$，满足 $\mathbf{u}^i_{\pi|K} \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$ 的 $\mathbf{u}_\pi = (\mathbf{u}^1_\pi, \mathbf{u}^2_\pi)$，以及对于所有 $0 \leq l \leq l^\star - 1$ 满足 $\psi_{h|e^c_l} \in \mathbb{P}_0(e^c_l)$ 的 $\psi_h \in L^2(\Gamma_C)$，均有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|^2_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \leq C_{fin}(h)\Big(&\int_{\Gamma_C} \psi_h\big([\![u_{I,n}]\!] - [\![u_{h,n}]\!]\big)\, d\Gamma + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|^2_{\mathbf{V}} + \\ &+ |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|^2_{1,\Omega,h} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_I\|^2_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} + \|F - F_h\|^2_{\mathbf{V}'} + \|\sigma_n - \psi_h\|^2_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_C)'}\Big). \end{aligned}$$

常数 $C_{fin}(h)$ 定义为

$$C_{fin}(h) := 2\max\left\{8C_p(h)^2, \frac{4}{\alpha_{\star,h}\alpha}(1+8C_p(h)^2), (1+8C_p(h)^2)C(h)\right\}, \tag{3.40}$$

其中 $C_p(h)$ 和 $C(h)$ 分别定义如（*3.15*）和（*3.28*）所示。

注 3.2. 定理 3.1 中的常数 $C_{fin}(h)$取决于拉梅系数。不过，由于它仅取决于 $1/\lambda_{min}$，因此即使不可压缩参数 λ^i 增大，该常数仍保持有界。因此，近不可压缩材料不会出现体积锁定效应。

注 3.3. 给定材料性质后，定理 3.1 中的量 $C_{fin}(h)$通过以下量取决于离散格式：$\alpha_{\star,h}$ （见（3.5）和（3.10））、 $\alpha_h^\star$ （见（3.5）和（3.13））以及 β_h （见（3.14））。

4 虚拟元逼近的两个示例

本节将详细介绍空间$\mathbf{V}_h$ 和$\mathbf{Q}_h$的几种具体选取方式，以及合适的凸子集$\mathbf{K}_h$ 和离散形式。我们令

$$m_1(x,y) := 1\ , \quad m_2(x,y) := \frac{x-x_K}{h_K}\ , \quad m_3(x,y) := \frac{y-y_K}{h_K}, \tag{4.1}$$

其中（x_K， y_K）表示单元 K 的质心。

4.1 一阶单元（$k=1$）：局部空间

在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$ 上，考虑以下类 Stokes 局部虚单元空间。首先，考虑如下问题：求 $\mathbf{v}$ 和 s，使得

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} - \nabla s = \mathbf{0} \quad \text{in } K, \\ \text{div } \mathbf{v} \in \mathbb{P}_0(K), \\ \mathbf{v}_{|\partial K} \in [C^0(\partial K)]^2, \quad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}_e)_{|e} \in \mathbb{P}_1(e), \quad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_e)_{|e} \in \mathbb{P}_2(e) \text{ for all } e \in \partial K, \end{cases} \tag{4.2}$$

上文中的 $\mathbf{t}_e$ 和 $\mathbf{n}_e$ 分别为边 e 的切向量和法向量，且所有方程均在分布意义下成立。于是，我们定义

$$\mathbf{V}_{h|K}^i := \{\mathbf{v} \in [H^1(K)]^2 : \mathbf{v} \text{ satisfies (4.2) for some } s \in L^2(K)\ \}.$$

给定 $\mathbf{v}\ \in \mathbf{V}_{h|K}^i$，相应的局部自由度集合 Ξ 由下式给出（见图 1a ）:

- 多边形 K 各顶点处 $\mathbf{v}$ 的向量值 $\Xi_v(\mathbf{v})$,
- 每条边的中点处 $e \in \partial K$的$\mathbf{v}$ $\Xi_e(\mathbf{v})$ 值$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$。

此外，在每个 $K \in \mathcal{T}_h^i$上，我们考虑局部多项式空间

$$Q_{h|K}^i := \mathbb{P}_0(K),$$

其局部自由度 D_Q 由下式给出

$$D_Q(q) := \frac{1}{|K|}\int_K q\ dx.$$

4.2 二次元（$k=2$）：局部空间

在每个单元 $K \in \mathcal{T}_h^i$ 上，我们考虑以下类 Stokes 局部虚单元空间（见 [7]）。首先，考虑如下问题：求 $\mathbf{v}$ 和 s，使得

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} - \nabla s = \mathbf{0} \quad \text{in } K, \\ \text{div } \mathbf{v} \in \mathbb{P}_1(K), \\ \mathbf{v}_{|\partial K} \in [C^0(\partial K)]^2, \quad \mathbf{v}_{|e} \in [\mathbb{P}_2(K)]^2 \text{ for all } e \in \partial K, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中所有方程均在分布意义下理解。然后，我们定义

$$\mathbf{V}_{h|K}^i := \{\mathbf{v} \in [H^1(K)]^2 : \mathbf{v} \text{ satisfies (4.3) for some } s \in L^2(K)\ \}.$$

给定$\mathbf{v}\ \in\mathbf{V}_{h|K}^i$，相应的局部自由度集合 Ξ （分为边界自由度 Ξ^∂ 和内部自由度 Ξ°）如下所示（见图 1b）：

- 多边形 K各顶点处$\mathbf{v}$ 的向量值 Ξ_v^∂（$\mathbf{v}$），
- 每条边 $e \in \partial K$中点处$\mathbf{v}$ 的向量值 Ξ_e^∂（$\mathbf{v}$），
- div$\mathbf{v}$ 与 $\mathbb{P}_1(K)$的缩放多项式基$\{m_j\}_{j=2,3}$ 对应的内部矩/$\mathbb{R}$，即

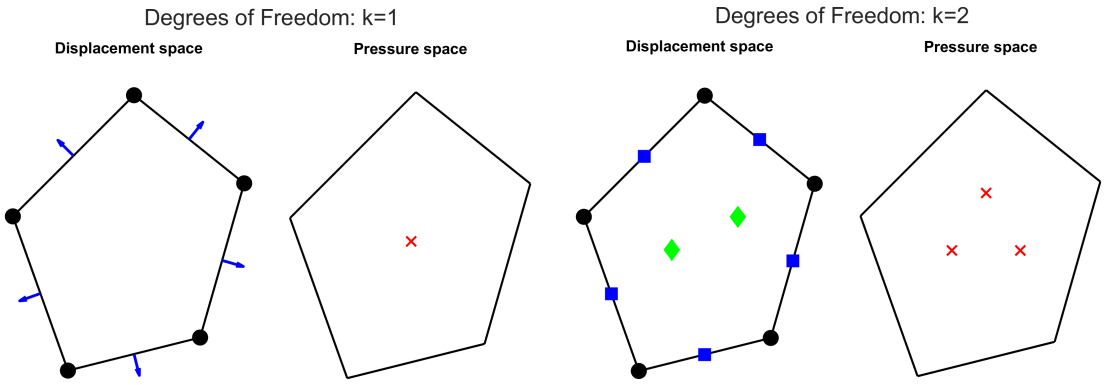
$$\Xi_j^\circ(\mathbf{v}) := \frac{h_K}{|K|}\int_K (\text{div } \mathbf{v}) m_j\ dx \quad j = 2, 3. \tag{4.4}$$

此外，在每个 $K \in \mathcal{T}_h^i$上，我们考虑局部多项式空间

$$Q_{h|K}^i := \mathbb{P}_1(K),$$

其局部自由度集合 D_Q 由与 $\mathbb{P}_1(K)$的缩放多项式基$\{m_j\}_{j=1,2,3}$ 对应的内部矩给出，即

$$D_{Q,j}(q) := \frac{1}{|K|}\int_K q\, m_j\ dx \quad j = 1, 2, 3.$$



(a) 我们用黑点表示 Ξ_v ，用蓝色箭头表示，用红色叉号表示 D_Q ，它们位于单元内部。

(b) 我们用黑点表示 Ξ_v^∂，用 Ξ_e^∂ 表示蓝色方块，用内部绿色菱形表示 Ξ_j° 并用内部叉号表示$D_{Q,\ j}$。

图 1： $k = 1$ 和 $k = 2$ 的自由度。

4.3 空间与形式

对于第 4.1 节和第 4.2 节中的单元，全局虚拟元空间（对于 $i = 1,\ 2$）为

$$\mathbf{V}_h^i := \{\mathbf{v}_h^i \in \mathbf{V}^i : \mathbf{v}_{h|K}^i \in \mathbf{V}_{h|K}^i \quad \text{for all } K \in \mathcal{T}_h^i\},$$

and

$$Q_h^i := \{q_h^i \in L^2(\Omega^i) : q_{h|K}^i \in Q_{h|K}^i \quad \text{for all } K \in \mathcal{T}_h^i\},$$

并具有显而易见的相关自由度集合。此外，我们设

$$\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h^1 \times \mathbf{V}_h^2, \qquad \mathbf{Q}_h := Q_h^1 \times Q_h^2. \tag{4.5}$$

我们指出，根据局部虚拟元空间的定义，可以立即得出

$$\text{div } \mathbf{V}_h^i \subseteq Q_h^i.$$

局部离散双线性形式 $a_h^K(\cdot,\ \cdot)$ 的构造遵循第3节中的抽象构造。不过，这里我们具体给出了局部能量投影和稳定化双线性形式的选取。能量投影算子 $\Pi^{\varepsilon,\ K}_{2}$ 按照 (3.6) 定义。为了确定投影中的刚体运动，我们需要为 $j=1,\ 2,\ 3$ 指定算子 P_j^K。注意到单元 K 上的刚体运动空间 $RM(K)$ 可以写为（参见 (4.1)）

$$RM(K)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}m_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\m_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-m_3\\m_2\end{pmatrix}\right\},$$

我们定义 $\forall \mathbf{v}\ \in[H^1(K)]^2$

$$P_1^K(\mathbf{v}):=\frac{1}{|\partial K|}\int_{\partial K}\mathbf{v}\cdot\begin{pmatrix}m_1\\0\end{pmatrix}d\Gamma,\quad P_2^K(\mathbf{v}):=\frac{1}{|\partial K|}\int_{\partial K}\mathbf{v}\cdot\begin{pmatrix}0\\m_1\end{pmatrix}d\Gamma,$$

$$P_3^K(\mathbf{v}):=\frac{1}{|\partial K|}\int_{\partial K}\mathbf{v}\cdot\begin{pmatrix}-m_3\\m_2\end{pmatrix}d\Gamma.$$

局部稳定化项 $S^K(\cdot,\cdot)$，参见（3.7），选为经典的 *DoFi-DoFi* 双线性形式（见 [5]），即:

$$S^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{w}_h)=\sum_j \Xi_j(\mathbf{v}_h)\Xi_j(\mathbf{w}_h)\quad\forall\mathbf{v}_h,\mathbf{w}_h\in\mathbf{V}_{h|K}. \tag{4.6}$$

闭凸子集 $\mathbf{K}_h\ \subset\mathbf{V}_h$ 的选取受到 [10]中所作选择的启发。事实上，通过在剖分的顶点处强制法向离散间隙 $[\![u_{h,n}]\!]-g_0$ 在 Γ_C 上为非正，并强制其沿接触边的积分为非正，从而施加离散接触条件。更准确地说，$\mathbf{K}_h$ 给出为

$$\mathbf{K}_h:=\{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h:([\![v_{h,n}]\!]-g_0)(\mathbf{x}_l^c)\le 0\quad\forall l=0,\cdots,l^\star,\int_{e_l^c}([\![v_{h,n}]\!]-g_0)\,d\Gamma\le 0\quad\forall l=0,\cdots,l^\star-1\}. \tag{4.7}$$

我们注意到，选择（4.7）适用于第 4.1 节和第 4.2 节中的线性单元和二次单元。此外，子空间 $\mathbf{W}_h\subset\mathbf{K}_h\cap\mathbf{W}$ 选为

$$\mathbf{W}_h=\mathbf{W}_h^1\times\mathbf{W}_h^2\quad\text{ with }\quad\mathbf{W}_h^i:=\{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h^i:\mathbf{v}_{h|\Gamma_C}=\mathbf{0}\}\text{ for }i=1,2. \tag{4.8}$$

该子空间满足离散 inf-sup 条件（3.14）。证明推迟至第 5.1.2 节。最后，我们给出右端项的一个可计算近似 $F_h\ \in\mathbf{V}_h'$。对于任意$K\in\mathcal{T}_h$，令 $\mathbf{\Pi}^{0}_{,0}{}^{K}:[L^2(K)]^2\to[\mathbb{P}_0(K)]^2$ 为在常数上的 L^2-投影。于是，我们定义

$$\mathbf{f}_{h|K}^i:=\mathbf{\Pi}_0^{0,K}\mathbf{f}^i\quad\forall K\in\mathcal{T}_h^i. \tag{4.9}$$

我们设

$$\langle F_h,\mathbf{v}_h\rangle:=\sum_{i=1}^2\langle\mathbf{f}_h^i,\mathbf{v}_h^i\rangle=\sum_{i=1}^2\sum_{K\in\mathcal{T}_h^i}\int_K\mathbf{f}_h^i\cdot\mathbf{v}_h^i\,dx. \tag{4.10}$$

值得注意的是，$\langle F_h,\ \mathbf{v}_h\rangle$ 可通过自由度显式计算（详情请见 [7]）。

5 二次虚拟单元的收敛分析

本节将针对第 4.2 节所述的二次单元进行收敛性分析。对于一阶单元，见第 4.1 节；采用类似且略为简化的论证，也可得到相似的结果。分析将利用第 3.4 节的抽象框架。

5.1 稳定性常数的估计

首先，我们证明在多边形剖分满足假设 (A1) - (A2) 时，离散 inf-sup 条件 (3.14) 和稳定性 (3.5) 成立。正如我们所见，这两项性质对于离散问题的分析至关重要。我们特别关注常数 $\alpha_{\star,h}$、$\alpha_h^\star$ 和 β_h 的行为，因为它们有助于确定定理 3.1 中的收敛阶（见注 3.3）。

5.1.1 连续性常数和强制性常数 $\alpha_h^\star$ 和$\alpha_{\star,h}$的估计

我们首先证明以下引理。

引理 5.1。假设假设 *(A1)* 成立，并固定 $M>0$。那么，对于任意 $M\geq\varepsilon>0$ 以及任意 $v\in H^{1/2+\varepsilon}(\partial K)$，有

$$||v||_{\infty,\partial K}\lesssim\varepsilon^{-1/2}||v||_{1/2+\varepsilon,\partial K}. \tag{5.1}$$

证明。由假设 (A1)，只需证明 $S^1=\partial B(0,1)$ 上的估计 (5.1) $\subset\mathbb{C}$（即：我们将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$视为相同）。接着，给定 $v\in H^{1/2+\varepsilon}(S^1)$，我们考虑傅里叶展开$v(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_n e^{inx}$，其中 $\widehat{v}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\xi)e^{-in\xi}d\xi$。由于 $v\in H^{1/2+\varepsilon}(S^1)$，因此有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^{1/2+\varepsilon}|\widehat{v}_n|^2\lesssim||v||^2_{1/2+\varepsilon,S^1}<+\infty\quad\text{ and }\quad v\in C^0(S^1). \tag{5.2}$$

因此，对于每个 $x\in S^1$，令 $x=e^{i\varphi}$ 且 $\varphi\in[0,2\pi)$：

$$\begin{aligned}|v(x)|=|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_n e^{in\varphi}|&\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{v}_n|=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+n^2)^{1/4+\varepsilon/2}}(1+n^2)^{1/4+\varepsilon/2}|\widehat{v}_n|\\&\leq\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+n^2)^{1/2+\varepsilon}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^{1/2+\varepsilon}|\widehat{v}_n|^2\right)^{1/2}\\&\lesssim\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+n^2)^{1/2+\varepsilon}}\right)^{1/2}||v||_{1/2+\varepsilon,S^1}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

由于对于 $M\geq\varepsilon>0$，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+n^2)^{1/2+\varepsilon}}\lesssim\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^{1/2+\varepsilon}}dt\lesssim\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{1+2\varepsilon}}dt=\frac{1}{2\varepsilon},$$

由 (5.3) 可得

$$||v||_{\infty,S^1}\lesssim\varepsilon^{-1/2}||v||_{1/2+\varepsilon,S^1}. \tag{5.4}$$

□

下面的结果涉及 DoFi-DoFi 稳定化项的稳定性。

命题 5.1. 设假设 *(A1)* 和 *(A2)* 成立，则

$$S^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h)\lesssim C(h)\,a^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h)\quad\forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_{h|K}\ s.t.\ \Pi_2^{\varepsilon,K}\mathbf{v}_h=\mathbf{0}, \tag{5.5}$$

$$a^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h)\lesssim C(h)\,S^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h)\quad\forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_{h|K}, \tag{5.6}$$

其中

$$C(h):=\max_{K\in\mathcal{T}_h}\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}}),$$

其中 $h_{m(K)}$ 定义于(3.2)。

如果更强的假设 *(A3)* 成立，那么显然 $C(h)\simeq1$。

证明。 我们省略估计 (5.6) 的证明，因为其中使用的论证与 [6] 中的引理 6.6 和命题 4.3 类似。因此，我们考虑估计 (5.5)，并选取 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}^{h|K}$ 使得$\Pi^{\varepsilon}_{\cdot,2}{}^{K}\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$。利用引理 5.1 的向量形式以及一维多项式的逆估计，对于 $\varepsilon > 0$ 我们得到

$$||\mathbf{v}_h||_{\infty,\partial K} \lesssim \varepsilon^{-1/2}||\mathbf{v}_h||_{1/2+\varepsilon,\partial K} \lesssim \varepsilon^{-1/2}h_{m(K)}^{-\varepsilon}||\mathbf{v}_h||_{1/2,\partial K}. \tag{5.7}$$

取 $\varepsilon = \left[\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\right]^{-1}$，由 (5.7) 可得

$$||\mathbf{v}_h||_{\infty,\partial K} \lesssim \left[\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\right]^{1/2}||\mathbf{v}_h||_{1/2,\partial K}. \tag{5.8}$$

现在注意到（另见 (4.4) 和 (4.6)）：

$$S^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \lesssim ||\mathbf{v}_h||^2_{\infty,\partial K} + ||\operatorname{div}\mathbf{v}_h||^2_{0,K} \lesssim ||\mathbf{v}_h||^2_{\infty,\partial K} + |\mathbf{v}_h|^2_{1,K}. \tag{5.9}$$

由于 $\Pi^{\varepsilon}_{\cdot,2}{}^{K}\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$，函数 $\mathbf{v}_h$ 在边界 ∂K 上的均值为零。因此，结合迹估计可得：

$$|\mathbf{v}_h|^2_{1,K} \lesssim a^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \qquad \text{and} \qquad ||\mathbf{v}_h||^2_{1/2,\partial K} \lesssim |\mathbf{v}_h|^2_{1/2,\partial K} \lesssim |\mathbf{v}_h|^2_{1,K} \lesssim a^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h). \tag{5.10}$$

利用 (5.8) 和 (5.10)，由估计 (5.9) 可得

$$S^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \lesssim \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})a^K(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h). \tag{5.11}$$

于是立即得到估计 (5.5)。 □

下一个结果直接得出，它揭示了稳定性常数的行为。

推论 5.1.1. 假设 *(A1)* 和 *(A2)* 成立。则

$$\alpha_h^\star \simeq \max_{K\in\mathcal{T}_h}\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}}), \qquad \alpha_{\star,h} \simeq \frac{1}{\max_{K\in\mathcal{T}_h}\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})},$$

其中隐藏常数与网格尺寸无关。若更强的假设 *(A3)* 成立，则显然 $1 \lesssim \alpha_{\star,\,h} \lesssim \alpha_h^\star \lesssim 1$。

5.1.2 评估 inf-sup 常数 β_h

引入以下有限维子空间$\mathbf{V}^L_{h|K} \subset \mathbf{V}^{h|K}$。首先，对每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$，考虑如下问题：求$\mathbf{v}$ 和 s，使得

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} - \nabla s = \mathbf{0} \quad \text{in } K, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} \in \mathbb{P}_0(K), \\ \mathbf{v}_{|\partial K} \in [C^0(\partial K)]^2, \quad \mathbf{v}_{|e} \in [\mathbb{P}_2(e)]^2 \text{ for all } e \in \partial K, \end{cases} \tag{5.12}$$

所有方程均在分布意义下理解。然后，我们定义

$$\mathbf{V}^L_{h|K} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{h|K} : \mathbf{v} \text{ satisfies (5.12) for some } s \in L^2(K)\ \}, \tag{5.13}$$

也就是说，$\mathbf{V}^L_{h|K}$ 是$\mathbf{V}^{h|K}$ 的位移子空间，其中散度为常数而非线性函数。我们注意到，由于相容条件，常数散度完全由边界数据确定。以下引理是问题 (5.12) 适定性和网格假设 (A1) 的推论。

引理 5.2。 在假设 *(A1)* 下，对于任意 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^L_{h|K}$，均有

$$\|\mathbf{v}\|_{1,K} \lesssim \|\mathbf{v}\|_{1/2,\partial K} \quad \textit{and} \quad |\mathbf{v}|_{1,K} \lesssim |\mathbf{v}|_{1/2,\partial K},$$

其中隐常数与 K 无关。

我们还引入了全局 H^1 保形空间

$$\mathbf{W}_h^L := \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h : \mathbf{v}_{|K} \in \mathbf{V}_{h|K}^L \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset \mathbf{W}_h. \tag{5.14}$$

由于（2.14）成立，我们使用 Fortin 技巧证明离散 inf-sup 条件（见 [11]）。Fortin 算子的构造可分为以下三个不同步骤:

1. 构造 $\bar{\Pi}$: $\mathbf{W} \to \mathbf{W}_h^L$，使得

$$\begin{cases} b(\bar{\Pi}\mathbf{v} - \mathbf{v}, \bar{q}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},\ \forall \bar{q}_h \text{ piecewise constant in } \mathcal{T}_h, \\ \left\|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \le C_{\bar{\Pi}}(h) \left\|\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \end{cases}$$

2. 构造 $\widetilde{\Pi}$: $\mathbf{W} \to \mathbf{W}_h$，使得

$$\begin{cases} b(\widetilde{\Pi}\mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v} - \bar{\Pi}\mathbf{v}, q_h) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \forall q_h \in Q_h, \\ \left\|\widetilde{\Pi}\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \le C \left\|\mathbf{v} - \bar{\Pi}\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \end{cases}$$

3. 构造 Fortin 算子 Π： $\mathbf{W} \to \mathbf{W}_h$，定义为

$$\Pi\mathbf{v} := (\bar{\Pi} + \widetilde{\Pi})\mathbf{v}.$$

这里我们仅详细介绍第一步。关于第二步的详细内容，请参见 [7]。

算子 Π 的构造需要引入额外的记号。回顾一下，$\mathcal{T}_h$ 是通过将 $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ 的两个网格 $\mathcal{T}_h^1$和 $\mathcal{T}_h^2$分别粘合而得到的多边形分解，其中 Ω^1 和 Ω^2, 分别对应。现在，我们引入该多边形分解 $\mathcal{T}_h$的一个拟一致子三角剖分，记为 $\mathcal{T}_{h_m}$，其网格尺寸为 h_m。我们还将$\mathbf{S}_{h_m}^{1\ 0}$,</style}定义为三角剖分 $\mathcal{T}_{h_m}$上的线性有限元空间，即

$$\mathbf{S}_{h_m}^{1,0} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{W} \cap [C^0(\overline{\Omega})]^2 : \mathbf{v}_{|T} \in [\mathbb{P}_1(T)]^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_{h_m}\}.$$

下面介绍以下算子:

- 最低阶 Scott-Zhang 插值算子（例如参见 [30] 或 [12], ），相对于子三角剖分 $\mathcal{T}_{h_m}$

$$\pi_{SZ} : \mathbf{W} \to \mathbf{S}_{h_m}^{1,0}.$$

- 相对于多边形网格 $\mathcal{T}_h$ 的线性 Lagrange 虚单元插值算子

$$\pi_L : \mathbf{W} \cap [C^0(\overline{\Omega})]^2 \to \mathbf{W}_h^L.$$

- “边泡”算子

$$\Pi_b : \mathbf{W} \to \mathbf{W}_h^L. \tag{5.15}$$

该算子通过拼接局部贡献 $\Pi_{b,\ K}$ 定义，即对于所有 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$，$(\Pi_b\mathbf{w})_{|K} = \Pi_{b,\ K}\mathbf{w}_{|K}$。对于 $\mathbf{v} \in [H^1(K)]^2$, $\Pi_{b,\ K}\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{h|K}^L$ 由以下要求确定（参见 (5.12) 和 (5.13)）：

$$\begin{cases} \Pi_{b,K}\mathbf{v}\ (\mathcal{M}_e) = \frac{3}{2}\frac{1}{|e|}\int_e \mathbf{v}\ d\Gamma, \quad \forall \text{ edge } e \text{ of } K, \text{ with midpoint } \mathcal{M}_e, \\ \Pi_{b,K}\mathbf{v}\ (\mathcal{V}) = \mathbf{0} \quad \forall \text{ vertex } \mathcal{V} \text{ of } K. \end{cases} \tag{5.16}$$

我们指出，上述要求意味着，对于所有 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ 以及所有边 e，$\int_e \mathbf{w} = \int_e \Pi_b\mathbf{w}$。

现在可以引入算子 Π。我们定义

$$\bar{\Pi}\mathbf{v} := \pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v} + \Pi_b(I - \pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \tag{5.17}$$

注意到，$\bar{\Pi}$ 是定义良好的，并且对于所有$\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h^L$，都有$\mathbf{v} \in \mathbf{W}$。

以下两个引理有助于研究算子 Π 的性质。

引理 5.3. 设 Π_b 如 (5.15) 和 (5.16) 中定义。假设满足 *(A1)* 和 *(A2)*，则有

$$\begin{cases} \|\Pi_b \mathbf{v}\|_{H_{00}^{1/2}(e)} \lesssim h_e^{-1/2} \|\mathbf{v}\|_{0,e} \quad \forall e \in \partial K, \\ \|\Pi_b \mathbf{v}\|_{1/2,\partial K} \lesssim \sum_{e\in\partial K} h_e^{-1/2} \|\mathbf{v}\|_{0,e}, \end{cases} \tag{5.18}$$

其中隐藏常数与网格尺寸无关。

证明。 由标准的一维逆估计和 (5.16) 可得:

$$\|\Pi_b \mathbf{v}\|_{H_{00}^{1/2}(e)} \lesssim h_e^{-1/2} \|\Pi_b \mathbf{v}\|_{0,e} \lesssim h_e^{-1/2} \|\mathbf{v}\|_{0,e}, \tag{5.19}$$

i. 即 (5.18) 中的第一个估计。现在，令 $\Pi_b \mathbf{v} = \sum_{e\in\partial K} (\Pi_b \mathbf{v}) \chi_e$，其中 $\chi_e : \partial K \to \mathbb{R}$ d表示边 e 的特征函数。由假设 (A1)，有

$$\|\Pi_b \mathbf{v}\|_{H_{00}^{1/2}(e)} \simeq \|\Pi_b(\mathbf{v})\chi_e\|_{1/2,\partial K}.$$

因此，由假设 (A2) 和不等式 (5.19) 可得

$$\|\Pi_b \mathbf{v}\|_{1/2,\partial K} = \left\| \sum_{e\in\partial K} (\Pi_b \mathbf{v})\chi_e \right\|_{1/2,\partial K} \leq \sum_{e\in\partial K} \|(\Pi_b \mathbf{v})\chi_e\|_{1/2,\partial K} \lesssim \sum_{e\in\partial K} h_e^{-1/2} \|\mathbf{v}\|_{0,e}, \tag{5.20}$$

即 (5.18) 中的第二个估计。 □

给定 $\omega \subset \mathbb{R}^2$，我们将由三角形组成的 ω 的“菱形”记为 D_ω，即

$$D_\omega := \operatorname{int}\Big(\bigcup \{ \bar{T}' \in \mathcal{T}_{h_m} : \bar{T}' \cap \bar{\omega} \neq \emptyset \} \Big).$$

引理 5.4。 设 $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$，并考虑 $\pi_{SZ}\mathbf{v} \in \mathbf{S}^{1\,0}_{h_m}$,。设 $T \in \mathcal{T}_{h_m}$ 和 $l \in \partial T$ 是其一条边，则有

$$\|(I - \pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,l} \lesssim h_m^{1/2} |\mathbf{v}|_{1,D_T}.$$

证明。 由缩放迹不等式及三角剖分 $\mathcal{T}_{h_m}$ 的拟一致性，可得

$$\|(I - \pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,l} \lesssim h_m^{-1/2} \|(I - \pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,T} + h_m^{1/2} |(I - \pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1,T}.$$

由 Scott-Zhang 算子的逼近性质和稳定性，可得

$$\|(I - \pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,l} \lesssim h_m^{-1/2} h_m |\mathbf{v}|_{1,D_T} + h_m^{1/2} |\mathbf{v}|_{1,D_T} \lesssim h_m^{1/2} |\mathbf{v}|_{1,D_T}.$$

□

现在我们可以证明以下命题。

命题 5.2。 在假设 *(A1)* 和 *(A2)* 下，算子 $\bar{\Pi} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}_h^L$ 满足

$$\begin{cases} b(\bar{\Pi}\mathbf{v} - \mathbf{v}, \bar{q}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},\ \forall \bar{q}_h \text{ piecewise constant in } \mathcal{T}_h, \\ \left\|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \lesssim C_{\bar{\Pi}}(h) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \end{cases}$$

其中 $C_{\bar{\Pi}}(h) = \max_{K\in\mathcal{T}_h} \log(1 + \frac{h_K}{h_{m(K)}})$。

证明。 第一个性质显然成立（见 [11]）。现在我们证明 H^1-连续性估计。由于$\mathbf{W}_h^L \subset \mathbf{W}$，由庞加莱不等式可得

$$\left\|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right\|_{1,\Omega} \lesssim \left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|_{1,\Omega}.$$

因此，只需证明

$$\left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|_{1,\Omega} \lesssim C_{\bar{\Pi}}(h) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \tag{5.21}$$

我们先给出一个局部估计。对于所有 $K \in \mathcal{T}_h$，有（见 (5.17)）

$$\begin{aligned}\left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|_{1,K} &= |\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v} + \Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1,K} \\ &\le |\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1,K} + |\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1,K} \quad \text{(use Lemma 5.2)} \\ &\lesssim |\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} + |\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} = I + II.\end{aligned}$$

现在，我们将分别估计每一项。

I 的估计。令 $(\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v})_{|\partial K} = \sum_j \pi_{SZ}\mathbf{v}(\mathcal{N}_j)\varphi_j$，其中 $\mathcal{N}_j$ 表示 ∂K 上的节点，而 φ_j 是通常对应的拉格朗日基函数。现在注意到，根据 [6]，有：

$$|\varphi_j|_{1/2,\partial K} \lesssim \left[\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\right]^{1/2}. \tag{5.22}$$

继续，对于所有 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$，注意到 φ_j 构成单位分解，并且 $\pi_L\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，我们有

$$\begin{aligned}|\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} &= |\pi_L(\pi_{SZ}\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha})|_{1/2,\partial K} = \big|\sum_j(\pi_{SZ}\mathbf{v}(\mathcal{N}_j)-\boldsymbol{\alpha})\varphi_j\big|_{1/2,\partial K} \\ &\le \big(\sum_j |\varphi_j|_{1/2,\partial K}\big)\,\|\pi_{SZ}\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty,\partial K} \quad \text{(cf. estimates (5.8) and (5.22))} \\ &\lesssim \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\,\|\pi_{SZ}\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha}\|_{1/2,\partial K} \quad \text{(use def of fractional norm)} \\ &\lesssim \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})(h_K^{-1/2}\,\|\pi_{SZ}\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha}\|_{0,\partial K} + |\pi_{SZ}\mathbf{v}-\boldsymbol{\alpha}|_{1/2,\partial K}).\end{aligned}$$

现在，取 $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{|\partial K|}\int_{\underline{\partial K}}\mathbf{v}\ dx$，并应用迹不等式，可得

$$|\pi_L\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} \lesssim \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} \lesssim \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1,K}\,. \tag{5.23}$$

II 的估计。

$$\begin{aligned}|\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} &\le \|\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{1/2,\partial K} \quad \text{(use Lemma 5.3)} \\ &\lesssim \sum_{e\in\partial K} h_e^{-1/2}\,\|(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,e} \quad (\pm\pi_{SZ}\mathbf{v}) \\ &\lesssim \sum_{e\in\partial K} h_e^{-1/2}(\|(I-\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,e} + \|(I-\pi_L)\pi_{SZ}\mathbf{v}\|_{0,e}).\end{aligned} \tag{5.24}$$

现在，我们注意到，在每条边 $e \in \partial K$ 上，由更细三角剖分 $\mathcal{T}_{h_m}$的迹诱导出一个子分解，该子分解由较小三角形的边 l 组成。因此，由引理 5.4 可得

$$\|(I-\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,e}^2 = \sum_{l\in e}\|(I-\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,l}^2 \lesssim h_m\sum_{l\in e}|\mathbf{v}|_{1,D_{T_l}}^2\,,$$

其中，T_l 是包含在 K 中的三角形，且 l 是其一条边。由于 $\mathcal{T}_{h_m}$ 是拟一致的，我们得到

$$\|(I-\pi_{SZ})\mathbf{v}\|_{0,e} \lesssim h_m^{1/2}\,|\mathbf{v}|_{1,D_e}\,. \tag{5.25}$$

另一方面，有：

$$\|(I-\pi_L)\pi_{SZ}\mathbf{v}\|_{0,e} \lesssim h_e^{1/2}\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,e} \lesssim h_e^{1/2}\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} \lesssim h_e^{1/2}\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1,K}\,. \tag{5.26}$$

结合式 (5.25) 和 (5.26)，由估计 (5.24) 可得

$$|\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} \lesssim \sum_{e\in\partial K} h_e^{-1/2}(h_m^{1/2}\,|\mathbf{v}|_{1,D_e} + h_e^{1/2}\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1,K}).$$

注意到 $h_m \le h_e$, $\sum_{e\in\partial K} |\mathbf{v}|^2_{1,D_e} \lesssim |\mathbf{v}|^2_{1,D_K}$，并利用假设 (A2)，可得

$$|\Pi_b(I-\pi_L\pi_{SZ})\mathbf{v}|_{1/2,\partial K} \lesssim |\mathbf{v}|_{1,D_K} + |\pi_{SZ}\mathbf{v}|_{1,K}\,. \tag{5.27}$$

根据估计 (5.23) 和 (5.27)，并回顾定义 (5.17)，可得

$$\left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|^2_{1,K} \lesssim \log^2(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|^2_{1,K} + |\mathbf{v}|^2_{1,D_K} \lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)^2\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|^2_{1,K} + |\mathbf{v}|^2_{1,D_K}\,,$$

其中 $C_{\bar{\Pi}}(h) = \max_{K\in\mathcal{T}_h} \log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})$。

Now

$$\begin{aligned}
\left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|^2_{1,\Omega} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|^2_{1,K} \\
&\lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\pi_{SZ}\mathbf{v}|^2_{1,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |\mathbf{v}|^2_{1,D_K} \\
&\lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)^2\,|\pi_{SZ}\mathbf{v}|^2_{1,\Omega} + |\mathbf{v}|^2_{1,\Omega} \quad \text{(use global stability of } \pi_{SZ}) \\
&\lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)^2\,|\mathbf{v}|^2_{1,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Thus

$$\left|\bar{\Pi}\mathbf{v}\right|_{1,\Omega} \lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)\,|\mathbf{v}|_{1,\Omega} \lesssim C_{\bar{\Pi}}(h)\,\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\,.$$

□

推论 5.4.1。 假设 *(A1)* 和 *(A2)* 成立。给定在 *(4.5)* 中定义的离散空间 $\mathbf{V}_h$ 和$\mathbf{Q}_h$，以及在 *(4.8)* 中定义的子空间 $\mathbf{W}_h$，存在一个正常数 β_h使得

$$\sup_{\mathbf{w}_h\in\mathbf{W}_h} \frac{b(\mathbf{w}_h,\mathbf{q}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{V}}} \ge \beta_h\,\|\mathbf{q}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{q}_h\in\mathbf{Q}_h,$$

其中

$$\beta_h \simeq \frac{1}{\max_{K\in\mathcal{T}_h}\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})}, \tag{5.28}$$

且隐藏常数与网格尺寸无关。如果更强的假设 *(A3)* 成立，则显然有 $\beta_h \simeq 1$。

证明。 由连续的 inf-sup 条件 (2.14) 和命题 5.2 可得。 □

备注 5.5。 仔细检查命题 5.2 的证明可以发现，如果“小边” Γ_C 仅出现在 Γ_C （即仅由节点插入过程导致），那么它成立 $\beta_h \simeq 1$。事实上，如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$，那么 $\mathbf{v}_{|\Gamma_C} = \mathbf{0}$，参见式（2.13）。因此（$\Pi\mathbf{v}$）$_{|\Gamma_C} = \mathbf{0}$，且“小边”不会对 *inf-sup* 条件（3.14）产生影响。然而，在典型的时变问题或大变形问题中，接触界面 Γ_C 事先未知，并且会随时间演变。因此，除非在某个区域不再发生接触时通过网格粗化频繁更新网格，否则活动接触区域之外也可能出现“小边”。这就是我们倾向于处理一般情形、从而避免对“小边”的位置作任何假设的原因。

根据上述分析，我们可以推知离散问题的适定性，并得到定理 3.1 中出现的量 $C_{fin}(h)$ 的估计。事实上，我们有如下命题。

命题 5.3. 假设 *(A1)-(A2)* 成立。给定在 *(4.5)* 中定义的离散空间$\mathbf{V}_h$ 和$\mathbf{Q}_h$、在 *(4.7)* 中定义的闭凸子集$\mathbf{K}_h$ 、在 *(4.8)* 中定义的子空间$\mathbf{W}_h$ 以及稳定化形式 *(4.6)*，采用第 *4.2* 节中详述的选择时，离散问题 *(3.11)* 有唯一解$(\mathbf{u}_h,\mathbf{p}_h) \in \mathbf{K}_h\times\mathbf{Q}_h$。此外，对于在(3.40)中定义的量 $C_{fin}(h)$，有

$$C_{fin}(h) \simeq \big(\max_{K\in\mathcal{T}_h}\log(1+\frac{h_K}{h_{m(K)}})\big)^{10},$$

其中隐藏常数与网格尺寸无关。

5.2 收敛性结果

一旦得到了 $C_{fin}(h)$ 的估计（参见命题 5.3），便可通过估计插值误差和近似误差，得到该方法的误差界（参见定理 3.1）。因此，我们首先介绍一个合适的插值算子。

命题 5.4. 设假设 *(A1)* 成立。设 $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \cap \left([H^\nu(\Omega^1)]^2 \times [H^\nu(\Omega^2)]^2\right)$ *with* $1 < \nu \leq 3$. 存在 $\mathbf{u}_I \in \mathbf{V}_h$ 使得

$$\begin{cases} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_{0,K} + h_K \left|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\right|_{1,K} \lesssim h_K^\nu \left|\mathbf{u}\right|_{H^\nu(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \mathbf{u} \in \mathbf{K} \implies \mathbf{u}_I \in \mathbf{K}_h, \\ \int_{\Gamma_C} [\![u_n]\!] \, d\Gamma = \int_{\Gamma_C} [\![u_{I\,n}]\!] \, d\Gamma. \end{cases} \tag{5.29}$$

证明。证明基于一个局部构造。对于每个多边形 $K \in \mathcal{T}_h$，令 $\mathbf{u} \in [H^\nu(K)]^2$，其中 $1 < \nu \leq 3$。我们如下定义 $\mathbf{u}_I \in \mathbf{V}_h^K$

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_I + \boldsymbol{\nabla} s = \mathbf{0} & \text{in } K, \\ \text{div } \mathbf{u}_I = \Pi_1^{0,K}(\text{div } \mathbf{u}) & \text{in } K, \\ \mathbf{u}_I = \mathbf{p}^* & \text{on } \partial K, \end{cases} \tag{5.30}$$

其中 $s \in L^2(K)$ 且 $\mathbf{p}^* \in [C^0(\partial K)]^2$, $\mathbf{p}^*_{|e} \in [\mathbb{P}_2(e)]^2$，对所有满足以下条件的 $e \in \partial K$

$$\mathbf{p}^*_{|e} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \forall e \in \partial K,$$

with

$$\mathbf{p}_1 \in [\mathbb{P}_1(e)]^2, \quad \mathbf{p}_1 = \text{linear Lagrange interpolant of } \mathbf{u} \text{ on the edge } e,$$

$$\mathbf{p}_2 \in [\mathbb{P}_2(e)]^2, \quad \mathbf{p}_2 = \text{bubble function on } e \text{ such that } \int_e \mathbf{p}_2 \, d\Gamma = \int_e \mathbf{u} - \mathbf{p}_1 \, d\Gamma.$$

我们注意到，由于数据满足相容条件，(5.30) 是良定义的。令 $\Pi^{0}_{0}{}^{K}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla}\tilde{s}$，可得

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{u}_I - \mathbf{u}) + \boldsymbol{\nabla}(s - \tilde{s}) = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} - \Pi_0^{0,K}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}) & \text{in } K, \\ \text{div } (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}) = \Pi_1^{0,K}(\text{div } \mathbf{u}) - \text{div } \mathbf{u} & \text{in } K, \\ \mathbf{u}_I - \mathbf{u} = \mathbf{p}^* - \mathbf{u} & \text{on } \partial K. \end{cases}$$

根据 Stokes 问题的稳定性，我们有 e

$$|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}|_{1,K} \lesssim \left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} - \Pi_0^{0,K}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u})\right\|_{H^1(K)'} + \left\|\Pi_1^{0,K}(\text{div } \mathbf{u}) - \text{div } \mathbf{u}\right\|_{0,K} + \|\mathbf{p}^* - \mathbf{u}\|_{1/2,\partial K},$$

其中，由于假设 (A1)，隐含常数与 K 无关。通过标准论证，可得

$$|\mathbf{u}_I - \mathbf{u}|_{1,K} \lesssim h_K^{\nu-1} \left|\mathbf{u}\right|_{\nu,K},$$

由此可推出 (5.29) 的第一个关系式。(5.29) 中的第二和第三个关系式可由定义 (5.30) 直接得到。□

现在考虑有限维空间

$$M_h := \{v \in L^2(\Gamma_C) : v_{|e_l^c} \in \mathbb{P}_0(e_l^c) \quad \forall l = 0, \ldots, l^\star - 1\}.$$

给定 $f \in H^s(\Gamma_C)$，其中 $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq 1$，我们将 $\mathcal{P}^{M_h}(f) \in M_h$ 定义为将 f 投影到常数上的分片局部投影，即

$$\mathcal{P}^{M_h}(f)_{|e_l^c} := \Pi_0^{0,e_l^c} f \quad \forall l = 0, \ldots, l^\star - 1. \tag{5.31}$$

我们还设

$$h_{\Gamma_C} := \max_{l=0,\cdots,l^\star-1} |e_l^c|.$$

以下两个引理可通过对 [9]和[10] 中的结果稍作调整得到。

引理 5.6。 令 $\mathbf{u}^i \in [H^\nu(\Omega^i)]^2$ 和 $p^i \in H^{\nu-1}(\Omega^i)$ 满足 $2 < \nu \le 5/2$。令 $\psi_h := \mathcal{P}^{M_h}(\sigma_n)$。则有

$$\|\sigma_n - \psi_h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)'} \le C h_{\Gamma_C}^{\nu-1} \big(\|\mathbf{u}\|_{\nu,\Omega} + \|\mathbf{p}\|_{\nu-1,\Omega} \big),$$

其中 $C > 0$ 独立于 h_{Γ_C}。

引理 5.7. 设 $\mathbf{u}^i \in [H^\nu(\Omega^i)]^2$ 和 $p^i \in H^{\nu-1}(\Omega^i)$ 满足 $2 < \nu \le 5/2$。设 $\psi_h := \mathcal{P}^{M_h}(\sigma_n)$, $g_0 \in H^{\nu-1/2}(\Gamma_C)$。则有

$$\int_{\Gamma_C} \psi_h([\![u_{I,n}]\!] - [\![u_{h,n}]\!])\, d\Gamma \le C h_{\Gamma_C}^{2\nu-2} \big(\|\mathbf{u}\|_{\nu,\Omega}^2 + \|\mathbf{p}\|_{\nu-1,\Omega}^2 + \|g_0\|_{\nu-1/2,\Gamma_C}^2 \big),$$

其中 $C > 0$ 独立于 h_{Γ_C}。

现在，我们回顾星形域中多项式的以下逼近结果 s, s例如，参见 [12]。

命题 5.5. 假设 *(A1)* 成立。设 $K \in \mathcal{T}_h$ 和 $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$。对于任意满足 $s \in \mathbb{R}$, $0 \le s \le k$ 的$\mathbf{u} \in [H^{s+1}(K)]^2$，存在 $\mathbf{u}_\pi \in [\mathbb{P}_k(K)]^2$，使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi\|_{0,K} + h_K \, |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\pi|_{1,K} \le C h_K^{s+1} |\mathbf{u}|_{s+1,K}, \tag{5.32}$$

其中 $C > 0$ 仅取决于 k 和 γ。

最后，基于定理 3.1 和命题 5.3，我们现在证明以下收敛定理。

定理 *5.8*。设假设 *(A1)-(A2)* 成立。设 *$(\mathbf{u},p) \in K \times Q$* 和 *$(\mathbf{u}_h, p_h) \in K_h \times Q_h$*分别为 *(2.8)* 和 *(3.11)* 的解。假设 *$\mathbf{u}^i \in [H^\nu(\Omega^i)]^2$*, *$p^i \in H^{\nu-1}(\Omega^i)$*, *$g_0 \in H^{\nu-1/2}(\Gamma_C)$* 且 *$\mathbf{f}^i \in [H^{\nu-2}(\Omega)]^2$*，其中 $2 < \nu \le 5/2$, $i = 1, 2$。则有：

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \lesssim C(h) h^{\nu-1} \big(\|\mathbf{u}\|_{\nu,\Omega} + \|\mathbf{p}\|_{\nu-1,\Omega} + \|g_0\|_{\nu-1/2,\Gamma_C} + \|\mathbf{f}\|_{\nu-2,\,\Omega} \big), \tag{5.33}$$

其中 $C(h) = \big(\max_{K \in \mathcal{T}_h} \log(1 + \frac{h_K}{h_{m(K)}})\big)^5$，且隐含常数与网格尺寸无关。若更强的假设 *(A3)* 成立，则显然有 $C(h) \simeq 1$。

证明。 注意到以下关系成立，参见 (4.9) 和 (4.10)：

$$\|F - F_h\|_{\mathbf{V}'} \le C \, h^{\nu-1} \, \|\mathbf{f}\|_{\nu-2,\Omega}, \tag{5.34}$$

证明可由命题 5.4 和 5.5 以及引理 5.6 和 5.7 立即得出。 □

注 5.9。 对于第 4.1 节中详细介绍的一阶单元，可以得到类似的收敛性结果。更确切地说，在网格假设（A1）和（A2）下，可以证明以下结论（另见 [10]和 [9]）。

- 对于 $1 < \nu \le 3/2$，误差估计 (5.33) 成立。
- 对于 $3/2 < \nu < 2$，为了得到估计 (5.33)，还需要额外假设：在Γ_C 上，约束从约束生效变为约束不生效的点只有有限个。这一假设在实际情况中通常成立。
- 对于特殊情形 $\nu = 2$，可以证明一个稍差的估计：

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}/\mathbf{H}} \lesssim |\log h|^{1/4} C(h) h \big(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{p}\|_{1,\Omega} + \|g_0\|_{3/2,\Gamma_C} + \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \big), \tag{5.35}$$

这里回顾一下， $C(h) = \big(\max_{K \in \mathcal{T}_h} \log(1 + \frac{h_K}{h_{m(K)}})\big)^5$，且隐藏常数与网格尺寸无关。同样，如果满足更强的假设 (A3)，则 $C(h) \simeq 1$，并且仍然存在一个对数项。

注5.10. 我们指出，定理 5.8 和注5.9中出现的对数项对误差估计的影响并不严重，因为它们的增长速度慢于网格尺寸 h 的任意负幂。事实上，在实际关注的情形中，并未观察到这些理论上的对数退化现象。我们还指出，其他框架中也会出现类似的对数项，例如区域分解方法，参见 [34], 。

6 数值测试

本节展示一些数值实验，以验证该方法的实际性能。

6.1 具有完全可用解析解的测试

我们考虑两个处于参考构型的正方形弹性体，$\Omega^1 = (0,\ 1) \times (-1,\ 0)$ 和 $\Omega^2 = (0,\ 1) \times (0,\ 1)$，两者之间没有初始间隙（$g_0 = 0$）。接触边界为 $\Gamma_C := [0, 1] \times \{0\}$。拉梅参数设为 $\mu^1 = \mu^2 = 1$ 和 $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda$；通过改变 λ 的取值，涵盖可压缩和近乎不可压缩状态。如图2所示，狄利克雷边界条件施加于水平边（$y = \pm 1$），而诺伊曼条件施加于垂直边（$x = 0$ 和 $x = 1$）。两个区域采用以下方式划分

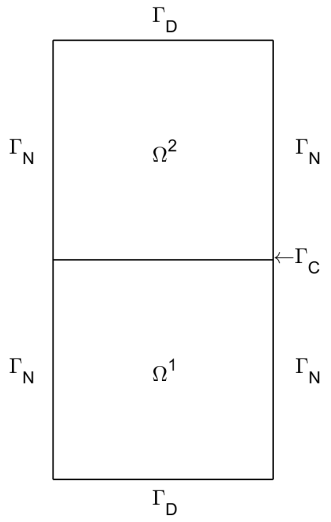


图2：参考构型和边界条件。

不同系列的多边形网格：

- $\{\mathcal{Q}_h\}_h$：由4、16、64和256个单元组成的正方形网格序列，
- $\{\mathcal{H}_h\}_h$：包含 4、16、64 和 256 个单元的六边形网格序列，
- $\{\mathcal{W}_h\}_h$：包含 8、32、128 和 512 个单元的类 WEB 网格序列。

图3 展示了所采用网格的一个示例。在所有测试中，我们考虑

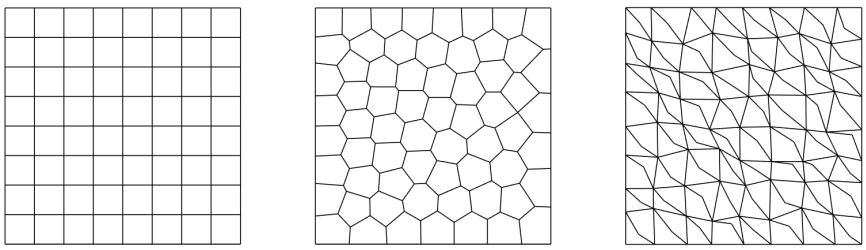


图3：多边形网格示例：$\mathcal{Q}_{64}$、$\mathcal{H}_{64}$、$\mathcal{W}_{128}$。

两种不同的网格构型。第一种称为初始匹配 （I.M.）构型，其中两个多边形网格的生成方式使其节点沿接触界面重合，且边长与最大单元直径h_{max}相当。在此基础上，第二种构型中我们随机扰动节点

Ω[1]中的节点；因此，节点插入算法会在 Γ_C上生成小边，其长度为最大单元直径的 1% 至 2% h_{max}。我们将这种情况称为小边 （S.E.）构型。值得指出的是，虚拟元方法解$\mathbf{u}_h$ 在单元内部各点处并非显式已知。因此，即使问题的精确解$\mathbf{u}$ 已知，方法误差仍不可计算。按照虚拟元方法框架中的惯例，我们通过比较解析解$\mathbf{u}$ 与一个可计算的多项式投影 $\Pi^{\varepsilon,K}\mathbf{u}_h$ 来计算误差（具体而言： $\Pi^{\varepsilon,K}_1\mathbf{u}_h$ 对应第 4.1 节的线性格式， $\Pi^{\varepsilon,K}_2\mathbf{u}_h$对应第 4.2 节的二次格式）。用于收敛分析的误差量为

$$\delta(\mathbf{u}) := \Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \big|\mathbf{u} - \Pi^{\varepsilon,K}(\mathbf{u}_h)\big|^2_{1,K} \Big)^{1/2} \quad \text{and} \quad \delta(\mathbf{p}) := \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\mathbf{Q}}\,. \tag{6.1}$$

我们用于求解变分不等式 (3.11) 的求解器基于 Uzawa算法，参见例如 [2]。

6.1.1 补丁测试

第一个示例是接触补丁测试。狄利克雷和诺伊曼边界数据，以及载荷项 $\mathbf{f}^i$ 均经过选择，使得解析解为

$$\mathbf{u}^i = \frac{1}{\lambda^i}\begin{pmatrix} 0 \\ -(y+1)\end{pmatrix}, \quad p^i = \lambda^i \mathrm{div}\ \mathbf{u}^i = -1, \quad \text{for } i = 1,2. \tag{6.2}$$

我们在所有剖分族上进行测试，并针对第 4.1 节和第 4.2 节中详述的两种方法进行测试，但仅采用较粗的网格。结果汇总于表 1。观察结果可知，我们的两种虚拟元方法均通过了补丁测试，无论是在可压缩（$\lambda = 1$）情形下，还是在近乎不可压缩（$\lambda = 10^3$ 和 $\lambda = 10^8$）情形下。我们注意到，数值 $\lambda = 10^8$ 异常大，对于实际应用而言可能并不具有代表性。尽管如此，我们仍纳入这一情形，以展示所提出方案的鲁棒性。

			初始匹配 (k=1)		小边 (k=1)		初始匹配 (k=2)		小边 (k=2)	
λ	Mesh	N 个单元	$\delta(\mathbf{u})$	$\delta(\mathbf{p})$	$\delta(\mathbf{u})$	$\delta(\mathbf{p})$	$\delta(\mathbf{u})$	$\delta(\mathbf{p})$	$\delta(\mathbf{u})$	$\delta(\mathbf{p})$
10	$\mathcal{Q}_h$	4	8.8e−16	4.8e−16	1。0e−15	5。3e−16	1。7e−15	1.9e−15	1.3e−15	1。8e−15
		16	7.2e−16	6.3e−16	1。0e−15	6.5e−16	1。1e−14	8.6e−15	8.6e−15	7。0e−15
	$\mathcal{H}_h$	4	3.2e−09	1.6e−10	3.6e−09	1.6e−10	9.0e−10	9.1e−10	8.1e−10	8.5e−10
		16	2.6e−09	6.1e−10	2.9e−09	6.0e−10	7。9e−10	7.4e−10	7.5e−10	7.2e−10
	$\mathcal{W}_h$	8	4.8e−16	6.2e−16	4.7e−16	5.0e−16	5.1e−15	6.1e−15	1。1e−14	9.4e−15
		32	1.3e−15	1。4e−15	2。7e−15	2.6e−15	6.8e−14	5.7e−14	6.8e−14	4.9e−14
10^3	$\mathcal{Q}_h$	4	1.3e−15	2.6e−16	8。7e−16	5。1e−16	7.4e−16	1.3e−15	7.4e−16	1.3e−15
		16	7.5e−16	6.0e−16	6.4e−16	6.4e−16	2.9e−15	1。8e−15	5。3e−15	4.1e−15
	$\mathcal{H}_h$	4	2.8e−09	1.6e−10	3.2e−09	1.6e−10	7.2e−10	8。9e−10	6.5e−10	8.4e−10
		16	2.2e−09	6.0e−10	2.5e−09	5.9e−10	6.2e−10	7.1e−10	5.9e−10	6.9e−10
	$\mathcal{W}_h$	8	4.4e−16	5.2e−16	7.2e−16	6.9e−16	8.0e−16	1。0e−15	1.3e−15	1.6e−15
		32	1。4e−15	1.3e−15	2.4e−15	2。7e−15	5.2e−14	6.8e−15	9。2e−15	1。1e−14
10^8	$\mathcal{Q}_h$	4	1.3e−15	4.9e−16	5.4e−16	4.0e−16	4.4e−16	5.7e−16	8.3e−16	1。0e−15
		16	7.3e−16	5.4e−16	5.9e−16	6.3e−16	3.7e−15	2.3e−15	4.4e−15	3.2e−15
	$\mathcal{H}_h$	4	2。7e−09	1.6e−10	3.2e−09	1.6e−10	7.1e−10	8。9e−10	6.5e−10	8.4e−10
		16	2.2e−09	6.0e−10	2.5e−09	5.9e−10	6.2e−10	7.1e−10	5.9e−10	6.9e−10
	$\mathcal{W}_h$	8	5.5e−16	6.7e−16	5。3e−16	7.1e−16	9。9e−16	9。2e−16	1.3e−15	1.9e−15
		32	1.2e−15	1.2e−15	2.6e−15	3.2e−15	5.1e−15	6.5经典三级	8.7e−15	1。2e−14

表 1：补丁测试。

6.1.2 使用反三角位移解的测试

I在这项第二个实验中，我们测试了所提出的虚元法的收敛性质 d
i于第 4.1 节和第 4.2 节。数据根据解析解选取

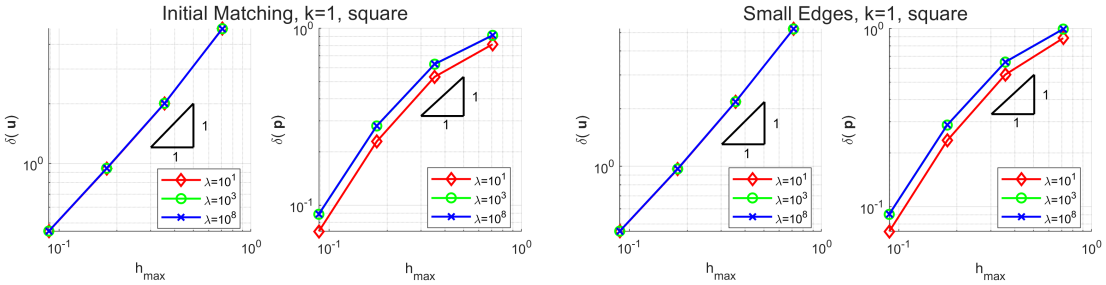
$$\mathbf{u}^i = \begin{pmatrix} \pi x\cos(\pi y) \\ -\sin(\pi y)\end{pmatrix}, \quad p^i = \lambda^i \mathrm{div}\ \mathbf{u}^i = 0, \quad \text{for } i = 1,2. \tag{6.3}$$

我们研究 δ(**u**) 和 δ(**p**) 随最大单元直径 h_{max} 的变化，并比较方法在 λ 取三个不同值时的收敛率，如第 6.1.1 节所示： λ =1（可压缩情形）、 $\lambda = 10^3$ 和 $\lambda = 10^8$ （近乎不可压缩情形）。我们给出了 初始匹配 和 小边 两种配置下的收敛图。

在图4、图5和图6中，我们分别展示了第 4.1 节所述一阶格式在正方形网格 $\mathcal{Q}_h$、六边形网格 $\mathcal{H}_h$ 和网状网格 $\mathcal{W}_h$序列上的结果。我们注意到，注5.9中的理论预测得到了验证，其中 $\nu = 2$。正如预期，在数值实验中并未实际观察到对数退化。

类似地，在图7、图8和图9中，我们展示了第4.2节所述二阶格式在相同网格上的结果。我们观察到该方法具有超收敛行为，表现为二次收敛率，而定理 5.8 的理论预测给出的收敛阶为 $5/2$。这很可能是由于当前问题的结构特别简单所致。然而，在一般情况下，即使解析解光滑，我们也不认为收敛阶会优于 $5/2$。与之前一样，实际计算中看不出估计式 (5.33) 中对数项的显著影响。

最后，对于较大的 λ 值，两种格式的解均未出现精度退化，这证实了该方法对于不可压缩参数具有鲁棒性（不会发生体积锁定）。



F图4：三角位移解测试（线性单元）： $\delta(\mathbf{u})$ 的行为和 d $\delta(\mathbf{p})$ 对于网格序列 $\mathcal{Q}_h$。

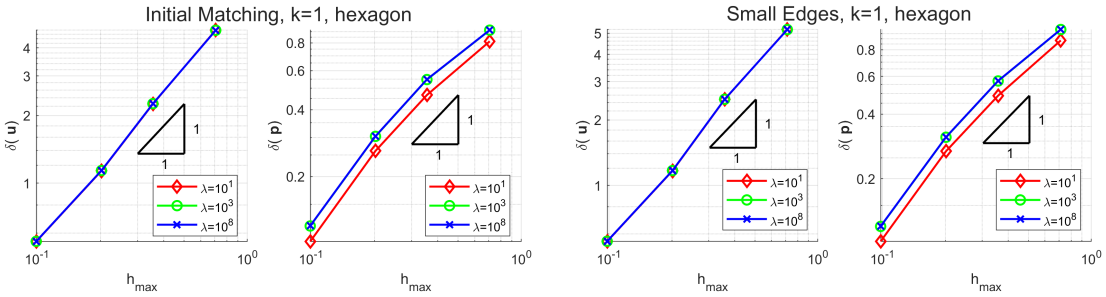


图 5：三角位移解测试（线性单元）： $\delta(\mathbf{u})$ 和 $\delta(\mathbf{p})$ 随网格序列 $\mathcal{H}_h$ 的变化。

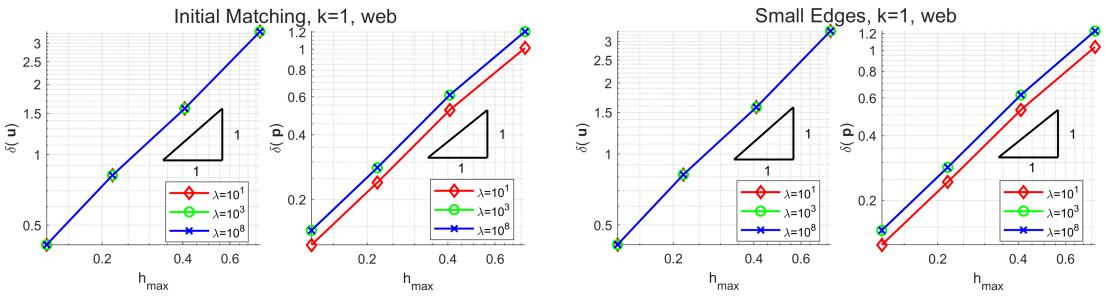


图 6：三角位移解测试（线性单元）： $\delta(\mathbf{u})$ 和 $\delta(\mathbf{p})$ 随网格序列 $\mathcal{W}_h$ 的变化。

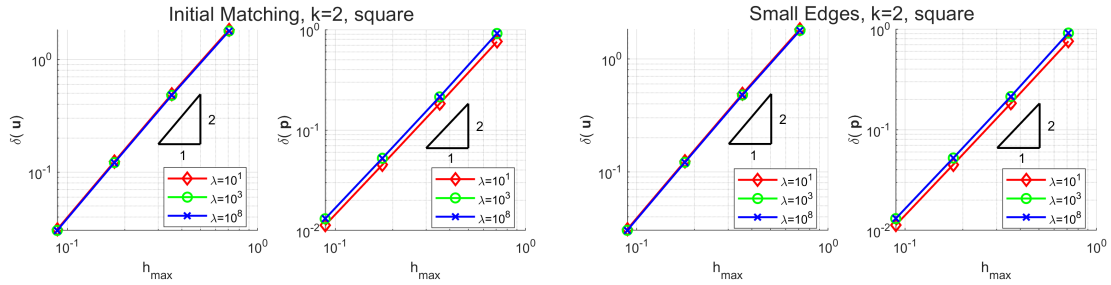


图7：三角位移解测试（二次元）：网格序列 $\mathcal{Q}_h$ 下 $\delta(\mathbf{u})$ 和 $\delta(\mathbf{p})$ 的变化。

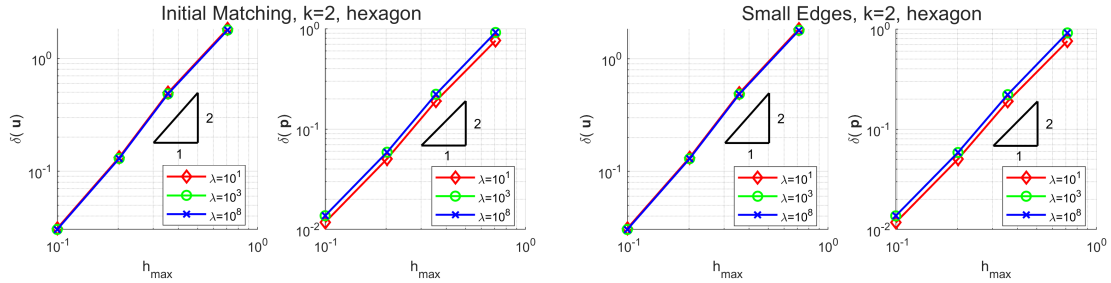


图8：三角位移解测试（二次元）：网格序列 $\mathcal{H}_h$ 下 $\delta(\mathbf{u})$ 和 $\delta(\mathbf{p})$ 的变化。

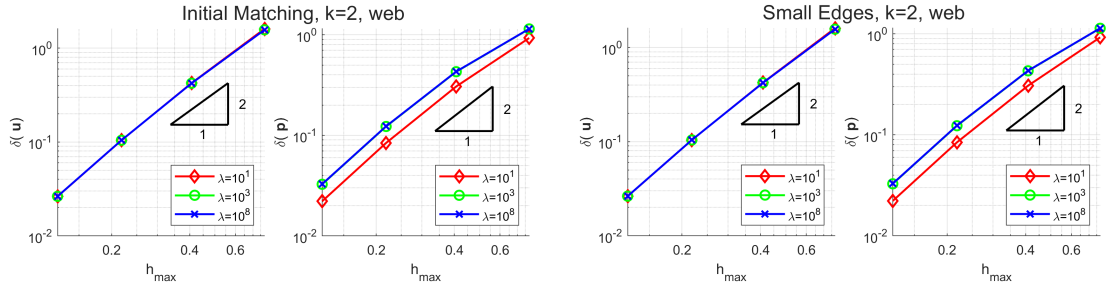


图9：三角位移解测试（二次元）：网格序列 $\mathcal{W}_h$ 下 $\delta(\mathbf{u})$ 和 $\delta(\mathbf{p})$ 的变化。

6.2 赫兹问题

最后一个示例是赫兹接触问题。在参考构型中，我们考虑一个弹性半圆盘（$R = 0.5$），它最初在参考系原点处与一个方形块体（$L = 1$）接触，如图 10 所示。圆盘受到一个外载荷

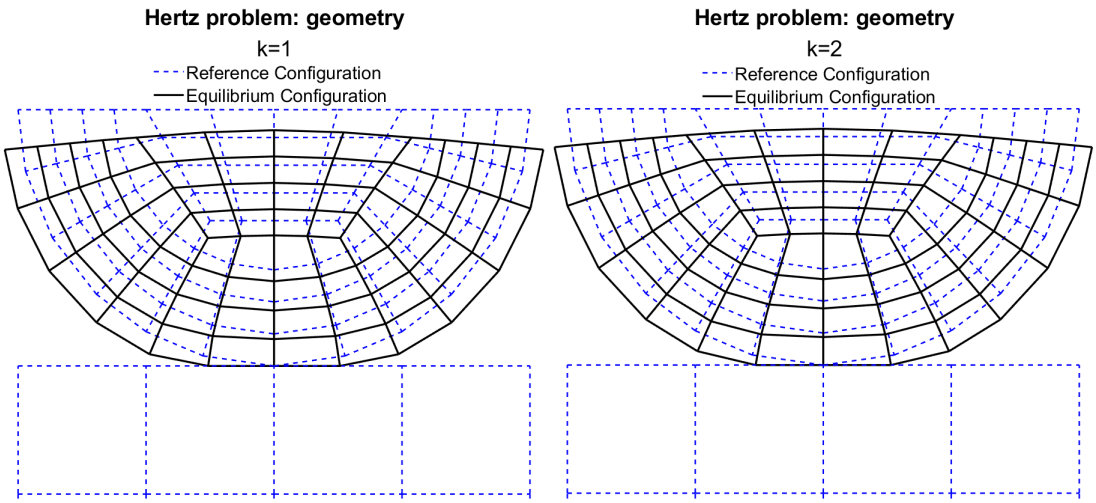


图 10：参考构型和平衡构型。

$F = 2.5$，以均匀压力 p 的形式施加于其上表面。杨氏模量和泊松比分别为 $E_{square} = 70000$、$\nu_{square} = 0.4999$、$E_{disk} = 70$ 和 $\nu_{disk} = 0.3$。请注意，这些弹性参数值实际上相当于将方形块体视为刚体。与前面的测试不同，此处设定了一个非平凡的初始间隙函数 g_0。对于赫兹问题，接触压力 p_n 可用半接触面积 b和有效材料参数 $E^\star$表示，其解析表达式如下。事实上，我们有（例如，参见 [26]）：

$$p_n = \frac{4Rp}{\pi b^2}\sqrt{b^2 - x^2},$$

其中

$$b = 2\sqrt{\frac{2R^2 p}{\pi E^\star}}, \qquad \frac{1}{E^\star} = \frac{1-\nu_{square}^2}{E_{square}} + \frac{1-\nu_{disk}^2}{E_{disk}}.$$

数值测试采用四边形网格进行，其中一个示例见图 10。正方形实体采用包含 16 个单元的固定网格进行离散，而半圆盘则使用逐步加密的网格进行分解，单元数最多达到 256 个。

图 11 绘出了接触区域上的离散法向应力，分别对应线性（$k = 1$）和二次（$k = 2$）虚拟元方法格式。通过在接触单元顶点处计算虚拟元解，我们观察到，这些解能够再现解析可得量的变化特征，并且随着网格加密，精度不断提高。

最后，图 12 展示了最大接触压力与解析解的对比（对于所选参数：$p_{n,max} = -11.06$）；在此处，同样考察了线性格式和二次格式。

7 结论

在本文中，我们针对弹性力学中的二维无摩擦接触问题，开发并分析了用于数值逼近的混合虚拟元方法（VEM），重点关注近不可压缩材料。通过采用混合位移—压力公式，所提出的格式有效克服了通常影响标准基于位移的方法的体积锁定现象。作为该理论的应用示例，我们考察了两种格式；对于其中一种，我们给出了详细的

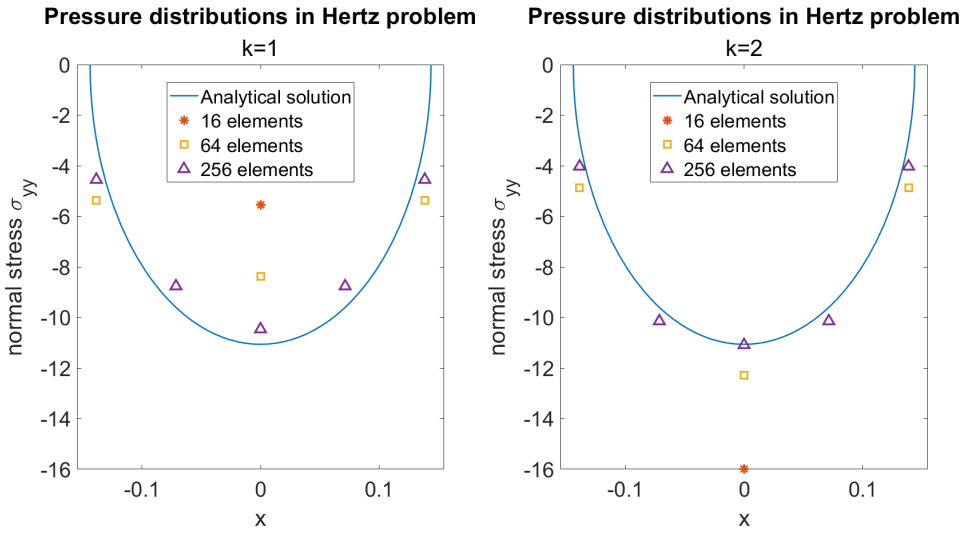


图 11：赫兹问题中的接触压力分布：线性（左）和二次虚拟元方法逼近（右）。

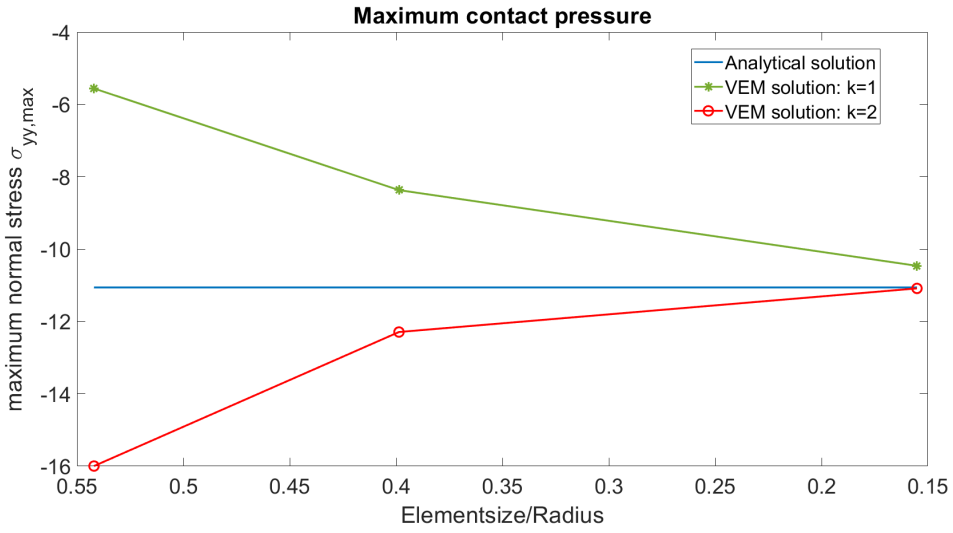


图 12：赫兹问题中的最大接触压力：线性和二次虚拟元方法逼近。

误差分析，但也可以采用非常相似的工具研究另一种方法。我们特别关注了网格中“小边”的影响。

数值实验验证了理论预测，表明：

- 这些方法对体积参数具有鲁棒性；在近不可压缩区域，即使第一拉梅参数的取值极大，也没有出现锁定迹象；
- 存在“小边”时，方法仍具有良好的性能和稳定性，实际计算中未观察到明显的性能下降；
- 实现了预期的收敛率，二阶格式在某些测试案例中表现出超收敛行为。

总体而言，结果表明，所提出的混合虚单元法格式为模拟弹性接触问题提供了一种灵活且可靠的工具，包括近乎不可压缩材料的情形。未来的工作可研究将其推广到三维问题、纳入摩擦接触，以及设计不同的离散空间和虚单元法稳定化项。

致谢

本研究部分经费由 INdAM-GNCS 资助。

参考文献

[1] F. Aldakheel、B. Hudobivnik、E. Artioli、L. Beirˆao da Veiga 和 P. Wriggers。用于接触力学的曲线虚单元。《计算力学与工程方法》，372：113394，2020年。[2] G. Allaire。《数值分析与优化：数学建模与数值模拟导论》。数值数学与科学计算。牛津大学出版社，英国牛津，2007年。[3] P.F. Antonietti、L. Beirao da Veiga 和 G. Manzini。《虚单元法及其应用》，第31卷。SEMA-SIMAI Springer丛书，2021年。[4] I. Babuˇska 和 M. Suri。弹性问题有限元逼近中的锁定效应。《数值数学》，62：439–463，1992年。[5] L. Beirˆao da Veiga、F. Brezzi、A. Cangiani、G. Manzini、L. D. Marini 和 A. Russo。虚拟元方法的基本原理。《数学模型与应用科学方法》，23(1)：199–214，2013年。[6] L. Beirˆao da Veiga、C. Lovadina 和 A. Russo。虚拟元方法的稳定性分析。《应用科学数学模型与方法》，27(13)：2557–2594，2017年。[7] L. Beirˆao da Veiga、C. Lovadina 和 G. Vacca。多边形网格上 Stokes 问题的无散虚单元。《*ESAIM*：数学建模与数值分析》，51：509–535，2017年。[8] F.B. Belgacem、P. Hild 和 P. Laborde。用于接触问题的 Mortar有限元法。《数学与计算机建模》，28(4)：263–271，1998年。[9] Z. Belhachmi 和 F. Ben Belgacem。Signorini问题的二次有限元近似。《计算数学》，72：83–104，2001年。[10] F. Ben Belgacem、Y. Renard 和 L. Slimane。近不可压缩弹性力学中 Signorini 问题的混合公式。《应用数值数学》，54：1–22，2005年。

[11] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin。《混合有限元方法及其应用》，Springer计算数学丛书第44卷。Springer，海德堡，2013年。[12] S. C. Brenner 和 L. R. Scott。《有限元方法的数学理论》，应用数学丛书第15卷。Springer，纽约，第三版，2008年。[13] S. C. Brenner 和 L.Y. Sung。具有小边或小面的网格上的虚单元方法。《数学模型与应用科学方法》，28(7)：1291–1336，2018年。[14] F. Brezzi、W.W. Hager 和 P.-A. Raviart。变分不等式有限元解的误差估计。第一部分：原始理论。《数值数学》，28(4)：431–443，1977年。[15] F. Brezzi、W.W. Hager 和 P.-A. Raviart。变分不等式有限元解的误差估计。第二部分：混合方法。《数值数学》，31(1)：1–16，1978年。[16] F. Chouly、A. Ern 和 N. Pignet。结合Nitsche方法的混合高阶离散，用于小应变弹性中的接触与 Tresca摩擦。SIAM科学计算杂志，42(4)：A2300–A2324，2020年。[17] F. Chouly 和 P. Hild。基于 Nitsche方法的单边接触问题求解方法：数值分析。SIAM数值分析杂志，51(2)：1295–1307，2013年。[18] F. Chouly、P. Hild 和 Y. Renard。《弹性中接触与摩擦的有限元逼近》，连续介质力学进展第48卷。Birkh¨auser，2023年。[19] M. Cicuttin、A. Ern 和 N. Pignet。混合高阶方法：基础教程及其在固体力学中的应用。Springer，2021年。[20] L. De Lorenzis、J.A. Evans、T.J.R. Hughes 和 A. Reali。等几何配点法：诺伊曼边界条件与接触。《计算力学与工程方法》，284：21–54，2015年。[21] L. De Lorenzis、P. Wriggers 和 T.J.R. Hughes。等几何接触：综述。《GAMM通讯》，37(1)：85–123，2014年。[22] D.A. Di Pietro 和 J. Droniou。从有限元到混合高阶方法。arXiv预印本 arXiv:2503.00425，2025年。[23] R.S. Falk。一类变分不等式逼近的误差估计。《数学计算》，28：963–971，1974年。[24] V. Girault 和 P.A. Raviart。《纳维-斯托克斯方程的有限元方法：理论与算法》。Springer，柏林，1986年。[25] T. Gustafsson、R. Stenberg 和 J. Videman。关于弹性接触问题的 Nitsche方法。SIAM科学计算杂志，42(2)：B425–B446，2020年。[26] K.L. Johnson。《接触力学》。剑桥大学出版社，1985年。[27] N. Kikuchi 和 J.T. Oden。《弹性接触问题：变分不等式与有限元方法研究》。SIAM，1988年。[28] G. Leoni。《索伯列夫空间入门》。数学研究生读物。美国数学学会，2009年。[29] M.A. Puso。用于固体力学的三维 mortar 方法。《国际工程数值方法杂志》，59(3)：315–336，2004年。[30] L.R. Scott 和 S. Zhang。满足边界条件的非光滑函数的有限元插值。《数学计算》，54：483–493，1990年。

[31] M. Sofonea、W. Han 和 M. Shillor。黏附或损伤接触问题的分析与近似。Chapman and Hall/CRC，2005年。[32] I. Temizer。等几何分析在计算接触力学中的应用，第 295–302 页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2011年。[33] I. Temizer。基于 mortar 方法的无摩擦接触的混合公式。计算方法与应用力学工程，205-208：1–14，2012年。[34] A. Toselli 和 O. Widlund。区域分解方法——算法与理论，第 34 卷，收录于*Springer*计算数学丛书。Springer-Verlag Berlin Hei- delberg，柏林，海德堡，2005年。[35] F. Wang 和 B. D. Reddy。接触问题虚单元法的先验误差分析。科学与工程中的不动点理论与算法，2022年。[36] B. Wohlmuth。接触问题的变分一致离散格式与数值算法。*ACTA Numerica*，第 569–734 页，2011年。[37] B.I. Wohlmuth。采用对偶空间的拉格朗日乘子 Mortar 有限元法。*SIAM*数值分析杂志，38(3)：989–1012，2000年。[38] P. Wriggers、F. Aldakheel 和 B. Hudobivnik。接触问题的虚单元格式。载于工程科学中的虚单元方法，第 317–367 页。Springer，2023年。[39] P. Wriggers 和 W.R. Rust。一种包含大变形的摩擦接触虚单元法。*Engineering Computations*，36(7)：2133–2161，2019年。[40] P. Wriggers、W.R. Rust 和 B.D. Reddy。一种用于接触问题的虚单元法。计算力学，58：1039–1050，2016年。[41] W. Xiao 和 M. Ling。用于一般变分–半变分不等式的虚单元法及其在接触力学中的应用。计算与应用数学杂志，428：115152，2023年。