具有分布效应的波动偏微分方程驱动极值寻优控制

Elisio Juvenal Muchave [a]、Pedro Henrique Silva Coutinho [b]、Tiago Roux Oliveira [b]、Miroslav Krstić [c]

[a]里约热内卢州立大学（*UERJ*）电子工程研究生项目，巴西里约热内卢州里约热内卢[b]里约热内卢州立大学（*UERJ*）电子与电信工程系，巴西里约热内卢州里约热内卢[c]加利福尼亚大学圣迭戈分校（*UCSD*）机械与航空航天工程系，美国加利福尼亚州拉霍亚

arXiv:2601.02607v1 [math.OC] 5 Jan 2026

摘要

本文研究执行器动态由分布式波动偏微分方程（PDE）描述的基于梯度的极值寻优控制（ESC）。为实现此类无限维系统的实时优化控制目标，我们首先求解轨迹生成问题，重新设计 ESC 系统的加性扰动信号。随后，我们通过反步法构造边界控制律，以补偿具有分布效应的波动偏微分方程，并通过基于李雅普诺夫的方法分析，确保平均闭环系统具有指数稳定性。最后，借助无限维系统的平均理论，我们证明闭环轨迹收敛到最优点周围的一个小邻域。数值仿真结果验证了所提方法的有效性。

关键词：极值寻优；自适应控制；优化；无限维反步法；偏微分方程；分布式波模型。

1 引言

极值寻优控制（ESC）最初由 [17]在电气系统功率传输最大化的背景下提出。通过 [16], 提出的公式，ESC 获得了坚实的理论基础，并已确立为一种有效的实时优化策略。ESC 采用迭代自适应方法来优化非线性目标函数。利用所谓的基于梯度的算法 [2], , 该方法通过引入小幅正弦扰动，使输出逐渐移向最优点；该最优点可以是目标函数的最大值或最小值。因此，无需完全了解待优化的映射关系，ESC 也能够发挥作用 [29]。

* 本文未在任何会议上发表。通讯作者：Tiago Roux Oliveira。电子邮箱： muchaveelisio@gmail.com (Elisio JuvenalMuchave), phcoutinho@eng.uerj.br (Pedro Henrique SilvaCoutinho), tiagoroux@uerj.br (Tiago Roux Oliveira), mkrstic@ucsd.edu (MiroslavKrstić)。

ESC 已被应用于不同的理论框架，例如随机公式 [18], 、多参数基于牛顿法的推广 [9], 、李括号极值寻优 [1], 、无偏极值寻优 [11],以及事件触发控制实现 [26]。此外，ESC 也已应用于多个领域，例如防抱死制动系统、自动驾驶车辆和移动机器人、可再生能源系统，以及生物过程和制冷系统优化，参见 [3,14,19,32] 及其中的参考文献。然而，这些文献仅涉及具有有限维模型表示的系统。

最近，极值寻优控制（ESC）框架已扩展到处理由偏微分方程（PDEs） [23,24]所描述的无限维执行器动态。为应对执行器动态的无限维特性，有必要通过求解所谓的轨迹生成问题 [15, 章节12], , 恰当地设计ESC的加性探测信号，并开发边界控制器，以补偿输入信号在偏微分方程域中的传播效应。根据所考虑的

偏微分方程类别，这一两步方案将难以求解。在 [25], 中，通过使用输运偏微分方程表示时滞，研究了带时滞静态映射的ESC。随后，该方法扩展到了带时延动态映射的随机ESC [27] 以及非恒定时滞情形 [28]。文献 [7] 研究了由扩散偏微分方程支配的执行器动态下的ESC。在 [20], 中，研究了多变量ESC，其中每个输入均由不同的扩散偏微分方程支配。该工作还针对不同类别的抛物型（反应-对流-扩散）偏微分方程、波动方程以及一阶双曲型（输运主导）偏微分方程进行了推广。文献 [35] 采用ESC策略，结合由Lighthill-Whitham-Richards（LWR）宏观偏微分方程描述的高速公路路段交通密度，研究了带下游瓶颈的交通拥堵控制。文献 [22],讨论了带波动偏微分方程补偿的ESC完整指南，并在 [21]中将其扩展至偏微分方程–偏微分方程级联系统。在 [30],中，研究了具有Kelvin-Voigt阻尼的一类波动偏微分方程下的ESC；文献 [34]则利用啁啾探测研究了偏微分方程的预设时间极值寻优控制收敛性。然而，上述所有工作处理的都是执行器动态中不具有分布式效应的偏微分方程。

在此背景下，考虑分布效应的极值寻优控制研究仅有 [33] 和 [6]。 [33] 的作者处理了分布式时延（或输运偏微分方程），而 [6]则引入了具有分布效应的扩散偏微分方程。然而，由具有分布效应的波动偏微分方程支配的执行动态下的极值寻优控制仍是一个未解决的问题，这促使我们开展本文所述的研究。值得注意的是，本文首次尝试将极值寻优控制从波动偏微分方程推广到分布式波动偏微分方程这一类系统。我们在Neumann边界执行和Dirichlet边界感测的情形下完成了完整的设计与分析。为此，我们首先针对轨迹生成问题给出一种解法，以获得合适的加性探测信号。与 [33] 和 [6] 以及文献中的其他相关工作相比，这一结果具有新颖性。其次，受 [4], 提出的反步法类方法启发，本文的第二项贡献是为分布式波动偏微分方程设计补偿控制器，以确保渐近稳

通过基于李雅普诺夫的稳定性分析，证明闭环平均系统的稳定性。最后，借助无限维系统的平均理论 [10], 证明优化映射的轨迹收敛到未知极值点的一个邻域。

本文结构安排如下。第 2 节介绍考虑执行器动态的极值寻优控制问题的表述，其中执行器动态由具有分布效应的波动偏微分方程描述；该节还定义了解调和加性扰动信号的生成，并介绍了获得估计误差动力学的步骤。第 3 节介绍通过反步法进行的边界控制设计，以及相应的闭环平均系统。第 4 节给出稳定性与收敛性分析。第 5 节展示验证所提方法的数值结果，第 6 节则总结全文，并指出未来工作的若干方向。

预备知识：函数 $u(x,t)$ 的偏导数记为 $\partial_x u(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$,$\partial_t u(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$。下标“av”表示周期为 Π 的周期变量的平均值。有限维状态变量 $\vartheta(t)$ 的欧几里得范数记为 $|\vartheta(t)|$。PDE 状态 $u(x,t)$ 在 $L_2[0,D]$ 中的空间范数记为 $\|u(t)\|^2_{L_2([0,D])} = \int_0^D u^2(x,t)\,dx$。为简洁起见，省略指标 $L_2([0,D])$；若未特别说明，则 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2([0,D])}$。根据 [12],，若向量值函数 $f(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上满足 $\exists k,\bar{\varepsilon}: |f(t,\varepsilon)| \le k\varepsilon$, $\forall t \in [t_1,t_2]$ 和 $\forall \varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}]$，则称其为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 阶。通常不提供常数 k 和 $\bar{\varepsilon}$ 的精确估计。因此，我们简单地使用 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，将其理解为关于充分小的标量 ε 的数量级关系。

2 极值寻优控制问题表述

考虑图1所示的梯度型极值寻优控制系统，其驱动由具有分布效应的波动偏微分方程控制。极值寻优控制旨在使未知非线性静态映射 $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的输出$y\in\mathbb{R}$ 保持在未知极值点 y^*的小邻域内，该极值点对应于优化器 Θ^*，即$y^* = Q(\Theta^*)$。

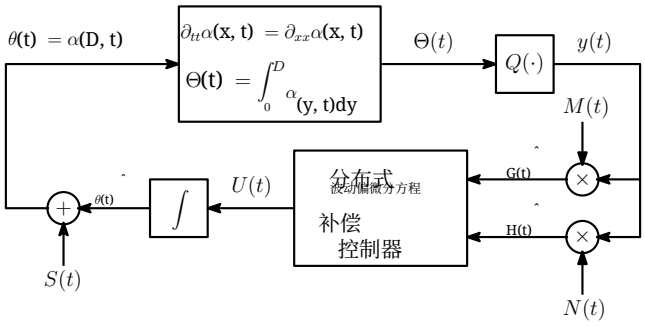


图1. 具有分布式波动偏微分方程的极值寻优控制系统。

2.1 波动偏微分方程驱动与分布效应下的非线性映射

该映射的输出为

$$y(t) = Q(\Theta(t)), \tag{1}$$

其中， $\Theta(t)$ 是该映射的分布式输入，且假设非线性映射 Q 满足以下假设。

假设 1 未知静态映射是局部二次的，可描述为：

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}\left(\Theta - \Theta^*\right)^2, \tag{2}$$

其中， $H < 0$ 是该静态映射的未知海森矩阵。

请注意，假设 1 并不严格，因为任何连续可微非线性映射 Q 都可以在其极值点附近局部近似为二次函数。不失一般性，我们考虑$H < 0$ 以处理最大化问题。通过取$H > 0$，即可直接处理最小化问题。因此，由式 (1)–(2) 可知，静态映射的输出可写为：

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}\left(\Theta(t) - \Theta^*\right)^2. \tag{3}$$

我们考虑执行器动态由以下分布式波动偏微分方程描述的情形：

$$\Theta(t) = \int_0^D \alpha(y,t)dy, \tag{4}$$
$$\partial_{tt}\alpha(x,t) = \partial_{xx}\alpha(x,t), \tag{5}$$
$$\partial_x\alpha(0,t) = 0, \tag{6}$$
$$\alpha(D,t) = \theta(t), \tag{7}$$

其中， α： $[0,D]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是波动偏微分方程的状态，$D > 0$ 对应于空间域的上界， $\theta(t) \in \mathbb{R}$ 是执行器输入，而 $\Theta(t)$是式 (2) 中非线性映射 Q 的分布式执行器输入。

2.2 解调信号

与 [9], 类似，我们考虑解调信号 $M(t)$，以估计静态映射的梯度，如下所示：

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t) \ \text{ with } \ M(t) = \frac{2}{a}\sin(\omega t), \tag{8}$$

以及另一个解调信号 $N(t)$，用于估计静态映射的海森矩阵：

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \ \text{ with } \ N(t) = -\frac{8}{a^2}\cos(2\omega t), \tag{9}$$

其中， $a > 0$ 和 $\omega > 0$ 分别是振幅和频率参数。

2.3 加性扰动信号运动规划的轨迹生成

与经典 ESC 不同，在经典 ESC 中，加性扰动信号 $S(t) = a\sin(\omega t)$ 直接施加到静态映射的输入端，而分布式波动方程的存在显著影响了正弦信号对静态映射 $Q(\cdot)$ 输入变量的作用方式。这种影响源于信号在空间域中的分布式传播。为确保正弦扰动能够有效地出现在映射的输入端，有必要设计一个边界信号 $S(t)$，使其经过分布式波动方程传播后，项 $a\sin(\omega t)$ 出现在 $Q(\cdot)$ 的输入端。为实现这一目标，必须求解以下轨迹生成问题：

$$\int_0^D \beta(y,t)dy = a\sin(\omega t), \tag{10}$$
$$\partial_{tt}\beta(x,t) = \partial_{xx}\beta(x,t), \tag{11}$$
$$\partial_x\beta(0,t) = 0, \tag{12}$$
$$\beta(D,t) = S(t), \tag{13}$$

其中 β： $[0,D]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，其解在于确定 $\beta(x,\ t)$，使得方程 (10)–(13) 得以满足。以下引理给出了所提出的轨迹生成问题的解析解。

引理 1 如果频率 $\omega > 0$ 满足

$$\omega \neq \frac{k\pi}{D}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

那么，由方程 (10)–(13) 定义的轨迹生成问题的解为

$$\beta(x,t) = \frac{a\omega}{\sin(\omega D)}\cos(\omega x)\sin(\omega t). \tag{15}$$

特别地，加性扰动信号 $S(t)$ 为

$$S(t) = \beta(D,t) = \frac{a\omega}{\sin(\omega D)}\cos(\omega D)\sin(\omega t). \tag{16}$$

证明。 考虑以下具有时变系数的泰勒级数形式的通解：

$$\beta(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{x^k}{k!}. \tag{17}$$

根据边界条件 (12)，我们得到$a_1(t) = \partial_x\beta(0,t) = 0$。然后，将 (17) 代入 (11)，

从而得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_k(t)\frac{x^k}{k!} = \frac{\partial}{\partial x^2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(t)\frac{x^k}{k!}, \tag{18}$$

由此我们得到该关系

$$a_{k+2}(t) = \ddot{a}_k(t), \tag{19}$$

这意味着 $a_{2k+1}(t) = 0$，对于 $k \in \mathbb{N}$，且一般解（17）化为

$$\beta(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{20}$$

假设 $a_0(t) = A\sin(\omega t) = A\mathrm{Im}\{e^{j\omega t}\}$，其中 A 是待确定的常数。由（19）可得

$$a_{2k}(t) = A(j\omega)^{2k}\mathrm{Im}\{e^{j\omega t}\}. \tag{21}$$

于是，（20）变为

$$\begin{aligned}\beta(x,t) &= A\mathrm{Im}\left\{e^{j\omega t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j\omega x)^{2k}}{(2k)!}\right\} \\ &= A\mathrm{Im}\{e^{j\omega t}\cosh(j\omega x)\} = A\cos(\omega x)\sin(\omega t).\end{aligned} \tag{22}$$

此外，由（10）可得

$$\begin{aligned}\int_0^D \beta(y,t)dy &= \int_0^D A\cos(\omega y)\sin(\omega t)dy \\ &= A\frac{\sin(\omega D)}{\omega}\sin(\omega t) = a\sin(\omega t),\end{aligned} \tag{23}$$

由此可知

$$A = \frac{a\omega}{\sin(\omega D)}, \tag{24}$$

当根据 (14) 选择 $\omega > 0$ 时，该量是有限的。然后，将 (24) 代入 (22)，最终得到$\beta(x,t)$，如 (15) 所示。计算 $S(t) = \beta(D,t)$，可得 (16)。证明完毕。□

2.4 估计误差与误差动力学

考虑以下估计变量

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - S(t), \quad \hat{\Theta}(t) = \Theta(t) - a\sin(\omega t), \tag{25}$$

以及以下估计误差

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \Theta^*, \quad \vartheta(t) = \hat{\Theta}(t) - \Theta^*. \tag{26}$$

根据式 (25)–(26)，可以建立分布式误差 $\vartheta(t)$、分布式输入 $\Theta(t)$ 与最优值 Θ^* 之间的以下关系：

$$\vartheta(t) + a\sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*. \tag{27}$$

令 $\bar{\alpha}: [0,D]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 定义为 $\bar{\alpha}(x,t) = \alpha(x,t) - \beta(x,t)$。根据方程 (4)–(7) 和 (10)–(13)，以及 (25)–(26)，可得：

$$\vartheta(t) = \int_0^D \bar{\alpha}(y,t)dy - \Theta^*, \tag{28}$$

$$\partial_{tt}\bar{\alpha}(x,t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x,t), \tag{29}$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(0,t) = 0, \tag{30}$$

$$\bar{\alpha}(D,t) = \hat{\theta}(t). \tag{31}$$

通过对方程 (28)–(31) 求$\hat{}$ 时间导数，并使用 $\theta = \theta = U(t)$ 和 $u(x,t) := \partial_t\bar{\alpha}(x,t)$，可得到分布式误差动力学，使得：

$$\dot{\vartheta}(t) = \int_0^D u(y,t)dy, \tag{32}$$

$$\partial_{tt}u(x,t) = \partial_{xx}u(x,t), \tag{33}$$

$$\partial_x u(0,t) = 0, \tag{34}$$

$$u(D,t) = U(t). \tag{35}$$

2.5 控制目标

本文的主要目标是设计分布式波动偏微分方程补偿控制律 $U(t) = \Phi(\vartheta(t), u(x,t), \partial_t u(x,t))$，使得式 (32)–(35) 的平均误差动力学指数稳定。然后，利用无穷维系统的平均定理 [10]，证明 $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$ 收敛到极值点 $(\Theta^*, \Theta^*, y^*)$ 的一个邻域。

3 边界控制与闭环系统

3.1 无穷维反步设计

考虑由方程 (32)–(35) 描述的分布式误差动力学。以下引理给出一种控制设计流程，以确保所提出控制律下闭环系统的指数稳定性。

引理2 考虑由(32)–(35) 与控制器互连所得到的闭环系统

$$U(t) = \overline{K}Z(t) - c_0\int_0^D \partial_t u(y,t)dy, \tag{36}$$

其中

$$Z(t) = \vartheta(t) - g'(D)c_0 \int_0^D u(y,t)dy + \int_0^D g(y)\partial_t u(y,t)dy, \tag{37}$$

and

$$g(y) = \frac{D^2 - y^2}{2}, \tag{38}$$

对于某个 $c_0 > 0$，满足 $c_0 \neq 1$。如果将 K 选为一个满足下式的负标量

$$\lambda = g'(D)\overline{K} > 0 \tag{39}$$

满足

$$\lambda \neq \frac{1}{2D} \ln\left(-\frac{1+c_0}{1-c_0}\right), \tag{40}$$

那么，对于任意初始条件 $u(\cdot, 0) \in H^1(0, D)$ 和 $\partial_t u(\cdot, 0) \in L^2(0, D)$，闭环系统存在唯一解 $(\vartheta(t)\ u(\cdot, t)\ \partial_t u(\cdot, t)) \in C\left([0,\infty)\ \mathbb{R}^n \times H^1(0, D)\ \times L^2(0, D)\right)$，且该解是指数稳定的，即存在正常数 κ 和 λ，使得

$$\Omega(t) \leq \kappa\, \Omega(0)\, e^{-\rho t}, \tag{41}$$

with

$$\Omega(t) = |\vartheta(t)|^2 + \|\partial_x u(t)\|^2 + \|\partial_t u(t)\|^2. \tag{42}$$

此外，如果初始条件 $(u(\cdot, 0)\ \partial_t u(\cdot, 0))$ 与控制器 (36) 相容，且属于 $H^2\ 0\ D\ \times H^1\ 0\ D\ \vartheta\ t\ u \cdot t\ \partial_t u \cdot t\ \in C\ \mathbb{R}^n \times H^1\ 0\ D\ \times L^2\ 0\ D\ (,)\ (,)$，那么 $((),(),()) ([0,\infty\},(,)\ (,))$ 是闭环系统的经典解。

证明。 考虑对有限维状态 $\vartheta(t)$ 应用的可逆变换（37），以及对无限维执行器状态 $u(x,\ t)$ 所定义的变换如下：

$$w(x,t) = u(x,t) - \gamma(x)Z(t) + c_0 \int_0^x \partial_t u(y,t)dy, \tag{43}$$

其中，核函数 $\gamma(x)$将被确定，以便将原始系统 (32)–(35) 与控制律 (36) 一同变换为以下目标系统：

$$\dot{Z}(t) = -\lambda Z(t), \tag{44}$$
$$\partial_{tt} w(x,t) = \partial_{xx} w(x,t), \tag{45}$$
$$\partial_x w(0,t) = c_0 \partial_t w(0,t), \tag{46}$$
$$w(D,t) = 0, \tag{47}$$

其中，(39) 满足条件 $K < \overline{0}$，因为 $g'(D) = -D$。

为验证这一点，我们首先对（43）中的 $Z(t)$ 求导。利用关系（33）、分部积分以及（37）和（38）中的关系，可得：

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) = &\int_0^D u(y,t)dy + g(D)\partial_x u(D,t) - g(0)\partial_x u(x,t) \\ &- g'(D)u(D,t) + g'(0)u(0,t) + \int_0^D g''(y)u(y,t)dy \\ &- g'(D)c_0 \int_0^D \partial_t u(y,t)dy.\end{aligned} \tag{48}$$

注意到系统变换中使用的（38）中的函数 $g(\cdot)$ 是以下边值问题的解：

$$g''(y) = -1, \tag{49}$$
$$g'(0) = 0, \tag{50}$$
$$g(D) = 0, \tag{51}$$

我们得到

$$\dot{Z}(t) = -g'(D)U(t) - g'(D)c_0 \int_0^D \partial_t u(y,t)\, dy. \tag{52}$$

利用（36）中的控制器，我们得到（44）。

为了建立方程（45）–（47），我们需要计算（43）的导数。我们首先计算其一阶时间导数。利用（33）、分部积分以及（34），可得

$$\partial_t w(x,t) = \partial_t u(x,t) + \lambda\gamma(x)Z(t) + c_0\partial_x u(x,t). \tag{53}$$

那么，式 (43) 的二阶时间导数为

$$\partial_{tt} w(x,t) = \partial_{tt} u(x,t) - \lambda^2\gamma(x)Z(t) + c_0\partial_{xt} u(x,t). \tag{54}$$

现在我们继续计算式 (43) 的空间导数。一阶空间导数为

$$\partial_x w(x,t) = \partial_x u(x,t) - \gamma'(x)Z(t) + c_0\partial_t u(x,t) \tag{55}$$

式 (43) 的二阶空间导数为

$$\partial_{xx} w(x,t) = \partial_{xx} u(x,t) - \gamma''(x)Z(t) + c_0\partial_{tx} u(x,t). \tag{56}$$

由（33）–（35）、（36）、（43）和（53）–（56），可得

$$w(0,t) = u(0,t) - \gamma(0)Z(t), \tag{57}$$
$$\partial_x w(0,t) = -\gamma'(0)Z(t) + c_0\partial_t u(0,t), \tag{58}$$
$$\partial_t w(0,t) = \partial_t u(0,t) + \lambda\gamma(0)Z(t), \tag{59}$$
$$w(D,t) = \overline{K}Z(t) - \gamma(D)Z(t). \tag{60}$$

利用表达式（54）、（56）和（57）–（60），结合（33）–（35），我们得出：若 $\gamma(x)$ 是以下边值问题的解，则（45）–（47）成立

$$\gamma''(x) = \lambda^2\gamma(x), \tag{61}$$
$$\gamma'(0) = -c_0\lambda\gamma(0), \tag{62}$$
$$\gamma(D) = \overline{K}, \tag{63}$$

从而得到以下解:

$$\gamma(x) = \overline{K}\frac{e^{\lambda x} + re^{-\lambda x}}{e^{\lambda D} + re^{-\lambda D}}, \tag{64}$$

with

$$r = \frac{1 + c_0}{1 - c_0}, \tag{65}$$

该解存在，其中 $c_0 \neq 1$ 和 λ 满足式 (40)。

现在考虑李雅普诺夫泛函候选项

$$V(t) = \frac{1}{2}Z^2(t) + E(t), \tag{66}$$

其中，项 $E(t)$ 受 [31]，启发，选取为

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|\partial_x w(t)\|^2 + \|\partial_t w(t)\|^2\right) + \delta\int_0^D (y-2)\partial_y w(y,t)\partial_t w(y,t)dy, \tag{67}$$

并且 δ 是一个充分小的正标量，以确保 $V(t)$ 为正定。对式 (66) 关于时间求导，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -\lambda Z^2(t) - \frac{\delta}{2}\left(\|\partial_x w(t)\|^2 + \|\partial_t w(t)\|^2\right) \\ &\quad - [c_0 - \delta(1 - c_0^2)]\partial_t w^2(0,t) - \frac{\delta}{2}\partial_x w^2(D,t) \\ &\leq -\lambda Z^2(t) - \eta E(t) \\ &\leq -\rho V(t),\end{aligned} \tag{68}$$

对于某些 $\eta > 0$ 和 $\rho = \min\{\lambda, \eta\}$，利用比较原理 [12],，可得 $V(t) \leq V(0)e^{-\rho t}$。

要证明 (41)–(42) 成立，只需证明

$$\underline{M}\Omega(t) \leq V(t) \leq \overline{M}\Omega(t), \tag{69}$$

对某些正常数 M 和 M 成立。 —

结合式（37）和式（38），并利用庞加莱不等式、杨氏不等式以及柯西–施瓦茨不等式，我们可以得出

存在一个正的常数 m 使得

$$|Z(t)|^2 \leq m\left(|\vartheta(t)|^2 + \|\partial_x u(t)\|^2 + \|\partial_t u(t)\|^2\right). \tag{70}$$

于是，由 (66)、(67)、(53)、(55) 和 (70)，结合杨氏不等式与柯西–施瓦茨不等式，可得 (69) 中的上界。类似地，将 $u(x,\ t)$ 和 $\vartheta(t)$ 表示为 $w(x,\ t)$（及其导数）和 $Z(t)$ 的形式，可得下界。证明的其余部分与 [5,31] 中的步骤类似。证明完毕。□

3.2 平均闭环系统

采用 (36) 中提出的控制器，可以有效补偿波动偏微分方程动力学的分布效应。然而，由于该控制器依赖于无法测量的 $\vartheta(t)$，因此无法直接实时实现。因此，我们采用与 [9] 中类似的论证，利用梯度和海森矩阵的基于平均的估计，为含分布式波动偏微分方程的 ESC 系统设计一个可实现的控制器。基于这一思路，我们提出了控制器 (36) 的实时可实现版本。

首先，将 (27) 代入 (3)，得到

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\sin(\omega t))^2. \tag{71}$$

然后，将 (71) 代入 (8)，可得

$$\begin{aligned}\hat{G}(t) &= \frac{2}{a}\sin(\omega t)\left(y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\sin(\omega t))^2\right) \\ &= \frac{2}{a}y^*\sin(\omega t) + \frac{H}{a}\vartheta^2(t)\sin(\omega t) \\ &\quad + \frac{H}{a}\left(2a\vartheta(t)\sin^2(\omega t) + a^2\sin^3(\omega t)\right).\end{aligned} \tag{72}$$

最后，将 (71) 代入 (9)，得到

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= -\frac{8}{a^2}\cos(2\omega t)\left(y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\sin(\omega t))^2\right) \\ &= -\frac{8}{a^2}y^*\cos(2\omega t) - \frac{4H}{a^2}\left[\vartheta^2(t)\cos(2\omega t)\right. \\ &\quad \left. + 2a\vartheta(t)\sin(\omega t)\cos(2\omega t) + a^2\sin^2(\omega t)\cos(2\omega t)\right].\end{aligned} \tag{73}$$

考虑在时间段 $2\pi/\omega$ 内 $\hat{}G(t)$ 和 $\hat{}H(t)$ 的平均值，即，

$$\hat{G}_{\mathrm{av}}(t) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\hat{G}(t)dt,\ \hat{H}_{\mathrm{av}}(t) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\hat{H}(t)dt. \tag{74}$$

由式（74）可得梯度和海森矩阵估计的以下平均形式，分别为

$$\hat{G}_{\mathrm{av}}(t) = H\vartheta_{\mathrm{av}}(t) \quad \text{and} \quad \hat{H}_{\mathrm{av}}(t) = H. \tag{75}$$

现在，将 (37) 代入 (36) 并取 $K = KH$，控制律变为

$$U_{\mathrm{av}}(t) = K\Big[\vartheta(t) - g'(D)c_0\int_0^D u(y,t)dy + \int_0^D g(y)\partial_t u(y,t)dy\,dy\Big] - c_0\int_0^D \partial_t u(y,t)dy, \tag{76}$$

其中 $K > 0$。

假设频率 ω 足够大，我们可以认为在一个平均区间内，$\vartheta(t)$ 近似为常数。因此，控制器 (37) 的平均形式为：

$$U_{\mathrm{av}}(t) = K\hat{G}_{\mathrm{av}}(t) + K\hat{H}_{\mathrm{av}}(t)\Big[-g'(D)c_0\int_0^D u_{\mathrm{av}}(y,t)dy + \int_0^D g(y)\partial_t u_{\mathrm{av}}(y,t)dy\Big] - c_0\int_0^D \partial_t u_{\mathrm{av}}(y,t)dy. \tag{77}$$

现在，我们可以如下计算分布式误差动态 (32)–(35) 的平均形式：

$$\dot{\vartheta}_{\mathrm{av}}(t) = \int_0^D u_{\mathrm{av}}(y,t)dy, \tag{78}$$

$$\partial_{tt}u_{\mathrm{av}}(x,t) = \partial_{xx}u_{\mathrm{av}}(x,t), \tag{79}$$

$$\partial_x u_{\mathrm{av}}(0,t) = 0, \tag{80}$$

$$u_{\mathrm{av}}(D,t) = U_{\mathrm{av}}(t), \tag{81}$$

其中 $\vartheta_{\mathrm{av}}(t)$ $U_{\mathrm{av}}(t) \in \mathbb{R}$，且 $x \in [0,D]$。根据引理2并遵循 [13], 中的类似步骤，我们得出结论：由 (78)–(81) 描述、采用 (77) 中控制器的闭环平均系统是指数稳定的。

3.3 可实现的控制律

由于在无限维系统的平均定理应用于稳定性证明 [10]（以及逆最优性目的[8]）时存在技术原因，我们在控制器中引入一个低通滤波器（其中 $c > 0$），从而可以将 U（t）视为一个状态变量。因此，受式（77）中控制器的平均形式启发，并利用以下事实：

$$\int_0^D g(y)\partial_t u(y,t)dy = -D\hat{\theta}(t) - \Theta(t) + a\sin(\omega t), \tag{82}$$

以及该低通滤波器，我们考虑如下可实现的控制器：

$$\frac{d}{dt}U(t) = -cU(t) + c\Big\{K\hat{G}(t) + K\hat{H}(t)\Big[-g'(D)c_0\int_0^D u(y,t)dy - D\hat{\theta}(t) - \Theta(t) + a\sin(\omega t)\Big] - c_0\int_0^D \partial_t u(y,t)dy\Big\}. \tag{83}$$

因此，闭环系统变为

$$\dot{\vartheta}(t) = \int_0^D u(y,t)dy, \tag{84}$$

$$\partial_{tt}u(x,t) = \partial_{xx}u(x,t), \tag{85}$$

$$\partial_x u(0,t) = 0, \tag{86}$$

$$\frac{d}{dt}u(D,t) = -cu(D,t) + c\Big\{K\hat{G}(t) + K\hat{H}(t)\Big[-g'(D)c_0\int_0^D u(y,t)dy - D\hat{\theta}(t) - \Theta(t) + a\sin(\omega t)\Big] - c_0\int_0^D \partial_t u(y,t)dy\Big\}. \tag{87}$$

4 稳定性与收敛性分析

下述定理给出了闭环系统的局部稳定性和收敛性性质。

定理1 考虑图*1*所示的系统，其动态由假设 *1* 中的二次非线性映射描述，并与(4)–(7)中定义的分布式波动方程所支配的执行器动态耦合。存在一个充分大的常数 $c > 0$，使得对于某个 $\bar{\omega}(c) > 0$，对每个满足(14)的 $\omega > \bar{\omega}$，由式 *(84)–(87)* 描述、采用控制律 *(83)* 的闭环系统都存在唯一的周期解，该解在 t 中局部指数稳定，周期为 $\Pi := \frac{2\pi}{\omega}$，记为 $\vartheta^{\Pi}(t)$ $u^{\Pi}(x,t)$，并满足以下不等式和最终界 $\forall t \geq 0$:

$$\Big(\|\vartheta^{\Pi}(t)\|^2 + \|\partial_t u^{\Pi}(t)\|^2 + \|\partial_x u^{\Pi}(t)\|^2\Big)^{1/2} \leq O\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{88}$$

$$\limsup_{t\to\infty}|\theta(t) - \Theta^*| = \mathscr{O}\left(a\omega|\cot(\omega D)| + \frac{1}{\omega}\right), \tag{89}$$

$$\limsup_{t\to\infty}|\Theta(t) - \Theta^*| = \mathscr{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \tag{90}$$

$$\limsup_{t\to\infty}|y(t) - y^*| = \mathscr{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right). \tag{91}$$

证明。 根据引理2中已确立的指数稳定性以及变换的可逆性

在（37）中，由（41）和（42）可得

$$|\vartheta_{\mathrm{av}}(t)|^2 + \|\partial_t u_{\mathrm{av}}(t)\|^2 + \|\partial_x u_{\mathrm{av}}(t)\|^2 \le \kappa e^{-\rho t}\big(|\vartheta_{\mathrm{av}}(0)|^2 + \|\partial_t u_{\mathrm{av}}(0)\|^2 + \|\partial_x u_{\mathrm{av}}(0)\|^2\big), \quad \forall t > 0, \tag{92}$$

为简单起见，在（83）中假设 $c \to +\infty$，因为（83）得出（36）。根据（92），与常微分方程系统（78）和分布式波动偏微分方程（79）–（81）的级联相关的平均系统是指数稳定的。

接下来，根据适用于无限维系统的平均理论，对于足够大的 ω，由（32）—（35）给出的闭环系统（其中 $U(t)$ 定义于（83））存在唯一的指数稳定周期解，该解在其平衡点（原点）附近，并满足（88）。

另一方面，对（27）两边取绝对值，可得渐近收敛到极值点邻域的结论：

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a\sin(\omega t)|. \tag{93}$$

考虑（93），并通过加上和减去周期解 $\vartheta^{\Pi}(t)$ 对其进行改写，可得：

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) - \vartheta^{\Pi}(t) + \vartheta^{\Pi}(t) + a\sin(\omega t)|. \tag{94}$$

应用平均定理 [10]，可得 $\vartheta(t) - \vartheta^{\Pi}(t) \to 0$ 指数收敛。因此，可得：

$$\limsup_{t\to\infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \limsup_{t\to\infty} |\vartheta^{\Pi}(t) + a\sin(\omega t)|. \tag{95}$$

最后，利用（88）中的关系，可得 ˜ 中（90）所示的结果。假设 $\theta(t) - \Theta^* = \theta(t) + S(t)$，如（25）和（26）所定义，并注意到（16）中的 $S(t)$ 的阶为 $\mathcal{O}(a\omega|\cot(\omega D)|)$，则有以下最终界

$$\limsup_{t\to\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{96}$$

由此得到 (89)。为证明输出$y(t)$的收敛性，可以按照证明 $\Theta(t)$时所用的相同步骤，将 (90) 代入 (3)，从而得到：

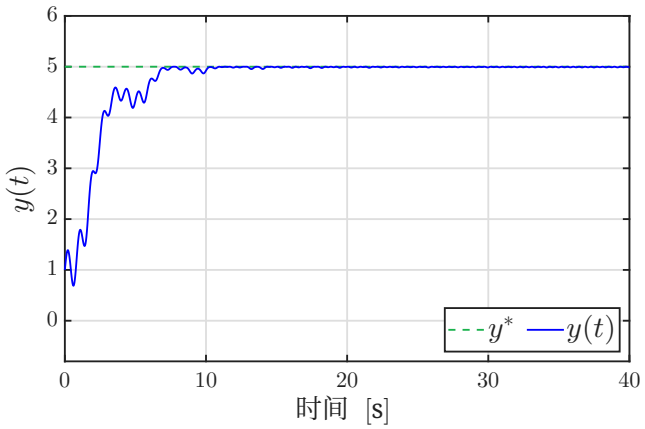
$$\limsup_{t\to\infty} |y(t) - y^*| = \limsup_{t\to\infty} |H\vartheta^2(t) + Ha^2\sin^2(\omega t)|. \tag{97}$$

因此，通过用 $\vartheta^{\Pi}(t)$ 重写（97），并再次利用（88），最终可得（91）。□

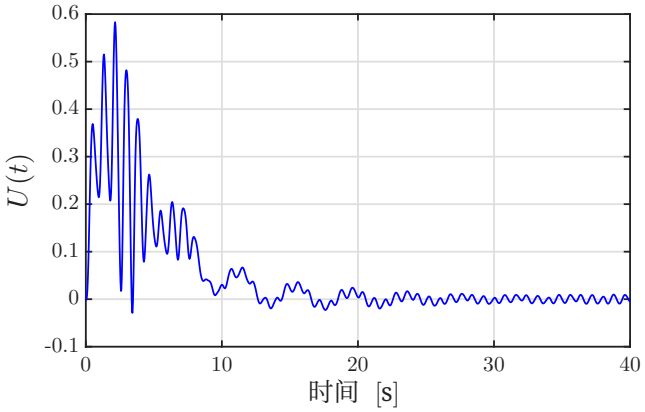
5 数值结果

本节通过数值仿真展示所提方法的有效性。考虑一个海森矩阵为 $H = -2$、优化器为 $\Theta^* = 2$ 且最优输出为 $y^* = 5$ 的静态映射（2）。对于（4）–（7）中的波动偏微分方程，我们考虑定义域 $D = 1$，该方程描述了执行器的动态特性及其分布效应。对于控制器（83），我们采用增益 $K = 0.1$ 和相应低通滤波器的截止频率 $c = 10$。对于扰动信号和解调信号，取 $a = 0.1$ 和 $\omega = 7.5$ rad/s，这也满足条件（14）。

由带有分布式效应的波动偏微分方程驱动的 ESC 系统，其静态映射的输出 $y(t)$
其效果如图 2(a) 所示，可以观察到 $y(t)$ 收敛到未知极值点 $y^* = 5$ 的邻域。图 2(b) 展示了按照（83）实现的分布式波动偏微分方程补偿控制器的信号 $U(t)$。



(a) 静态映射的输出 $y(t)$。



（b）控制信号 $U(t)$。

图 2. 使用控制器（83）对由具有分布式效应的波动偏微分方程控制的执行动态下的 ESC 系统进行闭环仿真。

执行器输入 $\theta(t)$ 和分布式执行器输入 $\Theta(t)$ 的信号如图3所示。还可以注意到，这两个信号都收敛到优化器 $\Theta^* = 2$ 的邻域。

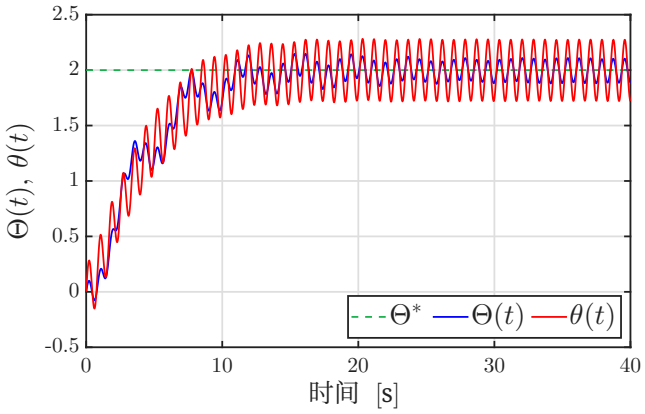
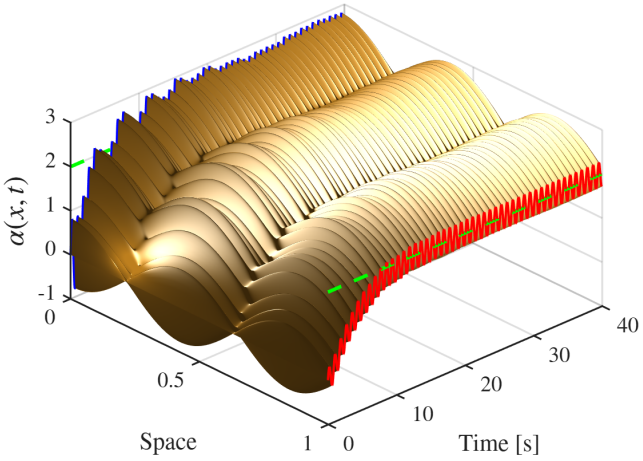
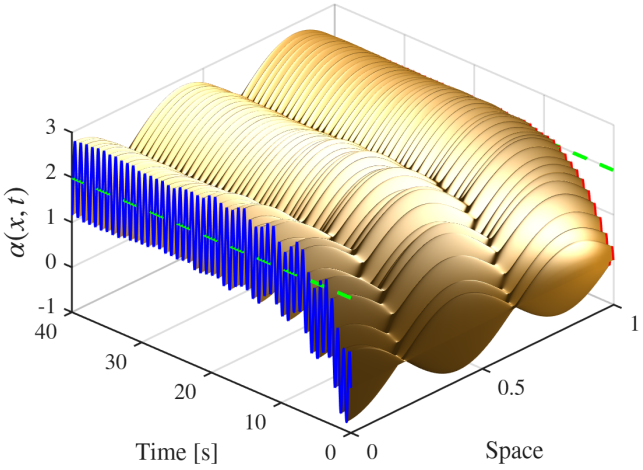


图3. 闭环仿真中的信号 $\theta(t)$ 和 $\Theta(t)$。

图4展示了闭环系统的分布式波动偏微分方程 (4)–(7) 在三维空间中的演化，其中空间域为 $x \in [0, 1]$，时间为 t。蓝色和红色曲线分别显示了 $\alpha(0, t)$ 和 $\theta(t) = \alpha(D, t)$ 收敛到优化器 $\Theta^* = 2$ 周围一个小邻域的过程。



(a) $\theta(t) = \alpha(D, t)$ 的视图（红色）。



(b) $\alpha(0, t)$ 的视图（蓝色）。

图 4. 三维空间中状态 $\alpha(x, t)$ 的收敛性。红色信号为 $\theta(t) = \alpha(D, t)$，而蓝色信号为 $\alpha(0, t)$，二者均趋近于 $\Theta^* = 2$ 的邻域。

6 结论

本文研究了执行器动态受波传播效应支配的分布式波动偏微分方程的极值寻优控制问题。通过恰当定义估计误差，并设计分布式波动偏微分方程补偿器及合适的扰动信号，严格证明了所得闭环平均系统的指数稳定性。因此，研究表明，系统轨迹会收敛到未知极值点周围的一个小邻域。数值仿真清楚地展示了所提出的边界极值寻优控制策略的有效性，即使存在这类更广泛的分布式偏微分方程也是如此。

尽管针对具有分布式时延或扩散型动力学的系统，已有相关的极值寻优控制研究成果，但由于控制方程具有根本不同的双曲特性，这些方法无法直接扩展到本文所考虑的波动偏微分方程场景。特别是，本文所研究的控制设计和轨迹生成问题，与现有基于时滞补偿或抛物型偏微分方程框架的方法存在显著差异。本文提出的稳定性分析不依赖于基于降阶的技术，而是采用针对波动偏微分方程动力学定制的反步法启发式设计

此外，所提出的轨迹生成机制相较于现有极值寻优控制文献构成了一项新颖贡献，尤其适用于处理分布式波效应。据作者所知，这是将极值寻优控制系统地扩展至具有分布式动力学的波偏微分方程驱动系统的首批工作之一。

致谢

本研究得到巴西资助机构 CNPq（资助编号：309008/2022-0 和 308791/2025-8）、CAPES（财务代码001）和 FAPERJ 的支持。

参考文献

[1] M. Abdelgalil 和 J. I. Poveda。无需初始化的李括号极值寻优。《系统与控制快报》，191:105881，2024。[2] K. Ariyur 和 M. Krstić。《极值寻优控制实时优化》。威利，2003。[3] G. Bastin、D. Nešić、Y. Tan 和 I. Mareels。多值代价函数生物过程中的极值寻优。《生物技术进展》，25(3):683–689，2009。[4] N. Bekiaris-Liberis 和 M. Krstic。补偿多输入多输出线性时不变系统执行或感测路径中波动偏微分方程的分布式效应。《系统与控制快报》，59:713–719，2010。[5] N. Bekiaris-Liberis 和 M. Krstic。补偿多输入多输出线性时不变系统中扩散与逆对流的分布式效应。*IEEE* 自动控制汇刊，56(3):637–643，2011。[6] P. H. S. Coutinho、T. R. Oliveira 和 M. Krstić。针对具有分布式扩散偏微分方程的标量映射的极值寻优控制。*IEEE* 自动控制汇刊，70:4865–4872，2025。[7] J. Feiling、S. Koga、M. Krstić 和 T. R. Oliveira。针对执行器动态由扩散偏微分方程支配的静态映射的梯度极值寻优。《自动化》，95:197–206，2018。[8] D. C. Ferreira、T. R. Oliveira 和 M. Krstic。时滞条件下的逆最优极值寻优。《系统与控制快报》，177:105534，2023。[9] A. Ghaffari、M. Krstić 和 D. Nesić。基于多变量牛顿法的极值寻优。《自动化》，48:1759–1767，2012。[10] J. K. Hale 和 S. V. Lunel。无限维平均。《积分方程与应用杂志》，2:463–494，1990。[11]A. Jbara、E. Fridman 和 X. Yang。存在时滞时静态映射无偏极值寻优的构造方法。《系统与控制快报》，205:106256，2025。[12] H. K. Khalil。《非线性系统》。普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河镇，新泽西州，美国，第3版，2002。[13]M. Krstić。用于时滞系统预测器反馈的李雅普诺夫工具：逆最优性及对时滞失配的鲁棒性。《自动化》，44:2930–2935，2008。[14] M. Krstic、A. Ghaffari 和 S. Seshagiri。风能和太阳能应用中的极值寻优。载于第*11*届世界智能控制与自动化大会论文集，第6184–6193页。IEEE，2014。[15]M. Krstic 和 A. Smyshlyaev。《偏微分方程的边界控制：反步设计教程》。工业与应用数学学会，2008。[16]M. Krstić 和 H.-H. Wang。一般非线性动态系统极值寻优反馈的稳定性。《自动化》，36:595–601，2000。[17] M. Leblanc。论采用高频交流电实现铁路电气化。《电学总评论》，12:275–277，1922。[18] C. Manzie 和 M. Krstic。具有随机扰动的极值寻优。《*IEEE* 自动控制汇刊》，54:580–585，2009。[19]A. S. Matveev、M. C. Hoy 和 A. V. Savkin。动态环境场中移动机器人的无需导数估计的极值寻优导航。《*IEEE* 控制系统技术汇刊》，24(3):1084–1091，2015。[20]T. R. Oliveira、J. Feiling、S. Koga 和 M. Krstić。偏微分方程动态系统的多变量极值寻优。*IEEE* 自动控制汇刊，65(11):4949–4956，2020。[21]T. R. Oliveira 和 M. Krstic。偏微分方程–偏微分方程级联系统的极值寻优边界控制。《系统与控制快报》，155:105004，2021。[22]T. R. Oliveira 和 M. Krstic。结合波动偏微分方程补偿的极值寻优反馈。动态系统、测量与控制杂志，143(4):041002，2021。[23]T. R. Oliveira 和 M. Krstic。通过时滞和偏微分方程实现极值寻优。工业与应用数学学会，2022。[24] T. R. Oliveira 和 M. Krstic。无限维系统的极值寻优。控制年度评论，56:100908，2023。[25]T. R. Oliveira、M. Krstić 和 D. Tsubakino。带时滞静态映射的极值寻优。*IEEE* 自动控制汇刊，62(4):1911–1926，2017。[26]V. H. P. Rodrigues、T. R. Oliveira、L. Hsu、M. Diagne 和 M. Krstic。事件触发和周期事件触发极值寻优控制。《自动化》，174:112161，2025。[27]D. Rušiti、G. Evangelisti、T. R. Oliveira、M. Gerdts 和 M. Krstić。带时滞动态映射的随机极值寻优。*IEEE* 控制系统快报，3(1):61–66，2018。[28] G. C. Santos 和 T. R. Oliveira。非恒定时滞下的梯度极值寻优。*IEEE Access*，8:120429–120446，2020。[29]A. Scheinker。极值寻优百年：综述。《自动化》，161:111481，2024。[30]P. C. S. Silva、P. C. Pellanda、T. R. Oliveira、G. A. de Andrade 和 M. Krstic。具有 Kelvin-Voigt阻尼的一类波动偏微分方程的极值寻优。*IEEE* 控制系统快报，8:43–48，2024。[31] A. Smyshlyaev 和 M. Krstic。对未控边界上存在反阻尼的反稳定波动方程进行边界控制。《系统与控制快报》，58(8):617–623，2009。[32] Y. Tan、W. H. Moase、C. Manzie、D. Nešić 和 I. M. Mareels。1922年至2010年的极值寻优。载于第*29*届中国控制会议论文集，第14–26页。IEEE，2010。[33]D. Tsubakino、T. R. Oliveira 和 M. Krstic。分布式时延的极值寻优。《自动化》，153:111044，2023。[34]C. T. Yilmaz 和 M. Krstic。使用啁啾探测实现时滞和偏微分方程的预设时间极值寻优。*IEEE* 自动控制汇刊，69(11):7710–7725，2024。[35]H. Yu、S. Koga、T. R. Oliveira 和 M. Krstic。带下游瓶颈的交通拥堵控制极值寻优。动态系统、测量与控制杂志，143(3):031007，2021。