无限矩阵舒伯特簇的反对角初始复形是科恩–麦考利的

ANNA NATALIE CHLOPECKI、NATHANIEL GALLUP 和 JASON MEINTJES

Abstract. 我们证明，在某些约束条件下，无限单纯复形的斯坦利–赖斯纳环在理想意义下是科恩–麦考利的，且是弱布尔巴基无混合的。我们将这一结果应用于证明所需的结论——相对于反对角项序， S_∞ 中与无限置换相对应的矩阵舒伯特簇的初始复形是科恩–麦考利的（意义相同），由此得到非诺特科恩–麦考利环的新例子。

arXiv:2601.02612v1 [math.AC] 6 Jan 2026

1. Introduction

1979年，Kind 和 Kleinschmidt 证明，若有限纯单纯复形 Δ 是可剥壳的，则其斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta]$ 是科恩–麦考利的 [KK79]。Hochster 在1972年发表的工作中也隐含了这一结论；他证明，若有限纯单纯复形 Δ 是可构造的，则 $k[\Delta]$ 是科恩–麦考利的 [Hoc72]。这些结果以及 Stanley、Reisner 等人的成果，为构造科恩–麦考利环的例子提供了有效的组合工具。例如，Knutson、Miller 和 Sturmfels 证明，与矩阵舒伯特簇的初始理想（相对于任意反对角项序）相关联的单纯复形是可剥壳的；结合 Kind 和 Kleinschmidt 的结果可知，其斯坦利–赖斯纳环是科恩–麦考利的（见 [KM05], [MS05]）。

人们一直对将科恩–麦考利条件推广到非诺特环颇感兴趣（参见[Gla94], [Gla95], [HM07], 和 [AT09], ，后者提供了很好的综述）。在诺特情形下，科恩–麦考利环有许多等价定义，但这些定义在非诺特情形下并不再等价。因此，人们提出了若干种非诺特环的科恩–麦考利性质定义，其中最强的是理想意义下的科恩–麦考利和弱布尔巴基无混合（参见 [AT09]，其中解释了各种概念之间颇为复杂的关系）。在 [ADT14, Corollary 3.8], 中，Asgharzadeh、Dorreh 和 Tousi 给出了一种构造满足这些最强定义的环的好方法：任意诺特科恩–麦考利环的平坦直接极限，同时满足理想意义下的科恩–麦考利性质和弱布尔巴基无混合性质。我们将这类环称为平坦直极限意义下的科恩–麦考利环。

本文旨在将上述技术推广到无限维情形，从而给出组合性质良好的非诺特科恩–麦考利环的例子。我们证明以下定理；在某些条件下，该定理保证无限维单纯复形的斯坦利–赖斯纳环在平坦直极限意义下是科恩–麦考利的。

定理 A. 设 Δ 是一个单纯复形，使得 $V(\Delta)$ 可数。假设存在一个由 Δ 的有限满子复形组成的递增序列 $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$，满足 Δ_n 是科恩–麦考利的，且 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta$。那么，斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta]$ 是斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta_n]$ 的平坦直极限，因此在平坦直极限意义下是科恩–麦考利的。

定理 A 还有一种关于环的等价表述，我们现在给出。

定理 B。 设 X 为可数集， $R = k[X]$ 为多项式环，且 $J \subseteq R$ 为平方自由单项式理想。假设存在有限子集的递增序列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X$，使得 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在平方自由单项式理想 $J_n \subseteq R_n := k[X_n]$，使得 R_n/J_n 是科恩–麦考利的。进一步假设， $\iota_n(J_n) \subseteq J_{n+1}$、 $\pi_n(J_{n+1}) \subseteq J_n$以及 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(J_n)R = J$，其中我们将 $\eta_n : R_n \to R$ 和 $\iota_n : R_n \to R_{n+1}$ 分别记为包含映射，并将 $\pi_n : R_{n+1} \to R_n$ 记为投影

Date: 2026年1月7日。

映射：当 $x \mapsto x$ 时映射 $x \in X_n$，否则映射 $x \mapsto 0$。那么， R/J 在平坦直极限意义下是科恩–麦考利的。

我们将定理 B 应用于关于 R 上项序的初始理想情形，得到如下结果。

定理 C. 采用与定理 B 相同的记号。对每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $I_n \subseteq R_n$ 是一个理想，满足 $\iota_n(I_n) \subseteq I_{n+1}$ 且 $\pi_n(I_{n+1}) \subseteq I_n$。设 $<$ 是 R 上的项序， $<_n$ 是 $<$ 在 R_n 上的限制，并且对所有 n， $R_n/$ 在 $<_n(I_n)$ 中都是科恩–麦考利的。定义 $I := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R$。那么， $R/$ 在 $<(I)$ 中是平坦直极限意义下的科恩–麦考利。

在 [Gal21]，中，第二作者引入了无限矩阵舒伯特簇的概念，并将其与可数维向量空间中完全旗的模空间联系起来；该模空间的格罗滕迪克环被识别为某些形式幂级数构成的空间 [Gal23]。本文中，我们利用定理 C 证明下述定理 D。

定理 D。 设 $\sigma \in S_\infty$ 是与 σ 相关联的舒伯特行列式理想。假设 $<$ 是 $T = k[x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}]$ 上的任意反对角项序。那么，$<(I_\sigma)$ 中的 $T/$ 在平坦直极限意义下是科恩–麦考利的。

本文的结构如下。第 2 节讨论无限维单纯复形、无限情形下的斯坦利–赖斯纳对应的一个版本，以及我们所需的子复形的各种性质。第 3 节证明，如果 Δ 是 Σ 的满子复形，那么 $k[\Delta]$ 的某些线性参数系可以扩展为 $k[\Sigma]$ 的相容参数系。第 4 节利用前两节的结果证明，如果 Δ 是 Σ 的满子复形，那么包含映射 $k[\Delta] \to k[\Sigma]$ 是平坦的。第 5 节将这一结果应用于无限单纯复形的有限满子复形链，从而证明定理 A 和 B。第 6 节证明，通过限制单项式序，我们可以将主定理推广到初始复形，从而证明定理 C。最后，第 7 节将这一结果应用于无限矩阵舒伯特簇，得到定理 D。

2. Potentially Infinite Simplicial Complexes and Stanley-Reisner Rings

定义在可数集 V（称为顶点集）上的单纯复形是由 Δ 的**有限**子集（称为面）构成的集合，并满足如下性质：如果 $A \in \Delta$ 且 $B \subseteq A$，那么 $B \in \Delta$。注意，如果 Δ 是定义在 V 上的单纯复形，且 $V \subseteq W$，那么 Δ 也是定义在 W 上的单纯复形。定义在集合 V 上的单纯复形 Δ 的顶点是集合 $V(\Delta) = \{v \in V \mid \{v\} \in \Delta\}$ 的元素。

如果 Δ 是有限集，我们就称它为有限单纯复形。 Δ 的维数为 $\dim\Delta = \max\{|A| \mid A \in \Delta\} - 1$。如果 V 是有限的，那么显然 $\dim\Delta$ 也是有限的。然而，如果 Δ 是无限的（因此 V 也是无限的），那么 $\dim\Delta$ 可能有限，也可能无限。

F 的一个面称为 Δ 的**极大面**，如果它在所有面中相对于包含关系是极大的。有限维单纯复形 Δ 称为**纯** 的，如果它的所有极大面大小相同。注意，如果V 是有限的，那么每个面都包含在某个极大面中；但如果 Δ是无限的，这就不再成立。事实上， Δ 可能没有极大面。

例 1. 设 $V = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$，并令 Δ 为 V的所有有限子集构成的集合。显然， Δ是一个单纯复形，即无限维单纯形。注意， Δ没有极大面。

例 2. 设 $V = \mathbb{N}$，并令 Δ 为 V中大小至多为 n的所有子集构成的集合，其中 $n \in \mathbb{N}$为某个固定值。那么， Δ 是一个 $(n-1)$维单纯复形，其顶点集是无限的。

给定一个有限子集 $A \subseteq V$，定义 $\mathbf{x}^A = \prod_{v\in A} x_v \in k[x_v \mid v \in V]$。注意，这是一个平方自由单项式。若 Δ 是一个顶点集为 V 的单纯复形，则定义 $I_{\Delta,\, V}$为由平方自由单项式集合 $\{\mathbf{x}^A \mid A \subseteq V,\ A$ 有限 $A \notin \Delta\}$生成的理想。

当 V 是有限集时，映射 $\Delta \mapsto I_{\Delta,\, V}$ 众所周知是 V 上的单纯复形集合与 $k[x_v \mid v \in V]$中的平方自由单项式理想集合之间的双射；这归功于 Reisner [Rei76]。回顾一下， $k[x_v \mid v \in V]$ 的平方自由单项式理想 是一个可由平方自由

单项式生成的理想。事实证明，即使 V 是无限集，这个映射仍然是双射。这依赖于以下关于可数多个变量的多项式环中的单项式理想的事实。

多项式环 $R = k[x_1, x_2, \ldots]$ 上有一个 $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 分次，它将 $\deg(x_i)$ 赋值为 $= e_i$ （ $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 中的第 i 个标准基向量），并对所有 $a \in k$ 将 $\deg(a)$ 赋值为 $= 0$ 。 $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 的元素记作 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$，或简记为 (a_i)；单项式 $\prod_{i\in\mathbb{N}} x_i^{a_i}$ 记作 $\mathbf{x}^{(a_i)}$。关于此分次齐次的理想称为单项式理想。它们恰好是可以由单项式生成的理想（见 [Gal23，命题 2]）。与有限变量的情形一样，若 I 是一个单项式理想，且 C 是生成 I 的单项式集合，那么 R 中的单项式 r 属于 I，当且仅当 $r = sc$，其中 $c \in C$，且 $s \in R$ 也是单项式。

将 $<_{\text{div}}$ 上的整除序记为 $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$，即 $(a_i) \leq_{\text{div}} (b_i)$ 当且仅当对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $a_i \leq b_i$ 。

引理 1. 在子集 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\oplus\mathbb{N}}$ 上，整除序是良基的，也就是说，每个非空子集都有一个极小元。

证明。给定任意序列 $(b_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\oplus\mathbb{N}}$，其中除有限多个外，$b_i$ 都为零。因此，$\ell((b_i)) := \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是有限的。若 $(a_i) <_{\text{div}} (b_i)$，则必有 $\ell((a_i)) < \ell((b_i))$。因此，将 ℓ 应用于 $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\oplus\mathbb{N}}$ 中任意严格下降链，我们得到 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 中的严格下降链。由于后者是良序的，不存在无限长的此类链，因此前者是良基的。■

命题 1. 假设 $I \subseteq k[x_1, x_2, \ldots]$ 是一个单项式理想。所有满足性质 (a_i) 是集合 $\{(b_i) \mid \mathbf{x}^{(b_i)} \in I\}$ 的一个 $<_{\text{div}}$-极小元的单项式 $\mathbf{x}^{(a_i)}$构成的集合 C，是 I唯一的极小单项式生成集（相对于包含关系而言）。

证明。首先，我们证明 C生成 I。给定 I中的一个单项式 $\mathbf{x}^{(b_i)}$，集合 $\{(a_i) \mid \mathbf{x}^{(a_i)} \in I \text{ 和 } (a_i) \leq_{\text{div}} (b_i)\}$非空（它包含 (b_i)），因此根据引理 1，它有一个极小元——记作 (b_i')。注意，$\mathbf{x}^{(b_i')}$实际上属于 C。此外，由于 $(b_i') \leq_{\text{div}} (b_i)$，存在某个 $(c_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\oplus\mathbb{N}}$，使得 $(b_i') + (c_i) = (b_i)$，这意味着 $\mathbf{x}^{(b_i')}\mathbf{x}^{(c_i)} = \mathbf{x}^{(b_i)}$。因此，$\mathbf{x}^{(b_i)}$属于由 C生成的理想。由于 I 是一个单项式理想，它由其包含的单项式集合生成。因此，I 也由 C 生成。

现在我们证明，C 是关于包含关系的极小生成集。事实上，假设 C' 是 C 的真子集，且它也生成 I。那么，存在某个$\mathbf{x}^{(c_i)} \in C \setminus C'$，它必须属于由 C'生成的单项式理想，因此必定是 C'中某个单项式的倍数；也就是说，存在某个$\mathbf{x}^{(c_i')} \in C'$，使得$\mathbf{x}^{(c_i')}\mathbf{x}^{(d_i)} = \mathbf{x}^{(c_i)}$。但是，这意味着$(c_i') + (d_i) = (c_i)$，其中$(d_i)$非零，因为根据假设$\mathbf{x}^{(c_i)} \notin C'$。因此$(c_i') <_{\text{div}} (c_i)$，这与$(c_i)$的极小性矛盾。

最后，我们证明 C 是唯一的。假设 D 是 I的另一个极小单项式生成集。那么，对于任意$\mathbf{x}^{(c_i)} \in C$，必有$\mathbf{x}^{(c_i)}$ 是某个单项式$\mathbf{x}^{(d_i)} \in D$的倍数。然而，如上所述，这意味着$(d_i) \leq_{\text{div}} (c_i)$，因此根据$(c_i)$的极小性，必有$(d_i) = (c_i)$。于是$C \subseteq D$。由于 D 在所有生成集中关于包含关系是极小的，因此必有 $C = D$，证毕。■

由命题 1，我们可以轻易得到所需的双射，其证明与有限情形类似，但为完整起见，我们仍将其列出。

命题2。 设 V 是任意可数集。映射 $\Delta \mapsto I_{\Delta,\, V}$ 是 V 上的单纯复形集合与 $k[x_v \mid v \in V]$中的平方自由单项式理想集合之间的一个双射。

证明。记 $\mathcal{C}$ 为 V 上的所有单纯复形构成的集合，记 $\mathcal{I}$ 为 $k[x_v \mid v \in V]$的所有平方自由单项式理想构成的集合。定义映射

$$\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{I} \quad \text{by} \quad \varphi(\Delta) = \langle \mathbf{x}^A \mid A \subseteq V,\, A \text{ finite},\, A \notin \Delta \rangle, \text{ and}$$

$$\psi : \mathcal{I} \to \mathcal{C} \quad \text{by} \quad \psi(I) = \{A \subseteq V \mid A \text{ finite},\, \mathbf{x}^A \notin I\}.$$

We m只需证明上述映射均定义良好，且互为逆映射 r.

假设 $\Delta \in \mathcal{C}$ 使得 $\varphi(\Delta) = \langle \mathbf{x}^A \mid A \subseteq V,\ A$ 有限。对于给定的生成元 $\mathbf{x}^A$，由于已知 $A \subseteq V$且 A有限，我们必然有 $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$，其中涉及有限个互不相同的 $v_i \in V$。因此，$\mathbf{x}^A$ 是 $k[x_v \mid v \in V]$中的一个有效平方自由单项式，故 $\varphi(\Delta) \in \mathcal{I}$。

现在假设 $I \in \mathcal{I}$ 使得 $\psi(I) = \{A \subseteq V \mid A \text{ 有限}, \mathbf{x}^A \notin I\}$。令 $F \in \psi(I)$ 为任意一个面，并反设存在某个 $G \subseteq F$，使得 $G \notin \psi(I)$。由于 $F \in \psi(I)$，我们有 F 是 V 的有限子集，且 $\mathbf{x}^F \notin I$。由于 F 有限，$G \subseteq F$ 也必定有限。因此，阻止 G 属于 $\psi(I)$ 的唯一条件必定是 $\mathbf{x}^G \in I$。但根据理想的封闭性，$\mathbf{x}^G \cdot \mathbf{x}^{F \smallsetminus G} = \mathbf{x}^F \in I$，这就产生了矛盾。由此可知，$\psi(I) \in \mathcal{C}$ 是一个有效的单纯复形。

现在我们验证 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 和 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{I}}$。对于第一个复合，设 $\Delta \in \mathcal{C}$；我们将证明 $\psi(\varphi(\Delta)) = \Delta$。令 $F \in \Delta$ 为任意一个面。由于 $F \in \Delta$，我们有 $F \subseteq V$, F 是有限的，并且 $\mathbf{x}^F \notin \varphi(\Delta)$，从而 $F \in \psi(\varphi(\Delta)) := \{A \subseteq V \mid A\text{有限}, \mathbf{x}^A \notin \varphi(\Delta)\}$，因此 $\Delta \subseteq \psi(\varphi(\Delta))$。反过来，设 $G \in \psi(\varphi(\Delta))$ 是任意一个面，使得 $G \subseteq V$, G 有限，且 $\mathbf{x}^G \notin \varphi(\Delta)$。那么，由于 G 是 V 的有限子集，并且单项式 $\mathbf{x}^G$ 不属于 $\varphi(\Delta)$，我们必有 $G \in \Delta$。因此，$\psi(\varphi(\Delta)) \subseteq \Delta$，从而 $\Delta = \psi(\varphi(\Delta))$。

对于第二个复合，令 $I \in \mathcal{I}$；我们将证明 $\varphi(\psi(I)) = I.$。假设 $\mathbf{x}^{A'} \in I$ 是 I 的一个极小生成元，并且为导出矛盾，假设 $\mathbf{x}^{A'}$ 不是 $\varphi(\psi(I))$的极小生成元。由于 $\mathbf{x}^{A'} \in I$, A' 是 V的有限子集。注意 $A' \notin \psi(I)$。因此，$\mathbf{x}^{A'} \in \varphi(\psi(I))$。既然我们现在已经证明 $I \subseteq \varphi(\psi(I))$，而且假设 $\mathbf{x}^{A'}$ 不是 $\varphi(\psi(I))$的极小生成元，那么必有 $\mathbf{x}^{A'} = \mathbf{x}^B \cdot \mathbf{x}^C$，其中某个 $\mathbf{x}^B$ 是 $\varphi(\psi(I))$的极小生成元，且某个 $\mathbf{x}^C$不是单位元，这与 $\mathbf{x}^{A'}$的极小性矛盾。类似的论证表明，$\varphi(\psi(I)) \subseteq I$，并且 $\varphi(\psi(I))$的每个极小生成元都是 I的一个极小生成元。由于这两个理想具有相同的极小生成集，再由命题 1，$\varphi(\psi(I)) = I$。■

注记 1. 对于无限集上的单纯复形，有几种不同的可能定义。例如，可以将 V 上的单纯复形定义为幂集 V 的**任意**（可能是无限）子集，且该子集对取子集运算封闭。然而，采用此定义时，$\Delta \mapsto I_{\Delta,V}$ 并不是双射。例如，若 $V = \mathbb{N}$，且 Δ 是 V 的所有真子集（即不包含 V 本身）组成的集合，而 Δ' 是整个幂集，那么 $I_{\Delta,V} = I_{\Delta',V} = 0$。

若 Δ 是顶点集为 V 的单纯复形，则其斯坦利–赖斯纳环（或面环）定义为 $k[\Delta] := k[x_v \mid v \in V]/I_{\Delta,V}$。注意，尽管这看起来取决于 V，但若 Δ 也是定义在 W 上的单纯复形，则存在典范同构 $k[x_v \mid v \in V]/I_{\Delta,V} \cong k[x_w \mid w \in W]/I_{\Delta,W}$，因为 V 中任何不是 Δ 顶点的元素都会在商环中变为零（对 W 也同样如此）。

定义 1. 若 Δ 和 Σ 是单纯复形，我们称 Δ 是 Σ 的子复形，当且仅当 $\Delta \subseteq \Sigma$。若只要 $A \in \Sigma$ 且对所有 $w \in A$，都有 $w \in V(\Delta)$，就有 $A \in \Delta$，则称 Δ 是 Σ 的满复形。最后，若 Δ 是 Σ 的子复形且是 Σ的满复形，则称 Δ 是 Σ的满子复形。

例 3. 设 $V = [n] := \{1, 2, , \ldots, n\}$，其中某个固定的 $n \in \mathbb{N}$满足 $n > 2$，且 $W = \mathbb{N}$。令 Δ为 V 的所有子集构成的集合，但排除包含 $\{1,2\}$的子集；令 Σ 为 W的所有有限子集构成的集合，但排除包含 $\{1,2\}$ 或 $\{n+1, n+2\}$ 的子集。于是，Δ 是一个有限单纯复形，其面为 $\{1,3,4,\ldots,n\}$ 和 $\{2,3,4,\ldots,n\}$；而 Σ是一个没有面的无限单纯复形。我们有 $k[\Delta] = k[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1 x_2 \rangle$和 $k[\Sigma] = k[x_1, x_2, \ldots]/\langle x_1 x_2,\ x_{n+1}x_{n+2} \rangle$. 注意，$\Delta$ 是 Σ的满子复形。

假设 $V \subseteq W$。如果 Δ 是定义在 V 上的单纯复形，Σ 是定义在 W 上的单纯复形，且 Δ 是 Σ 的子复形，那么存在自然包含映射 $\iota\colon\ k[x_v \mid v \in V] \to k[x_w \mid w \in W]$，它将 $x_v \mapsto x_v$ 映为 .....；以及自然投影 $\pi\colon\ k[x_w \mid w \in W] \to k[x_v \mid v \in V]$，它在 $w \in V$ 时将 x_w 映为 x_w，否则映为 0。注意，$\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{k[x_v \mid v \in V]}$。下面的命题表明，这些映射可下降为面环之间的映射。

命题 3。 设 Δ 是定义在 V 上的单纯复形，Σ 是定义在 W 上的单纯复形，并假设$V \subseteq W$。

(1) 以下各项等价。(a) Δ是 Σ的子复形。
(b) $\pi(I_{\Sigma,\ W}) \subseteq I_{\Delta,\ V}$。(c) π 诱导出映射 $\pi : k[\Sigma] \to k[\Delta]$。(2) 以下各项等价。

(a) Δ 是 Σ的满复形。(b) $\iota(I_{\Delta,\ V}) \subseteq I_{\Sigma,\ W}$。(c) ι 诱导出映射 $\iota\colon k[\Delta] \to k[\Sigma]$。

若两组条件都成立，则 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{k[\Delta]}$。

证明。在两种情况下，(b) 与 (c) 等价都是显然的。在情形 (1) 中，为了证明 (a) 与 (b) 等价，设 Δ 是 Σ 的子复形，并设 $A \subseteq W$ 是 Σ的一个非面有限集。一方面，若 $A \not\subseteq V$，则存在 $w \in A \smallsetminus V$；根据定义，$\pi(x_w) = 0$，因此必有 $\pi(\mathbf{x}^A) = 0$。另一方面，若 $A \subseteq V$，则 A 不可能是 Δ 的面，因为 Δ 是 Σ 的子复形，而 A 不是 Σ的面。因此，$\pi(\mathbf{x}^A) = \mathbf{x}^A \in I_{\Delta,V}$。反过来，设 $\pi(I_{\Sigma,W}) \subseteq I_{\Delta,V}$。令$A \in \Delta$。若 $A \notin \Sigma$，则 $\mathbf{x}^A \in I_{\Sigma,W}$，因此 $\mathbf{x}^A = \pi(\mathbf{x}^A) \in I_{\Delta,V}$。这意味着 $\mathbf{x}^A$ 是某个 $\mathbf{x}^B$的倍数，其中 B 不是 Δ的面。因此，$B \subseteq A$，这意味着 B 是 Δ的面，矛盾。

为证明情形 (2) 中 (a) 与 (b) 等价，假设 Δ 是 Σ 的满复形，并且 $A \subseteq V$不是 Δ的面。那么，A 不可能是 Σ的面，否则根据“满子复形”假设，它就必须是 Δ的面。因此，$\iota(\mathbf{x}^A) \in I_{\Sigma,W}$，这意味着 $\iota(I_{\Delta,V}) \subseteq I_{\Sigma,W}$。反过来，假设 ι诱导出一个映射 $\iota\colon k[\Delta] \to k[\Sigma]$。因此，我们必须有 $\iota(I_{\Delta,V}) \subseteq I_{\Sigma,W}$。设 $A \in \Sigma$ 满足对所有 $w \in A$均有 $w \in V(\Delta)$。若 $A \notin \Delta$，则 $\mathbf{x}^A \in I_{\Delta,V}$。于是，$\mathbf{x}^A = \iota(\mathbf{x}^A) \in I_{\Sigma,W}$。因此，$\mathbf{x}^A$ 是某个 $\mathbf{x}^B$ 的倍数，其中B 不是 Σ的面。不过，这同样意味着 $B \subseteq A$，进而有 $B \in \Sigma$，矛盾。

如果两种情形都成立，那么由于 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{k[x_v \mid v \in V]}$，显然可得 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{k[\Delta]}$。 ■

3. Compatible Systems of Parameters

本节中，设 k 是一个代数闭域。回忆一下，对于一个正分次仿射 k-代数 R，满足 $\dim R = d$，一组齐次元素 $\theta_1, \dots, \theta_d$ 称为一组齐次参数系，当且仅当 R 是 $k[\theta_1, \dots, \theta_d]$ 的整扩张，当且仅当 R 是一个有限 $k[\theta_1, \dots, \theta_d]$-模。一个标准结果（参见 [BH98, 1.5.17]）指出，这样的一组元素总是存在，而且它们在 k 上代数独立。此外，当 k 是无限域时，这组元素可以取为线性的。

在 [Sta79]，中，Stanley 给出了以下矩阵判据，用于检验 Stanley–Reisner 环中的一组线性形式是否构成参数系（SOP）。

引理2。 [Sta79，第 150] 页的注释。假设 k 是一个域，Δ 是顶点集为 $\{1, \dots, n\}$的（$d-1$）维纯单纯复形，并且对于 $1 \le i \le d$、$\theta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,\ j} x_j \in k[\Delta]$ 是一个线性形式。那么，当且仅当对 Δ 的所有极大面 F，$d \times n$ 矩阵 $[a_{i,j}]$ 中以 F 的顶点为列索引的 $d \times d$子式均非奇异时，θ_1，……，θ_d 是 $k[\Delta]$ 的一个参数系。（等价地，对于 Δ 的所有面 F，$d \times n$ 矩阵 $[a_{i,j}]$ 中以 F 的顶点为列索引的相应 $d \times |F|$ 子矩阵的秩为 $|F|$。）

若 θ_1，……，θ_d 是某个斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta]$ 中的一组线性形式，且该环为维数 $d-1$的纯环，满足 $\theta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,\ j} x_j \in k[\Delta]$，则称 $d \times n$ 矩阵 $[a_{i,j}]$ 为线性形式组的矩阵。若该矩阵具有如下性质：以 Δ的某个面为列索引的**所有**子式均不为零，则称这组线性形式是良好的。

命题4。 设 Δ是顶点集为 $\{1, \dots, m\}$、维数为 $d-1$的有限纯单纯复形，Σ是顶点集为 $\{1, \dots, n\}$、维数为 $e-1$ 的有限纯单纯复形，且 Δ是 Σ的满子复形（因此特别有 $m \le n$和 $d \le e$）。假设 $\theta_1, \dots, \theta_d$是 $k[\Delta]$的良好线性参数系。那么存在 $k[\Sigma]$ 的良好线性参数系 $\delta_1, \dots, \delta_e$，使得对于 $1 \le i \le d$，$\pi(\delta_i) = \theta_i$，其中 $\pi : k[\Sigma] \to k[\Delta]$ 是命题 3 的自然投影映射。

证明。 考虑多项式环 $R = k[y_{i,j} \mid 1 \le i \le e, 1 \le j \le n]$ 和 $S = k[z_{i,j} \mid d < i \le e$ 或 $m < j \le n]$。若 $[a_{i,j}]$ 表示线性形式集合 $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ 的 $d \times m$ 矩阵，则存在满环同态 $\varphi : R \to S$，它是在 $(a_{i,j})$ 处的赋值，也就是说，它将 $y_{i,j} \mapsto a_{i,j}$ 映为 $1 \le i \le d$ 和$1 \le j \le m$，并将 $y_{i,j} \mapsto z_{i,j}$ 映为其他值。

如果 $F = \{j_1, \dots, j_b\}$ 是 Σ 的一个面（具有 $j_1 < \dots < j_b$），并且 $p \in R$ 表示变量矩阵 $[y_{i,j}]_{1 \le i \le e, 1 \le j \le n}$ 的一个子式，其列由 F 中的元素索引，行则由某个集合 $\{i_1, \dots, i_b\}$ 索引（具有 $i_1 < \dots < i_b$），我们希望证明 $\varphi(p)$ 是一个非零多项式，属于

S。令 $1 \le a \le b$ 为满足 $i_a \le d$ 和 $j_a \le m$ 的极大对象。注意，子式 $\varphi(p)$ 中单项式 $z_{i_{a+1},j_{a+1}} \cdots z_{i_b,j_b}$ 的系数 $\in S$ 是 $\det(a_{\{i_1,\ldots,i_a\},\{j_1,\ldots,j_a\}})$。由于 $\{j_1,\ldots,j_b\}$ 是 Σ 的一个面，$\{j_1,\ldots,j_a\}$ 也是 Σ 的一个面。因为 Δ 是 Σ 的满子复形，所以 $\{j_1,\ldots,j_a\}$ 也是 Δ 的一个面。我们知道 $\theta_1,\ldots,\theta_d$ 是一个良好参数系统，这意味着 $\det(a_{\{i_1,\ldots,i_a\},\{j_1,\ldots,j_a\}}) \neq 0$。因此，多项式 $\varphi(p)$ 含有一个系数非零的单项式项，因而它是非零的。

由于 Σ 有有限多个面，因此 R 中以这些面为列索引的子式也只有有限多个。我们刚刚证明了这些多项式经 φ 映射后的像均非零，因此这些像对应的有限多个非零点集都是不可约仿射空间 $\operatorname{MaxSpec}(S)$ 的非空扎里斯基开子集，故它们的交集必定非空。任取该交集中的一点 $(b_{i,\ j} \mid d < i \le e$ 或 $m < j \le n)$，对于 $1 \le i \le d$ 和 $1 \le j \le m$，定义 $b_{i,\ j} = a_{i,\ j}$。于是，根据构造，$e \times n$ 矩阵 $[b_{i,j}]$ 具有如下性质：所有以 Σ 的面为列索引的子式都不为零。因此，令 $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,\ j} x_j$，便得到所需的 $k[\Sigma]$ 良好线性参数系统。此外，由于当 $m < j \le n$ 且 $b_{i,\ j} = a_{i,\ j}$ 时，$\pi(x_j) = 0$；而当 $1 \le i \le d$ 且 $1 \le j \le m$ 时，$\pi(\delta_i) = \theta_i$，故当 $1 \le i \le d$ 时，结论成立，正如所需。■

推论1. 设 Δ 是顶点集为 V 的一个单纯复形（不一定有限），且 $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ 是 Δ 的一个递增序列，其中各项都是纯的有限满子复形，维数分别为 $d_i - 1$，特别地，$d_i \le d_{i+1}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。则存在与该序列相容的线性参数系统，具体而言，对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个线性参数系统 $\theta_{i,1},\ldots\theta_{i,d_i}$，使得 $\pi_{i+1}(\theta_{i+1,j}) = \theta_{i,j}$ 对 $1 \le j \le d_i$ 成立，其中 $\pi_{i+1}\colon\ k[\Delta_{i+1}] \to k[\Delta_i]$。

证明。首先，将集合 $\{v \in V \mid \exists i \in \mathbb{N}, v \in V(\Delta_i)\}$（它是可数集的并，因此必为可数集）用自然数标记，使得对每个 i，Δ_i 中涉及的顶点为 $\{1,\ldots,n_i\}$。特别要注意，对所有 i，$n_i \le n_{i+1}$ 均成立。为证明所需结论，我们将证明每个参数系都可以选取得良好，并且在（诱导的）自然投影映射下满足所需性质，即 π_i。我们对 i 归纳。对于基例，考虑多项式环 $k[y_{i,j} \mid 1 \le i \le d_1, 1 \le j \le n_1]$ 中的理想 I，它由列以 Δ_1 的面为指标的子式生成。于是，I 包含于极大理想 $\langle y_{i,j}\rangle$ 中；又由于 k 代数闭，其非零点集 $D(I) \subseteq \mathbb{A}_k^{d_1 \times n_1}$ 是一个非空的扎里斯基开集。任取一点 $(a_{\alpha,\beta}) \in D(I)$，并令 $\theta_{1,\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n_1} a_{\alpha,\beta} x_\beta \in k[\Delta_1]$ 对 $1 \le \alpha \le d_1$ 成立。于是，根据 Stanley 判据（引理2），$\theta_{1,1},\ldots,\theta_{1,d_1}$ 构成 $k[\Delta_1]$ 的一个良好的线性参数系统。对于归纳步骤，假设对每个 $1 \le \ell \le i$，我们已选取一个良好的线性参数系统 $\theta_{\ell,1},\ldots,\theta_{\ell,d_\ell} \in k[\Delta_\ell]$，其中对 $1 \le \ell < i$，有 $\pi_{\ell+1}(\theta_{\ell+1,j}) = \theta_{\ell,j}$ 对 $1 \le j \le d_\ell$ 成立。根据命题4，存在 $k[\Delta_{i+1}]$ 的一个良好的线性参数系统 $\theta_{i+1,1},\ldots,\theta_{i+1,d_{i+1}}$，使得 $\pi_{i+1}(\theta_{i+1,j}) = \theta_{i,j}$ 对 $1 \le j \le d_i$ 成立。■

4. Flat Homomorphisms

我们回顾一下本节中将要用到的一些术语。设 $f\colon\ A \to B$ 是任意环同态。我们将从 A-模范畴到 B-模范畴的函子记作 $f_!$，该函子将 $M \mapsto M \otimes_A B$ 发送为；将从 B-模范畴到 A-模范畴的函子记作 f^*，该函子将 N 发送为底层阿贝尔群为 N、A-乘法由 $a \cdot n = f(a)\ n$ 给出的 A-模。若 $f_!$ 将短正合列发送为短正合列，则称 f 是平坦的；若 A-模的复形 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 正合当且仅当 B-模的复形 $0 \to f_!L \to f_!M \to f_!N \to 0$ 正合，则称 f 是忠实平坦的。

我们现在将关于这些函子的若干技术性结果汇总为一个引理，这些结果将在本节主要结果的证明中用到。

引理 3。 设 $f\colon\ A \to B$、$g\colon\ B \to C$ 为环同态，并将 A 上的恒等同态记为 id_A。

(1) 从 A-模范畴到 C-模范畴的函子 $g_! \circ f_!$ 与函子 $(g \circ f)_!$ 自然同构。(2) 函子 $(\mathrm{id}_A)_!$ 与 A-模范畴上的恒等函子自然同构。

(3) 若 f^*B 是非零自由 A-模，则 f 忠实平坦。特别地，对于任意变量集 X，包含映射 $A \mapsto A[X]$ 忠实平坦。(4) 若 f^*B 是具有 A- 基 $\{b_i \mid i \in I\}$ 的非零自由 A- 模，且 g^*C 是具有基 $\{c_j \mid j \in J\}$ 的非零自由 B-模，则 $(g \circ f)^*C$ 是具有基 $\{g(b_i)c_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ 的非零自由 A-模。(5) 若 f^*B 是具有 A-基 $\{b_i \mid i \in I\}$ 的非零自由 A-模，则函子 $f_! \circ f^*$ 与函子 $(-)^{\oplus I}$ 自然同构；后者将一个 B-模 N 映为 B-模 $N^{\oplus I}$。(6) 若 K 是任意集合，则函子 $f_! \circ (-)^{\oplus K}$（此处 $(-)^{\oplus K}$ 是 A-模范畴上的自函子）与函子 $(-)^{\oplus K} \circ f_!$（此处 $(-)^{\oplus K}$ 是 B-模范畴上的自函子）自然同构。(7) 若 F 和 G 是阿贝尔范畴之间自然同构的加性函子，则 F 正合当且仅当 G 正合。

证明。(1) 成立，因为存在自然变换 $g_! \circ f_! \to (g \circ f)_!$，对于任意 A-模M，它都是由 $m \otimes b \otimes c \mapsto m \otimes g(b)c$定义的 C-模同构 $(M \otimes_A B) \otimes_B C \to M \otimes_A C$。(2) 成立，因为存在自然变换 $(\mathrm{id}_A)_! \to \mathrm{id}_{A-\mathrm{mod}}$，对于任意 A-模 M，它都是由 $m \otimes a \mapsto am$定义的A-模同构 $M \otimes_A A \mapsto M$。(3) 成立，因为自由模是平坦的；参见例 3.1 [Mat70]。为说明 (4) 为何成立，我们证明张成性和线性无关性。给定任意元素 $c \in C$，可将其写为 $c = \sum_j g(\beta_j)c_j$，其中 $\beta_j \in B$。此外，对每个 j，可将其写为$\beta_j = \sum_i f(\alpha_{i,j})b_i$，其中 $\alpha_{i,j} \in A$。因此，$c = \sum_{i,j} g(f(\alpha_{i,j}))g(b_i)c_j$，张成性的证明至此完成。现在证明线性无关性。假设对于某些 $\alpha_{i,j} \in A$，有 $0 = \sum_{i,j} g(f(\alpha_{i,j}))g(b_i)c_j$。于是得到$0 = \sum_j g(\sum_i f(\alpha_{i,j})b_i)c_j$；又由于 $\{c_j \mid j \in J\}$ 线性无关，必有 $g(\sum_i f(\alpha_{i,j})b_i) = 0$，对所有 j 均成立。此外，由于 g^*C 是非零自由 B-模，必有 g 是单射（否则，对于任何非零的 $b \in \in \ker g$，$g(b)c_j = 0$ 都会给出非平凡的线性相关关系），因此对所有 j，都有 $\sum_i f(\alpha_{i,j})b_i = 0$。$\{b_i \mid i \in I\}$ 的线性无关性意味着，对于任意选择的 i 和 j，都有 $f(\alpha_{i,j}) = 0$。由于 f^*B 是非零自由 A-模，f 必为单射。因此，对任意选择的 i 和 j，均有 $\alpha_{i,j} = 0$，证毕。(5) 成立，因为存在自然同构 $(-)^{\oplus I} \to f_! \circ f^*$，它在任意$B$-模 N 上对应于由 $N^{\oplus I} \to f^*N \otimes_A B$ 定义的映射，其中 $(n_i)_{i \in I} \mapsto n_i \otimes b_i$。(6) 成立，因为张量积与直和可交换。(7) 显然。■

回忆一下，对于正分次的 $k[x_1, \dots, x_n]$-模 M，若一列齐次元素$y_1, \dots, y_r$属于 $k[x_1, \dots, x_n]$，则称其为 M上的正则序列（长度为 r），如果

(i) $M/\langle y_1, \dots, y_r \rangle M \neq 0$；并且

(ii) 对每个 $i = 1, \dots, r$，y_i都是 $M/\langle y_1, \dots, y_{i-1} \rangle M$上的非零因子。

对于我们的目的，以下等价条件足以刻画科恩–麦考利性质。

命题 5。 [MS05, 13.37]设 M 是正分次诺特多项式环上的一个维数为 d 的有限生成模。以下条件等价。

(1) M 是科恩–麦考利；(2) M上存在长度为 d 的正则序列；(3) M 的每个（齐次）参数系都是 M 上的正则序列。(4) 对于 M的某个（等价地，每个）齐次参数系 $y_1, \dots, y_d$，M是 $k[y_1, \dots, y_d]$ 上的自由模。

如果一个交换诺特环作为其自身上的模是科恩–麦考利模，我们就称它为科恩–麦考利环；如果一个单纯复形 Δ的对应面环 $k[\Delta]$ 是科恩–麦考利环，我们就称该单纯复形为科恩–麦考利单纯复形。

注 2. 科恩–麦考利复形必定是纯复形，这是一个已知事实。例如，参见 [Sta79] 中定理 1.2 之后的讨论。

命题 6. 设 R 和 S 是有限生成的科恩–麦考利 k-代数，其参数系分别为 $y_1, \dots, y_m$ 和 $z_1, \dots, z_n$。此外，设 $\iota\colon R \to S$和 $\pi\colon S \to R$是 k-代数同态，且满足 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_R$（这尤其意味着 $m \leq n$），并且若 $1 \leq i \leq m$，则 $\pi(z_i) = y_i$。那么，ι 是平坦的。

证明。 由于 $y_1, \ldots, y_m$ 是 R 的参数系，且 R 是科恩–麦考利的，因此映射 $\alpha\colon R' := k[y_1, \ldots, y_m] \to R$ 将 $y_i \mapsto y_i$ 映到……，使 R 成为自由的 R'-模，设其基为 $\{r_i \mid i \in I\}$；而 $\beta\colon S' := k[z_1, \ldots, z_n] \to S$ 将 $z_i \mapsto z_i$ 映到……，使 S 成为自由的 S'-模，设其基为 $\{s_j \mid j \in J\}$。令 $\varphi\colon R' \to S'$ 表示这样一个映射：对 $1 \le i \le m$，它将 y_i 映到 z_i。于是，φ 使 S' 成为自由的 R'-模，其基由变量 $z_{m+1}, \ldots, z_n$ 中的单项式构成，并由集合 T 索引。根据引理 3 的第（3）和第（4）部分，α 和 $\beta \circ \varphi$ 是忠实平坦的。我们有如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\iota}{\frown} & \\ R & \underset{\pi}{\smile} & S \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ R' = k[y_1, \ldots, y_m] & \xrightarrow[\varphi]{} & S' = k[z_1, \ldots, z_n] \end{array}$$

注意，在该命题的假设下，此交换图并不交换，因为我们没有要求 $\iota(y_i) = z_i$。然而，如果移除映射 ι，该交换图确实交换，即有 $\pi \circ \beta \circ \varphi = \alpha$。

设 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 是 R-模的正合列。我们希望证明 $0 \to \iota_! L \to \iota_! M \to \iota_! N \to 0$ 是 S-模的正合列。然而，由于 α 是忠实平坦的，这等价于说明下面的复形是正合的。

$$0 \to \alpha_!(\beta \circ \varphi)^* \iota_! L \to \alpha_!(\beta \circ \varphi)^* \iota_! M \to \alpha_!(\beta \circ \varphi)^* \iota_! N \to 0 \tag{1}$$

但是，$\alpha = \pi \circ \beta \circ \varphi$。因此，根据引理 3 的第 (1) 部分，函子 $\alpha_!$ 自然同构于函子 $\pi_! \circ (\beta \circ \varphi)_!$，这意味着 $\alpha_! \circ (\beta \circ \varphi)^*$ 自然同构于 $\pi_! \circ (\beta \circ \varphi)_! \circ (\beta \circ \varphi)^*$。根据引理 3 的第 (5) 部分，$(\beta \circ \varphi)_! \circ (\beta \circ \varphi)^*$ 自然同构于函子 $(-)^{\oplus K}$，其中 $K := T \times J$。此外，根据引理 3 的第 (6) 部分，有 $\pi_! \circ (-)^{\oplus K} \circ \iota_!$ 自然同构于 $\pi_! \circ \iota_! \circ (-)^{\oplus K}$；根据引理 3 的第 (1) 部分，后者又自然同构于 $(\pi \circ \iota)_! \circ (-)^{\oplus K}$。这进一步自然同构于 $(\mathrm{id}_R)_! \circ (-)^{\oplus K}$；根据引理 3 的第 (2) 部分，后者自然同构于 $(-)^{\oplus K}$。综上，函子 $\alpha_!(\beta \circ \varphi)^* \iota_!$ 自然同构于函子 $(-)^{\oplus K}$。因此，根据引理 3 的第 (7) 部分，方程 1 中的复形是正合的，当且仅当下面的复形是正合的。

$$0 \to L^{\oplus K} \to M^{\oplus K} \to N^{\oplus K} \to 0 \tag{2}$$

注意，方程 2 中的复形是正合的，因为根据假设，$0 \to L \to M \to N \to 0$。 ■

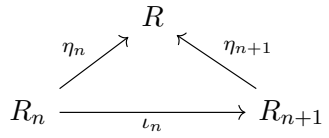
5. Proofs of Theorems A and B

为统一记号，我们先简要回顾一下直接极限的概念。有向集是一个偏序集（P，$\le$），其具有如下性质：对于所有 p、$q \in P$，存在某个 $u \in P$，使得 p、$q \le u$。范畴 $\mathcal{C}$ 中对象的直接系统是一个族 $\{A_p, f_{p,q}\}$，其中 $\{A_p\}_{p \in P}$ 是 $\mathcal{C}$ 中对象的一个族，而 $\{f_{p,q}\colon A_p \to A_q \mid p \le q\}_{p,\, q \in P}$ 是 $\mathcal{C}$ 中态射的一个族，并满足 $f_{p,\, p} = \mathrm{id}_{A_p}$；如果 $p \le q \le u$，则 $f_{q,\, u} \circ f_{p,\, q} = f_{p,\, u}$。范畴 $\mathcal{C}$ 中直接系统 $\{A_p, f_{p,q}\}$ 的直接极限，是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 C，连同一族态射 $\{g_p\colon A_p \to C\}_{p \in P}$，满足 $g_q \circ f_{p,\, q} = g_p$，以及如下泛性质：如果 D 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，且 $\{h_p\colon A_p \to D\}_{p \in P}$ 是满足 $h_q \circ f_{p,\, q} = h_p$ 的一族态射，那么存在唯一的态射 $d\colon C \to D$，使得对于所有 $p \in P$ 都有 $d \circ g_p = h_p$。注意，（容易造成混淆的是）直接极限是范畴论概念中的余极限的一个例子（而不是人们可能期望的极限）。在本文中，所考虑的所有有向集都将是带通常序的 $\mathbb{N}$；如果 $\{A_n, f_{n,m}\}$ 是由 $\mathbb{N}$ 索引的直接系统，我们通常只列出形如 $f_n := f_{n,\, n+1}$ 的映射，因为 $f_{n,\, m}$ 可以通过复合这类映射得到。

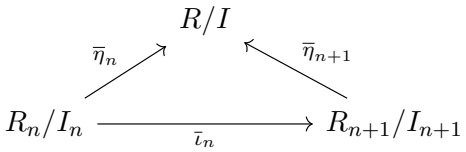
设 X 为一个可数集，$R = k[X]$ 为一个多项式环，且 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X$ 为有限子集的递增序列，使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$。记多项式环 $k[X_n]$ 为 R_n，包含映射为 $\eta_n\colon R_n \to R$ 和 $\iota_n\colon R_n \to R_{n+1}$，并记投影映射 $\pi_n\colon R_{n+1} \to R_n$，该映射在 $x \in X_n$ 时将 $x \mapsto x$ 映为，否则映为 $x \mapsto 0$。设 I_n 为 R_n 中的一个理想。我们称此情形为（$*$）。

引理 4. 在情形（$*$）中，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\iota_n(I_n) \subseteq I_{n+1}$，则 R/I 是由直接系统 $\{R_n/I_n, \iota_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 给出的直接极限，其中 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \eta_n(I_n) R$。

证明。 首先请注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，下面的交换图是可交换的。



这意味着 $\eta_n(I_n) \subseteq \eta_{n+1}(I_{n+1})$，因此 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \eta_n(I_n)R$ 是 R 的理想的嵌套并，因而也是一个理想。此外，由于 $\eta_n(I_n) \subseteq I$，且根据假设 $\iota_n(I_n) \subseteq I_{n+1}$，取商后可得到另一个可交换图。



现在，假设存在另一个环 S 以及映射 $\mu_n\colon R_n/I_n \to S$，使得 $\mu_{n+1} \circ \iota_n = \mu_n$。与投影 $p_n\colon R_n \twoheadrightarrow R_n/I_n$ 复合后，我们得到映射 $\mu_n := \mu_n \circ p_n\colon R_n \to S$，它们满足 $\mu_{n+1} \circ \iota_n = \mu_{n+1} \circ p_{n+1} \circ \iota_n = \mu_{n+1} \circ \bar{\iota}_n \circ \bar{p}_n = \mu_n \circ \bar{p}_n = \mu_n$。注意，$R$ 是直接系统 $\{R_n, \iota_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的直接极限，因此存在唯一的映射 $\varphi\colon R \to S$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\varphi \circ \eta_n = \mu_n$。我们断言 $I \subseteq \ker\varphi$。事实上，给定任意 $a \in I$，根据定义，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $a \in \eta_n(I_n)R$，因此 $a = \sum_i r_i \eta_n(a_i)$，其中 $a_i \in I_n$。应用 φ，得到：

$$\varphi(a) = \varphi\left(\sum_i r_i \eta_n(a_i)\right) = \sum_i r_i \varphi(\eta_n(a_i)) \overset{(1)}{=} \sum_i r_i \mu_n(a_i) \overset{(2)}{=} \sum_i r_i \bar{\mu}_n(p_n(a_i)) \overset{(3)}{=} 0$$

（1）成立，因为 $\varphi \circ \eta_n = \mu_n$。（2）根据 μ_n 的定义成立。（3）成立，因为 $p_n(a_i) = 0$。因此，我们得到一个映射 $\varphi\colon R/I \to S$，它满足 $\varphi \circ p = \varphi$，其中 $p\colon R \to R/I$ 是投影映射。

现在我们证明此映射满足 $\varphi \circ \eta_n = \mu_n$。事实上，计算可得：

$$\bar{\varphi} \circ \bar{\eta}_n \circ p_n = \bar{\varphi} \circ p \circ \eta_n = \varphi \circ \eta_n = \mu_n = \bar{\mu}_n \circ p_n.$$

由于 p_n 是满射，我们可以在等式右侧约去它，得到 $\bar{\varphi} \circ \bar{\eta}_n = \bar{\mu}_n$。

现在假设 $\psi\colon R/I \to S$ 是另一个满足 $\psi \circ \eta_n = \mu_n$ 的映射。在右侧复合 p_n 后得到 $\psi \circ \eta_n \circ p_n = \mu_n \circ p_n$，这意味着 $\psi \circ p \circ \eta_n = \mu_n$。然而，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，满足 $\varphi \circ \eta_n = \mu_n$ 的映射 φ 是唯一的。因此，$\psi \circ p = \varphi = \varphi \circ p$；又因为 p 是满射，可以在等式右侧将其约去，从而如所需得到 $\psi = \varphi$。■

推论2. 设 Δ 是一个单纯复形，使得 $V(\Delta)$ 可数。假设存在 $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$ 这一由 Δ 的有限满子复形构成的递增序列，满足 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta$。那么，斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta]$ 是斯坦利–赖斯纳环 $k[\Delta_n]$ 的直接极限。

证明。因为 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Delta$，所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(\Delta_n) = V(\Delta)$。注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，由于 Δ_n 和 Δ_{n+1} 都是 Δ 的满子复形，且 Δ_n 是 Δ_{n+1} 的子复形，因此可立即得出，Δ_n 也是 Δ_{n+1} 的满子复形。因此，由命题 3可得，$\iota_n(I_{\Delta_n,V(\Delta_n)}) \subseteq I_{\Delta_{n+1},V(\Delta_{n+1})}$，且 $\pi_n(I_{\Delta_{n+1},V(\Delta_{n+1})}) \subseteq I_{\Delta_n,V(\Delta_n)}$。由引理 4可得，$k[V(\Delta)]/I$ 是由 $\{k[\Delta_n] := k[V(\Delta_n)]/I_{\Delta_n,V(\Delta_n)}\ \iota_n\}$ 构成的直接系统的直接极限，其中 $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\Delta_n,V(\Delta_n)})k[V(\Delta)]$。

我们断言 $I = I_{\Delta,V(\Delta)}$，证明这一点即可完成证明。事实上，注意到并集中的每一项 $\eta_n(I_{\Delta_n,V(\Delta_n)})$ $k[V(\Delta)]$ 均由 $\mathbf{x}^A$ 生成，其中 $A \subseteq V(\Delta_n)$ 是一个不属于 Δ_n 的有限集。给定这样的集合 A，由于 Δ_n 是 Δ 的满子复形，A 也不是 Δ 的面。因此，$\mathbf{x}^A \in I_{\Delta,V(\Delta)}$。反过来，$I_{\Delta,V(\Delta)}$ 由 $\mathbf{x}^B$ 生成，其中 $B \subseteq V(\Delta)$ 是一个不属于 Δ 的有限集。给定这样的集合 B，由于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(\Delta_n) = V(\Delta)$，必定存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $B \subseteq V(\Delta_n)$。由于 Δ_n 是 Δ 的满子复形，B 不可能是 Δ_n 的面。因此，$\mathbf{x}^B \in I_{\Delta_n,V(\Delta_n)}$。■

定理 *A* 的证明。根据命题 3，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在映射 $\iota_n\colon k[\Delta_n] \to k[\Delta_{n+1}]$ 和 $\pi_n\colon k[\Delta_{n+1}] \to k[\Delta_n]$，使得 $\pi_n \circ \iota_n = \mathrm{id}_{k[\Delta_n]}$。由于 $k[\Delta_n]$ 是科恩–麦考利的，根据注 2，它是纯的。因此，根据推论 1，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个线性参数系统 $\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,d_n}$，使得 $\pi_{n+1}(\theta_{n+1,j}) = \theta_{n,j}$ 对于 $1 \le j \le d_n$ 成立。此外，由于假设，每个 $k[\Delta_n]$ 都是诺特科恩–麦考利的，因此根据命题 6，

映射 ι_n 是平坦的。此外，根据推论2， $k[\Delta]$ 是直接系统 $\{k[\Delta_n], \iota_n\}$的直接极限。■

定理 *B* 的证明。 利用无限斯坦利-赖斯纳双射（命题2），显然定理 A 和定理 B 等价。■

6. Applications to Initial Ideals

现在我们回顾一些关于格罗布纳基的背景知识（参考文献见 [Eis13，第 15]章）。具有有限个变量的多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 上的单项式序是单项式上的一个全序 $<$，满足 (MO1) $1 \leq \mathbf{x}^{(a_i)}$ 对任意单项式 $\mathbf{x}^{(a_i)}$均成立；且 (MO2) 若 $\mathbf{x}^{(a_i)} < \mathbf{x}^{(b_i)}$ ，则 $\mathbf{x}^{(a_i)}\mathbf{x}^{(c_i)} <\mathbf{x}^{(b_i)}\mathbf{x}^{(c_i)}$。注意，此处 (a_i) 表示 $\mathbb{Z}^n$ 的一个元素。由于 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 是诺特的，这些条件意味着 $<$是良序（即每个非空的单项式子集都有一个最小元素）。

在 [IY09]，中，Iima 和 Yoshino 为具有可数多个变量 R 的多项式环中的理想给出了单项式序和 Gr¨obner 基的定义：$= k[x_1, x_2, \ldots]$ ([IY09，定义 1.1])。在这种情况下，单项式序必须满足 (MO1) 和 (MO2)。然而，由于 R 不是诺特的，这些条件不一定意味着该序是良序，因此必须另外要求 (MO3) $<$是良序。例如，考虑 $k[x_1, x_2, \ldots]$，并按 $x_1 < x_2 < \ldots$排序。取字典序，当且仅当 $a_i < b_i$ 对于满足 $a_i \neq b_i$ 的最大 i 成立时，$\mathbf{x}^{(a_1,a_2,\ldots)} < \mathbf{x}^{(b_1,b_2,\ldots)}$。注意，这样的 i 必定存在，因为对于除有限多个 j 之外的所有 j，都有 $a_j = b_j = 0$。

设 $f \in R$。 f 的首项单项式 记作 lm<(*f*)，它是 f 中涉及的关于 $<$最大的单项式。 f 的首项 记作 lt<(*f*)，它是 f 的最大项，因此对于某个 $c \in k$，有 lt<(*f*) $= c$lm<(*f*)。关于 $<$，任意子集 $H \subseteq R$ 的初始理想 是 <(*H*) 中由 H 的所有元素的首项单项式（等价地，首项）生成的单项式理想。如果 G 是某个理想 $I \subseteq R$ 的子集，且 $f \in R$ 是任意多项式，那么除法算法 （[IY09，命题 1.9]）表明，我们可以写成

$$f = \sum_i h_i g_i + r,$$

其中 $h_i \in R$、 $g_i \in G$， r 中涉及的单项式均不属于 $\langle$lt<(*g*) $\mid g \in G\rangle$，且 lt<($h_i g_i$) $\leq$ lt<(*f*)。元素 r 称为 f 除以 G 后的余式 。

理想 $I \subseteq R$ 的一个 格 ¨布纳基是满足以下条件的子集 $G \subseteq I$： G 的初始理想 in<(*G*) 等于 I ([IY09, 定义 1.4]) 的初始理想 in<(*I*)。与有限个变量的情形一样，这意味着 G 生成 I。关于项序 $<$， f, $g \in R$ 的 S-多项式定义如下。

$$S_<(f, g) = \frac{\operatorname{lcm}(\operatorname{lm}_<(f), \operatorname{lm}_<(g))}{\operatorname{lt}_<(f)} f - \frac{\operatorname{lcm}(\operatorname{lm}_<(f), \operatorname{lm}_<(g))}{\operatorname{lt}_<(g)} g$$

注意， $S_<$(*f*， *g*) 总是 R 的一个元素。无限变量多项式环 R 中 Buchberger 判据的类似结果如下（[IY09，命题 1.13]）。

命题 7 （Buchberger 判据）。子集 $G \subseteq R$ 是一个格布纳基（对于理想 $\langle G\rangle$），当且仅当对于每个 g, $h \in G$， $S_<$(*g*， *h*) 除以 G 后的余式为 0。

现在，我们运用 Buchberger 判据来描述在具有可数多个变量的多项式环之间建立包含关系时，Gr¨obner 基的行为。设 $X \subseteq Y$ 为有限集或可数集， $R := k[X]$和 $S := k[Y]$ 为多项式环， $\iota : R \to S$ 为包含映射，它将 $x \mapsto x$映为 $\pi : S \to R$ 为投影映射；若 $y \in X$，则将 $y \mapsto y$ 映为 $y \mapsto y$，否则映为 $y \mapsto 0$。若对于所有 $f \in R$，都有 ι(lt<$_R$(*f*)) =lt<$_S$(ι(*f*))；（分别地，若对于所有满足 lt<$_S$(*g*) $\in$im ι 的 $g \in S$，都有 π(lt<$_S$(*g*)) =lt<$_R$(π(*g*)))，则称 R上的项序 $<_R$与 S上的项序 $<_S$关于 ι（分别关于 π）相容。

引理 5。 设 $I \subseteq R$ 和 $J \subseteq S$ 为理想。

(1) 如果 $\iota(I) \subseteq J$，且项序 $<_R$ 和 $<_S$ 的有序对与 ι 相容，那么 ι(in<$_R$(*I*)) $\subseteq$ in<$_S$(*J*)。(2) 如果 $\pi(J) \subseteq I$，且这对项序与 π 相容，那么 π(in<$_S$(*J*)) $\subseteq$ in<$_R$(*I*)。

证明。在情形 (1) 中，给定 $f \in I$，$\iota(\mathrm{lt}_{<_R}(f)) = \mathrm{lt}_{<_S}(\iota(f))$，因为 $<_R$ 和 $<_S$ 与 ι 相容。根据假设，我们有 $\iota(I) \subseteq J$，因此 $\iota(f) \in J$。所以，$\mathrm{lt}_{<_S}(\iota(f)) \in \mathrm{in}_{<_S}(J)$，结论得证。情形 (2) 的证明以类似方式进行。■

引理 6. 若 $I \subseteq R$ 是任意理想，且 $<_R$ 和 $<_S$ 与 ι 相容，则 $\iota(\mathrm{in}_{<_R}(I))S = \mathrm{in}_{<_S}(\iota(I)S)$。

证明。令 G 为 I 的 Gröbner 基。例如，我们可以取 $G = I$。于是，根据命题 7，对于任意 $f, g \in G$，我们可以写成 $S_<(f, g) = \sum_i f_i g_i$，其中 $f_i \in R$ 且 $g_i \in G$。由于 $<_R$ 和 $<_S$ 与 ι 相容，因此 $\mathrm{lm}_{<R}(f) = \mathrm{lm}_{<S}(f)$ 且 $\mathrm{lt}_{<_R}(f) = \mathrm{lt}_{<_S}(f)$（$g$ 的情形也类似）。因此，应用 ι，得到：

$$\begin{aligned}\iota(S_{<R}(f,g)) &= \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}_{<_R}(f), \mathrm{lm}_{<_R}(g))}{\mathrm{lt}_{<_R}(f)} f - \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}_{<_R}(f), \mathrm{lm}_{<_R}(g))}{\mathrm{lt}_{<_R}(g)} g \\ &= \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}_{<_S}(f), \mathrm{lm}_{<_S}(g))}{\mathrm{lt}_{<_S}(f)} f - \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}_{<_S}(f), \mathrm{lm}_{<_S}(g))}{\mathrm{lt}_{<_S}(g)} g \\ &= S_{<S}(f,g).\end{aligned}$$

另一方面，我们有 $\iota(S_{<_R}(f, g)) = \iota(\sum_i f_i g_i) = \sum_i f_i g_i$，其中 $f_i \in S$ 且 $g_i \in G$。因此，0 也是 $\iota(S_{<_R}(f, g)) = S_{<S}(f, g)$ 关于 G 在 S 中的余式。于是，再次根据命题 7，$\iota(G)$ 是 S 中理想 $\iota(G)S = \iota(I)S$ 的 Gröbner 基。因此，我们可以如下计算：

$$\iota(\mathrm{in}_{<_R}(I))S \overset{(1)}{=} \iota(\mathrm{in}_{<_R}(G))S \overset{(2)}{=} \iota(\{\mathrm{lm}_{<_R}(f) \mid f \in G\})S \overset{(3)}{=} \{\mathrm{lm}_{<_S}(\iota(f)) \mid f \in G\}S \overset{(4)}{=} \mathrm{in}_{<_S}(\iota(I)S).$$

（1）成立是因为 G 是 I 的 Gröbner 基。（2）成立是因为，对于任意环 T 中由生成集 $H \subseteq J$ 生成的理想 J，以及任意环同态 $\varphi\colon T \to T'$，都有 $\varphi(J)T' = \varphi(H)T'$。（3）成立是因为 $<_R$ 和 $<_S$ 与 ι 相容。（4）成立是因为，正如我们刚刚证明的，$\iota(G)$ 是 $\iota(I)S$ 的 Gröbner 基。■

获得相容单项式序的一种方法是将 R 和 S 嵌入到带有某个单项式序的更大多项式环中，然后限制该单项式序。在本节其余部分中，设我们处于情形（$*$）中。令 $<$ 为 R 上的一个单项式序，并令 $<_n$ 为将 $<$ 限制到包含于 R_n 中的单项式集合上所得的单项式序。

引理 7。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，单项式序 $<_n$ 和 $<$ 与包含映射 η_n 相容。单项式序 $<_n$ 和 $<_{n+1}$ 与包含映射 ι_n 及投影映射 π_n 相容。

证明。令 $f \in I_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 任意。由于单项式序 $<_n$ 和 $<_{n+1}$ 都是 $<$ 的限制，因此我们有 $\mathrm{lm}_<(\eta_n(f)) = \eta_n(\mathrm{lm}_{<_n}(f))$，且 $\mathrm{lm}_{<_{n+1}}(\iota_n(f)) = \iota_n(\mathrm{lm}_{<_n}(f))$。如果 $g \in I_{n+1}$，并且 $\mathrm{lm}_{<_{n+1}}(g)$ 只涉及来自 X_n 的变量，那么 $\mathrm{lm}_{<_{n+1}}(g)$ 尤其大于 g 中任何只涉及来自 X_n 的变量的其他单项式。因此，$\pi_n(\mathrm{lm}_{<_{n+1}}(g)) = \mathrm{lm}_{<_{n+1}}(g) = \mathrm{lm}_n(\pi_n(g))$，如所需。■

引理 8。 我们有 $\mathrm{in}_<(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n))R$。

证明。根据引理 7，序对 $<_n$ 和 $<$ 与包含映射 η_n 相容。因此，根据引理 6，我们有 $\eta_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n))R = \mathrm{in}_<(\eta_n(I_n)R)$。于是，我们有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n))R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{in}_<(\eta_n(I_n)R)$，后者显然包含于 $\mathrm{in}_<(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R)$ 中。对于反向包含，若 $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R$，则存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $f \in \eta_n(I_n)R$。因此，$\mathrm{lm}_<(f) \in \mathrm{in}_<(\eta_n(I_n)R)$。但是，根据定义，$\mathrm{in}_<(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R)$ 由此类首项单项式生成。因此，$\mathrm{in}_<(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_n)R) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{in}_<(\eta_n(I_n)R) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n))R$，如所需。■

定理 C 的证明。根据引理 7，$<_n$ 和 $<_{n+1}$ 与 ι_n 和 π_n 相容。因此，根据引理 5，我们有 $\iota_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n)) \subseteq \mathrm{in}_{<_{n+1}}(I_{n+1})$，且 $\pi_n(\mathrm{in}_{<_{n+1}}(I_{n+1})) \subseteq \mathrm{in}_{<_n}(I_n)$。由引理 8 可知，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(\mathrm{in}_{<_n}(I_n))R = \mathrm{in}_<(I)$。结论由定理 B 得出。■

7. Infinite Matrix Schubert Varieties

对于 $m \leq n$，令 $S_{m,n}$ 表示注入集合 $\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$。$S_{m,n}$ 中的元素称为部分置换。给定任意 $\sigma \in S_{m,n}$，用 $[\sigma]$ 表示 σ 的 $m \times n$ 部分置换矩阵。根据定义，该矩阵在条目 $(j, \sigma(j))$ 处为 1，其余位置均为 0。定义 σ 的秩矩阵，即 $r(\sigma)$，为一个 $m \times n$ 矩阵，其 (i,j) 项等于 $[\sigma]$ 中位于 (i,j) 项左侧及上方（含边界）的 1 的个数。舒伯特行列式理想 I_σ 定义为多项式环 $k[x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ 中的理想，它由变量矩阵 $[x_{i,j}]_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq l}$ 的 $r(\sigma)_{k,l}+1$ 阶子式生成（对 $k \in [m]$ 和 $l \in [n]$ 的所有取值）。I_σ 的零点集记为 X_σ，称为与部分置换 σ 对应的矩阵舒伯特簇。根据 Fulton 的结果 [Ful92，命题 3.3]，I_σ 是一个素理想，因此 $k[x_{i,j}]/I_\sigma$ 是该簇的坐标环。

例 4. 令 $\sigma = 2531 \in S_{4,\ 5}$。注意，

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

and

$$I_\sigma = \langle x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{1,3}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,4}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,4}, x_{1,4}x_{2,3} - x_{1,3}x_{2,4} \rangle.$$

用 S_∞ 表示从自然数到自然数的双射集合。设 $\sigma \in S_\infty$。那么，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，限制映射 $\sigma|_{\{1,\ldots,m\}}$ 是 $S_{m,\ \max\sigma([m])}$ 中的一个部分置换，即 σ 的第 m 个部分置换，记作 σ_m。σ_m 的置换矩阵是一个 $m \times \max\sigma([m])$ 矩阵，其中 $(j,\ \sigma(j))$ 处的元素为 1，其余位置均为 0。用 T_m 表示多项式环 $k[x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \max\sigma([m])]$，其变量由 $m \times \max\ \sigma([m])$ 矩阵的各个元素作为指标。令 $\iota_m\colon T_m \to T_{m+1}$ 和 $\pi_m\colon T_{m+1} \to T_m$ 分别为包含映射和投影映射。定义 $T := k[x_{i,j} \mid i,j \in \mathbb{N}]$。

例 5. 定义 $\sigma\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得

$$\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 1, \\ m+1 & \text{if } m \in 2\mathbb{N}, \\ m-1 & \text{if } m \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

对于每个 σ_m，其中 $m \in \mathbb{N}$，我们得到舒伯特行列式理想

$$I_{\sigma_m} = \langle \det\left([x_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}\right) \mid n \leq m \text{ and } n \in 2\mathbb{N} \rangle$$

在各自的环 T_m 中。注意，I_{σ_m} 和 $I_{\sigma_{m+1}}$ 对于 $m \in 2\mathbb{N}$ 具有相同的生成集。

$k[x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ 上的项序称为反对角项序，若变量矩阵 $[x_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ 的任意子式的初始项都是反对角项。Knutson、Miller 和 Sturmfels 的研究表明，定义 I_σ 的子式构成关于任意反对角项序的 Gr¨obner 基。

本文余下部分中，我们固定一个反对角项序 $<$。记 $\mathrm{in}_<(I_\sigma)$ 为 I_σ 关于此项序的初始理想。注意，这是一个无平方单项式理想。令 Δ_σ 表示与 $\mathrm{in}_<(I_\sigma)$ 相关联的单纯复形。

引理 9. $\iota_m(I_{\sigma_m}) \subseteq I_{\sigma_{m+1}}$ 和 $\pi_m(I_{\sigma_{m+1}}) \subseteq I_{\sigma_m}$。

证明。回想一下，I_{σ_m} 由大小由秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 确定的子式生成。假设 f 是其中一个生成元。那么，存在某个 $1 \leq i \leq m$ 以及 $1 \leq j \leq \max\sigma([m])$，使得 f 是变量子矩阵 $[x_{\alpha,\beta}]_{1\leq\alpha\leq i, 1\leq\beta\leq j}$ 的一个大小为 $r+1$ 的子式，其中 $r = r(\sigma_m)_{i,j}$。由于 $[\sigma_m]$ 是 $[\sigma_{m+1}]$ 的左上子矩阵，秩矩阵 $r(\sigma_{m+1})$ 的第 (i,j) 项也为 r。因此，f 也是 $I_{\sigma_{m+1}}$ 的一个生成元。所以，$\iota_m(f) = f \in I_{\sigma_{m+1}}$，由此得到所需的第一个包含关系。

反之，设 f 是 $I_{\sigma_{m+1}}$ 的一个子式生成元。那么，如上所述，存在某个 $1 \leq i \leq m+1$ 和 $1 \leq j \leq \max\sigma([m+1])$，使得 f 是变量矩阵 X_{m+1} 中一个大小为 $r+1$ 的子矩阵 U 的子式: $= [x_{\alpha,\beta} \mid 1 \leq \alpha \leq m+1, 1 \leq \beta \leq \max\sigma([m+1])],$，其中 r 是秩矩阵 $r(\sigma_{m+1})$ 的第 $i,\ j$ 个元素。注意，若 U 的底行索引为 $m+1$，或 U 的最后一列索引严格

大于 $\max\sigma([m])$，那么分别沿底行或最后一列展开 f，可得 $\pi_m(f) = 0 \in I_{\sigma_m}$。我们称这种情形为 (†)。现在考虑几种情况。

要么 $\sigma(m+1) < \max\sigma([m])$，要么 $\sigma([m]) < \sigma(m+1)$。在第一种情形中，有五种情况。在第二种情形中，还需考虑另外两种情况。

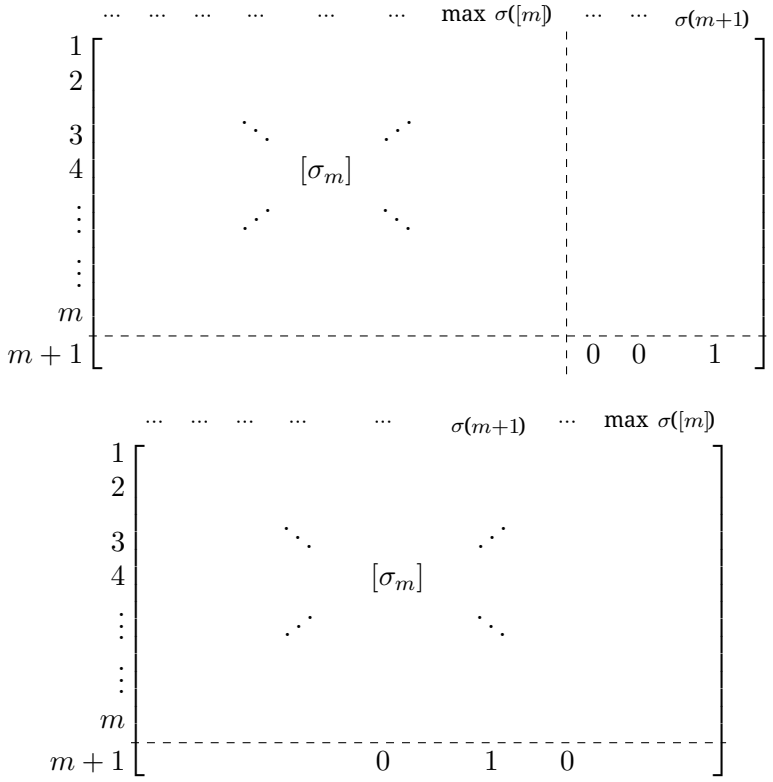


FIGURE 1. 分情况讨论的图示描述。

（情形 1）假设 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le \max\sigma([m])$。那么，$U$ 包含于 X_m 中，因此秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 的 (i, j) 项中也存在一个 r。因此，f 也是 I_{σ_m} 的一个生成元。必有 $\pi_m(f) = f \in I_{\sigma_m}$。（情形 2）假设 $1 \le i \le m$ 和 $j > \max\sigma([m])$（特别地，$\sigma(m+1) > \max\sigma([m])$）。那么，秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 的 $(i, \max\sigma([m]))$ 项中也存在一个 r。因此，我们要么处于情形 (†)，要么 U 包含于 X_m 中，从而 f 也是 I_{σ_m} 的一个生成元，这就意味着 $\pi_m(f) = f \in I_{\sigma_m}$。（情形 3）假设 $i = m+1$、$\sigma(m+1) > \max\sigma([m])$，且 $1 \le j \le \max\sigma([m])$。那么，秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 的 $(i-1, j)$ 项中存在一个 r。我们要么处于情形 (†)，要么 U 包含于X_m中，从而 f 也是 I_{σ_m} 的一个生成元，这意味着 $\pi_m(f) = f \in I_{\sigma_m}$。（情形 4）假设 $i = m+1$、$\sigma(m+1) > \max\sigma([m])$，且 $\max\sigma([m]) < j < \sigma(m+1)$。那么，秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 的 $(i-1, \max\sigma([m]))$ 项中存在一个 r，所需结论可由与（情形 3）类似的论证得到。（情形 5）假设 $i = m+1$、$\sigma(m+1) > \max\sigma([m])$，且 $j = \sigma(m+1)$。那么，σ_m的秩矩阵的 $(i-1, \max\sigma([m]))$ 项中存在一个 $r-1$。因此，我们要么处于情形 (†)，要么 U包含于 X_m 中。若后一种情况成立，则沿任意行或列展开可知，f 是大小为 r 的子式的一个T_m-线性组合；这些子式位于右下角为 $(i-1, j)$ 的 X_m 的左上子矩阵中（因而是 I_{σ_m} 的生成元）。这也意味着 $\pi_m(f) = f \in I_{\sigma_m}$。（情形 6）假设 $i = m+1$、$\sigma(m+1) < \max\sigma([m])$，且 $1 \le j < \sigma(m+1)$。结论便完全由（情形 3）中的论证得到。

（情形 7）假设 $i = m+1$、$\sigma(m+1) < \max \sigma([m])$，且 $\sigma(m+1) \leq j \leq \max \sigma([m])$。那么，秩矩阵 $r(\sigma_m)$ 的 $(i-1, j)$ 项中存在一个$r-1$。因此，我们要么处于情形（†），要么 U 包含于 X_m 中，所需结论可由（情形 5）中的论证得到。■

引理 10. 我们有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\sigma_n})T = I_\sigma$。

证明。回忆引理 9 的证明可知，$X_m = [x_{\alpha,\beta} \mid 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq \beta \leq \max \sigma([m])]$。设 $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\sigma_n})T$。那么，$f$ 是如下形式的项的有限和：

$$f = \sum_{i=1}^{M} t_i f_i$$

对有限的 M，其中 $t_i \in T$ 且 $f_i \in \eta_{m_i}(I_{\sigma_{m_i}})T$。现在，每个 f_i 都属于某个 m_i 对应的 $\eta_{m_i}(I_{\sigma_{m_i}})$ 的像，因此其本身必为如下形式：

$$f_i = \sum_{j=1}^{N_i} r_j g_j$$

对有限的 N_i，其中 $r_j \in T_{m_i}$ 且 $g_j \in I_{\sigma_{m_i}}$.。也就是说，每个 g_j 都是变量矩阵 X_{m_i} 的一个子式。但 $\eta_{m_i}(g_j) = g_j \in T$ 也如此。特别地，每个 g_j 都必须是 I_σ 的子式生成元；I_σ 是所有此类子式构成的理想，因此 $f \in I_\sigma$。

现在，假设 $h \in I_\sigma$。同样，h 必须是项 $t_i h_i$ 的有限和，其中 $t_i \in T$，且生成元为子式$h_i \in I_\sigma$。由于每个 h_i 都是某个（有限）变量矩阵的子式，设该矩阵为 $X_{m_i'}$，于是有$h_i = \eta_{m_i'}(h_i) \in \eta_{m_i'}(I_{m_i'})T$，其中某个 $m_i' \in \mathbb{N}$。因此，$h \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\sigma_n})T$. ■

定义 2。 $T = k[x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}]$ 上的项序称为反对角 项序，如果对每个 $m \in \mathbb{N}$，$<$ 在T_m 上的限制 $<_m$ 都是反对角的。

例 6。 接着例 5，并采用反对角项序，我们有

$$\mathrm{in}_{<_m}(I_{\sigma_m}) = \langle x_{1,n}x_{2,n-1}\dots x_{n,1} \mid n \leq m \text{ and } n \in 2\mathbb{N}\rangle .$$

我们看到，Δ_σ 是一个没有极大面的无限单纯复形。

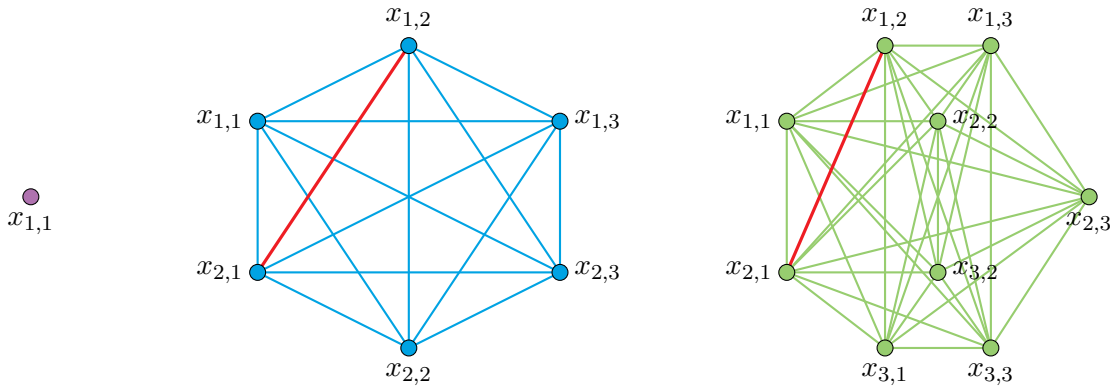


FIGURE 2. 例 6 中 Δ_{σ_m} 对应的 1-骨架，分别取 $m \in [3]$。复形中的红色边表示缺失的边（这与直觉相反）。

命题8. 存在 $T = k[x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}$ 上的反对角项序].

证明。我们按如下方式定义矩阵 $[x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}]$ 中变量的次序。对于 $m \in \mathbb{Z}$，记 Q_m 为第 m 条对角线 $\{x_{i,j} \mid j - i = m\}$，例如，$Q_0$ 是对角线，而 Q_1 是变量矩阵的超对角线。给定 Q_m，我们对 $x_{i,j} < x_{i+1,j+1}$排序。此外，我们对$Q_0 < Q_1 < Q_{-1} < Q_2 < Q_{-2} < \dots$排序。注意，这是一个良序，其序型为序数$\omega^2$。现在，我们根据这个变量次序，使用字典序来排列 $k[x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}]$ 的单项式。

要证明这是一个反对角项序，只需证明对于变量矩阵 $[x_{i,j} \mid i,j \in \mathbb{N}]$中的任意子式，其首项都是反对角项。我们用子式的大小进行归纳法证明。大小为 1 的子式情形显然成立。因此，假设该结论对大小为 n的子式成立。令$i_1 < \ldots < i_{n+1}$和 $j_1 < \ldots < j_{n+1}$分别为大小为 $n+1$的子式 M的行指标和列指标。首先，假设 $|j_1 - i_{n+1}| \geq |j_{n+1} - i_1|$。那么，对于 M中涉及的任意 $x_{i,\ j}$，都有 $x_{i_{n+1},\ j_1} > x_{i,\ j}$。沿第一列展开该子式，得到 $M = x_{i_1,\ j_1}M_1 \pm \ldots \pm x_{i_{n+1},\ j_1}M_{n+1}$，其中每个 M_i 都是大小为 n的子式。注意， M 中包含变量 $x_{i_{n+1},\ j_1}$ 的项，只会出现在 $x_{i_{n+1},\ j_1}M_{n+1}$的项中。由于项序是字典序，这意味着 M 的首项必定是 $x_{i_{n+1},\ j_1}M_{n+1}$中的一项。根据归纳假设， M_{n+1} 的首项是反对角项。因此， M的首项也是反对角项。另一方面，若 $|j_1 - i_{n+1}| < |j_{n+1} - i_1|$，则沿顶行展开并应用相同的推理，即可再次得到所需结论。■

定理 *D* 的证明。由引理 9 可知， $\iota_m(I_{\sigma_m}) \subseteq I_{\sigma_{m+1}}$ 且 $\pi_m(I_{\sigma_{m+1}}) \subseteq I_{\sigma_m}$。此外，若$<$ 是 T上的反对角项序，令 $<_m$ 为 $<$ 在 T_m上的限制。由于 $<_m$ 是 T_m 的反对角项序（按定义），由 [KM05, 定理 B]可知， $T_m/$在$<_m(I_{\sigma_m})$中是一个诺特科恩–麦考利 k-代数。因此，由定理 C， $T/$在$<(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\sigma_n})T)$中是由诺特科恩–麦考利 k-代数组成的直接系统 $\{T_m/$在$<_m(I_{\sigma_m})\iota_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的平坦直极限。由引理 10， $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta_n(I_{\sigma_n})T = I_\sigma$ ，故所需结论成立。■

References

[ADT14] Mohsen Asgharzadeh、Mehdi Dorreh 和 Massoud Tousi。《科恩–麦考利环的直极限》*Journal of Pure and Applied Algebra* 218 9 1730 1744, 2014 , ( ): – 。[

AT09] Mohsen Asgharzadeh 和 Massoud Tousi。《非诺特环的科恩–麦考利性质概念》。 *Journal of Algebra* 322 7 2297 2320, 2009 , ( ): – 。[

BH98] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。《科恩–麦考利环》。剑桥高级数学研究丛书第 39 号。剑桥大学出版社，1998 年。[Eis13] David Eisenbud。《交换代数：与代数几何的观点》。第 150 卷。施普林格科学与商业媒体，2013 年。[Ful92] William Fulton。旗、舒伯特多项式、退化轨迹与行列式公式。 *Duke Math. J.*, 65 3 381( ): –420, 1992。[Gal21] Nathaniel Gallup。作为点函子的良序旗空间。 *arXiv preprint arXiv:2112.00327*, 2021。[Gal23] Nathaniel Gallup。通过 k *arXiv* -级数研究某些非诺特群分次代数的格罗滕迪克环。*preprint arXiv:2304.06932* 2023 , 。[Gla94] Sarah Glaz。交换不变环的相干性、正则性与同调维数。载于 *Commutative Algebra*，第 89–106 页。世界科学出版社，1994 年。[Gla95] Sarah Glaz。多项式环局部化的同调维数。载于 David F. Anderson、David E. Dobbs 和 John H. Barrett 纪念讲座（ 23 1994 *Zero-dimensional commutative rings* 171, 209 222 rd : : 田纳西大学）的论文集，编者，纯粹与应用数学讲义；第 – 页。Marcel Dekker，纽约，1995 年。[HM07] Tracy Dawn Hamilton 和 Thomas Marley。非诺特科恩–麦考利环。 *Journal of Algebra*, 307(1):343–360, 2007。[Hoc72] Melvin Hochster。环面不变量环、由单项式生成的科恩–麦考利环与多面体。 *Annals of Mathematics* 96 2 318 337, 1972 , ( ): – 。[

IY09] Kei-ichiro Iima 和 Yuji Yoshino。无限变量多项式环的格罗布纳基及其应用。 *Communications in Algebra*, 37(10):3424–3437, 2009。[KK79] Bernd Kind 和 Peter Kleinschmidt。可平衡的科恩–麦考利复形及其参数化。, ( ): – 6 月。[KM05] Allen Knutson 和 Ezra Miller。舒伯特多项式的格罗布纳几何。 *Annals of Mathematics*, 第 1245–1318 页，2005 年。[Mat70] Hideyuki Matsumura。《交换代数》。W. A. Benjamin 公司，纽约，1970 年。[MS05] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels。《组合交换代数》。第 227 卷。施普林格科学与商业媒体，2005 年。[Rei76] Gerald Allen Reisner。多项式环的科恩-麦考利商环。 *Advances in Mathematics*, 21(1):30–49, 1976。[Sta79] Richard P Stanley。平衡科恩-麦考利复形。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 249 1 139 157, 1979 ( ): – 。