arXiv:2601.02615v1 [math.SP] 6 Jan 2026

通过三对角托普利兹相似变换得到重复数的谱乘积公式

Johann
Verwee独立研究者
mverwee@gmail.com

摘要

对于 $b > 0$ 和 $n \geqslant 1$，我们考虑对角元素为 $b+1$、超对角元素为 1、次对角元素为 b 的 $n \times n$ 三对角矩阵$V_n(b)$。对角相似变换可将 $V_n(b)$ 化为对称三对角托普利兹矩阵，从而使其谱得以显式确定。由于 $\det(V_n(b))$ 等于几何和 $1+b+\cdots+b^n$，对其取行列式即可得到该量的有限余弦乘积求值。作为进一步的推论，我们利用极端特征值导出紧确界，针对一个自然的加权内积写出显式特征向量，并得到 $V_n(b)^{-1}$ 的闭式公式。

关键词：重复数；三对角矩阵；托普利兹矩阵；特征值；余弦乘积；切比雪夫多项式。
*2020*年数学主题分类：11B83, 15A18, 33C45.

1 引言

对于实参数 $b > 0$ 和整数 $m \geqslant 1$，以 b 为基数的重复数定义为

$$R_m(b) := 1 + b + \cdots + b^{m-1} = \frac{b^m - 1}{b - 1} \qquad (b \neq 1).$$

我们采用连续延拓 $R_m(1) := m$，从而 $R_m(b)$ 对所有 $b > 0$ 都有定义。当 b 是满足 $b \geqslant 2$ 的整数时，这与通常的底数为 b 的重复数一致；对于一般的 $b > 0$，我们类比地使用“重复数”一词。

本文旨在为 $R_m(b)$ 的一个有限三角函数乘积求值给出简短的谱证明。本文的动机部分源于近期对 [2], 中高阶重复数型数列的研究，其中已经出现了密切相关的三对角行列式。本文的要点是，一个简单的对角相似变换可将相关矩阵化为对称三对角 Toeplitz 模型，从而立即得到其明确的谱。

固定 $b > 0$ 和整数 $n \geqslant 1$。考虑三对角矩阵

$$V_n(b) = \begin{pmatrix} b+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b & b+1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & b & b+1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

标准的连分式行列式计算表明，$\det(V_n(b))$ 与$R_{n+1}(b)$ 相同；见引理3。关键观察是，$V_n(b)$ 经过对角基变换后会变为对称矩阵（第 2 节），因此其特征值可以显式求出，将它们相乘便得到 $R_{n+1}(b)$ 的简洁余弦乘积公式（第 3 节）。随后我们简要记录一些推论和显式特征向量（第 4 节），最后给出一个导出闭式逆矩阵公式的切比雪夫恒等式（第5 节）。

2 对角相似变换与加权内积

当 $b \neq 1$ 时，矩阵 $V_n(b)$ 通常不是对称矩阵，但其上、下对角线元素仅相差常数因子 b。通过对角基变换平衡这些非对角权重，可得到一个对称三对角托普利兹模型。这不仅保证了其谱为实数，还揭示了使 $V_n(b)$ 成为自伴算子的自然加权内积。

对于 $b>0$，令 $D=\operatorname{diag}\left(b^{(i-1)/2}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$，并设

$$T_n(b)=\begin{pmatrix} b+1 & \sqrt{b} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{b} & b+1 & \sqrt{b} & \ddots & \vdots \\ 0 & \sqrt{b} & b+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{b} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{b} & b+1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

引理 1（对角相似变换与加权对称性）。设 $b>0$ 和$n\geqslant 1$。

(a) 有 $D^{-1}V_n(b)D=T_n(b)$。特别地，$V_n(b)$ 和 $T_n(b)$ 具有相同的谱。

(b) 设 $W=D^{-2}$。那么 $V_n(b)^TW=WV_n(b)$，即 $V_n(b)$ 相对于$\langle x,y\rangle_W=x^TWy$在 $\mathbb{R}^n$上是自伴的。

证明。(a) 由于 D 是对角的，对角项保持不变；对于每个i，有 $(D^{-1}V_n(b)D)_{i,i}=b+1$。对于非对角项，我们计算

$$(D^{-1}V_n(b)D)_{i,i+1}=d_i^{-1}d_{i+1}=\sqrt{b},\qquad (D^{-1}V_n(b)D)_{i+1,i}=d_{i+1}^{-1}\,b\,d_i=\sqrt{b},$$

其余所有项均为 0，因此 $D^{-1}V_n(b)D=T_n(b)$。

(b) 由于根据 (a)，$V_n(b)=DT_n(b)D^{-1}$，且 $T_n(b)^T=T_n(b)$，我们有$V_n(b)^T=D^{-1}T_n(b)D$。取 $W=D^{-2}$，得到

$$\begin{aligned} V_n(b)^TW&=(D^{-1}T_n(b)D)D^{-2}=D^{-1}T_n(b)D^{-1}\\ &=D^{-2}(DT_n(b)D^{-1})=WV_n(b). \end{aligned}$$

这就证明了 (b)。 □

3 谱与谱乘积因式分解

根据引理 1，我们可以将 $V_n(b)$ 替换为对称托普利兹矩阵 $T_n(b)$。其特征值是经典结果，可以用离散正弦波表示；我们在命题2中回顾所得公式。另一方面，$\det(V_n(b))$ 满足一个简短的连分式行列式递推，并等于几何和 $R_{n+1}(b)$（引理 3）。随后取特征值乘积，即可得到 $R_{n+1}(b)$ 的有限余弦乘积求值（定理 4）。

命题 2 （特征值）。 对于 $b > 0$ 和 $n \geqslant 1$， V_n（b）的特征值为

$$\lambda_k(b) = b + 1 + 2\sqrt{b}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3}$$

特别地， $\lambda_k(b) > 0$ 对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立。

证明。 由引理 1， $V_n(b)$ 与对称托普利兹三对角矩阵 $T_n(b)$ 相似。(b) 的特征值公式（3）是经典结果；参见 [3]。由于$k\pi/(n+1) \in (0, \pi)$，我们有 $\cos(k\pi/(n+1))$ > -1，因此

$$\lambda_k(b) = b + 1 + 2\sqrt{b}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) > b + 1 - 2\sqrt{b} = (\sqrt{b} - 1)^2 \geqslant 0,$$

因此 $\lambda_k(b) > 0$。 □

现在我们通过初等的连分式行列式递推计算 $\det(V_n(b))$，从而将谱数据与重复数联系起来。

引理 3 (行列式)。 对于 $b \neq 1$ 和 $n \geqslant 1$，有$\det(V_n(b)) = R_{n+1}(b)$。对于 $b = 1$，有 $\det(V_n(1)) = n + 1$。

证明。 令 $\Delta_n(b) = \det(V_n(b))$。沿最后一行展开，得到连分式行列式递推

$$\Delta_n(b) = (b+1)\Delta_{n-1}(b) - b\,\Delta_{n-2}(b) \qquad (n \geqslant 2),$$

其中的负号来自（n， $n-1$）项的余子式，因为 $(-1)^{n+(n-1)} = -1$。由于 $\Delta_0(b) = 1$ 以及 $\Delta_1(b) = b + 1$，当 $b \neq 1$ 时， $R_{n+1}(b)$ 满足相同的递推关系和初始值，因此对于$b \neq 1$，有 $\Delta_n(b) = R_{n+1}(b)$。

当 $b = 1$ 时，递推关系变为 $\Delta_n(1) = 2\Delta_{n-1}(1) - \Delta_{n-2}(1)$，其中$\Delta_0(1) = 1$， $\Delta_1(1) = 2$，其解为 $\Delta_n(1) = n + 1$。 □

现在我们可以将行列式恒等式与特征值的显式表达式结合起来。由于行列式等于特征值乘积（按重数计），重复数具有一个有限余弦乘积的闭式表达。

定理 4 (谱乘积公式)。 对于 $b > 0$ 和 $n \geqslant 1$，

$$R_{n+1}(b) = \prod_{k=1}^{n}\left(b + 1 + 2\sqrt{b}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right). \tag{4}$$

证明。 由引理 1 和命题 2，$\det(V_n(b)) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(b)$. 使用引理 3得证。 □

作为一个简单的例子，可以用 $b = e^{2x}$ 对基数重新参数化，并将各因子改写为双曲形式。

注 5 (双曲余弦乘积)。 令 $x \in \mathbb{R}$ 并设 $b = e^{2x}$。那么，对于 $x \neq 0$，式（4）变为

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\cosh x + \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right) = \frac{\sinh\left((n+1)x\right)}{2^n \sinh x}.$$

由 $x = 0$ 处的连续性可推出

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right) = \frac{n+1}{2^n}.$$

4 推论与显式特征向量

乘积公式有若干直接推论。由显式表达式（3）以及 $k\pi/(n+1) \in (0, \pi)$ 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$（因此 $-1 < \cos(k\pi/(n+1)) < 1$），可得对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都有严格的双边估计

$$(\sqrt{b} - 1)^2 < b + 1 + 2\sqrt{b} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right) < (\sqrt{b} + 1)^2.$$

对 k 求积，并利用 $\det(V_n(b)) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(b)$，得到界 s

$$\det(V_n(b)) < (\sqrt{b} + 1)^{2n} \qquad (b > 0), \tag{5}$$

并且，如果有 $b \neq 1$，也

$$(\sqrt{b} - 1)^{2n} < \det(V_n(b)), \tag{6}$$

而 $\det(V_n(1)) = n+1$ 由引理 3。接着，我们写出显式特征向量（以及由此得到的加权正交性），从而使对角化过程完全显式。通过引理 1 中的共轭变换传递正弦基，可得到一种便捷的闭式；而同一引理中的加权自伴性则保证了相应内积下的正交性。

引理 1 中的相似变换还给出了 $V_n(b)$ 的闭式特征向量。

命题 6 （特征向量与加权正交性）。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，定义 $v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ 如下：

$$v_j^{(k)} = b^{(j-1)/2} \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

于是 $V_n(b)\, v^{(k)} = \lambda_k(b)\, v^{(k)}$，其中 $\lambda_k(b)$ 由(3)给出。此外，对于$k \neq \ell$ 有 $\langle v^{(k)},\ v^{(\ell)} \rangle_W = 0$，其中 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_W$是引理*1*中的加权内积。

证明。令 $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ 为正弦向量 $u_j^{(k)} = \sin(jk\pi/(n+1))$。于是$T_n(b)\ u^{(k)} = \lambda_k(b)\ u^{(k)}$，且 $v^{(k)} = D\, u^{(k)}$，因此 $V_n(b)\ v^{(k)} = D\, T_n(b)\ u^{(k)} = \lambda_k(b)\ v^{(k)}$。

为证明正交性，令 $k \neq \ell$。根据命题2 特征值 $\lambda_k(b)$ 两两不同。由于 $V_n(b)$ 关于 $\langle \cdot$是自伴的 $\cdot \rangle_W$ (引理1)，我们有

$$\begin{aligned} \lambda_k(b) \langle v^{(k)}, v^{(\ell)} \rangle_W &= \langle V_n(b) v^{(k)}, v^{(\ell)} \rangle_W \\ &= \langle v^{(k)}, V_n(b) v^{(\ell)} \rangle_W \\ &= \lambda_\ell(b) \langle v^{(k)}, v^{(\ell)} \rangle_W . \end{aligned}$$

相减得到 $(\lambda_k(b) - \lambda_\ell(b)) \langle v^{(k)},\ v^{(\ell)} \rangle_W = 0$，又因为 $\lambda_k(b) \neq \lambda_\ell(b)$，所以我们得出 $\langle v^{(k)},\ v^{(\ell)} \rangle_W = 0$。 □

5 切比雪夫恒等式与一个显式逆矩阵

尽管引理 1中的共轭变换涉及 $\sqrt{b}$，但所有具有算术意义的量（行列式、子式、逆矩阵元素）都是 b的有理函数。为清楚地说明这一点，我们先将相关的切比雪夫多项式取值与重复数联系起来，然后用这些量改写对称三对角托普利茨矩阵的标准逆矩阵公式。

我们使用第二类切比雪夫多项式 U_m，其定义为 $U_0(x) = 1$、$U_1(x) = 2x$，以及 $U_{m+1}(x) = 2x\, U_m(x) - U_{m-1}(x)$。

引理 7. 令 $b > 0$ 和 $x_b = (b+1)/(2\sqrt{b})$ $m \gtrless 0$。

$$U_m(x_b) = b^{-m/2}\, R_{m+1}(b).$$

证明。 若 $b \neq 1$，令 $z = \sqrt{b}$，使得 $x_b = (z + z^{-1})/2$。经典恒等式

$$U_m\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^{m+1} - z^{-(m+1)}}{z - z^{-1}} \qquad (z \neq \pm 1)$$

给出

$$U_m(x_b) = \frac{b^{(m+1)/2} - b^{-(m+1)/2}}{b^{1/2} - b^{-1/2}} = b^{-m/2}\,\frac{b^{m+1}-1}{b-1} = b^{-m/2}\,R_{m+1}(b).$$

若 $b = 1$，则 $x_b = 1$，且该结论可化简为 $U_m(1) = m + 1 = R_{m+1}(1)$。 □

现在我们转向逆矩阵。出发点是对称三对角托普利兹矩阵逆矩阵的标准切比雪夫表示；引理 7 消去了所有平方根，并将结果完全表示为重复数。

定理 8 (用重复数表示的逆矩阵**)**。 设 $b > 0$ 和 $n \geqslant 1$。则 $V_n(b)$ 可逆，且对于 $1 \leqslant i$、$j \leqslant n$，有

$$\big(V_n(b)^{-1}\big)_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{R_{n+1}(b)} \begin{cases} R_i(b)\,R_{n-j+1}(b), & i \leqslant j, \\ b^{\,i-j}\,R_j(b)\,R_{n-i+1}(b), & i \geqslant j. \end{cases}$$

证明。 根据命题 2，$V_n(b)$ 的所有特征值均为正，因此 $V_n(b)$ 可逆。根据引理 1，有 $V_n(b)^{-1} = D\,T_n(b)^{-1}\,D^{-1}$。关于 $T_n(b)^{-1}$ 各项的标准显式公式（用切比雪夫多项式表示）见 [1, 3]。将该公式与引理 7 结合可得，对于 $i \leqslant j$，

$$\big(T_n(b)^{-1}\big)_{i,j} = (-1)^{i+j}\,b^{-(j-i)/2}\,\frac{R_i(b)\,R_{n-j+1}(b)}{R_{n+1}(b)},$$

由对称性可得情形 $i \geqslant j$。再用 D 共轭，即得 $V_n(b)^{-1}$ 的所述公式。 □

参考文献

[1] W.-C. Yueh 和 S. S. Cheng，《具有四个扰动角的三对角 Toeplitz 矩阵的显式特征值与逆矩阵》，*ANZIAM J.***49** (2008), 361–387.[2] K. Prasad、M. Kumari、R. Mohanta 和 H. Mahato，《高阶梅森数：新序列、代数性质与二项式变换》，*Math. Sci. Appl.E-Notes* **13** (2025), no. 4, 209–223.[3] G. D. Smith，《偏微分方程数值解》，第 2 版，克拉伦登出版社，牛津，1978。