arXiv:2601.02616v1 [math.AP] 6 Jan 2026

时间离散广义欧拉方程中的质量分裂与多边际最优传输中的非 Monge 解

Gero Friesecke

2026年1月5日

摘要。 时间离散、空间连续的广义欧拉方程是多边际最优传输的一个原型示例，但它们是否会出现质量分裂（或者说，是否存在非 Monge 形式的解）这一问题一直悬而未决。本文通过给出一个一维空间中的质量分裂示例，解决了这一问题。此外，我们还给出了一个相关且非常简单的全离散质量分裂示例，揭示了其背后清晰的机制。

1 引言

Arnold [Ar66]作出了一个著名的观察：流体动力学中的不可压缩欧拉方程的解对应于保体积微分同胚群中的测地线。事实证明，相应的变分原理一般而言是不适定的，因此 Brenier [Bre89] 引入了一种松弛，并证明其适定。从物理角度看，这种被称为广义欧拉方程的表述允许质量分裂：一个流体粒子可以通过一组轨迹从 A 点移动到 B 点。这类质量分裂现象在最优传输中广为人知。事实上，经过时间离散化后，

- Brenier 对欧拉方程的松弛是一个多边际最优传输（多边际最优传输）问题，其采用 Kantorovich表述，其中流体的不可压缩性通过在每个时间点施加边际条件来表示
- Arnold变分原理是这个多边际最优传输问题的 Monge表述。

关于最优传输（包括多边际最优传输和欧拉方程等重要示例）的全面介绍，请参阅我最近出版的教材 [Fri25] 。

本文简要回顾欧拉方程的不同表述及其最优传输解释后，证明了在时间离散化后，Brenier 松弛中仍会发生质量分裂，即 存在非 Monge 解

- 在进一步对空间进行离散化后，仍会发生质量分裂。
鉴于此前在连续时间和空间中的类似示例 [Bre89、BFS09]（对应于边缘分布数量趋于无穷时的极限），这些结果或许并不令人意外。然而，尽管关于其他多边际最优传输问题中的质量分裂已有大量研究（见第 3.2 节综述），时间离散广义欧拉问题的情形此前仍未解决；额外的困难在于，边缘分布无法方便地选取，而是固定为均匀测度。此外，我们的全离散示例非常简单，并揭示了一种清晰的机制，由此导致质量分裂。

这里报告的解析示例部分受到与 Maximilian Penka 正在进行的合作研究的启发，该研究旨在通过 [FP23] 中引入的算法，数值计算时间离散广义欧拉方程 [FP26] 的解。

最后，我们从建模的角度简要讨论一个问题：从物理上看，哪种情况更准确，欧拉（无质量分裂）还是 Brenier（质量分裂）？

谨以此文献给 Willi J¨ager，以庆祝他 85th 岁生日。 他在跨学科建模、严格分析和数值模拟等应用数学领域的深刻理解与实践，持续给予我们启发。

2 欧拉方程的不同表述

2.1 欧拉的表述

欧拉得以建立在此前研究流体的杰出学者的工作之上：阿基米德、托里拆利、丹尼尔·伯努利……但他于1757年首次提出了一个完整模型，即由以下偏微分方程组构成的模型：

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p \quad \text{in } \Omega \times [0,T] \tag{1}$$
$$\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \times [0,T], \qquad u \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0,T]. \tag{2}$$

从物理上看，Ω 是流体所占据的空间区域， u是速度场， p 是压力。从数学上看，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个开、有界且具有足够正则性的（例如 Lipschitz）区域， n 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向量， $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ 是一个时变向量场， $p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ 是一个时变标量场，而 $u \cdot \nabla$ 具有通常的含义 $\sum_{i=1}^{d} u_i \partial_{x_i}$。条件 div $u = 0$ 具有重要含义，即相应的流（见公式（3））是保体积的，也就是说流体是不可压缩的。通常还需给定初始速度，

$$u|_{t=0} = u_0$$

对于某个 $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$。

欧拉方程 (1) 是纳维–斯托克斯方程的消失黏性极限 $\nu \to 0$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p \quad \text{in } \Omega \times [0,T];$$

尽管它忽略了应力中的黏性贡献，但在描述湍流等近无黏现象时仍发挥着重要作用（例如参见 [DS13]）。

2.2 Arnold公式

让我们转向拉格朗日观点，即通过描述流体粒子在时间 t 时的位置 $g(x,t)$ 来描述流，其中该流体粒子最初位于 x。流映射 $g(\cdot,t):\Omega\to\Omega$ 由常微分方程定义

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}g(x,t)=u(g(x,t),\,t) \\ \quad g(x,0)=id. \end{cases} \tag{3}$$

由于根据式（2），$u(\cdot,t)$ 是无散的，$g(\cdot,t)$ 是保体积的，也就是说

$$\det Dg(x,t)\equiv 1\ \forall x\in\Omega,\ \forall t\in[0,T] \tag{4}$$

或者等价地

$$g(\cdot,t)_\sharp 1_\Omega = 1_\Omega\ \forall t\in[0,T],$$

其中，$T_\sharp\mu$ 表示测度 μ 在映射 T 下的推前（定义为对任意可测集 A，$T_\sharp\mu(A)=\mu(T^{-1}(A))$），$1_\Omega$ 表示 Ω 上的均匀测度。这可由以下初等恒等式得到：

$$\frac{d}{dt}\det Dg(x,t)=\operatorname{div}u(y,t)\big|_{y=g(x,t)}\det Dg(x,t)$$

对于任意时变向量场 u 的流映射，均成立。

Arnold 注意到，在拉格朗日坐标中，欧拉方程（形式上）等价于变分原理

$$\min\int_0^T \left|\left|\tfrac{d}{dt}g(\cdot,t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\ \text{ subject to }\ g(\cdot,t)_\sharp 1_\Omega=1_\Omega\ \forall t\in[0,T] \tag{5}$$

以及端点条件

$$g(\cdot,t)|_{t=0}=id,\quad g(\cdot,t)|_{t=T}=g_*, \tag{6}$$

其中 $g_*:\Omega\to\Omega$ 是某个预先指定的保体积映射。时间 T 处的端点条件取代了欧拉方程的初始条件 $u|_{t=0}=u_0$。非正式地说，变分原理表明

solutions to Euler = L^2 geodesics in the group of volume-preserving maps.

为使论述自成一体，我们简要形式化推导为何（足够光滑的）式（5）的极小化子是欧拉方程的解。引入保体积映射的集合，

$$S=\{\tilde g:\Omega\to\Omega\,|\,\tilde g\,\text{measurable},\,\tilde g_\sharp 1_\Omega=1_\Omega\}.$$

变分原理的抽象欧拉-拉格朗日方程为

$$\tfrac{d^2}{dt^2} g(\cdot,t) \in \big(T_{g(\cdot,t)}S\big)^{\perp_{L^2}} \tag{7}$$

其中， $T_{g(\cdot,t)}S$ 表示点 $g(\cdot,)$ 处的切空间， $\perp_{L^2}$ 表示关于 L^2 内积的正交补。不难看出，切空间可明确表示为

$$T_{g(\cdot,t)}S = \{\mathrm{v}(g(\cdot,t)) : \Omega \to \Omega \mid \operatorname{div}\mathrm{v}=0,\ \mathrm{v}\cdot\nu|_{\partial\Omega}=0\}.$$

我们断言，关于 L^2 内积的正交补为

$$\Big(T_{g(\cdot,t)}S\Big)^{\perp_{L^2}} = \{\nabla p(g(\cdot,t)) \,|\, p:\Omega\to\mathbb{R}\}.$$

这可由以下计算得出

$$\begin{aligned}\big\langle \nabla p(g(\cdot,t)), \mathrm{v}(g(\cdot,t))\big\rangle_{L^2} \;&=\; \int_\Omega \nabla p(g(x,t))\cdot \mathrm{v}(g(x,t))\,dx \\ &\underset{g(\cdot,t)\in S}{=} \int_\Omega \nabla p(y)\cdot \mathrm{n}(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} p\mathrm{v}\cdot\mathrm{n}\,dS - \int_\Omega p\operatorname{div}\mathrm{v}\end{aligned}$$

这里我们用到了变量替换 $y = g(x,t)$，以及 $g(\cdot,t)$ 保持体积不变这一事实（式 (4)）。根据对正交补的这一描述，抽象的欧拉-拉格朗日方程 (7) 可写为

$$\tfrac{d^2}{dt^2} g(\cdot,t) = -\nabla p(g(\cdot,t)) \text{ for some } p:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}. \tag{8}$$

最后，我们来计算 (8) 的左侧：根据链式法则，

$$\tfrac{d^2}{dt^2} g(\cdot,t) = \tfrac{d}{dt} u(g(\cdot,t),t) = \big(\partial_t u + \underbrace{Du\,u}_{=(u\cdot\nabla)u}\big)(g(\cdot,t),t),$$

因此，(8) 正是欧拉方程 (1)。

2.3 布雷尼耶表述

Ebin 和 Marsden [EM70] 证明，当端点映射 g_* 是一个光滑的保体积微分同胚，并且在适当的索伯列夫范数下充分接近恒等映射时，Arnold变分原理存在唯一的极小化者。相比之下，Shnirelman[Sh87] 证明了一个颇令人惊讶的结果：存在一些 $\Omega = [0,1]^3$ 上的光滑保体积微分同胚 g_*，使得该变分原理不存在极小化者。

这种不适定性促使 Brenier [Bre89] 提出了一种非常有趣的松弛。首先，利用富比尼定理将 Arnold 变分原理改写为

$$\min \int_\Omega \int_0^T \big|\tfrac{d}{dt} g(x,t)\big|^2 dt\,dx \;\text{ subject to }\; g(\cdot,t)_\sharp 1_\Omega = 1_\Omega\ \forall t \tag{9}$$

$$\text{with endpoint condition } g(\cdot,0) = id,\ \ g(\cdot,T) = g_*. \tag{10}$$

内在　　积分表示初始位于 x的流体粒子所经过路径的作用量　　.

现在，不再要求每个流体粒子沿单一路径运动，而是允许它沿着一组路径运动，这组路径由路径空间上的概率测度描述，

$$\min \int_{\omega\in C([0,T];\Omega)} \int_0^T |\dot{\omega}(t)|^2 dt\, d\gamma(\omega) \quad \text{subject to } \pi_{t\sharp}\gamma = \mathbf{1}_\Omega \ \forall t \tag{11}$$

$$\text{with endpoint condition } (\pi_0, \pi_T)_\sharp \gamma = (id, g_*)_\sharp \mathbf{1}_\Omega. \tag{12}$$

此处的最小化是在路径空间上的概率测度 $\gamma \in \mathcal{P}(C([0,T];\Omega))$ 上进行的，并且

$$\begin{aligned} \pi_t : C([0,T];\Omega) &\to \Omega \\ \omega &\mapsto \omega(t) \end{aligned}$$

表示将每条路径映射到其在时间 t 时取值的映射。与之前一样，$g_* : \Omega \to \Omega$ 是给定的保体积映射。变分问题 (11) 称为广义欧拉。正如 Brenier 所证明的，关于路径空间上的窄拓扑，新泛函是下半连续的，且其定义域是紧的，因此保证了最优解的存在。从物理上看，将每个流体粒子的单一路径改为一组路径，意味着允许质量分裂。见图 1。

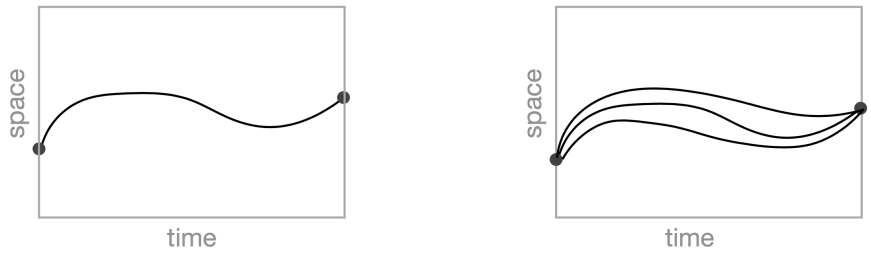


图 1：左图：每个流体粒子沿单一路径 ω 运动（Arnold变分原理）。右图：每个流体粒子可以沿多条路径运动（Brenier 变分原理）。

存在会导致质量分裂的端点条件。

例1. 这个一维例子由 Brenier [Bre89]提出：$\Omega = [-1,1]$,$g_*(x) = -x$（即把流体上下颠倒），$T = \pi$。在这种情况下，Arnold变分原理没有解，而 Brenier 变分原理由某个概率测度 γ 唯一确定；对于每个初始位置 $x \in [-1,1]$，该测度都集中在一族单参数路径上

$$\omega_{x,\mathrm{v}}(t) = g_{\mathrm{v}}(x,t) = x\cos t + \mathrm{v}\sin t \quad (\mathrm{v} \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}])$$

所有这些路径都将初始点 x 与终点 $-x$相连。这种形式的路径是通过求解压力与时间无关的方程 (8) $p(x) = \frac{1}{2}x^2$ 得到的。更确切地说，γ 是　　–

集中在这些路径上，其概率密度为

$$f(x,\mathrm{v})=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-(x^2+\mathrm{v}^2)}}.$$

此例的可视化见 [Fri25]图 1.19。

例2。 在例1的基础上，Bernot、Figalli 和 Santambrogio [BFS09] 构造了满足端点条件 g_* 为旋转的二维圆盘上的质量分裂解（不一定唯一）。

有人可能会认为，质量分裂表明原有的流体动力学欧拉模型在某种程度上失效了。关于这一点，从建模角度出发的进一步讨论见第 7 节。

2.4 Time-离散化及其作为最优输运的解释 t

将连续时间区间 $[0,T]$ 替换为离散时间集合 $\{t_0,t_1,...,t_N\}$，其中$0=t_0<t_1<...<t_N=T$，可得到以下简化:

$$\begin{aligned}\text{path space: } C([0,T];\Omega) &\rightsquigarrow \Omega^{N+1}\\ \text{paths: } \omega\in C([0,T];\Omega) &\rightsquigarrow (\omega_0,...,\omega_N)\in\Omega^{N+1}\\ \text{probability measures: } \gamma\in\mathcal{P}(C([0,T];\Omega)) &\rightsquigarrow \gamma\in\mathcal{P}(\Omega^{N+1}).\end{aligned}$$

Brenier 变分原理 (11) 化简为:

$$\min_{\gamma\in\mathcal{P}(\Omega^{N+1})}\int_{\Omega^{N+1}}\sum_{i=1}^{N}\frac{|\omega_i-\omega_{i-1}|^2}{t_i-t_{i-1}}\,d\gamma(\omega_0,...,\omega_N)\ \text{ subject to } \pi_{i\sharp}\gamma=\mathbf{1}_\Omega\,\forall i=0,...,N \quad (13)$$

$$\text{with endpoint condition } (\pi_0,\pi_N)_\sharp\gamma=(id,g_*)_\sharp\mathbf{1}_\Omega. \quad (14)$$

这个离散版本也由 Brenier [Bre93] 引入。相反，正如 Nenna [Nen17] 在 [Bre93]，的早期结果基础上所证明的，随着时间步长趋于零，离散问题在适当意义下 Γ 收敛到连续问题。

通过将端点条件 (14) 纳入代价，可以进一步简化。该条件意味着，可容许竞争者 γ 所计费的任何路径 (ω_0、.....、 ω_N) 都必须满足 $\omega_N=g_*(\omega_0)$，因此完全由其前 $N-1$ 个分量 (ω_0 、 ..... 、 ω_{N-1}) 确定，从而得到以下约化变分原理（见下文引理 2.1 ）:

$$\min_{\bar\gamma\in\mathcal{P}(\Omega^N)}\int_{\Omega^N}\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{|\omega_i-\omega_{i-1}|^2}{t_i-t_{i-1}}+\frac{|\omega_{N-1}-g_*(\omega_0)|^2}{t_N-t_{N-1}}\Big)\,d\bar\gamma(\omega_0,...,\omega_{N-1}) \quad (15)$$

$$\text{满足约束 } \pi_{i\sharp}\bar\gamma=\mathbf{1}_\Omega\,\forall i=0,\ .....,\ N-1. \quad (16)$$

问题 (13)–(14) 和 (15)–(16) 都是多边际最优传输（MMOT）问题的实例

$$\min_{\gamma\in\mathcal{P}(X_1\times\ldots\times X_N)} \int_{X_1\times\ldots\times X_N} c(x_1,\ldots,x_N)\,d\gamma(x_1,\ldots,x_N) \tag{17}$$

$$\text{subject to } \pi_{i\sharp}\gamma = \mu_i \tag{18}$$

其中

- 这些 X_i 是度量空间
- π_i 是乘积空间 $X_1 \times \ldots \times X_N$ 到第 i 个因子的投影映射（即 $\pi_i(x_1, \ldots, x_N) = x_i$），且 μ_i 是因子空间 X_i 上的给定博雷尔概率测度，因此约束条件 (18) 相当于指定多元概率测度 γ 的 N 边缘分布
- $c\colon\ X_1 \times \ldots \times X_N \to \mathbb{R}$ 是一个代价函数。

因此，我们要在具有给定边缘分布的多元概率测度 γ 中，最小化某个代价函数 c 的期望值。极小化子称为最优计划，并且可以证明，在非常一般的条件下它们都存在（例如，当 X_i 是 $\mathbb{R}^d$ 的任意闭子集、μ_i 是 X_i 上的任意博雷尔概率测度，且 c 下半连续并有下界时（[Fri25] 定理 3.1））。此类问题还出现在许多其他背景中，例如时间数据插值、空间数据插值或多电子量子力学；不同的应用对应于不同的代价函数 c；参见 [Fri25] 第 1.6 节。

为便于后续使用，我们将约化到 (15)–(16) 的过程表述得更准确一些。

引理 2.1。对于任意闭有界子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 以及任意 $N \geq 2$，概率测度 $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega^{N+1})$ 是 *(13)–(14)* 的解，当且仅当其关于 Ω 的前 N 个副本的边缘分布 $(\pi_0, \ldots, \pi_{N-1})_\sharp\gamma \in \mathcal{P}(\Omega^N)$ 是 *(15)–(16)* 的解。

证明 设 γ 是 (13)–(14) 的一个可容许竞争者。其关于 Ω 的前 N 个副本的边缘分布 $\bar\gamma = (\pi_0, \ldots, \pi_{N-1})_\sharp\gamma$ 因而是 (15)–(16) 的可容许竞争者。此外，由 (14) 可知，γ 支撑中的任意路径 $(\omega_0, \ldots, \omega_N)$ 都必须满足 $\omega_N = g_*(\omega_0)$，因此

$$\int_{\Omega^{N+1}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{t_i - t_{i-1}}}_{=:c(\omega_0,\ldots,\omega_N)} d\gamma = \int_{\Omega^{N+1}} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\omega_i - \omega_{i-1}|^2}{t_i - t_{i-1}} + \frac{|\omega_{N-1} - g_*(\omega_0)|^2}{t_N - t_{N-1}}}_{=:c_*(\omega_0,\ldots,\omega_{N-1})}\Big) d\gamma = \int_{\Omega^N} c_* d\bar\gamma.$$

反过来，(15)–(16) 的任意可容许竞争者 $\bar\gamma \in \mathcal{P}(\Omega^N)$ 都可以延拓为 (13)–(14) 的一个可容许竞争者，即 $\gamma = e_\sharp\bar\gamma$ 其中 e 是延拓映射 $e(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}) = (\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}, g_*(\omega_0))$，并且由变量代换公式可得

$$\int_{\Omega^N} c_*\, d\bar\gamma = \int_{\Omega^N} c \circ e\, d\bar\gamma = \int_{\Omega^{N+1}} c\, de_\sharp\bar\gamma = \int_{\Omega^{N+1}} c\, d\gamma.$$

3 最优传输中的质量分裂

多边际最优传输中一个重要且长期悬而未决的问题，是弄清何时会发生质量分裂，或者等价地，何时最优计划不具有“Monge”形式。下面我们将这些概念形式化，并概述已有结果。

3.1 术语：Monge 与 Kantorovich

定义 对于一般的 N 边缘分布最优传输问题 (17)–(18)，若最优方案 γ 在具有相同 x_i 的不同构型 $(x_1, ..., x_N)$ 上赋予质量，则称其相对于第 i 个边缘分布发生质量分裂；若其相对于每个边缘分布都发生质量分裂，则称其处处发生质量分裂。

特别地，对于时间离散化广义欧拉方程 (15)–(16) 的最优方案，若在离散时间 t_i（$i \in \{0, ..., N-1\}$），γ 在具有相同 ω_i 的不同路径 $(\omega_0, ..., \omega_N)$ 上赋予质量，则称其在该离散时间发生质量分裂；若其在每个离散时间 t_i 都发生质量分裂，则称其处处发生质量分裂。

因此，当且仅当最优方案相对于第 i 个边缘分布（或在离散时间 t_i）不是 Monge 形式时，它才相对于第 i 个边缘分布（或在离散时间 t_i）发生质量分裂。这里回顾以下标准定义：

定义 （参见 [Fri25] 第 1.6 节）对于一般的 N 边际最优传输问题 (17)–(18)，若存在可测映射 $T_k\colon X_i \to X_k$（$k \in \{1, ..., N\}\backslash\{i\}$），使得该问题的最优计划具有相对于 i 个边缘分布的Monge形式，则称之为

$$\gamma = (T_1, ..., T_{i-1}, id, T_{i+1}, ..., T_N)_\sharp \mu_i.$$

显然，从这些定义可知，任何非质量分裂最优计划都是多边际最优传输问题 (17)–(18) 的Monge表述的一个解，

$$\min_{T_1,..,T_{i-1},T_{i+1},...,T_N} \int_{X_i} c(T_1(x_i), ..., T_{i-1}(x_i), x_i, T_{i+1}(x_i), ..., T_N(x_i))\, d\mu_i(x_i) \tag{19}$$

在满足 $T_{k\sharp}\mu_i = \mu_k$（$k \in \{1, ..., N\}\backslash\{i\}$）。的条件下，对可测映射 $T_k\colon X_i \to X_k$ 进行优化 (20)

3.2 先前结果

对于 $N = 2$ 且在欧几里得空间中（即 X_1、X_2 是 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集），质量分裂问题已得到较为充分的理解（例如参见 [Fri25]）：如果代价函数 c 可微且满足扭转条件

$$y \mapsto \nabla_x c(x, y) \text{ injective},$$

并且第一个边缘分布 μ_1 相对于勒贝格测度绝对连续，那么最优计划是唯一的，并且相对于第一个边缘分布具有 Monge 形式，也就是说

不会发生质量分裂。著名的特殊情形 $c(x,\ y) = |x-y|^2$，由 Brenier [Bre91], 提出，实际上源于他试图理解广义欧拉方程在单个时间步内会发生什么，可表述如下:

定理。 (Brenier 定理 [Bre91]) 设Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界开域，且μ_1、 μ_2 是 $\mathcal{P}$(Ω)中的绝对连续概率测度。对于该问题

$$\min_{\gamma\in\mathcal{P}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})}\int_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|\omega_0-\omega_1|^2 d\gamma(\omega_0,\omega_1)\ \text{ subject to }\ \pi_{i\sharp}\gamma=\mu_i\ (i=1,2)$$

不会发生质量分裂，也就是说，最优 γ 是唯一的，并且不会将质量分配给具有相同 ω_0 的不同路径(ω_0,ω_1)，也不会分配给具有相同 ω_1 的不同路径(ω_0,ω_1)。

对于 $N\geq 3$ 这种情形的了解要少得多，除了一些特定例子 .

Agueh 和 Carlier [AC11] 证明，不会发生质量分裂，且对于 Wasserstein 重心代价，最优计划是唯一的

$$c(x_1,...,x_N)=\sum_{i=1}^N\lambda_i|x_i-B(x)|^2,\ B(x)=\sum_{i=1}^N\lambda_i x_i \tag{21}$$

该代价源于数据的空间插值。这里的 λ_i 是正权重，且满足 $\sum_{i=1}^N\lambda_i=1$。在等权重这一典型情形下，这可由 Gangbo 和Święch [GS98]的早期结果推出。关于数学形式相似、源于经济学（多智能体匹配）和数据插值（p-Wasserstein 重心）的代价的推广，参见 [Pas14, BFR24]。

Pass [Pas13] 展示了一个库仑代价下的（非唯一）质量分裂最优方案示例

$$c(x_1,...,x_N)=\sum_{1\leq i<j\leq N}\frac{1}{|x_i-x_j|} \tag{22}$$

该代价源于电子结构中的问题，处于 $d=3$维，并针对 $N=3$ 个边缘分布。对于这一代价，除了当 $d=1$ 且 N 为任意 [CDD15], 时答案为“是”之外，目前尚不清楚是否总是存在最优 Monge 计划。

Friesecke [Fri19] 给出了 Frenkel-Kontorova 型代价下唯一的质量分裂最优方案示例

$$c(x_1,...,x_N)=\sum_{1\leq i<j\leq N}v(|x_i-x_j|),\ \ v(r)=\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3} \tag{23}$$

在统计力学中，对于维数为 $d=1$且具有 $N=3$ 均匀边缘分布的情形。对于具有排斥性谐势 $v(r)=-r^2$ 的类似代价，Gerolin、Kausamo 和 Rajala 证明，在一般维数 d 且对于 $N=3$ ，存在绝对连续的边缘分布，使得必然发生质量分裂（即 Monge问题没有

解）；Pass [Pas12] 早先已为这种代价找到了质量分裂方案的例子（不一定唯一）。

Benamou、Gallouet 和 Vialard [BGV19] 为 Wasserstein三次样条代价找到了一个质量分裂最优方案的实例（不一定唯一）

$$c(x_1, ..., x_N) = \sum_{i=2}^{N-1} |x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}|^2 \tag{24}$$

该实例源于数据的时间插值，发生在维度为 $d = 1$ 且具有 $N = 3$ 个边缘分布的情形，其中一个边缘分布不是绝对连续的。作者还证明，在其构造的实例中，必然会发生质量分裂（即 Monge问题没有极小化者）。如果要求所有边缘分布都绝对连续，是否仍然成立，目前尚不得而知。

Pass [Pas12], 利用几何测度论中的技术，获得了适用于一般代价的最优计划支集维数的一个非平凡上界。

4 为什么质量会在广义欧拉方程中发生分裂？一个简单机制

先前的理解 [Bre89、BFS09] 需要对完整的连续路径空间模型（11）–（12）进行深入分析，并且依赖间接论证：先巧妙地猜出质量分裂极小化子，再借助Kantorovich对偶性验证其最优性。

这里我们转而采用简化的离散空间和时间设定，并给出（1）一个非常简单的离散质量分裂示例（见图 2）；（2）一个清晰明了的变分论证，说明为何它优于非分裂解；（3）一个相当简短的变分论证，说明为何它是最优的。

尽管这个例子的构思当然受到 Brenier 开创性工作的启发，但其进展在于变分论证（2），它揭示了一种导致质量分裂的清晰机制。命题 4.1 a) 的证明之后给出了对该机制的文字概述。

我们采用（极简的）空间离散化

$$[-1,\, 1] \;\rightsquigarrow\; \Omega = \{-1, 0, 1\}$$

以及具有任意数量时间步的均匀时间离散化

$$[0,\, T] \;\rightsquigarrow \{t_0, ..., t_N\},\; t_j = j,$$

以及 Brenier端点映射

$$g_*(\omega_0) = -\omega_0$$

（也就是说，将流体上下颠倒）。候选方案或最优计划 $\gamma \in \mathcal{P}(\Omega^{N+1})$ 因而可以用其相对于计数测度的密度来表示，也就是说，它们可以

被视为定义在路径 $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_N)$ 上的函数 $\gamma\colon \Omega^{N+1} \to \mathbb{R}$，满足 $\gamma \geq 0$ 和 $\sum_{\omega\in\Omega^{N+1}} \gamma(\omega) = 1$。此外，正如第 2.4 节所述，由于端点条件 $\omega_N = -\omega_0$，候选方案或最优计划的支撑集包含于路径集合 $\{\omega \in \{-1,0,1\}^{N+1}\colon \omega_N = -\omega_0\}$，于是问题 (13)–(14) 变为

$$\min_{\gamma\in\mathcal{P}\left(\{\omega\in\{-1,0,1\}^{N+1}\,:\,\omega_N=-\omega_0\}\right)} \sum_{\substack{\omega\in\{-1,0,1\}^{N+1}:\\ \omega_N=-\omega_0}} \left(\sum_{i=1}^{N} |\omega_{i-1}-\omega_i|^2\right) \gamma(\omega) \tag{25}$$

$$\text{subject to } \pi_{i\sharp}\gamma = \tfrac{1}{3}1_\Omega \ \forall i. \tag{26}$$

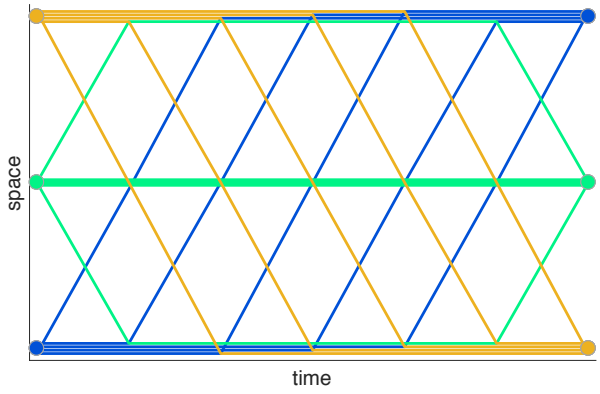
命题 4.1。（完全离散情形下的质量分裂）设 $N \geq 3$。

a) 对于 $N \geq 4$，(25)–(26) 的任意极小化者都具有质量分裂。

b)(25)–(26) 的一个极小化者是集中在图 *2* 所示路径上的概率测度，其中

$$\text{probability}\big(\text{thick green path}\big) = \frac{N-3}{3(N-1)},$$
$$\text{probability}\big(\text{any other path}\big) = \frac{1}{3(N-1)}.$$

c) 当且仅当 N 为偶数时，此极小化者是唯一的。



Fig图 2：全离散广义欧拉方程 (25)–(26) 的解

该图对应于最优解 γ_0的以下公式，其中黄色

绿色，和蓝色路径表示第一、第二和第三行中的贡献：

$$\gamma_0(\omega) = \frac{1}{3(N-1)} \sum_{\nu=1}^{N-1} \Big(\prod_{i=0}^{\nu-1} \delta_1(\omega_i) \Big) \delta_0(\omega_\nu) \Big(\prod_{j=\nu+1}^{N} \delta_{-1}(\omega_j) \Big)$$
$$+ \frac{1}{3(N-1)} \Big[(N-3) \Big(\prod_{i=0}^{N} \delta_0(\omega_i) \Big) + \delta_0(\omega_0) \Big(\prod_{i=1}^{N-1} \delta_1(\omega_i) + \prod_{i=1}^{N-1} \delta_{-1}(\omega_i) \Big) \delta_0(\omega_N) \Big]$$
$$+ \frac{1}{3(N-1)} \sum_{\nu=1}^{N-1} \Big(\prod_{i=0}^{\nu-1} \delta_{-1}(\omega_i) \Big) \delta_0(\omega_\nu) \Big(\prod_{j=\nu+1}^{N} \delta_1(\omega_j) \Big). \tag{27}$$

在证明上述方案是最优解之前，我们先简单解释为什么最优解必然会出现质量分裂。

质量分裂证明（命题4.1 a））。我们将待最小化的代价记为

$$C[\gamma] = \sum_{\substack{\omega \in \{-1,0,1\}^{N+1}: \\ \omega_N = -\omega_0}} \Big(\underbrace{|\omega_0 - \omega_1|^2 + |\omega_1 - \omega_2|^2 + ... + |\omega_{N-1} - \omega_N|^2}_{=:c(\omega)} \Big) \cdot \gamma(\omega).$$

1. 外侧轨道（即从 1 或 -1 出发的轨道）必须移动。显然，单调移动比非单调移动代价更低。目标位置可以通过单调移动到达：要么走 2 个小步（即 $|\omega_i - \omega_{i-1}| = 1$），要么走 1 个大步（即 $|\omega_i - \omega_{i-1}| = 2$）。根据代价函数 $h(\omega_i - \omega_{i-1}) = |\omega_i - \omega_{i-1}|^2$ 的严格凸性，走 2 个小步比走 1 个大步更好：

$$1^2 + 1^2 < 2^2 + 0^2, \tag{28}$$
$$\text{or more generally } h(\tfrac{2+0}{2}) < \frac{h(2)+h(0)}{2} \text{ for any strictly convex } h.$$

特别地，任意外侧轨道的最小成本 $c(\omega)$ 等于式（28）的左侧。

2. 如果中间轨道（即从 0 出发的轨道）不移动，那么外侧轨道就必须迈出大步。这是因为，根据不可压缩性（式（26））， 中间位置 0 在任何时刻都被中间轨道完全占据。由此得到总成本的下界：

$$C[\gamma] = \sum_{\substack{\omega:\omega_0=1, \\ \omega_N=-1}} c(\omega)\cdot\gamma(\omega) + \sum_{\substack{\omega:\omega_0=-1, \\ \omega_N=1}} c(\omega)\cdot\gamma(\omega) + \sum_{\substack{\omega:\omega_0=0, \\ \omega_N=0}} c(\omega)\cdot\gamma(\omega) \geq (\,2^2 + 2^2 + 0^2\,)\cdot\tfrac{1}{3}. \tag{29}$$

3. 如果中间轨道移动（且不发生分裂），外侧轨道就可以迈出小步，但中间轨道的成本 $c(\omega)$ 会从 0 上升到 $1^2 + 1^2$。（更准确地说，当$N \geq 3$ 且中间轨道两次离开中间位置时，外侧轨道都可以迈出小步。）由此得到下界

$$C[\gamma] \geq (2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2)\cdot\tfrac{1}{3} \tag{30}$$

当 γ 以相同概率集中在以下三条路径上时，可以达到该下界： γ 在三条路径 (1，0，-1，.....，-1)、(-1，-1，0，1，.....，1) 和 (0，1，1，0，.....，0) 上均匀分布。与 (29) 比较可知，这种情况优于中间轨道不移动的情况。总之，我们得出结论：在没有分裂的情况下（即每个由 γ 收费的集合 $\{\omega:\ \omega_0 = x\}$ 都是单元素集合），(30) 右边的值就是最优总成本。

4. 如果中间轨道只移动一部分（即分裂成一部分移动、另一部分不动），如图 2 所示，外侧轨道仍可通过在每个时间点 $N-1)^{\ th}$ 将一份（ t_1，.....， t_{N-1}的质量经由中间轨道输送，从而迈出小步。这只要求中间轨道在这些时间点腾出两份（$N-1)^{\ ths}$ 质量，因此中间轨道只需付出 $\frac{2}{N-1}$（1^2+1^2的代价，总成本为

$$C[\gamma_0]\ = (2{\cdot}1^2 + 2{\cdot}1^2 + \tfrac{2}{N-1}2{\cdot}1^2)\cdot\tfrac{1}{3}. \tag{31}$$

当 $N \geq 4$ 时，这比不发生分裂时的最优成本（式（30）右侧）更低。

让我们概括证明所揭示的导致质量分裂的机制 f:

- 由于拉格朗日量关于速度具有凸性，外侧轨道希望通过小步而非大步走完所需距离，因此必须经过中点。
- 根据质量守恒，只有中间轨道腾出中点，这才有可能实现，但这需要付出一定代价。

- 当中间轨道只部分离开中点，而外侧轨道在许多不同时间将质量分成小份穿过中点时，这项成本可以大幅降低。

最优解公式的证明（命题 4.1 b)）。对于任意候选方案 γ，考察它在以下路径空间子集上的行为会很有帮助：

$$\text{内侧轨道：} = \{\omega \in \{-1,0,1\}^{N+1}:\ \ \omega_0 = 0,\ \ \omega_N = 0\},$$
$$\text{外侧轨道：} = \{\omega \in \{-1,0,1\}^{N+1}:\ \ \omega_0 = 1,\ \ \omega_N = -1 \text{或}\ \omega_0 = 1,\ \ \omega_N = -1\},$$

离开 0 的轨道：$=$ 存在 $i \in \{1,...,N\text{–}1\}$ 使得 $\omega_i \neq 0$的内侧轨道，

始终停留在 0 的轨道：$=$ 对于所有 i，$\omega_i = 0$ 的内轨道，

经过 0 的轨道：$=$存在满足 $\omega_i = 0$，的 $i \in \{1,...,N\text{–}1\}$ 外侧轨道；不经过 0 的轨道：$=$ 对所有 i. 均满足 $\omega_i \neq 0$ 的外侧轨道

注意， γ 的支撑包含在最后四个集合的不交并上，而这等于前两个集合的不交并。

在 a) 的证明中推导出的下界给出

$$C[\gamma|_{\text{inner orbits}}] \geq (1^2{+}1^2)\cdot\gamma(\text{orbits that vacate 0}) \ +\ 0\cdot\gamma(\text{orbits that stay 0}), \tag{32}$$
$$C[\gamma|_{\text{outer orbits}}] \geq 2^2\cdot\gamma(\text{orbits that don't pass through 0}) \ +\ (1^2{+}1^2)\cdot\gamma(\text{orbits that pass through 0}).$$

根据质量守恒定律（式 (26)），对于所有 i，我们有 $\pi_{i\sharp}\gamma(0) = \frac{1}{3}$，因此在时间 t_i 经过 0 的轨道的质量等于在时间 t_i离开 0 的轨道的质量。由于每条轨道

经过 0 都只会在单个时间 t_i 经过它，而每条离开 0 的轨道最多可在 $N-1$ 个时间点离开它（即在 t_1、.....、t_{N-1}），因此我们有

$$\gamma(\text{orbits that pass through } 0) \le (N-1)\cdot\gamma(\text{orbits that vacate } 0). \tag{33}$$

此外，由于 $\pi_{0\sharp}\gamma = \frac{1}{3}1_{\Omega^-}$，我们有

$$\tfrac{2}{3} = \gamma\big(\text{outer orbits}\big) = \gamma(\text{orbits that pass through } 0) + \gamma(\text{orbits that don't pass through } 0). \tag{34}$$

首先使用成本下界 (32)，再使用质量不等式以及等式 (33) 和 (34)，得到

$$\begin{aligned} C[\gamma] &= C[\gamma|_{\text{inner orbits}}] + C[\gamma|_{\text{outer orbits}}] \\ &\ge 2\gamma(\text{orbits that vacate } 0) + 2\gamma(\text{orbits that pass through } 0) \\ &\quad + 4\gamma(\text{orbits that don't pass through } 0) \\ &\ge \tfrac{2}{N-1}\gamma(\text{orbits that pass through } 0) + 2\gamma(\text{orbits that pass through } 0) \\ &\quad + 4\big[\tfrac{2}{3} - \gamma(\text{orbits that pass through } 0)\big] \\ &= \tfrac{2}{N-1}\alpha + 2\alpha + 4(\tfrac{2}{3} - \alpha) \;=\; \tfrac{8}{3} + \big(\tfrac{2}{N-1} - 2\big)\alpha \end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$\alpha := \gamma(\text{orbits that pass through } 0) \in [0, \tfrac{2}{3}].$$

对于 $N \ge 3$， α 的前因子为负，且当且仅当 α 取最大值时，下界 (35) 取最小值，即 $\alpha = \frac{2}{3}$，从而得到总下界

$$C[\gamma] \ge (4 + \tfrac{4}{N-1})\cdot\tfrac{1}{3}.$$

该下界与所声称的最优解的成本 (31) 一致，证明得证。

唯一性证明（命题 4.1 c)）。假设 γ 是一个最优解。由于 (35) 中必须取等号，且 α 必须等于 $_{2\ 3}$，因此：(i) 所有从 ±1 出发的轨道都经过零点，且 (33) 中取等号，因此 γ（离开 0 的轨道） $= 2/(3(N-1))$，并且这些轨道在所有 $N-1$ 时间点 $t_1, ..., t_{N-1}$ 离开 0；(ii) 每条获得 γ 质量的轨道都必须达到 (32) 中的最优成本，也就是说

$$\{\text{orbits that vacate } 0\} \cap \operatorname{supp}\gamma = \{(0,1,...,1,0),\ (0,\text{–}1,...,\text{–}1,0)\}$$

and

$$\{\text{orbits that pass through } 0\} \cap \operatorname{supp}\gamma = \{\omega_+^{(i)}, \omega_-^{(i)}\}_{i=1}^{N-1}$$

wh其中 $\omega_\pm^{(i)} = \pm$(1、.....、1、0、 −1、.....、 −1) 的值在时间点 t 为 0 $_i$.

因此我们有

$$\gamma((0,1,...,1,0)) = \tfrac{1}{3(N-1)} + \delta,\ \ \gamma((0,\text{–}1,...,\text{–}1,0)) = \tfrac{1}{3(N-1)} - \delta \ \text{ for some } \delta \in [-\tfrac{1}{3(N-1)}, \tfrac{1}{3(N-1)}].$$

在 $(x,t) = (\pm 1, t_1)$ 处的质量守恒意味着

$$\gamma((1,0,-1,...,-1)) = \tfrac{1}{3(N-1)} + \delta, \quad \gamma((-1,0,1,...,1)) = \tfrac{1}{3(N-1)} - \delta.$$

现在在 $(x,t) = (\pm 1, t_2)$ 处利用质量守恒，得到

$$\gamma((1,1,0,-1,...,-1)) = \tfrac{1}{3(N-1)} - \delta, \quad \gamma((-1,-1,0,1,...,1)) = \tfrac{1}{3(N-1)} + \delta$$

迭代后可得

$$\gamma(\omega_+^{(i)}) = \tfrac{1}{3(N-1)} + (-1)^{i-1}\delta, \quad \gamma(\omega_-^{(i)}) = \tfrac{1}{3(N-1)} - (-1)^{i-1}\delta \quad (i = 1, ..., N-1). \tag{36}$$

现在，N为偶数和 N为奇数的情形有所不同。当 N为偶数时，轨道数 $\omega_+^{(i)}$ $(i = 1,..., N-1)$ 为奇数，由式（36）可得

$$\gamma(\text{orbits that pass through 0 starting from 1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \gamma(\omega_+^{(i)}) = \tfrac{N-1}{3(N-1)} + \delta,$$

这与 γ（从 1 出发且经过 0 的轨道） $= \pi_{0\sharp}\gamma(1) = \frac{1}{3}$ 结合起来，推出$\delta = 0$。这表明 γ_0 是唯一的最优解。另一方面，当 N 为奇数时，式（36）给出

$$\gamma(\text{orbits that pass through 0 starting from 1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \gamma(\omega_+^{(i)}) = \tfrac{N-1}{3(N-1)},$$

因此，$\pi_{0\sharp}\gamma(1) = \frac{1}{3}$ 并未对 δ 施加任何限制，最优解集合构成一个单参数族，不同的 δ 取值对应不同的最优解。例如，$\delta = \frac{1}{3(N-1)}$ 表示，与图 2 中的方案 γ_0 相比，最初位于 1 的质量分别以两倍大的份额经过 0 转移，但发生在交替的时间。这就完成了命题的证明。

最后我们指出，当 $N = 3$时，在证明 c) 中得到的、具有$\delta = \frac{1}{3(N-1)}$的新最优解具有 Monge 形式，这表明命题 4.1 a) 中的限制 $N \geq 4$ 是必要的。

5 细化空间网格

数值模拟表明，即使细化空间网格，质量分裂现象依然存在，但解的行为会变得有些复杂。下图 3 展示了精确的数值最优解，它们是通过 MATLAB 内置的线性规划求解器 `linprog`求解全离散广义欧拉方程（这是一个线性规划）得到的。[1] 对于一般网格，若能按照命题 4.1 a) 的思路严格解释质量分裂现象，将很有价值，但这超出了本文的范围。偶尔出现 Monge 解（见右上图）也说明了这个问题的微妙之处。

[1]当时间步数量较大时，这种方法很快就会变得不可行，因为未知数的数量会随时间步数量呈指数增长。要应对维数灾难，需要采用复杂得多的方法 [FP23, FP26]。

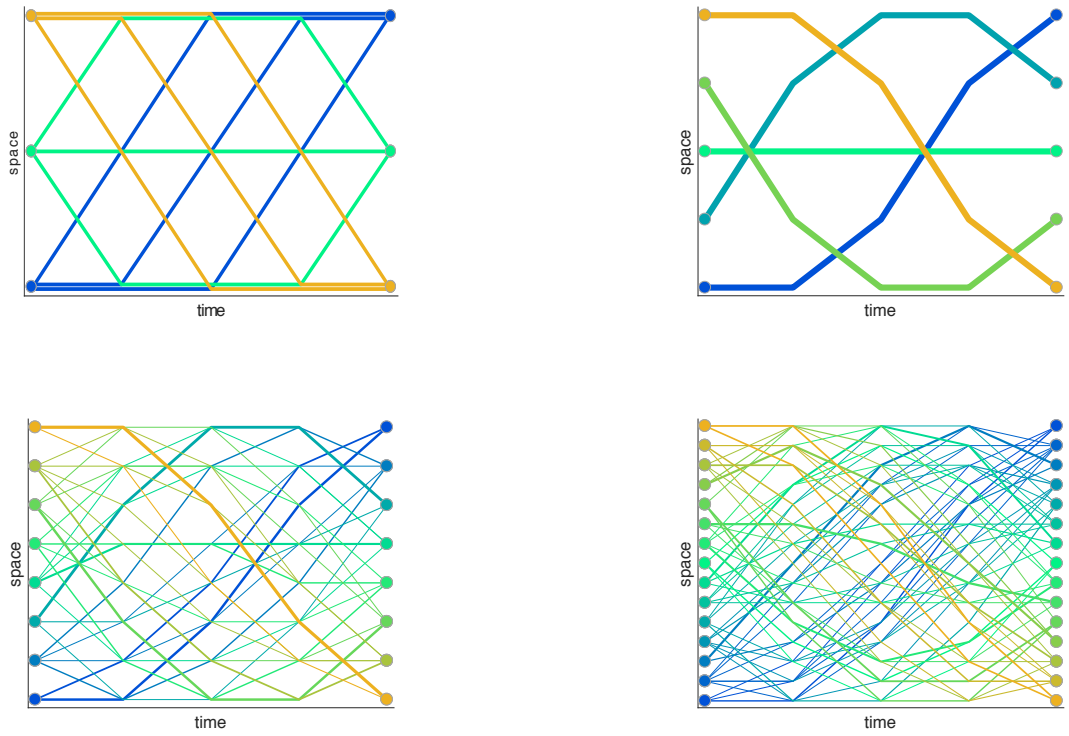


图 3：时空网格上广义欧拉方程的数值解。路径的粗细表示输送的质量。

6 连续空间上的质量分裂示例

时间离散、空间连续的广义欧拉方程 (13)–(14) 是多边际最优传输 (MMOT) 的典型示例，但其是否会出现质量分裂这一问题一直悬而未决。本文对此给出了肯定的回答。

定理 6.1。设$\Omega = [-1,1]$, $g_*(x) = -x$ （即将流体上下颠倒），$N = 3$（即考虑三个时间步），$\{t_0, t_1, ..., t_N\} = \{0,1,2,3\}$。图 *4* 所示的质量分裂方案集中在以下路径上

$$\omega_{x,\mathrm{v}} : \{0,1,2,3\} \to [-1,1],\ \omega_{x,\mathrm{v}}(n) = x\cos\tfrac{\pi}{3}n + \mathrm{v}\sin\tfrac{\pi}{3}n$$

其概率分布为

$$f(x,\mathrm{v}) = \tfrac{1}{2}1_{[-1,1]}(x)\left[\tfrac{1}{2}\delta_{\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v}) + \tfrac{1}{2}\delta_{-\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v})\right]dx\,d\mathrm{v},$$

是(13)–(14)的一个最优解。

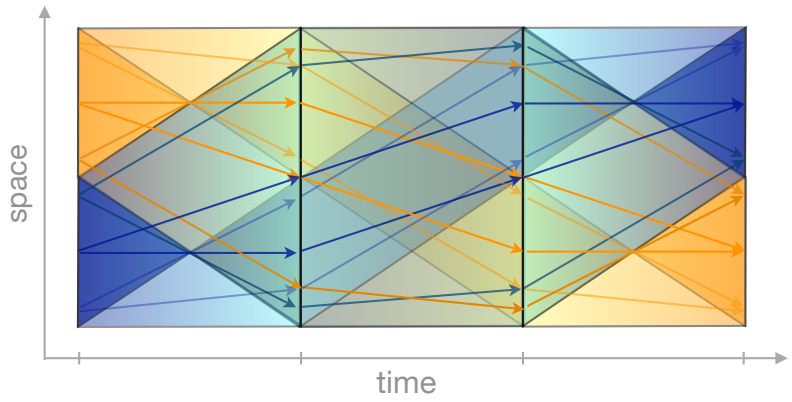


图 4：时间离散广义欧拉方程 (13)–(14) 的质量分裂解。每个流体粒子都通过两条路径从其初始位置移动到终点位置。

该最优解的构造基于命题 4.1 中的全离散示例，其中 $\Omega = \{-1,0,1\}$ 和 $N = 3$ 也集中在每个初始位置对应的两条路径上，

$$\begin{aligned}
\omega &= (1,1,0,-1) \text{ and } (1,0,-1,-1) \text{ for } x = 1,\\
\omega &= (0,1,1,0) \text{ and } (0,-1,-1,0) \text{ for } x = 0,\\
\omega &= (-1,0,1,1) \text{ and } (-1,-1,0,1) \text{ for } x = -1.
\end{aligned}$$

事实上，命题 4.1 中的这些路径恰好 与定理 6.1 中连续优化器针对 $x = 1, 0, -1$ 所使用的路径一致；读者利用正弦和余弦在 $\frac{\pi}{3}$ 的整数倍处的显式取值即可轻松验证这一点。此外，这两条路径的初始斜率

随连续优化器所用的初始位置 x、 x 在线性地变化，其中 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$。因此，连续优化器可以看作离散优化器的一种分段线性插值。如果这种构造（作者 [Fri19] 最初在另一类多边际最优传输问题中提出）能够推广到更一般的情形，将会非常有趣。

定理 6.1 中路径的形式，来自于在拉格朗日坐标下求解时间离散化的欧拉方程 (8)，

$$\omega(i+1) - 2\omega(i) + \omega(i-1) \;=\; -\,p'\big(\omega(i)\big) \quad (i = 1, ..., N-1), \tag{37}$$

其中显式压力为

$$p(x) = \tfrac{1}{2}x^2. \tag{38}$$

该方程的一般解恰好由定理中的函数$\omega_{x,\mathrm{v}}$ 给出，其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $\mathrm{v} \in \mathbb{R}$。关于如何将 (37)–(38) 推导为最优计划支撑中的路径所满足的必要条件（以及该方程的一般解），请参见定理的证明。

我们用三角函数来呈现这个例子，优点是能清楚地展示它与欧拉方程之间的联系（见 (37)），但质量守恒看起来有些神秘。为了理解这一点，可以将最优计划 γ_0 分解为两个更简单的方案，即 $\gamma_0 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$，其中 γ_1 和 γ_2 分别对应于

$$f_1(x,\mathrm{v}) = \tfrac{1}{2}1_{[-1,1]}(x) \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v}) & \text{if } x \geq 0 \\ \delta_{-\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v}) & \text{if } x < 0 \end{array} \right\} dx\, d\mathrm{v},$$

$$f_2(x,\mathrm{v}) = \tfrac{1}{2}1_{[-1,1]}(x) \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{-\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v}) & \text{if } x \geq 0 \\ \delta_{\frac{3|x|-2}{\sqrt{3}}}(\mathrm{v}) & \text{if } x < 0 \end{array} \right\} dx\, d\mathrm{v},$$

并以一种更直观（不涉及三角函数）的方式描述其底层路径。方案 γ_1 和 γ_2 以及相应的路径 $(\omega_0, ..., \omega_3)$ 如图 5 所示。这些路径对应于某些分段线性保测映射 $\omega_0 \mapsto \omega_i$；其公式可以从图中直接读出，详见证明。

如下所示，方案 γ_1 和 γ_2 本身就是 (13)–(14) 的最优解。这些方案仅分别在离散时间 t_1 和 t_2发生质量分裂，而不会在 t_0发生。我们不知道每个 最优解是否都会在某个 离散时间 t_i发生质量分裂。我们的工作仅表明某个 最优解会在每个 t_i发生质量分裂。

定理 6.1 的证明。 *步骤 1。* 所研究的变分问题 (13)–(14) 明确写为

$$\min_{\gamma \in \mathcal{P}([-1,1]^4)} \int_{[-1,1]^4} \sum_{i=1}^{3} |\omega_i - \omega_{i-1}|^2 \, d\gamma(\omega_0, ..., \omega_3) \;\text{ subject to } (\pi_0, \pi_3)_\sharp \gamma = (id, -id)_\sharp \mathbf{1}_{[-1,1]} \tag{39}$$

并满足边缘条件 $\pi_{i\sharp}\gamma = \mathbf{1}_{[-1,1]}$，其中 $i = 0$，1，2，3， (40)

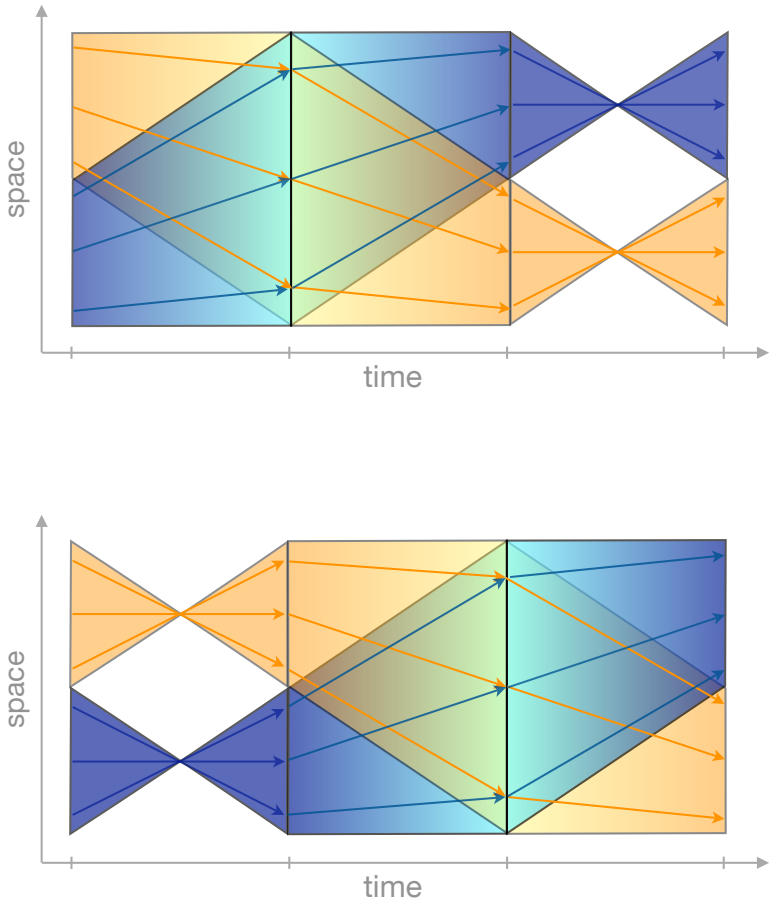


图 5：图4 中最优方案的构建模块 γ_1 （上）和 γ_2 （下）。上方方案可以描述为“扩展并混合，收缩并分离，翻转每个模块”。下方方案对应“翻转每个模块，扩展并混合，收缩并分离”。

其中，π_i：$\omega=(\omega_0,\ \ldots\ldots,\ \omega_3)\mapsto\omega_i$是投影到第 i 个坐标的投影映射。我们还将使用约化形式 (15)–(16)，在本例中其表示为

$$\min_{\bar\gamma\in\mathcal{P}([-1,1]^3)}\int_{[-1,1]^3}\Big(|\omega_0-\omega_1|^2+|\omega_1-\omega_2|^2+|\omega_2-(-\omega_0)|^2\Big)\,d\bar\gamma(\omega_0,\omega_1,\omega_2)\tag{41}$$

$$\text{subject to }\pi_{i\sharp}\bar\gamma=\mathbf{1}_{[-1,1]}\ \text{ for } i=0,1,2.\tag{42}$$

由引理 2.1 可知，方案 γ 是 (39)–(40) 的最优解，当且仅当其推前 $(\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2)_\sharp\gamma$ 是 (41)–(42) 的最优解。下文中，我们将路径 $\omega=(\omega_0,\ \ldots\ldots,\ \omega_3)\in[-1,1]^4$ 在其前 3 个分量上的投影，即 $(\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2)(\omega)=(\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2)$，记为 $\bar\omega$。

接下来，我们将 (41) 中的代价函数 $c(\bar\omega)=|\omega_0-\omega_1|^2+|\omega_1-\omega_2|^2+|\omega_2-(-\omega_0)|^2$ 改为

$$\tilde c(\bar\omega)=c(\bar\omega)-(\omega_0^2+\omega_1^2+\omega_2^2).\tag{43}$$

这是因为，对于任何满足 (41)–(42) 的可行方案，关于其边缘分布对额外项积分只取决于边缘分布，因而不会改变最优计划。

$$\int\tilde c\,d\bar\gamma=\int c\,d\bar\gamma-\sum_{i=0}^{2}\int\omega_i^2\mathbf{1}_{[-1,1]}(\omega_i)d\omega_i.$$

步骤 *2.* 现在我们确定修正后的代价函数 $\tilde c$ 何时在逐点意义下取最小值。该函数的形式为 $\tilde c(\bar\omega)=\langle\bar\omega,\ A\bar\omega\rangle$ 其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是$\mathbb{R}^3$ 上的欧几里得内积，并且

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

这是一个秩一矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

（其中 $a\otimes b$ 表示分量为 $M_{ij}=a_ib_j$ 的矩阵 M）。因此

$$\tilde c(\bar\omega)\ge0,\ \text{“=”}\iff\left\langle\bar\omega,\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0.$$

此外，如果 $\omega=(\bar\omega,\ \omega_3)$ 满足右侧的条件，也就是说

$$\omega_0-\omega_1+\omega_2=0,$$

那么，当且仅当 $\omega_3=-\omega_0$ 时，我们有 $\omega_1-\omega_2+\omega_3=0$。因此，对于任意路径 $\omega=(\bar\omega,\ \omega_3)\in\mathbb{R}^4$，以下等价关系成立：

$$\begin{aligned}\tilde c(\bar\omega)=\min\tilde c\ \text{ and }\ \omega_3=\omega_0\ &\iff\omega_{i-1}-\omega_i+\omega_{i+1}=0\ \text{ for } i=1,2\\&\iff\omega\text{ satisfies (37)–(38).}\end{aligned}$$

这里，最后一个等价关系显然成立：只需在等式两边加上 $(-\omega_i)$，并注意到 $N=3$。

步骤 *3*。 方程 (37)–(38) 的解由以下引理给出；该引理在一维离散拉普拉斯算子理论中广为人知。

引理 6.2。 对于任意 $N \geq 2$，方程 (37) 的通解 $\omega = (\omega_0, ..., \omega_N)$ 为

$$\omega_n = x \cos \tfrac{n\pi}{3} + \mathrm{v} \sin \tfrac{n\pi}{3} \quad (n = 0, ..., N) \tag{44}$$

其中 $x,\ \mathrm{v} \in \mathbb{R}$。

证明 （为方便读者，附上证明）。将二阶差分方程 (37) 写成递推关系

$$\begin{pmatrix} \omega_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} \omega_{n-1} \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, ...$$

于是

$$\begin{pmatrix} \omega_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 ix B 的特征值为 $\lambda_\pm = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$，对应的特征向量为

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}.$$

将递推关系的初始向量 (ω_0, ω_1) 分解为 $(\omega_0, \omega_1) = \alpha v_+ + \beta v_-$，其中系数为 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，得

$$\begin{pmatrix} \omega_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha \lambda_+^n v_+ + \beta \lambda_-^n v_-$$

因此

$$\omega_n = \alpha e^{i\frac{n\pi}{3}} + \beta e^{-i\frac{n\pi}{3}}.$$

转换为实三角函数后，便得到引理中的表示式。

为作物理解释，我们将系数 x 和 v 表示为 ω_0 和ω_1的形式。在 $n=0$ 处对 (44) 求值，得

$$x = \omega_0, \tag{45}$$

因此 x 是初始位置。利用 $\omega_{-1} - \omega_0 + \omega_1 = 0$将递推关系向后延拓，即令 ω_{-1}:
$= \omega_0 - \omega_1$，并利用 $\omega_{\pm 1} = x\cos \frac{\pi}{3} \pm \mathrm{v} \sin \frac{\pi}{3}$，得

$$\omega_1 - \omega_{-1} = 2\mathrm{v} \sin \tfrac{\pi}{3} = 2\mathrm{v}\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

因此

$$\mathrm{v} = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\sqrt{3}}. \tag{46}$$

因此，v 是通过中心差分定义的离散初始速度。

现在令 γ_0 为任意一个支撑在满足 (37)–(38) 的路径 $\omega = (\bar{\omega},\ \omega_3)$ 上的方案（定理中给出的方案以及定理下文引入的辅助计划 γ_1 和 γ_2 都属于这种情况）。根据步骤 2 和引理 6.2，支撑中的所有路径都满足 $\tilde{c}(\bar{\omega}) = \min \tilde{c}$，因此推前 $(\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2)_\sharp\gamma_0$ 是 $\int \tilde{c} d\bar{\gamma}$ 在所有$\mathcal{P}([-1,1]^3)$ 上的一个极小化者。因此，根据步骤 1，只要 γ_0 满足边缘条件 (40)，它就是 (39)–(40) 的一个极小化者。

步骤 *4.* 最后，我们证明定理中给出的方案 γ_0 满足边缘条件 (40)。根据定理下文引入的分解 $\gamma_0 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$，只需验证 γ_1 和 γ_2 满足边缘条件（由此也可证明这些方案是 (39)–(40) 的极小化者）。我们利用

$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2},\ \ \cos\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2},\ \ \sin\tfrac{\pi}{3} = \sin\tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此，使用（45），γ_1 支撑中的路径满足

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0\cos\tfrac{\pi}{3} + \begin{Bmatrix}\frac{3|\omega_0|-2}{\sqrt{3}} & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ \frac{-3|\omega_0|+2}{\sqrt{3}} & \text{if } \omega_0 < 0\end{Bmatrix}\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{\omega_0}{2} + \begin{cases}\frac{3|\omega_0|-2}{2} & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ \frac{-3|\omega_0|+2}{2} & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases}\\ &= \begin{cases}2\omega_0 - 1 & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ 2\omega_0 + 1 & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases} =: T_1(\omega_0).\end{aligned}$$

这就是图 5 左上部分所示的“扩展并混合”映射。此外，

$$\omega_2 \underset{(37),\,(38)}{=} \omega_1 - \omega_0 = \begin{cases}\omega_0 - 1 & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ \omega_0 + 1 & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases} =: T_2(\omega_0).$$

因此，$\gamma_1 = (id,\ T_1,\ T_2,\ -id)_\sharp\mathbf{1}_{[-1,1]}$，并且由于 T_1、T_2 显然是 $[-1,1]$上的保测映射，边缘条件（40）成立。类似地，γ_2 支撑中的路径满足

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} + \begin{cases}\frac{-3|\omega_0|+2}{2} & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ \frac{3|\omega_0|-2}{2} & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases} = \begin{cases}-\omega_0 + 1 & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ -\omega_0 - 1 & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases} =: S_1(\omega_0)$$

（这是 图 5 左下部分所示的“翻转每个模块”映射）且 d

$$\omega_2 \ = \ \omega_1 - \omega_0 \ = \begin{cases}-2\omega_0 + 1 & \text{if } \omega_0 \geq 0\\ -2\omega_0 - 1 & \text{if } \omega_0 < 0\end{cases} =: S_2(\omega_0).$$

因此 $\gamma_2 = (id,\ S_1,\ S_2,\ -id)_\sharp\mathbf{1}_{[-1,1]}$，并且对于 γ_2，边缘条件 (40) 也成立，因为 S_1、S_2 也保持测度不变。定理的证明至此完成。

7 从物理角度来说，哪种描述更正确：欧拉（无质量分裂）还是 Brenier（质量分裂）？

最后，我们从建模的角度提出一些看法。

流体的连续介质力学模型（如欧拉方程）是对底层微观粒子集体运动的宏观描述。以水为例，这些粒子是 H_2O 分子。忽略量子效应（例如这些分子偶尔会分裂成其组成部分 H、OH、H^+ 和 OH^-，随后又重新结合）后，便得到分子动力学模型。这类模型通过粒子的位置 X_j和速度 V_j 来描述系统，通常采用演化方程的形式 $\dot{m_i X_i}(t) = f_i(\{X_j\}, \{V_j\})$（其中 m_j 是第 j个粒子的质量），或者等价地

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= V_i, \\ m_i \dot{V}_i &= f_i(\{X_j\}, \{V_j\}). \end{aligned} \tag{47}$$

介观模型通过相空间密度$f(x, \mathrm{v}, t)$描述系统在时间 t的状态，该密度表示时间 t 时位置 x 处、速度为 v 的粒子。对于极为稀薄的系统（稀薄气体），描述其随时间演化的精确介观模型由玻尔兹曼方程给出

$$\partial_t f + (\mathrm{v} \cdot \nabla_x) f = Q(f, f) \tag{48}$$

其中 Q 是二次相互作用核。

连续介质力学模型会对相空间密度作进一步粗粒化。通常，系统由粒子的位置密度 $\rho(x,t)$ 描述，其中粒子位于位置 x 、时间为 t；同时用一个速度 $u(x,t)$ 描述位置 x 、时间为 t 时的粒子（代表粒子的平均速度），并提出一组关于 ρ 和 u 的演化方程。对于密度恒定为 ρ 的不可压缩流体的欧拉方程，它们可以写成

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ &\partial(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = -\nabla p. \end{aligned} \tag{49}$$

将欧拉系统与从玻尔兹曼方程（48）中提取的密度和平均速度的（非封闭）演化系统进行比较，很有启发性。用玻尔兹曼相空间密度 f 表示，密度和平均速度为

$$\rho(x,t) = \int f(x, \mathrm{v}, t)\, d\mathrm{v}, \quad u(x,t) = \frac{\int \mathrm{v}\, f\, d\mathrm{v}}{\int f\, d\mathrm{v}}.$$

乘　将方程两边乘以 1 并对 v 积分，可得密度演化　:

$$\partial_t \int f\, d\mathrm{v} + \nabla_x \cdot \int \mathrm{v}\, f\, d\mathrm{v} = 0$$

[2]尽管玻尔兹曼方程适用于低密度气体，而欧拉方程描述的是像液态水这样的高密度系统

或者等价地

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

这与式 (49) 中的第一个方程一致。将玻尔兹曼方程两边乘以 v 并对 v 积分，可得速度演化：

$$\partial_t(\rho\, u) \ = \text{关于 } \ f \ \text{相对于 v. 的高阶矩的项}$$

这与欧拉方程（式（49）中的第二个方程）并不一致，因为该方程忽略了高阶矩（速度涨落）。

值得注意的是，Brenier 对欧拉方程的松弛重新引入了某些速度涨落；这一点已在开创性论文 [Bre89] 中观察到，并由本文中的新例子进一步说明。广义欧拉方程中的速度分布，与玻尔兹曼方程在长时间后产生的麦克斯韦分布截然不同。尝试从具体的微观或介观模型中推导出这类分布，或至少其中的一部分，将会很有意思。

致谢。 作者感谢 Yann Brenier、Maximilian Penka 和 Luca Nenna 就广义欧拉方程进行了有益的讨论。

参考文献

[AC11] M. Agueh and G. Carlier，Wasserstein空间中的重心。《*SIAM*数学分析杂志》**43** (2011)，第2期，904–924[Ar66] V. I. Arnold，论无限维李群的微分几何及其在理想流体动力学中的应用，《傅里叶研究所年刊》16(1) (1966), 319–361[BFR24] C. Brizzi, G. Friesecke, and T. Ried, p-Wasserstein 重心。《非线性分析：理论、方法与应用》**251**(2025)[BFS09] M. Bernot, A. Figalli, and F. Santambrogio，一维和二维欧拉方程的广义解，《纯粹与应用数学杂志》91 (2009), 137–155[BGV19] J.-D. Benamou, T. O. Gallouët, and F.-X. Vialard，最优传输的二阶模型及 Wasserstein 空间上的三次样条，《计算数学基础》19(5) (2019), 1113–1143[Bre89] Y. Brenier，不可压理想流体的最小作用量原理及相关的广义流概念。《美国数学会杂志》**2** (1989)，第2期，225–255[Bre91] Y. Brenier，向量值函数的极分解与单调重排，《纯粹与应用数学通讯》44, 4 (1991), 375-417[Bre93] Y. Brenier，理想不可压流体的对偶最小作用量问题，《理性力学与分析档案》122 (1993), 323-351

[CDD15] M. Colombo, L. De Pascale, and S. Di Marino，一维排斥代价的多边际最优传输映射，加拿大数学杂志 67 (2015), 350- 368[DS13] C. De Lellis and L. Székelyhidi Jr.，耗散欧拉流与昂萨格猜想。欧洲数学会杂志 16 (2013)[EM70] D. G. Ebin and J. Marsden，微分同胚群与不可压缩流体的运动，数学年刊 92 (1970)[FP23] G. Friesecke and M. Penka，用于高维最优传输的 GenCol 算法：一般形式及其在重心和 Wasserstein 样条中的应用，SIAM 数学与数据科学杂志 5(4) (2023), 899–919[FP26] G. Friesecke and M. Penka，正在进行的工作[Fri19] G. Friesecke，多边际最优传输中的 Monge 猜想、Kantorovich 计划集合的凸几何以及 Frenkel-Kontorova 模型的一个简单反例，SIAM 数学分析杂志 51 No. 6 (2019), 4332–4355[Fri25] G. Friesecke，《最优传输：建模、分析、模拟与应用综合导论》。工业与应用数学学会，费城，PA，2025[GKR19] A. Gerolin, A. Kausamo, and T. Rajala，多边际排斥谐和代价下最优传输映射的不存在性，SIAM数学分析杂志 51 (2019)，第3期，2359–2371[GS98] W. Gangbo and A. Święch，多维 Monge-Kantorovich 问题的最优映射。纯粹与应用数学通讯 51 (1998)，第1期，23–45[Nen17] L. Nenna，多边际最优传输的数值方法，博士论文 (2017)，巴黎文理研究大学，https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01471589[Pas12] B. Pass，关于多边际最优传输问题中最优测度的局部结构。变分法与偏微分方程 43 (2012)，第3-4期，529–536[Pas13] B. Pass，关于半经典 Hohenberg-Kohn 泛函的评论。非线性 26 (2013)，第9期，2731[Pas14] B. Pass，多边际最优传输与多智能体匹配问题：解的唯一性与结构。离散与连续动力系统：A辑 34 (2014)，第4期，1623–1639[Sh87] A. I. Shnirel'man，微分同胚群的几何与理想不可压流体的动力学，苏联数学文集 56, No. 1 (1987), 79-105；译自《数学文集》新系列 128 (170), No. 1, (1985), 82-109