arXiv:2601.02620v1 [math.AT] 6 Jan 2026

K-坏球面

MARTIN BENDERSKY 和 ROBERT THOMPSON

Abstract. 本文考察拓扑空间的 E-完备化，其中 E 是一个 p-局部环谱。在简要回顾 E-完备化的概念后，我们专门讨论 $E = K$、 p-局部复周期 K-理论的情形，并考察不稳定球面 S^{2n+1}的 K-理论。我们证明，对于某些 n 值及奇素数 p，K-完备化的 K-同调与球面本身的 K-同调并不同构；因此，按照 Bousfield 和 Kan 的术语，这些球面是“K-坏”的。

1. E-完备化、 E-好与 E-坏空间

以下始终假设所有对象都在给定的奇素数p处局部化。我们定义 $q = 2($ $p-1)$。 p-进整数记为$\mathbf{Z}_p$。我们用 $\mathcal{S}_*$ 表示带基点空间范畴，并用 $\mathrm{Ho}_* = \mathrm{Ho}\,\mathcal{S}_*$ 表示带基点同伦范畴。我们用 $\mathcal{S}p$ 表示谱范畴，例如 [16] 中的定义，并用 $\mathrm{Ho}^s = \mathrm{Ho}\,\mathcal{S}p$ 表示稳定同伦范畴。若 $A \in \mathrm{Ho}_*$ 或 Ho^s 且 $E \in \mathrm{Ho}^s$，则用 A_E 表示相对于 E 的 A 的 Bousfield 局部化（见 [5],[6]）。

本文基于 A. K. Bous-field [9] 的《模型范畴中的余单纯分解与同伦谱序列》所提出的框架。简而言之，Bousfield 在该文中考虑了一个左正合带基点单纯模型范畴 $\mathcal{C}$，并选定了其中一类群对象 $\mathcal{G}$，它们属于 $\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$。利用这类对象 $\mathcal{G}$，可以在 $c\mathcal{C}$ 上定义单纯模型范畴结构； $c\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 中余单纯对象构成的范畴。由此得到的范畴称为“分解模型范畴”，记作 $c\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$。若 A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象，将 A 视为常值余单纯对象，则 A 的一个 $\mathcal{G}$-分解是到 $c\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$ 中某个纤维对象 $A \to Y^\bullet$ 的平凡余纤维化；根据模型范畴结构，该分解保证存在。$\hat{}$ 接着， $L_{\mathcal{G}}A$ 被定义为全对象 $\mathrm{Tot}\,Y^\bullet$。这定义了 $\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$ 上的一个自函子，称为 A 的 $\mathcal{G}$-完备化。我们主要关注 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_*$ 或 $\mathcal{S}p$ 的情形。

在 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_*$ 的情形下，如果 E 是一个 p-局部环谱，并且 $\mathcal{G}$ 取为类 $\mathcal{G} = \{\Omega^\infty N |\ N$ 是一个 E-模谱$\}$，那么这个 $\hat{}$ 在 Ho_* 上定义了一个函子 $L_{\mathcal{G}}$，推广了在其中研究的完备化函子

ˆ ˆ。我们通常在这种情况下直接将 $L_{\mathcal{G}}A$ 写作 A_E 。

定义 5.1 关于 p-完备化的 [10] 第 1 章推广如下:

定义 1.1（参见 [9] 的定义 8.3）。 空间 $A \in \mathcal{S}_*$ 称为

(1) E-完备，如果 $\alpha:\ A \xrightarrow{\simeq} \hat{}A_E$。ˆ
(2) E-良好，如果 A_E 是 E-完备的。ˆ
(3) E-不良，如果 A_E 不是 E-完备的。

对于适当的环谱 E 和空间 A，A 的 E-完备化是 E-局部的；当且仅当 $A_E \simeq A_E$ 时， A 是 E-良好的。这是附录中引理 6.1 的主题。

在 [4] 中，我们研究了 S^{2n+1} 的 $\widehat{S}^{2n+1}_K$, K-理论完备化，其中 p 为奇数且 $n \geq 1$。（这项工作后来扩展到 $p = 2$ ，以及 [2] 和其他地方的各种李群。） [5], [17], 和 [4] 的综合结果使我们得以得出结论：从局部化到完备化的映射 $S^{2n+1}_K \to \widehat{S}^{2n+1}_K$ 对于 $i \geq 2$ 在 π_i 中诱导出一个同构。根据 Mislin [20]，我们知道对于 $n \geq 1$ ， S^{2n+1}_K 的基本群是平凡的。我们在 [4] 中陈述的结果包含了 $\pi_1\widehat{S}^{2n+1}_K$ 的情形，但事实上其中的方法不足以确定该情形。本文将证明以下结果。

定理 1.2。 设 $n \geq 2$, p 是一个奇素数。若 $(p-1)|(n-1)$，则 $\widehat{S}^{2n+1}_K$ 不是单连通的，并且球面 S^{2n+1} 是 K- 坏的。

$\widehat{S}^3_K$ 的情形仍未解决。在其他所有情形下，我们不能严格按照上述定义 1.1 的意义说该球面是 K-良好的，因为虽然 K-局部化是路径连通的，但我们不知道 K-完备化是否如此。不过，我们可以说，从 K-局部化到包含基点的 K-完备化的连通分支的映射是一个同伦等价。

我们利用了 Bousfield 在 [7] 中的重要而优美的结果。我们希望本文能够促成 Bousfield 的思想得到进一步应用。

2. 纤维方块的 p-进 K-完备化

在上一节的基础上再展开一点，我们简要回顾一下 [9] 中的一些定义。我们有一个左正合带基点单纯模型范畴 $\mathcal{C}$ ，并给定了 Ho $\mathcal{C}$ 中的一类群对象 $\mathcal{G} \subset$ 。映射$i:\ A \to B$ in Ho $\mathcal{C}$ 被称为 $\mathcal{G}$-单射，当且仅当 $i^*:\ [B, G]_n \to [A, G]_n$ 是满射

对每个 $G \in \mathcal{G}$ 和 $n \geq 0$ 都成立。Ho $\mathcal{C}$ 中的对象 $Y \in$ 被称为 $\mathcal{G}$-内射，如果对于每个 $\mathcal{G}$-单射映射 $i\colon\ A \to B$ 以及 $n \geq 0$，$i^*\colon\ [B,Y]_n \to [A,Y]_n$ 都是满射。我们假设每个对象都是某个 $\mathcal{G}$-单射映射的源，其目标是一个 $\mathcal{G}$-内射对象。$\mathcal{G}$ 中的对象称为 $\mathcal{G}$-内射模型，并且称 Ho$\mathcal{C}$ 具有足够的 $\mathcal{G}$-内射对象。

Bousfield 继续在 $c\mathcal{C}$ 上构造一个模型范畴结构，记作 $c\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$，这是对 [12] 中构造的一般化。称为 $\mathcal{G}$-等价的弱等价是映射 $f\colon\ X^\bullet \to Y^\bullet$，满足

$$f^*\colon [Y^\bullet, G]_n \to [X^\bullet, G]_n$$

对于所有 $G \in \mathcal{G}$、 $n \geq 0$， $A \in \mathcal{C}$ 都是单纯群之间的弱等价。将对象 $A \in \mathcal{C}$ 视为 $c\mathcal{A}$ 中的常值余单纯对象， A 的分解是映射 $A \to Y^\bullet$ ，它是模型范畴 $c\mathcal{C}^{\mathcal{G}}$ 中到一个纤维对象的平凡余纤维化。分解用于定义导出函子和完备化。 A 的 $\mathcal{G}$-完备化定义为 Tot($Y^\bullet$)。

对于 $\mathcal{C}$ 中的对象，如果映射 $i\colon\ A \to B$ 关于将 A 和 B 视为常值余单纯对象，是一个 $\mathcal{G}$-等价，则称其为 $\mathcal{G}$-等价。Bousfield 证明， $\mathcal{G}$-等价给出完备化之间的同伦等价（推论 6.7 [9]）。他还表明，为了计算导出函子和构造完备化，只需有一个 弱分解：这仅仅是一个 $\mathcal{G}$-等价 $A \to Y^\bullet$，满足每个 Y^n 都是 $\mathcal{G}$-内射的。

现在我们专门讨论 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{S}_*$ 或 $\mathcal{S}p$ 的情形，此时完备化将采用 Bousfield 的 p-完备版本的 K-完备化。对于空间或谱 Z，令 $Z^\wedge$ 表示 p-完备化，如 [5], [6] 和 [10] 中所述。令

$$\mathcal{H} = \{N|\ \ N \text{ is a } K\text{-module spectrum}\} \subset \mathrm{Ho}^s, \tag{2.1}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \{N|\ \ N \text{ is a } p\text{-complete } K\text{-module spectrum}\} \subset \mathrm{Ho}^s, \tag{2.2}$$

and

$$\hat{\mathcal{G}} = \{\Omega^\infty N|\ \ N \text{ is a } p\text{-complete } K\text{-module spectrum}\} \subset \mathrm{Ho}_* \tag{2.3}$$

$\hat{}$，所有这些都是内射模型的类。由此得到的 $\mathcal{G}$-完备化函子就是 Bousfield 所称的空间 A 的 p-adic K- 完备化，记作 $\hat{}A_{\hat{}K}$。（类 $\hat{}$ $\mathcal{G}$ 在 [9] 中记作 $\hat{}$ $\mathcal{G}'$。）同一定义 $\hat{}$ 也可以借助 $\mathcal{H}$ 应用于谱。Bousfield 将这种完备化应用于一个纤维方块。

定理 2.4 (定理 11。7 [9])。假设我们在$\mathcal{S}_*$中有一个纤维方块

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \Lambda \end{array} \tag{2.5}$$

ˆ其中所有空间都具有无挠 $K^*(-;\mathbf{Z}_p)$-上同调。进一步假设 $K_*(-;\mathbf{Z}/p)$-余条谱序列强收敛，这意味着

$$\mathrm{Cotor}_s^{K_*(\Lambda;\mathbf{Z}/p)}(K_*(A;\mathbf{Z}/p), K_*(B;\mathbf{Z}/p)) = \begin{cases} K_*(C;\mathbf{Z}/p) \ \ for\ s=0 \\ 0 \ \ otherwise. \end{cases}$$

那么， p-进 K-完备化函子将 *(2.5)* 映为一个同伦纤维方块。

这方面的一个例子是

定理 2.6。 纤维序列

$$F \to QS^{2n+1} \xrightarrow{j_p} Q(\Sigma^{2n+1}B_{q(n+1)-1}),$$

其中 j_p 是 p^{th} *Hopf-James* 映射， $B_{q(n+1)-1}$ 是一个在 p 处局部化的截短 $B\Sigma_p$（见 [17]），满足定理 *2.4* 的假设。这里Q表示函子$\Omega^\infty\Sigma^\infty$。

证明。 设 i: $S^{2n+1} \to F$ 为底胞腔的提升。对于假设的第一部分，底空间和全空间的 $K^*(-;\mathbf{Z}_p)$-上同调无挠，这一点由 [7]的定理 8.3 得出。在 [17] 中证明了 $i_*: K_*(S^{2n+1}) \to K_*(F)$ 是一个同构，因此 $K^*(F;\mathbf{Z}_p)$ 也是无挠的。

对于第二部分，将纤维序列反向循环，并对以下对象应用 $K_*(-;\mathbf{Z}/p)$-巴谱序列

$$QS^{2n} \xrightarrow{\Omega j_p} Q(\Sigma^{2n}B_{q(n+1)-1}) \to F$$

由 [19] 我们知道，作为 $K_*(\mathrm{pt};\mathbf{Z}/p)$ 上的模

$$\begin{aligned} K_*(QS^{2n+1};\mathbf{Z}/p) &= E(x_1, x_2, \dots) \\ K_*(Q(\Sigma^{2n+1}B_{q(n+1)-1});\mathbf{Z}/p) &= E(y_1, y_2, \dots), \\ K_*(QS^{2n};\mathbf{Z}/p) &= P(u_1, u_2, \dots), \\ K_*(Q(\Sigma^{2n}B_{q(n+1)-1});\mathbf{Z}/p) &= P(v_1, v_2, \dots). \end{aligned}$$

这里的 E 表示一个外代数， P 表示一个多项式代数。

在 [17] 引理 2.2中证明了，$(\Omega j_p)_*(u_1) = 0$ 以及 $(\Omega j_p)_*$ 将代数 $P(u_2, u_3, \ldots\ldots)$ 同构地映射到 $P(v_1, v_2, \ldots\ldots)$ 上。（注意，这一事实与巴谱序列表明， $i : S^{2n+1} \to F$在 K-理论中诱导了一个同构。）

这里有如下图表，其中水平序列是路径-环纤维序列

$$\begin{array}{ccccc} QS^{2n} & \longrightarrow & * & \longrightarrow & QS^{2n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \Omega j_p} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_p} \\ Q(\Sigma^{2n} B_{q(n+1)-1}) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & Q(\Sigma^{2n+1} B_{q(n+1)-1}) \end{array} \tag{2.7}$$

为计算 $\mathrm{Tor}^{K_*}(QS^{2n}; \mathbb{Z}/p)$ $_s$ $(K_*(\mathrm{pt}; \mathbb{Z}/p), \mathbb{Z}/p)$，使用分解$E(x_1, x_2, \ldots\ldots) \otimes P(u_1, u_2, \ldots\ldots)$。顶行的巴谱序列退化。对于 $\mathrm{Tor}_{K_*}(Q(\Sigma^{2n} B_{q(n+1)-1}); \mathbb{Z}/p)$ $_s$ $(K_*(\mathrm{pt}; \mathbb{Z}/p), \mathbb{Z}/p)$，使用分解 $E(y_1, y_2, \ldots\ldots) \otimes P(v_1, v_2, \ldots\ldots)$，底行的巴谱序列也退化。结论是

$$(j_p)_* : K_*(QS^{2n+1}; \mathbf{Z}/p) \to K_*(Q(\Sigma^{2n+1} B_{q(n+1)-1}); \mathbf{Z}/p)$$

是一个余代数的满射。如 [9], 中所述，根据 [7] 的定理 10.11，这意味着满足强收敛的 $K_*(-, \mathbf{Z}/p)$-理论余条谱序列的假设。

□

综上，我们得到一个纤维序列

$$\widehat{F}_{\hat{K}} \to \widehat{QS^{2n+1}}_{\hat{K}} \xrightarrow{\widehat{j_p}} Q(\Sigma^{2n+1}\widehat{B_{q(n+1)-1}})_{\hat{K}}. \tag{2.8}$$

由于 $S^{2n+1} \to F$ 在 K-同调上诱导了一个同构，因此根据 [1] 的引理 13.1，对于每个 p-完备的 K-模谱 N ，它都会在 N-上同调中诱导一个同构。这意味着它是一个 p-进 K-$\widehat{\ }$ 等价，因此 $S^{2n+1}{}^{\hat{}}_K \to F_{\hat{K}}$ 是一个等价，而上面的纤维序列变为

$$\widehat{S^{2n+1}}_{\hat{K}} \to \widehat{QS^{2n+1}}_{\hat{K}} \xrightarrow{\widehat{j_p}} Q(\Sigma^{2n+1}\widehat{B_{q(n+1)-1}})_{\hat{K}}. \tag{2.9}$$

3. 某些无限循环空间的完备化

接下来我们想计算 $QS^{2n+1}{}^{\widehat{\ }}_{\hat{K}}$ 和 $Q(\Sigma^{2n+1}B_{2(p-1)(n+1)-1})^{\widehat{\ }}_K$ 的同伦群。一般来说， K- 完备化与 $\Omega\widehat{\ }$ 不交换

，但对于谱 $\Sigma^\infty S^{2n+1}$ 和 $\Sigma^\infty B_{2(p-1)(n+1)-1}$，它确实交换。

定理 3.1。设 X 为空间 S^{2n+1} 或 $B_{q(n+1)-1}$。下标 *0* 表示0-连通覆盖。于是

$$(\widehat{QX}_{\hat{K}})_0 = (\widehat{\Omega^\infty\Sigma^\infty X}_{\hat{K}})_0 \cong \Omega_0^\infty(\widehat{\Sigma^\infty X}_{\hat{K}}) \tag{3.2}$$

在证明这一点之前，我们先对 p-进 K 完备化函子作进一步说明，并通过对一个稳定分解向下循环，得到一个不稳定分解。

令 $\mathcal{S}p$ 表示 [16]，中的谱模型范畴，并令 $\mathrm{Ho}^s = \mathrm{Ho}\,\mathcal{S}p$ 表示稳定同伦范畴。我们有在 (2.1) 和 (2.2) 中定义的内射模型类 $\hat{}\ \mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}$。由于 K 在 $\mathcal{S}p$ 中由一个结构化环谱表示（见 [18]），因此 $\mathcal{S}p$ 上存在一个三元组，它将谱 A 映到 $K\wedge A$，其单位由 $S\to K$ 诱导。相对于 $\mathcal{H}$，该三元组满足 [9] 中定理 7.4 的所有条件，因此三元组分解 $A\to K^\bullet A$ 是 A 的弱 $\mathcal{H}$-分解，可用于计算 A_K 的同伦群。稳定的 K-理论完备化已广为人知。现在对谱 $K^{\wedge n}A$ 作 p-完备化，得到一个余单纯谱映射 $\widehat{\ }A\to K^\bullet A$，并应用 [9] 中定理 11.5 证明里的同一论证：映射 $A\to K^\bullet A$ 是一个 $\mathcal{H}$-等价，因而是一个 $\mathcal{H}$-等价 $\hat{}\widehat{\ }\hat{}$，因为 $\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$。映射 $K^\bullet A\to K^\bullet A$ 显然是一个 $\mathcal{H}$-等价。$\widehat{\ }\hat{}\widehat{\ }$ $\hat{}$ 谱 K^nA 是 $\mathcal{H}$-内射的，因此 $A\to K^\bullet A$ 是一个弱 $\mathcal{H}$ 分解。用 Reedy 纤维化替换来替换它；为方便起见，仍将其记作 $A\to K^\bullet A$。

定理 *3.1* 的证明。 对于定理 3.1 中的任一空间 X，在稳定范畴中应用Σ^∞ 以及上文给出的构造

$$\Sigma^\infty X\to \widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X}. \tag{3.3}$$

然后应用函子 Ω^∞ 于此，得到一个增广余单纯空间

$$\Omega^\infty\Sigma^\infty X\to \Omega^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X}). \tag{3.4}$$

$\hat{}\ \hat{}$这个余单纯空间逐级都是 $\mathcal{G}$-单射的，因为 $\mathcal{H}$-$\widehat{}$单射谱的 Ω^∞ 是一个 $\mathcal{G}$-单射空间。

取包含基点的连通分支，

$$\Omega^\infty\Sigma^\infty X\to \Omega_0^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X}) \tag{3.5}$$

$\widehat{}$是一个增广余单纯空间，且目标逐项也是 $\mathcal{G}$-$\widehat{\ \ \ }$单射的，因为第 n 个空间是 $\Omega^\infty(K^\bullet\Sigma^\infty X)$ 的第 n 个空间的收缩。

利用下文定理 3.6（将在下一节证明），我们得出

$$\widehat{\Omega^\infty\Sigma^\infty X}_{\hat{K}} = \mathrm{Tot}(\Omega_0^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})).$$

由余单纯空间的谱序列可得

$$\pi_n \mathrm{Tot}(\Omega^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})) \cong \pi_n \mathrm{Tot}(\Omega_0^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})), \qquad n \geq 1.$$

由引理 6.3 可知

$$\mathrm{Tot}(\Omega^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})) = \Omega^\infty \mathrm{Tot}(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X}).$$

结论由此得证。

□

定理 3.6。 设 X 如定理 *3.1* 中所述。余单纯ˆ空间的映射 *(3.5)* 是一个弱 $\mathcal{G}$-分解。

证明归结为证明

$$N^*(\Omega^\infty\Sigma^\infty X) \leftarrow N^*(\Omega_0^\infty(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})) \tag{3.7}$$

对于每个 p-完备的K-模谱 N，它都是单纯阿贝尔群之间的弱等价。

4. **Bousfield 对 $K^*(\Omega_0^\infty E;\ \mathbf{Z}_p)$ 的计算**

为了继续讨论，我们必须概述 [7] 的一些主要结果。在那篇论文中，Bousfield 证明了一个重要定理：如果 E 是一个谱，且 $K^*(E;\mathbf{Z}_p)$ 无挠，那么 $K^*(\Omega_0^\infty E;\mathbf{Z}_p)$ 是由 $K^*(E;\mathbf{Z}_p)$ 代数定义的函子。无限环路空间的 K-上同调被视为范畴中的一个对象，其元素属于 $Z/2$-分次 p-进 Λ-环；而谱的 K-上同调则是范畴中的一个对象，其元素属于 $Z/2$-分次稳定 p-进 Adams 模。（Bousfield 在 [8] 中引入了这一术语。在 [7] 中，他称它们为 $Z/2$-分次 p-进 ψ^*-模。）本节将简要概述相关定义（这些定义颇为复杂）。证明见 [7] 。

定义 4.1。 一个$\mathbf{Z}/2$分次有限稳定 p-进 *Adams* 模是一个带有自同态 $\psi^k : F \to F$的$\mathbf{Z}/2$分次有限 *Abel* p-群 F，其中对 $k \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}$ 满足：

(i) $\psi^1 =$ 恒等且对所有 $j, k \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}$都成立。(ii) 存在一个整数 $n \geq 1$，使得对所有 $k \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}$ 和 $j \in \mathbf{Z}$，$\psi^k = \psi^{k+p^n j}$ 在 F 上成立。

A$\mathbf{Z}/2$-分次稳定 p-进 *Adams* 模是一个系统的拓扑化逆极限，该系统由$\mathbf{Z}/2$-分次有限稳定 p-进 *Adams* 模构成。（在 [7]这称为$\mathbf{Z}/2$-分次 p-进 ψ^*-模。）

若一个$\mathbf{Z}/2$-分次稳定的 p-进 *Adams* 模 M 满足：在 M^0 上为 $\psi^k = k$，在 M^1 上为 $\psi^k = 1$，其中 $k \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}$，则称其为线性的。

如 [7], 中所述，若 E 是任意谱，则 $\{K^0(E;\mathbf{Z}_p)\ K^1(E;\mathbf{Z}_p)\}$ 是一个$\mathbf{Z}/2$-分次稳定的 p-进 Adams 模，并带有通常的 Adams 运算。

在不稳定情形下，我们从以下内容开始：

定义 4.2. *A* θ^p-环 R 是一个含幺交换环，连同一个满足以下条件的函数 $\theta^p : R \to R$：

(i) $\theta^p(a+b) = \theta^p(a) + \theta^p(b) - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} a^i b^{p-i}$.

(ii) $\theta^p(ab) = (\theta^p a)b^p + a^p(\theta^p b) + p(\theta^p a)(\theta^p b)$.

(iii) $\theta^p(1) = 0$.

A ψ^p-模 M 就是一个带有自同态$\psi^p : M \to M$的阿贝尔群。通过定义$\psi^p : R \to R$ 为 $\psi^p(a) = a^p + p\theta^p(a)$，我们可以将一个 θ^p-环 R 转化为一个 ψ^p-模。于是有 $\psi^p\theta^p = \theta^p\psi^p$。

定义 4.3。 *A*$\mathbf{Z}/2$分次 θ^p-环 $R = \{R^0, R^1\}$ 是一个严格交换的$\mathbf{Z}/2$分次环，其中 R^0 是一个 θ^p-环，且 R^1 是一个 ψ^p-模，并且这些作用满足：

(i) $\psi^p(ax) = \psi^p(a)\psi^p(x)$ 当 $a \in R^0$ 且 $x \in R^1$ 时。(ii) $\theta^p(xy) = \psi^p(x)\psi^p(y)$ 当 $x,\ y \in R^1$时。

我们可以通过定义 $\theta^p(a) = (a - a^p)/p$，使$\mathbf{Z}_p$成为一个 θ^p-环。于是$\psi^p(a) = a$。我们称 θ^p- 环 R 是 $\mathbf{Z}_p$ 上的 θ^p- 环，若存在一个 θ^p- 环映射 $\mathbf{Z}_p \to R$。

定义 4.4。 *A*$\mathbf{Z}/2$分次有限 p-进 θ^p-环 S 是一个增广$\mathbf{Z}/2$分次 θ^p-环，且定义在$\mathbf{Z}_p$ 上，使得：

(i) 增广理想 $\tilde{S}$ 是有限的 p-挠元且为幂零理想。(ii)对于每个 $x \in \tilde{S}^0$ 和 $y \in S^1$，存在一个 $n > 0$，使得$(\theta^p)^n(\theta^p x - x) = 0$ 以及$(\psi^p)^n(\psi^p y - y) = 0$。

定义 4.5。 若一个$\mathbf{Z}/2$-分次有限 p-进 θ^p-环 S 配备了 p-进 *Adams* 运算，则称其具有 p-进 *Adams* 运算；也就是说，它具有自同态ψ^k： $S \to S$ 对于与 p 互质的 k，并满足：

(i) $\theta^p\psi^k = \psi^k\theta^p$、 $\psi^p\psi^k = \psi^k\psi^p$、 $\psi^1 = 1$和 $\psi^j\psi^k = \psi^{jk}$。(ii) </style}运算： $\tilde{S} \to \tilde{S}$ 在 $k \in Z^+ - p\mathbf{Z}_p$ 中是周期的，周期为 p^r。

(iii) $\psi^k x \cong kx$ 模 $\Gamma^2\tilde{S}^0$ 以及 $\psi^k y \cong y$ 模 $\Gamma^2 S^1$，对于每个 $k \in \mathbf{Z} - p\mathbf{Z}$、$x \in \tilde{S}^0$和 $y \in S^1$，其中

$$\Gamma^2\tilde{S}^0 = \{x \in \tilde{S}^0 | (\theta^p)^n x = 0 \, for \; some \; n > 0\},$$
$$\Gamma^2 S^1 = \{x \in S^1 | (\psi^p)^n x = 0 \, for \; some \; n > 0\}.$$

一个带有 p-*adic Adams* 运算的 $\mathbf{Z}/2$-分次 p-*adic* θ^p-环，是一个由带有 p-*adic Adams* 运算的 $\mathbf{Z}/2$-分次有限p-*adic* θ^p-环构成的逆系统的拓扑化逆极限。

最后，我们可以说，[7] 中证明了：如果 X 是一个连通 CW 复形，那么 $K^*(X;\mathbf{Z}_p)$ 是一个带有 p-adic Adams 运算的 $\mathbf{Z}/2$-分次 p-adic θ^p-环。

注： Bousfield 在 [7] 的大部分内容中研究 $\mathbf{Z}/2$-分次 p-adic 环。他证明，这一概念与带有 p-adic Adams 运算的 $\mathbf{Z}/2$-分次p-adic θ^p-环是等价的。本文将采用空间的 p-adic K-上同调的 θ^p-环描述，而不采用 Λ-环描述。

4.1. **函子** W。现在我们概述 Bousfield 对该函子的定义；这个函子根据 E 的 p-adic K-上同调来确定 $\Omega^\infty E$ 的 p-adic K-上同调。我们使用以下记号。

- $\mathcal{A}b_p = \mathbf{Z}/2$ 分次的 p 完备阿贝尔群范畴。
- $\mathcal{A}b_p = \mathcal{A}b_p$ 中两个对象之间态射的范畴。
- θ^p-$Rng^p = \mathbf{Z}/2$ 分次的 p-进 θ^p-环范畴。
- $Ad_p = \mathbf{Z}/2$ 分次的稳定 p-进 Adams 模范畴。
- $Ad_p = Ad_p$ 中两个对象之间映射的范畴。
- $Ad_p^{\mathrm{lin}p} = Ad_p$ 中线性目标的子范畴。
- θ^p-Rng^p-$Ad^p =$带有 p-adic Adams 运算的$\mathbf{Z}/2$-分次 p-adic-环范畴。

定义 4.6 ([7]中的 7.4)。函子 $W: \mathcal{A}b_p \to \theta^p$-$Rng^p$ 是遗忘函子的左伴随，它将 R 取为 $(\tilde{R} \to \tilde{R}/\Gamma^2\tilde{R})$。

函子 W可以延拓为函子 $W: Ad_p^{\mathrm{lin}} \to \theta^p$-$Rng^p$-$Ad^p$，利用源上的 Adams 运算来定义目标上的 Adams 运算（ [7] 中的 8.2 ）。

设 E 是一个谱，并考虑连通覆盖 $E\langle 0\rangle \to E$，它在 $K^*(-;\mathbf{Z}_p)$ 中诱导出一个同构。这诱导出 $\mathbf{Z}/2$-分次稳定 p-adic Adams 模之间的一个映射

$$K^*(E;\mathbf{Z}_p)_H : K^*(E;\mathbf{Z}_p) \to H^\bullet(E\langle 0\rangle;\mathbf{Z}_p)$$

其中，ψ^k 在 $\{H^2(E\langle 0\rangle;\mathbf{Z}_p) \; H^1(E\langle 0\rangle;\mathbf{Z}_p)\}$ 上的作用被定义为线性的。因此，$K^*(E;\mathbf{Z}_p)_H$ 是 Ad_p^{lin}中的一个对象。

[7] 的主要拓扑定理如下。

定理 4.7 ([7], 的特殊情形。 设 E 是一个谱，且 $K^*(E;\mathbf{Z}_p)$ 无挠。那么

$$WK^*(E;\mathbf{Z}_p)_H \cong K^*(\Omega_0^\infty E;\mathbf{Z}_p)$$

是 θ^p-Rng_p-Ad_p 中的一个同构。此外， $K^*(\Omega_0^\infty E;\mathbf{Z}_p)$ 是无挠的。

4.2. **3.6 的证明**。

证明。首先，我们证明在 p-进上同调中，单纯阿贝尔群之间存在一个弱等价。

我们有一个单纯对象之间的映射，位于 $\bar{Ad}_p$,

$$K^*(X;\mathbf{Z}_p)_H \leftarrow K^*(K^\bullet X;\mathbf{Z}_p)_H \tag{4.8}$$

其中目标是一个常值单纯对象。应用遗忘函子，我们得到范畴 $s\mathcal{A}b_p$ 中的一个映射。范畴 $\mathcal{A}b_p$ 是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴，图范畴 $\mathcal{A}b_p$ 也是如此。我们在非负分次链复形范畴 $Ch_*\,\mathcal{A}b_p$ 上赋予投射模型范畴结构。然后，我们通过 Dold-Kan 等价将其传递为 $s\mathcal{A}b_p$ 上的模型范畴结构

$$K : Ch_*\,\bar{\mathcal{A}}b_p \rightleftarrows s\bar{\mathcal{A}}b_p : N.$$

这些构造的细节请参见 [13] 。

映射 (4.8) 是纤维对象之间的弱等价，因为在单纯阿贝尔群的映射范畴中确实如此。根据引理6.4，(4.8) 的源和目标都是余纤维对象。由怀特海德定理可知（例如，参见[14] 第 73 页定理 1.10），(4.8) 在 $s\mathcal{A}b_p$ 中也是一个同伦等价。

现在应用函子 W，得到 s θ^p-环$_p$-Ad_p中的同伦等价。应用到单纯阿贝尔群的遗忘函子，即可得到所需的弱等价。

为了证明 N-上同调的结果，其中 N 是任意的 p-完备 K-模谱，注意到由于 N 是 p-完备的，系数 N_* 是 Ext-p-完备阿贝尔群，因此根据 [9], 的引理 11.11， N-上同调函子性地依赖于 p-进 K-上同调，结论遂得证。

□

5. 结论

对于我们的谱 $\Sigma^\infty X$，稳定的 p-进 K-完备化正是 K-理论局部化 [6] 的 p-完备化。这是因为对余单纯谱逐项应用 [6] 的命题 2.9，可以得到如下同伦纤维方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tot}(K^\bullet\Sigma^\infty X) & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tot}(K^\bullet\Sigma^\infty X)_{(0)} & \longrightarrow & \mathrm{Tot}(\widehat{K^\bullet\Sigma^\infty X})_{(0)} \end{array} \tag{5.1}$$

由于底部的两个谱都是 HQ-局部的，因此底部映射的纤维也是如此，顶部映射的纤维也同样如此。这意味着顶部映射在模-p同伦群上诱导出一个同构，这说明它是 p-完备化。

谱$\Sigma^\infty S^{2n+1}$ 和 $\Sigma^\infty B_{2(p-1)(n+1)-1}$ 的 K-理论局部化的同伦群众所周知（例如参见 [21] 或[17]）。在（2.9）的同伦群长正合序列中，当$\widehat{\ \ }(p-1)|(n-1)$时，群 $\pi_2(Q(\Sigma^{2n+1}B_{2(p-1)(n+1)-1})\hat{}_K)$ 非平凡，且边界同态

$$\pi_2(Q(\Sigma^{2n+1}\widehat{B_{2(p-1)(n+1)-1}})_{\hat{K}}) \xrightarrow{\partial} \pi_1(\widehat{S^{2n+1}}_{\hat{K}}).$$

不为零。这可由 [4], [21] 和 [17]的计算得出。由于完备化不是单连通的，它不等价于局部化。

6. 附录

引理 6.1. 设 E 是稳定同伦$\hat{}$范畴中的一个环谱。那么，对于一个空间或谱 A，A_E 是 E-局部的。若进一步假设 E_*-无效谱与 E^*-无效谱相同，那么 A 是 E-良好的，当且仅当自然映射 $A_E \xrightarrow{\cong} \hat{}A_E$（*Bousfield* 局部化与完备化之间的映射）是一个同伦等价。

证明。取 $\mathcal{G}$ 为类 $\mathcal{G} = \{\Omega^\infty N |\ N$ 是一个 E-模谱 $\}$

每个 $\mathcal{G}$-内射空间或谱 A 都是 E-局部的：假设 C 满足$E_*(C) = 0$。那么对于任意 E-模谱 N，我们有 $N^*(C) = 0$([1]的引理 13.1)。这意味着 $C \to *$ 是 $\mathcal{G}$-单射的。由于 A 是$\mathcal{G}$-内射的，$[C, A]_* = 0$ 所以 A 是 E-局部的。

如果 $A \to Y^\bullet$ 是一个 $\mathcal{G}$-分解，那么每个 Y^n 都是 $\mathcal{G}$-内射的，因此是 E-局部的，ˆ所以 $A_E = \mathrm{Tot}\, Y^\bullet \cong \mathrm{holim}\, Y^\bullet$ 是 E-局部的。这给出一个图表

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_E \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \hat{A}_E \end{array} \tag{6.2}$$

ˆ 假设自然映射 $A_E \to A_E$ 是一个等价。则 $A \to \hat{}A_E$ 是一个 E_*-同构，这意味着对于任意 E-模谱 N，它都是一个 $N^*(\ )$-同构，也就是说它是一个 $\mathcal{G}$-等价。根据 [9]中的命题 8.5， A 是 E-良好的。

反过来，如果 A 是 E-良好的，那么根据 [9] 中的命题 8.5，映射 ˆ $A \to A_E$ 是一个 E-等价。这意味着它是一个 E^*-同构 ˆ，并且根据假设是一个 E_*- 同构。由于 A_E 是 E- 局部的，这意味着存在一个等价 $A_E \xrightarrow{\cong} \hat{}A_E$。□

满足引理 6.1 假设的谱的例子包括 Johnson-Wilson 谱 $E(n)$ ([15], [11])。

引理 6.3。 考虑 *Quillen* 伴随

$$\Sigma^\infty : \mathcal{S}_* \rightleftarrows \mathcal{S}p : \Omega^\infty$$

在带基点空间范畴与谱范畴之间。因此，对于每个 ***Reedy*** 纤维化的 $X^\bullet \in c\mathcal{S}p$， $\Omega^\infty(X^\bullet)$ 在 $c\mathcal{S}_*$ 中是 ***Reedy*** 纤维化的，并且$\Omega^\infty \mathrm{Tot}(X^\bullet) = \mathrm{Tot}(\Omega^\infty(X^\bullet))$ 。

证明。对于第一个结论，当余单纯对象 $X^\bullet$ 满足对每个 n， $X^n \to M^n X^\bullet$ 都是纤维化时，它就是 Reedy 纤维化的；其中第 n 个匹配对象 $M^n X^\bullet$ 定义为某个极限。由于 Ω$^\infty$ 是右 Quillen 伴随函子，它保极限并保纤维化，因此若 $X^\bullet$ 是 Reedy 纤维化的余单纯谱，则 Ω$^\infty$($X^\bullet$) 是 Reedy 纤维化的余单纯空间。

对于第二个陈述，由于 $X^\bullet$ 是 Reedy 纤维化，Tot($X^\bullet$) 是该图表的极限（例如，见[14] 的第 VIII 章第 1 节）

$$\prod_{n \geq 0} (X^n)^{\Delta^n} \rightrightarrows \prod_{\phi : \mathbf{n} \to \mathbf{m}} (X^m)^{\Delta^n},$$

也就是等化子。由于 Ω∞ 是右伴随，因而保持极限，所以 Ω∞Tot($X^\bullet$) 是

$$\prod_{n\geq 0}\Omega^\infty((X^n)^{\Delta^n}) \rightrightarrows \prod_{\phi:\mathbf{n}\to\mathbf{m}}\Omega^\infty((X^m)^{\Delta^n}).$$

根据 $\mathcal{S}_*$ 和 $\mathcal{S}p$ 中余张量对象的定义（例如，参见 [14] 第二章第2节以及 [16]的定义1.2.9），我们有 Ω∞(X^{Δ^n}) =(Ω∞X)$^{\Delta^n}$，因此这个极限也是以下对象的极限：

$$\prod_{n\geq 0}(\Omega^\infty X^n)^{\Delta^n} \rightrightarrows \prod_{\phi:\mathbf{n}\to\mathbf{m}}(\Omega^\infty X^m)^{\Delta^n}.$$

由于 Ω∞($X^\bullet$) 是 Reedy 纤维化的，这个极限就是 Tot(Ω∞($X^\bullet$))。

□

引理6.4。令 X 如定理 *3.6* 所述。单纯对象 $_K^*(X;\mathbf{Z}^p)_H$ 和 $K^*(K^\bullet X;\mathbf{Z}^p)_H$ 在 $s\mathcal{A}b_p$ 中是余纤维的。

证明。将任一单纯对象称为 $Y_\bullet$。在 [13] 的命题4.2中（我们将其应用于任意阿贝尔范畴），作者给出了余纤维对象的显式描述。注意，根据定理4.7，$Y_\bullet$ 中的所有群都是无挠的，因此它们是投射的。此外，在每个单纯次数上，该映射都是满射，因此它是 $\mathcal{A}b_p$中的投射¯对象。应用复合映射 KN。$NY_\bullet$ 是由无挠群组成的链复形，因此这些群是投射群。根据 [13] $KNY_\bullet$ 命题4.2的条件¯(3)， $s\mathcal{A}b_p$ 中的对象是余纤维的，并且由 Dold-Kan 对应， $Y_\bullet$ 与 $KNY_\bullet$ 同构。□

References

[1] J.F. Adams。稳定同伦与广义同调。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，伊利诺伊州芝加哥，1974年。[2] Martin Bendersky 和 Donald M. Davis。不稳定同伦谱序列的一种稳定方法。*Topology*，42(6)：1261–1287，2003年。[3] Martin Bendersky 和 John R. Hunton。关于 Landweber正合谱的余代数环与 Bousfield-Kan 谱序列。《爱丁堡数学会杂志》，47：513–532，2004 年。[4] Martin Bendersky 和 Robert D. Thompson。周期同调理论的 Bousfield-Kan 谱序列。《美国数学杂志》，122：599–635，2000年。[5] A. K. Bousfield。关于同调的空间局部化。*Topology*，14：133–150，1975年。[6] A. K. Bousfield。关于同调的谱局部化。*Topology*，18：257–281，1979年。[7] A. K. Bousfield。关于 λ-环与无限环路空间的 K 理论。 K-理论，10：1–30，1996年。

[8] A. K. Bousfield。 K 理论局部化与 v_1-周期空间 H 的同伦群。Topology，38：1239–1264，1999年。[9] A. K. Bousfield。模型范畴中的余单纯形分解与同伦谱序列。Geom. Topol.，7：1001–1053，2003年。[10] A. K. Bousfield 和 D. M. Kan。《同伦极限、完备化与局部化》，数学讲义第304卷。施普林格出版社，1972年。[11] Ethan S. Devinatz。Morava 模与 Brown-Comenetz 对偶。《美国数学杂志》，119(4)：741–770，1997年。[12] W. G. Dwyer、D. M. Kan 和 C. R. Stover。带基点单纯形空间的一种 e_2 模型范畴结构。jpura1，90：137–152，1993年。[13] Paul Goerss 和 KristenSchemmerhorn。模型范畴与单纯形方法。载于《同伦论与代数之间的相互作用》，当代数学第436卷，第3–49页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。[14] P.G. Goerss 和 J.F. Jardine。单纯形同伦论。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser 巴塞尔，2009年。[15] Mark Hovey。上同调 Bousfield 类。J. Pure Appl. Algebra，103：45–59，1995年。[16] Mark Hovey、Brooke Shipley 和 Jeff Smith。对称谱。《美国数学会杂志》，13(1)：149–208，2000年。[17] Mark Mahowald 和 Robert Thompson。不稳定球面的 K 理论局部化。Topology，31(1)：133–141，1992年。[18] J.P. May、F. Quinn、N. Ray 和 J. Tornehave。 E_∞ 环空间与 E_∞ 环谱，数学讲义第577卷。施普林格出版社，1977年。[19] J. E. McClure。 p K 理论的模 QX。载于《 H_∞-环谱及其应用》，数学讲义，第291–377页。施普林格出版社，1986年。[20]G. Mislin。关于 K 理论的局部化。J. Pure Appl. Algebra，10：201–213，1977年。[21] Robert D. Thompson。奇素数处不稳定球面的 v_1-周期同伦群。Trans. Amer. Math. Soc.，319(2)：535–559，1990年。

Department of Mathematics and Statistics, Hunter College and the Graduate Center, CUNY, New York, NY 10065电子邮箱地址: mbendersk1@gmail.com电子邮箱地址: robert.thompson@hunter.cuny.edu