arXiv:2601.02623v1 [math.NT] 6 Jan 2026

黎曼ζ函数在调和点处的联合极值

QIYU YANG[1] 和 SHENGBO ZHAO[2]

摘要。利用共振方法，我们获得了黎曼ζ函数在调和点处联合极值的精细估计，改进了 Levinson 在 1972 年取得的结果，并为理解黎曼ζ函数的行为提供了新的视角。我们的证明主要基于狄利克雷级数理论以及黎曼ζ函数的截断欧拉乘积。作为推论，我们可以重新得到一些此前已知的黎曼ζ函数极值结果。

1. 引言

黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 是解析数论中最重要的研究对象之一，这归因于它与素数分布的密切联系。对其极值行为的研究一直是一个富有价值的课题。

1972 年，Levinson 的工作 [14]改进了 Littlewood 早期的结果，并证明当 T 足够大时，

$$\max_{t\in[1,T]} |\zeta(1+it)| \geq e^{\gamma}\log_2 T + O(1),$$

其中， γ 是欧拉-马歇罗尼常数。本文中，记 $\log_k$ 为k次迭代对数。三十多年后，Granville 和 Soundararajan [9]通过改进下界并研究大值出现的频率，进一步改进了 Levinson 的结果。他们还提出了关于 $|\zeta(1+it)|$最大值真实阶的猜想。迄今为止，最精确的下界由 Aistleitner、Mahatab 和 Munsch [2]建立。他们运用长共振方法证明，对于所有充分大的 T，存在常数 C 使得

$$\max_{t\in[\sqrt{T},T]} |\zeta(1+it)| \geq e^{\gamma}(\log_2 T + \log_3 T - C).$$

1.河南师范大学数学与统计学院，新乡 453007，中国 2.同济大学数学科学学院，智能计算与应用教育部重点实验室，上海 200092，中国电子邮箱：qyyang.must@gmail.com, shengbozhao@hotmail.com。2020 数学主题分类。主要分类号：11M06，11N37。关键词和短语。极值、黎曼ζ函数、共振方法、调和点。

对于实部 $\sigma \in (1/2,\ 1)$，Aistleitner [1] 改进了 Montgomery [15]，早先依赖丢番图逼近的工作。Aistleitner 运用共振方法 [1] 证明，对于 $\sigma \in (1/2,\ 1)$ 固定且充分大的 T，

$$\max_{t\in[0,T]} |\zeta(\sigma+it)| \geq \exp\left(C_\sigma \frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log_2 T)^\sigma}\right),$$

其中 $C_\sigma = 0.18(2\sigma-1)^{1-\sigma}$。随后，Bondarenko 和 Seip 的著名研究 [4] 全面考察了 $\zeta(s)$ 在临界带内极值的行为。具体而言，他们证明，若 T 充分大，则对于 $1/2 + 1/\log_2 T \leq \sigma \leq 3/4$,

$$\max_{t\in[\sqrt{T},T]} |\zeta(\sigma+it)| \geq \exp\left(\nu(\sigma) \frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log_2 T)^\sigma}\right),$$

而对于 $3/4 \leq \sigma \leq 1 - 1/\log_2 T$,

$$\max_{t\in[T/2,T]} |\zeta(\sigma+it)| \geq \log_2 T \exp\left(c + \nu(\sigma) \frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log_2 T)^\sigma}\right),$$

其中 c 是一个与 T 无关的绝对常数。这里，$\nu(\sigma)$ 是一个连续函数，其下界为 $1/(2-2\sigma)$。此外，它具有如下渐近行为：

$$\nu(\sigma) = \begin{cases} (1-\sigma)^{-1} + O(|\log(1-\sigma)|), & \sigma \nearrow 1 \\ (1/\sqrt{2} + o(1))\sqrt{|\log(2\sigma-1)|}, & \sigma \searrow 1/2. \end{cases}$$

最近，本文第一作者无条件地改进了 Bondarenko 和 Seip 的工作 [4]，适用于任意固定的 $\sigma \in (0.78,\ 1)$。此外，在假设黎曼假设（RH）成立的条件下，还得到了在整个临界带内均成立的更精确下界；参见 [17]。事实上，Lamzouri 基于概率模型已经预测了 $|\zeta(\sigma+it)|$ 的最大值；参见 [12,第 5453-5454 页]。此外，关于 $\zeta(s)$ 在 1 线上的导数极值也已得到研究；参见 [7, 16]。

本文关注 $\zeta(s)$在调和点处的联合极值，即形如

$$s = \sigma + it, \sigma + 2it, \ldots, \sigma + \ell it.$$

以下令 $\ell \in \mathbb{Z}^+$ 固定，其中 $\mathbb{Z}^+$ 为所有正整数的集合。通过对与$\zeta^\ell(s)$相关的狄利克雷级数的系数 $d_\ell(n)$进行精细估计，Levinson [13] 证明了存在任意大的 T，使得对于 $\ell \geq 2$,

$$\prod_{j=1}^{\ell} |\zeta(1+ijt)| \geq (e^\gamma \log_2 T)^\ell \Big(1 + O\Big(\frac{\ell \log \ell}{\log_2 T}\Big)\Big).$$

虽然这一结果确立了调和点处联合极值的正确主阶，但并未捕捉更精细的次级项。特别是，当 $\ell = 1$ 时，Aistleitner等人 [2] 通过加入额外的 [14] 改进了 Levinson的结果

对数贡献。因此，自然会问，能否进一步改进下界，以反映此类次级项。我们的第一个定理给出了这样的改进。

定理 1.1。 设 T 充分大。我们有

$$\max_{t\in[\sqrt{T},T]}\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(1+ijt)|\geq e^{\ell\gamma}\big\{(\log_2 T)^{\ell}+\ell(\log_2 T)^{\ell-1}\log_3 T+O_{\ell}\big((\log_2 T)^{\ell-1}\big)\big\},$$

其中， O项仅取决于 ℓ。

注 1.1。 这里，我们改进了 Levinson 的上述结果 [13] 并得到了一个次级项 ℓ（$\log_2 T$）$^{\ell-1}\log_3 T$。值得注意的是，当 $\ell=1$时，该极值结果与 Aistleitner等人 的结果一致 [2]。

前述定理讨论的是直线 $\sigma=1$ 上的联合极值。因此，自然要考虑临界带内的相应问题。在临界带中， $\zeta(s)$ 的行为关键取决于 σ。下面的定理讨论这一情形。

定理 1.2。 设 $\beta\in$ （0,1） 为定值，并设 T 充分大。那么对于 $1/2<\sigma<1$，我们有

$$\max_{t\in[T^{\beta},T]}\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(\sigma+ijt)|\geq\exp\left\{\kappa^{1-\sigma}\big(S(\sigma,\ell)+o_{\sigma}(1)\big)\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log_2 T)^{\sigma}}\right\}.$$

此处，t o项仅取决于 σ，而 S（σ、 ℓ）是由下式定义的显式常数

$$S(\sigma,\ell)=\frac{\ell}{1-\sigma}+\sum_{m=1}^{\ell}(-1)^m\binom{\ell+1}{m+1}\frac{1}{1+\sigma(m-1)}.$$

并且 κ 是满足以下条件的正实数

$$\kappa<\frac{1}{\sigma(1+c(\sigma))}\min\left(1-\beta,\frac{\sigma-1/2}{7/4-\sigma/2}\right),$$

其中 c（σ）：$=\int_0^1 \mathrm{d}t/$（$2t^{-\sigma}-1$）。

注 1.2。 在定理 1.2中，当 σ 接近 $1/2$时， S（σ、 ℓ）关于 ℓ 的增长会因涉及（$1-\sigma$）的交错二项式和所产生的强烈抵消而显著受到抑制。随着 σ 趋近于 1，这一现象逐渐消失，而 S（σ、 ℓ）随后会随着 ℓ显著增加。

注 1.3. 在定理1.1 和1.2中，对于充分大的 $[\sqrt{T},T]$和 $[T^{\beta},T]$，当 T固定且 $\beta\in(0,1)$时，联合极值出现的范围分别为 $[\sqrt{T},T]$和 $[T^{\beta},T]$。事实上，在定理 1.1中，范围$[\sqrt{T},T]$可以替换为 $[T^{\beta},T]$，但此时O项将取决于 ℓ和 β。由于主项保持不变，我们

选择 $\beta = 1/2$ 以简化证明的表述。相反，在定理 1.2中，主项中的参数 κ 取决于 β，而 β 的影响不可忽略。

在定理 1.2中，参数 κ 需要由两个项加以限制，其中第二项源自引理 2.2中给出的无零区域假设。在黎曼假设下，引理 2.4 中的公式在整个 $t \in [T^\beta, T]$范围内均成立。因此，可以得到临界带中 $\zeta(\sigma + it)$ 的条件联合极值。

定理 1.3。 假设黎曼假设成立。令 $\beta \in (0,1)$ 为固定值，并令 T 充分大。那么对于 $1/2 < \sigma < 1$，有

$$\max_{t\in[T^\beta,T]} \prod_{j=1}^{\ell} |\zeta(\sigma + ijt)| \geq \exp\left\{\kappa^{1-\sigma}\big(S(\sigma,\ell) + o(1)\big)\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log_2 T)^{\sigma}}\right\}.$$

这里， κ 是一个小于 $(1-\beta)/(\sigma(1+c(\sigma))$的正实数。

注记 1.4。 值得注意的是，对于固定的 $\sigma \in (1/2,1)$，随着 β 减小，条件联合极值的范围会扩大，同时 κ 的取值范围也会增大。然而，指数中的数量级保持不变。这种表现与理论预期一致。

对调和点处联合极值的研究揭示了 $\zeta(s)$行为中的新结构特征。通过考察竖直线上齐次算术级数中 $\zeta(s)$ 的同步增长，我们捕捉到了源自欧拉乘积算术结构的影响。具体而言，小素数 p 在不同的 $\zeta(\sigma+ijt)$ 中反复出现，对这一现象有重要贡献。这些结果表明，极值在不同位置以高度协调的方式出现，从而加深了我们对极值行为如何沿调和方向传播的理解。此外，联合下界将经典的单点现象拓展到了多点情形，丰富了极值理论，并对 $\zeta(s)$ 的解析行为提供了更全面的描述。

需要指出的是 ℓ在我们的主要结果中是任意正整数，以确保截断公式（3.1）和（4.1）成立。

本文结构安排如下。第2 节给出一些辅助引理。定理1.1 和1.2 分别在第3节和第4节证明。最后，定理1.3 的简短证明见第5节。

2. 辅助引理

本节中，我们将介绍几个引理。定义 $\zeta(s;y) := \prod_{p\leq y}(1-p^{-s})^{-1}$。现在陈述引理 2.1，它将用于证明定理 1.1。

引理 2.1 (Aistleitner-Mahatab-Munsch [2])。 设 T 充分大，并令$Y=\exp\left((\log T)^{10}\right)$。那么当 $T^{1/10}\le |t|\le T$时，我们有

$$\zeta(1+it)=\zeta(1+it;Y)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log T}\Big)\Big).$$

以下引理由 Granville 和 Soundararajan 证明， [9], 给出了关于 $\log\zeta(\sigma+it)$ 的一个重要结果。

引理 2.2 (Granville-Soundararajan [9]). 设 $y\ge 2$ 和 $|t|\ge y+3$ 为实数。设 $1/2\le\sigma_0<1$，并假设矩形区域 $\{s:\ \sigma_0<\mathrm{Re}(s)\le 1, |\mathrm{Im}(s)-t|\le y+2\}$内没有 $\zeta(s)$ 的零点。那么，对于 $\sigma_0<\sigma\le 1$，有

$$\log\zeta(\sigma+it)=\sum_{n=2}^{y}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}+O\Big(\frac{\log|t|}{|\sigma_1-\sigma_0|^2}y^{\sigma_1-\sigma}\Big),$$

其中 $\sigma_1=\min(\sigma_0+(\log y)^{-1},(\sigma+\sigma_0)/2)$。

注意，引理2.2 要求假设 $\zeta(s)$ 在某个范围内没有零点。因此，为了有效地应用这一结果，有必要将其与 $\zeta(s)$ 的零点密度结果结合起来。令 $N(\sigma,T)$ 表示矩形区域 $\zeta(s)$ 内 $\{s:\mathrm{Re}(s)\ge\sigma, 0<\mathrm{Im}(s)\ge T\}$内的零点个数。以下经典结果见 [10]。

引理 2.3 (Ingham [10])。 设 $1/2\le\sigma\le 1$，则有

$$N(\sigma,T)\ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}(\log T)^5.$$

由引理2.2 和 2.3，我们得到下述引理 2.4，它给出了 $\zeta(s)$在临界带内的一个截断公式，并在定理1.2的证明中发挥重要作用。

引理 2.4。 固定 $\beta\in(0,\ 1)$ 设 T充分大，并令 $Y=(\log T)^{2026/(\sigma-1/2)}$。则截断公式

$$\zeta(\sigma+it)=\zeta(\sigma+it;Y)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log T}\Big)\Big)$$

对所有 $t\in[T^\beta,T]\setminus\mathcal{E}$ 均成立。这里我们注意到，

$$\mathrm{meas}(\mathcal{E})\ll T^{\frac{9/4-3\sigma/2}{7/4-\sigma/2}+o(1)}.$$

证明。 取 $y=Y=$（对数 T）$^{2026/(\sigma-1/2)}$ 以及 $\sigma_0=\sigma/2+1/4$ 引理 2.2。同时，利用引理 2.3 可得

$$\log\zeta(\sigma+it)=\sum_{n=2}^{Y}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}+O\Big(\frac{1}{(\log T)^{10}}\Big)$$

对所有满足 $\mathrm{meas}(\mathcal{E}) \ll YT^{3\,(1-\sigma_0)\,/\,(2-\sigma_0)\,+o\,(1)}$ 的 $t \in [T^{\beta}, T] \setminus \mathcal{E}$。根据 $\Lambda(n)$ 的定义，令 $n = p^k$，对 $k \geq 1$ 取值可得

$$\sum_{n=2}^{Y} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n} = \sum_{p\leq Y} \frac{1}{p^{\sigma+it}} + \sum_{k\geq 2}\sum_{p^k\leq Y} \frac{1}{kp^{k(\sigma+it)}}.$$

这是因为 $\sigma \in (1/2,\ 1)$ 保证含有 $k \geq 2$ 的项有界。另一方面，显然

$$\zeta(\sigma+it;Y) = \exp\Big(-\sum_{p\leq Y}\log\Big(1-\frac{1}{p^{\sigma+it}}\Big)\Big) = \exp\Big(\sum_{p\leq Y}\frac{1}{p^{\sigma+it}} + \sum_{k\geq 2}\sum_{p\leq Y}\frac{1}{kp^{k(\sigma+it)}}\Big).$$

我们注意到，和

$$\sum_{k\geq 2}\sum_{Y^{1/k}<p\leq Y}\frac{1}{kp^{k\sigma}} = O\Big(\frac{1}{(\log T)^{10}}\Big)$$

根据我们的选择，Y足够小，因此 $\zeta(\sigma+it)$ 可以很好地用$\zeta(\sigma+it;Y)$来近似。这就完成了引理 2.4 的证明。□

3. 定理1.1的证明

本节将运用文献 [2]中提出的长共振方法证明定理 1.1 。令 $Y = \exp\big((\log T)^{10}\big)$。利用引理 2.1，可得如下渐近公式

$$\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt) = \prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log T}\Big)\Big) \tag{3.1}$$

对所有 $t \in [\sqrt{T}, T]$均成立。随后，令 $X = (\log T\log_2 T)/6$，并定义 $r(n)$ 为一个完全积性函数，其在素数处的取值由下式给出

$$r(p) = \begin{cases} 1-\frac{p}{X}, & \text{if } p \leq X, \\ 0, & \text{if } p > X. \end{cases}$$

定义

$$R(t) = \prod_{p\leq X}\big(1-r(p)p^{it}\big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} r(n)n^{it}.$$

注意到

$$\log|R(t)| \leq \sum_{p\leq X}\log\Big|\frac{1}{1-r(p)}\Big| = \sum_{p\leq X}\log\frac{X}{p}.$$

Us结合素数理论和 X 的选取，很容易推导出 t

$$|R(t)|^2 \leq T^{1/3+o(1)}. \tag{3.2}$$

此外， Y 的定义意味着

$$\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(1+ijt;Y)| \ll (\log Y)^{\ell} \ll T^{o(1)}. \tag{3.3}$$

令 $\Phi(y) := e^{-y^2/2}$。傅里叶变换 $\widehat{\Phi}$ 满足 $\widehat{\Phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\Phi(\xi) > 0$ 对所有$\xi \in \mathbb{R}$均成立。由于 Φ指数衰减，与下文出现的 Φ 相关的所有求和与积分都绝对收敛。于是我们定义以下两个量：

$$M_1 := M_1(R,T) = \int_{\sqrt{T}}^{T}|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t,$$
$$M_2 := M_2(R,T) = \int_{\sqrt{T}}^{T}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.$$

显然，我们有 $\max_{t\in[\sqrt{T},T]}\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(1+ijt;\,Y)| \geq |M_2|/M_1$。为利用 Φ的傅里叶变换的正性，我们将积分范围扩展到 $\mathbb{R}$。自然地，考虑到尾部，我们有

$$\Big|\int_{|t|\leq\sqrt{T}}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\Big| \ll T^{5/6+o(1)}$$

通过应用（3.2）和（3.3）。此外， Φ 的快速衰减意味着

$$\Big|\int_{|t|\geq T}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\Big| \ll 1.$$

因此，

$$2M_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t + O\big(T^{5/6+o(1)}\big).$$

类似地，令 $I_1 := I_1(R,\ T) = \int_{-\infty}^{\infty}|R(t)|^2\Phi(t\log\ T/T)\mathrm{d}t$，我们有 $2M_1 = I_1 + O\big(T^{5/6+o(1)}\big)$。此外，由 [2, 式（8）] 可得

$$I_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}r(m)r(n)\Big(\frac{m}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \gg T^{1+o(1)}. \tag{3.4}$$

注意到 Φ 始终为正，因此对于 $Y > X$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;Y)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \geq \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;X)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.$$

将 $I_2 := I_2(R,\ T)$ 记为上文右侧的积分。结合式（3.4）可得

$$\max_{t\in[\sqrt{T},T]}\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(1+ijt;Y)|\geq\frac{|I_2|}{I_1}+O\big(T^{-1/6+o(1)}\big). \tag{3.5}$$

根据 $r(n)$ 的定义，我们可以写出 $\zeta(1+ijt;\ X)=\sum_{k_j=1}^{\infty}a_{k_j}k_j^{-ijt}$。这里，若 k_j 的所有素因子都不超过 X，则 $a_{k_j}=1/k_j$；否则为 $a_{k_j}=0$。将 $\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(1+ijt;X)$ 和 $|R(t)|^2$ 在 I_2 中展开，得到

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}k_1^{-it}k_2^{-2it}\cdots k_\ell^{-\ell it}\sum_{m,n=1}^{\infty}r(m)r(n)\Big(\frac{m}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.$$

由于 t 求和与积分的次序可以自由交换，我们得到

$$I_2=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}\sum_{m,n=1}^{\infty}r(m)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}k_1^{-it}k_2^{-2it}\cdots k_\ell^{-\ell it}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.$$

^利用 Φ 始终为正这一事实，我们可以直接舍去第二个求和中的许多项。具体而言，

$$\begin{aligned}I_2&\geq\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\geq1\\k_1k_2^2\cdots k_\ell^\ell|m}}r(m)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{m}{k_1k_2^2\cdots k_\ell^\ell n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}\sum_{d,n=1}^{\infty}r(k_1k_2^2\cdots k_\ell^\ell d)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{d}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

于是，我们得到 I_2 的下界：

$$\begin{aligned}I_2&\geq\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}r(k_1)r(k_2)^2\cdots r(k_\ell)^\ell\sum_{d,n=1}^{\infty}r(d)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{d}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\\&=I_1\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}r(k_1)r(k_2)^2\cdots r(k_\ell)^\ell.\end{aligned}$$

这由 $r(n)$ 是完全积性函数这一事实，以及 I_1 (3.4) 的定义可知。因此，我们得到

$$\frac{I_2}{I_1}\geq\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\ell=1}^{\infty}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_\ell}r(k_1)r(k_2)^2\cdots r(k_\ell)^\ell=\prod_{j=1}^{\ell}\Big(\sum_{k_j=1}^{\infty}a_{k_j}r(k_j)^j\Big). \tag{3.6}$$

对于（3.6）右侧的内层求和，根据 $a(n)$和$r(n)$的定义，当素因子 p 大于 n 时，该和为零。因此，它可以[8]

表示为短欧拉乘积 $\sum_{k_j=1}^{\infty} a_{k_j} r(k_j)^j = \prod_{p\le X}(1-r(p)^j p^{-1})^{-1}$。接下来写成

$$\frac{I_2}{I_1} \ge \prod_{j=1}^{\ell}\prod_{p\le X}\Big(1-\frac{r(p)^j}{p}\Big)^{-1} = \prod_{j=1}^{\ell}\prod_{p\le X}\Big(\frac{p}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p-r(p)^j}\Big)$$
$$= \Big\{\prod_{j=1}^{\ell}\prod_{p\le X}\frac{p}{p-1}\Big\}\cdot\Big\{\prod_{j=1}^{\ell}\prod_{p\le X}\frac{p-1}{p-r(p)^j}\Big\} =: \mathcal{P}_1\cdot\mathcal{P}_2.$$

然后，我们需要分别计算 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$。首先，默滕斯定理表明

$$\prod_{p\le X}\frac{p}{p-1} = e^{\gamma}\log X + O(1) = e^{\gamma}(\log_2 T + \log_3 T) + O(1).$$

因此，我们可以直接计算 $\mathcal{P}_1$，得到

$$\mathcal{P}_1 = \prod_{j=1}^{\ell}\big(e^{\gamma}(\log_2 T+\log_3 T)+O(1)\big)$$
$$= e^{\ell\gamma}\big((\log_2 T)^{\ell} + \ell(\log_2 T)^{\ell-1}\log_3 T + O\big((\log_2 T)^{\ell-2}(\log_3 T)^2\big)\big). \tag{3.7}$$

另一方面，对于 $\mathcal{P}_2$，我们将证明以下有效下界：

$$\mathcal{P}_2 \ge 1 + O\Big(\frac{1}{\log_2 T}\Big). \tag{3.8}$$

事实上，显然有

$$\prod_{p\le X}\frac{p-1}{p-r(p)^j} = \exp\Big(\sum_{p\le X}\log\frac{p-1}{p-r(p)^j}\Big) = \exp\Big(-\sum_{p\le X}\log\Big(1+\frac{1-r(p)^j}{p-1}\Big)\Big).$$

注意到对于所有 $p\le X$，$r(p)^j = (1-p/X)^j \ge 1-jp/X$，利用素数理论可得

$$\prod_{p\le X}\frac{p-1}{p-r(p)^j} \ge \exp\Big(-\sum_{p\le X}\frac{j}{X}\cdot\frac{p}{p-1}\Big) = \exp\Big((-j+o(1))\frac{1}{\log X}\Big).$$

由于 $X = (\log T\log_2 T)/6$，我们有 $1/\log X\to 0$ as $T\to\infty$。因此，

$$\prod_{j=1}^{\ell}\prod_{p\le X}\frac{p-1}{p-r(p)^j} \ge \exp\Big(\Big(-\sum_{j=1}^{\ell} j + o(1)\Big)\frac{1}{\log X}\Big) = 1+O\Big(\frac{1}{\log_2 T}\Big).$$

这表明 (3.8) 成立。

因此，我们得到

$$\frac{I_2}{I_1} \ge e^{\ell\gamma}\big((\log_2 T)^{\ell} + \ell(\log_2 T)^{\ell-1}\log_3 T + O\big((\log_2 T)^{\ell-1}\big)\big) \tag{3.9}$$

利用（3.6）、（3.7）和（3.8）。最后，将（3.9）代入（3.5），并结合（3.1），即可证明定理1.1。

4. 定理1.2 的证明

按照第3节的方法，我们需要一个类似于（3.1）的近似公式。为此，令 $Y=($对数 $T)^{2026/(\sigma-1/2)}$。引理2.4 给出了如下近似公式

$$\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(\sigma+ijt)=\prod_{j=1}^{\ell}\zeta(\sigma+ijt;Y)\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log T}\Big)\Big), \tag{4.1}$$

这对所有 $t\in[T^{\beta},T]\setminus\mathcal{E}$ 均成立。这里，$\mathcal{E}$ 的测度满足

$$\operatorname{meas}(\mathcal{E})\ll T^{\frac{9/4-3\sigma/2}{7/4-\sigma/2}+o(1)}. \tag{4.2}$$

我们令 $X=\kappa\log T\log_2 T$，其中 $k>0$ 稍后选取，然后令 $r(n)$ 为一个完全积性函数，其在素数处的取值如下：

$$r(p)=\begin{cases}1-(\frac{p}{X})^{\sigma}, & \text{if } p\le X,\\ 0, & \text{if } p>X.\end{cases}$$

定义共振器

$$R(t)=\prod_{p\le X}\big(1-r(p)p^{it}\big)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}r(n)n^{it}.$$

结合 X 的选取和素数理论，我们得到

$$|R(t)|^2\le T^{2\kappa\sigma+o(1)}. \tag{4.3}$$

注意到

$$\zeta(\sigma+ijt;Y)=\prod_{p\le Y}\big(1-p^{-(\sigma+ijt)}\big)^{-1}=\exp\Big(\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}+O(1)\Big).$$

因此，我们得到

$$\max_{t\in[T^{\beta},T]}\prod_{j=1}^{\ell}|\zeta(\sigma+ijt;Y)|\gg\exp\Big(\max_{t\in[T^{\beta},T]}\Big(\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big)\Big). \tag{4.4}$$

此外，容易证明

$$\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\ll T^{o(1)}. \tag{4.5}$$

现在，我们定义以下四个积分

$$M_1:=M_1(R,T)=\int_{T^{\beta}}^{T}|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t,$$

$$M_2:=M_2(R,T)=\int_{T^{\beta}}^{T}\Big(\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t,$$

$$I_1 := I_1(R,T) = \int_{-\infty}^{\infty} |R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t,$$
$$I_2 := I_2(R,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t.$$

这里， $\Phi(y) = e^{-t^2/2}$ 与第3节中的相同。显然,

$$\max_{t\in[T^\beta,T]}\Big(\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big) \ge \frac{M_2}{M_1}. \tag{4.6}$$

利用（4.3）和（4.5），我们得到

$$\Big|\int_{|t|<T^\beta}\Big(\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\Big| \le T^{\beta+2\kappa\sigma+o(1)}.$$

同时，由于 Φ 快速衰减，因此可得

$$\Big|\int_{|t|>T}\Big(\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\Big)|R(t)|^2\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t\Big| \ll 1.$$

上述两个上界推出 $2M_2 = I_2 + O(T^{\beta+2\kappa\sigma+o(1)})$。类似地，我们有$2M_1 = I_1 + O(T^{\beta+2\kappa\sigma+o(1)})$。此外，我们将使用 I_1 的下界。我们发现

$$I_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r(m)r(n)\Big(\frac{m}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \gg T^{\kappa\sigma(1-c(\sigma))+1+o(1)} \tag{4.7}$$

见 [6, 第 78-79], 页，其中 $c(\sigma) := \int_0^1 \mathrm{d}t/(2t^{-\sigma}-1)$。假设

$$\beta + 2\kappa\sigma < \kappa\sigma(1-c(\sigma)) + 1, \tag{4.8}$$

误差项可以忽略。在这种情况下，我们得到以下下界：

$$\frac{M_2}{M_1} \ge \frac{I_2}{I_1} + O\big(T^{\beta+\kappa\sigma(1+c(\sigma))+1+o(1)}\big). \tag{4.9}$$

接下来，我们求出 I_2/I_1 的一个有效下界。与定理 1.1 的证明类似，^我们经常利用 Φ 的正性，并得到

$$\begin{aligned} I_2 &\ge \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le X}\frac{1}{p^{\sigma+ijt}}\sum_{m,n=1}^{\infty} r(m)r(n)\Big(\frac{m}{n}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le X}\frac{1}{p^{\sigma}}\sum_{m,n=1}^{\infty} r(m)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{m}{np^j}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \\ &\ge \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{p\le X}\frac{1}{p^{\sigma}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m\ge 1\\ p^j\mid m}} r(m)r(n)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{m}{np^j}\Big)^{it}\Phi\Big(\frac{\log T}{T}t\Big)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p \le X} \frac{r(p)^j}{p^\sigma} \sum_{k,n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) r(n) \Big(\frac{k}{n}\Big)^{it} \Phi\Big(\frac{\log T}{T} t\Big) \mathrm{d}t.$$

这里在最后一步，我们令 $m = kp^j$ ，并应用 $r(n)$ 是完全积性的这一事实。由式（4.7）可得以下估计：

$$\frac{I_2}{I_1} \ge \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p \le X} \frac{r(p)^j}{p^\sigma}.$$

$r(p)$ 的定义意味着

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p \le X} \frac{r(p)^j}{p^\sigma} &= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p \le X} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (-1)^m X^{-\sigma m} p^{\sigma(m-1)} \\
&= \ell \sum_{p \le X} \frac{1}{p^\sigma} + \sum_{m=1}^{\ell} (-1)^m X^{-\sigma m} \sum_{p \le X} p^{\sigma(m-1)} \sum_{j=m}^{\ell} \binom{j}{m} \\
&= \ell \sum_{p \le X} \frac{1}{p^\sigma} + \sum_{m=1}^{\ell} (-1)^m \binom{\ell+1}{m+1} X^{-\sigma m} \sum_{p \le X} p^{\sigma(m-1)}.
\end{aligned}$$

利用素数理论，我们得到[1]

$$\frac{I_2}{I_1} \ge \big(S(\sigma, \ell) + o(1)\big) \frac{X^{1-\sigma}}{\log X}, \tag{4.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
S(\sigma, \ell) &= \frac{\ell}{1-\sigma} - \frac{(\ell+1)\ell}{2} + \sum_{m=2}^{\ell} (-1)^m \binom{\ell+1}{m+1} \frac{1}{1+\sigma(m-1)} \\
&= \frac{\ell}{1-\sigma} + \sum_{m=1}^{\ell} (-1)^m \binom{\ell+1}{m+1} \frac{1}{1+\sigma(m-1)}.
\end{aligned}$$

为了应用（4.1），我们还需要去除集合 $\mathcal{E}$ 的贡献。为此，根据（4.2），我们可以限制 κ满足

$$2\kappa\sigma + \frac{9/4 - 3\sigma/2}{7/4 - \sigma/2} < \kappa\sigma(1 - c(\sigma)) + 1. \tag{4.11}$$

因此，结合（4.8）和（4.11），我们证明 κ满足

$$\kappa < \frac{1}{\sigma(1 + c(\sigma))} \min\Big(1 - \beta, \frac{\sigma - 1/2}{7/4 - \sigma/2}\Big).$$

由于 $X = \kappa \log T \log_2 T$，利用（4.1）、（4.4）、（4.6）、（4.9）和（4.10），我们完成了定理 1.2 的证明。

[1]这里，容易证明，对于任意固定的正整数 ℓ 和 $1/2 < \sigma < 1$，$S(\sigma, \ell) > 0$。

注 4.1。 在定理 1.2 的证明中，为了得到一个有效的近似公式，我们在引理 2.2 中作了选择。不过，我们也注意到，Dong 通过对 $\sigma_0 = (1-\lambda)\sigma + \lambda/2$ 在 $\lambda \in (0,1)$ 上取值，得到了相同的公式，但 $\mathcal{E}$ 的测度上界除外，参见 [6, 引理 4.6。1]。事实上，按照 Dong 的选择，可以令参数 $\lambda \to 0$，使得 σ_0 足够接近 σ。根据引理 2.3，采用这种选择可以对 κ 的取值范围作极其微小的改进。但为求简洁，我们不采用这种方法。

注 4.2. 当 σ 接近1线时，Ingham 引理 2.3可以改进。例如，详见 [11, 第 11 章。4] 以了解详情。利用这些更精细的零点密度结果，可以略微扩大 κ 的范围。

5. 定理1.3的一个简短证明

为证明定理1.3，只需对定理1.2的证明稍作修改。取 $Y = (\log T)^{2026/(\sigma-1/2)}$。由引理 2.2，可得

$$\prod_{j=1}^{\ell} \zeta(\sigma + ijt) = \prod_{j=1}^{\ell} \zeta(\sigma + ijt; Y)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\log T}\Big)\Big)$$

对所有 $t \in [T^{\beta}, T]$。假设黎曼假设成立，则 $\zeta(s)$ 在区域 $\sigma > 1/2$内没有零点，因此消除了第 $\mathcal{E}$ 节 4中的贡献。其余论证基本相同，因此省略细节。

6. 最后评论

Levinson [13] 指出，也可以得到 $\prod_{j=1}^{\ell} \zeta(1/2+ijt)$ 和 $\prod_{j=1}^{\ell} 1/\zeta(1+ijt)$ 的联合极值。然而，本文采用的长共振方法不再适用于这种情形。由于 $1/\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \mu(n) n^{-s}$，莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 的存在会导致“正性”丧失，而正性对于建立下界时舍弃许多项至关重要。当 $\sigma = 1/2$ 时，本文描述的方法并不适用，因为临界线上有无穷多个零点。为克服这一困难，需要建立一个与 [3] 中类似的卷积公式，并计算一个更复杂的共振器 $R(t)$。此外，$|\zeta(1/2+it)|$ 的最大值早先已由 Farmer 等人 [8] 作出预测。这个问题留待今后研究。

继 Aistleitner等人 的工作之后，[2],Dixit 和 Mahatab [5] 也研究了一类一般 L 函数在 1 线上的下界。因此，我们可以应用我们的方法，为这些 L 函数得到类似的结果。

致谢

Qiyu Yang 得到了河南省自然科学基金（项目编号：252300421782）的资助。

参考文献

[1] C. Aistleitner，沿竖直线的黎曼ζ函数最大值下界，《数学年刊》365（2016），第 473–496 页。[2] C. Aistleitner、K. Mahatab 和 M. Munsch，黎曼ζ函数在 1 线上的极值，《国际数学研究通知》IMRN 2019（2019），第 6924–6932 页。[3] A. Bondarenko 和 K. Seip，黎曼ζ函数及其辐角的极值，《数学年刊》372（2018），第 999–1015 页。[4] A. Bondarenko 和 K. Seip，关于黎曼ζ函数共振方法的注记，《算子理论：进展与应用》261（2018），第 121–139 页。[5] A. B. Dixit 和 K. Mahatab，1 线上 L-函数的大值，《澳大利亚数学会通报》103（2021），第 230–243 页。[6] Z. Dong，黎曼ζ函数值的分布。巴黎东克雷泰伊马恩河谷大学（巴黎第十二大学），2022 年。[7] Z. Dong 和 B. Wei，关于 $|\zeta(\sigma+it)|$ 大值的注记，《澳大利亚数学会通报》108（2023），第 217–223 页。[8] D. W. Farmer、S. M. Gonek 和 C. P. Hughes，L-函数的最大值，《纯粹与应用数学杂志》609（2007），第 215–236 页。[9] A. Granville 和 K. Soundararajan，$|\zeta(1+it)|$ 的极值，载于《黎曼ζ函数及相关主题：纪念 K. Ramachandra 教授论文集》，第 2 卷，拉马努金数学会讲义系列，拉马努金数学会，迈索尔，2006 年，第 65–80 页。[10] A. E. Ingham，关于 $N(\sigma,T)$ 的估计，《牛津数学季刊》11（1940），第 291–292 页。[11] A. Ivić，《黎曼ζ函数：理论与应用》，多佛数学丛书，多佛出版社，2003 年。[12] Y. Lamzouri，关于条带 $1/2<\sigma<1$ 中 ζ 和 L-函数极值的分布，《国际数学研究通知》IMRN 2011（2011），第 5449–5503 页。[13] N. Levinson，黎曼ζ函数在谐点组合处的 ω 定理，《美国国家科学院院刊》69（1972），第 1657–1658 页。[14] N. Levinson，黎曼ζ函数的 Ω 定理，《算术学报》20（1972），第 317–330 页。[15] H. L. Montgomery，黎曼ζ函数的极值，《赫尔维数学评论》52（1977）。[16] D. Yang，黎曼ζ函数导数的极值，《Mathematika》68（2022），第 486–510 页。[17] Q. Yang，当 $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$ 时 $\zeta(s)$ 的大值，《数论杂志》254（2024），第 199–213 页。